

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ, НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Б.І.Яворський

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Частина 1

Рекомендовано Міністерством освіти, науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник
з дисципліни “Основи радіоелектроніки”

Тернопіль-2011

Яворський Б.І. Математичні основи радіоелектроніки. Частина І. Навчальний посібник — Тернопіль: ТНТУ, 2008. — 182 с.

У першій частині посібника наведено відомості, що розкривають зміст та завдання теорії радіоелектронної апаратури. Основні моделі та методи, що використовуються при застосуванні радіоелектронних апаратів у різних галузях діяльності людини, подано в інформаційному аспекті, тобто, як такі, що є оптимальними при відборі, перетворенні у інший вигляд, передачі-прийомі, обробці даних та їх представленні операторові у вигляді зручному для вирішення степеня, часу та місця впливу на об'єкт зацікавленості.

Посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальностями, пов'язаними з розробкою, впровадженням у виробництво, експлуатацією та ремонтом радіоелектронної апаратури різного призначення, перш за все з напрямів базової вищої освіти (бакалаврату) 6.050901 — “Радіотехніка”, 6.050902 — “Радіоелектронні апарати”.

Іл. 36. Табл.6. Бібліогр.: 19 назв.

Рецензенти:

Б.Г.Марченко, доктор фізико-математичних наук, професор (Інститут електродинаміки НАН України);

Я.П.Драган, доктор фізико-математичних наук, професор (Державний університет “Львівська політехніка”).

ЗМІСТ

Передмова

Вступ. Завдання дисципліни "Основи радіоелектроніки"	10
-------------------------------------------------------------------	-----------

Розділ 1. Зображення лінійних кіл та сигналів диференціальними рівняннями	14
----------------------------------------------------------------------------------------	-----------

1.1. Поняття про лінійні кола та сигнали	14
1.2. Звичайні диференціальні рівняння	16
1.3. Рівняння у частинних похідних	23
1.3.1. Рівняння теплопередачі	24
1.3.2. Рівняння коливань	25
1.3.3. Рівняння переносу речовини	25
1.3.4. Рівняння хвиль	26
1.3.5. Система диференціальних рівнянь у частинних похідних	27
1.3.6. Стаціонарні рівняння	28
1.3.7. Рівняння Лапласа	29
1.3.8. Загальний випадок	29
1.4. Структура розв'язку диференціального рівняння	30
1.4.1. Розв'язок рівняння Лапласа	31
1.4.2. Розв'язок рівняння хвиль	34
1.4.3. Розв'язок рівняння теплопровідності	35
1.4.4. Загальні зауваження	36
1.5. Ортогональність функцій	37
1.6. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля	39
Підсумок	40

Розділ 2. Інтегральні перетворення	42
-------------------------------------------------	-----------

2.1. Перетворення Фур'є	42
2.2. Застосування перетворення Фур'є	45
2.3. Перетворення Лапласа	47
2.4. Основні властивості перетворення Лапласа	50
2.5. Зворотнє перетворення Лапласа	53

2.6. Приклади виконання зворотнього перетворення Лапласа	56
2.6.1. Випадок дійсних полюсів	58
2.6.2. Випадок комплексно-спряжених полюсів	61
2.6.3. Випадок кратних комплексно-спряжених полюсів	63
Підсумок	63
Розділ 3. Зображення лінійних кіл у вигляді вхід-вихід	65
3.1. Зображення вигляду вхід-вихід у часовій та частотній областях	65
3.2. Схема диференціального рівняння	67
3.3. Деякі властивості дробово-раціональних функцій	68
3.4. Співвідношення між частотними і часовими характеристиками лінійних систем	74
3.5. Фізична реалізованість систем	77
Підсумок	79
Розділ 4. Узагальнені функції	81
4.1. Загальні положення	81
4.2. δ -функція	82
4.3. Властивості δ -функції	83
4.4. Дискретна δ -функція	83
4.5. Моделювання δ -функції	84
4.6. Перетворення "зсуву", "стиску-розтягу", "віддзеркалення" ..	88
4.7. Модель похідної від δ -функції	89
Підсумок	92
Розділ 5. z-Перетворення	94
5.1. Загальні положення	94
5.2. Означення z-перетворення	96
5.3. Знаходження z-перетворення методом зведення до суми "табличних" перетворень	97
5.4. Використання властивостей z-перетворення	98
5.5. Зворотнє z-перетворення	101
Підсумок	105

Розділ 6. Зображення дискретних кіл і сигналів	107
6.1. Різницеві рівняння	107
6.2. Характеристики дискретних систем з одним входом і одним виходом	115
6.3. Еквівалентність зображень дискретних і неперервних кіл та сигналів	117
6.4. Теорема відліків	121
Підсумок	123
Розділ 7. Деякі поняття з теорії матриць	125
7.1. Характеристичний та мінімальний многочлени	125
7.2. Означення функції матриці	127
7.3. Матриця як лінійне перетворення	130
7.4. Основна формула функції матриці	130
Підсумок	131
Розділ 8. Опис лінійних систем у просторі змінних стану	133
8.1. Модель лінійної системи у просторі змінних її стану	133
8.2. Взаємозв'язок між простором змінних стану і зображеннями типу вхід-вихід	134
8.3. Спряженість, спостережність, керовність	142
Підсумок	147
Розділ 9. Поняття про стійкість і стабільність систем	148
9.1. Чутливість характеристик кіл до малих змін їх параметрів .	148
9.2. Стійкість	151
Підсумок	154
Розділ 10. Нелінійні перетворення сигналів. Нелінійні кола та системи	155
10.1. Гармонічна лінеаризація	157
10.2. Структурно динамічна класифікація лінійних та нелінійних ланок систем	160

10.3. Опис нелінійних перетворень функціональними рядами	166
10.3.1. Знаходження ядер	169
Підсумок	170
Підсумки	172
Контрольні питання	175
Типові задачі	178
Список використаної літератури	182

ПЕРЕДМОВА

У даному посібнику розглянуто теорію, що лежить в основі застосувань електронної техніки в різних областях діяльності людини: в медицині – при наукових дослідженнях, діагностиці захворювань та їх лікуванні; в промисловості – при керуванні виробничими процесами та їх автоматизації; в транспорті – в системах навігації та управління і т.п. Причому перш за все мається на увазі інформаційний аспект діяльності: відбір, перетворення, обробка, розпізнавання, виявлення сигналів, оцінювання їх параметрів та прийняття на основі отриманої інформації рішень, найкращих (оптимальних) за критерієм, що є оцінкою успішної діяльності.

Саме такого роду *проблеми* стають все більш актуальними у житті. Розв'язання цих проблем є метою відповідної діяльності, яка передбачає застосування засобів, що допоможуть зробити це найбільш ефективно. Критеріями ефективності цих засобів можуть служити їх швидкодія, надійність, точність, вартість, економічність, маса та габарити апаратури. І електронна техніка тут поза конкуренцією. Але для того, щоб грамотно, коректно використати її можливості, необхідно вміти так сформулювати, описати проблему та мету, яка досягається при розв'язанні проблеми, щоб у рамках цього опису можна було знайти шлях досягнення мети. Такий опис повинен мати певні властивості і називається *задачею*.

У даному посібнику розглядаються основні відомості, необхідні для вироблення вміння ставити (формулювати) задачі за даними спостережень. Таку можливість надає математика. Чи не найпростішою за змістом задачею є наближення якоюсь звичайною функцією окремих відліків значень фізичної величини (тиску, температури, концентрації, потенціалу), що змінюється у часі. Але постановка навіть такої задачі, розробка методів її розв'язання вимагають знання досить солідної теорії, наприклад, лінійного простору, володіння поняттями базису, метрики і ін. Що стосується інших задач, то справа є ще складнішою. Тому метою вивчення даної дисципліни є тлумачення математичних об'єктів, які використовуються для опису проблем, при розв'язуванні їх засобами радіоелектронної техніки.

Історично склалося так, що електронна техніка дістала своє застосування перш за все в областях, політично престижних для держав – різного роду оборонних, військових (зв'язок, локація).

Зміщення акцентів у сферу охорони здоров'я людини та довкілля, інтенсифікації технологій відбувається не стільки через соціальне замовлення, а внаслідок прямої загрози життю – збільшення кількості населення, зменшення кількості ресурсів, забруднення середовища і т.п. Тому застосування електронної техніки мають своєю історією радіофізику і радіотехніку. У радіотехніці (зв'язок, передача та прийом інформації при допомозі електромагнітних хвиль високої частоти та низькочастотних провідних каналів і ін.) розглядають теорію електричних кіл та сигналів як основну, фундаментальну дисципліну.

Посібник "Основи радіоелектроніки" призначений для знайомства студентів із знаннями, необхідними для розробки, виробництва, експлуатації та ремонту електронних апаратів і систем іншого призначення, зокрема біомедичних.

У даному посібнику подано матеріал, за яким читалися лекції на протязі кількох навчальних років для спеціальності "Біотехнічні і медичні апарати та системи" (напряму базової освіти "Радіоелектронні апарати"). Посібник може бути корисним іншим спеціальностям згаданого напряму, а також для студентів спеціальності "Наукові, аналітичні та екологічні апарати і системи" (напряму базової освіти "Прилади") і спеціальностей за напрямом базової освіти "Радіотехніка".

Посібник складається з трьох частин. У першій частині для детермінованого випадку на феноменологічній основі вводяться поняття, необхідні для подальшого викладу. Складання звичайних диференціальних рівнянь (лінійних, з постійними коефіцієнтами), а також рівнянь у частинних похідних представлено як моделювання фізичних явищ.

Показано, як, виходячи з уявлення про розділення змінних, можна отримати лінійні зображення *сигналів* (інформативних для нас змін величин, властивих даному явищу). Розглянуто властивості таких зображень. Таким чином, створено основу для розуміння ідеї зображення сигналу.

На основі приведених даних показано роль інтегральних перетворень (Фур'є, Лапласа і ін.).

Обгрунтовано актуальність дискретних (різницевих) рівнянь. Вводиться і описується z -перетворення. На основі "природнього" моделювання динамічних систем диференціальними та різницевиими рівняннями вводяться такі характеристики як функція передачі,

імпульсна (вагова) функція для зображення типу вхід-вихід кіл і ланок систем.

Розглядається зображення лінійних кіл та систем у просторі змінних стану.

Далі подано поняття про стійкість, чутливість, спостережність, фізичну реалізованість, керовність та критерії цих характеристик.

Розглянуто також необхідні дані з матричного числення (теорії матриць). Показано взаємозв'язок між зображеннями систем у просторі змінних стану та вигляду вхід-вихід.

У другій частині посібника приведені абстрактні поняття, зміст яких зрозумілий з матеріалу першої частини: вони широко використовуються у сучасній теорії сигналів та систем. Розглянуто математичні структури – простори Евкліда, Гільберта – та їх використання при моделюванні сигналів і систем. Зокрема, на основі розгляду оснащеного гільбертового простору показана роль геометричної інтерпретації при моделюванні, наголошено на ролі інваріантів, їх виборі, продемонстровано перехід від евклідових уявлень в n -мірному і нескінченномірному просторі до афінних. Усе це важливо для інженерних застосувань.

Третя частина посібника стосується теорії випадкових процесів – використання розглянутого математичного апарату при моделюванні стохастичних сигналів та лінійних систем, непараметричному та параметричному системному аналізі. Розглянуто постановку і розв'язування задач фільтрації Вінера-Колмогорова та Калмана як прикладів, що ілюструють синтез характеристики та параметрів алгоритмів оцінки стану (-ів) лінійних систем. Ці алгоритми базуються на двох різних ідеях оптимальної фільтрації – за допомогою фільтру з наперед знайденою при розв'язуванні оптимізаційної задачі характеристикою та за допомогою числового рекурсивного алгоритму оцінювання параметрів фільтру. У цій же частині посібника розглянуто основи теорії нелінійних систем.

Дисципліна "Основи радіоелектроніки" передусе таким дисциплінам як теорія автоматичного управління (ТАУ), основи схемотехніки, цифрова та аналогова електроніка, основи теорії біологічних та медичних систем й ін. і має професійно-фундаментальне спрямування.

Вступ

ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ "ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ"

Під *радіоелектронікою* розумітимемо галузь науки і техніки, що вивчає електронні апарати та системи, що застосовуються при розв'язуванні проблем у різних областях діяльності людини (наприклад, при охороні її здоров'я). В основі їх функціонування лежить рух заряджених частинок та електромагнітних хвиль у різних середовищах. Зауважимо два аспекти радіоелектроніки – теорію та практику.

Предметом дисципліни "Основи радіоелектроніки" є вивчення теорії електронних апаратів та систем, зокрема, математичного опису такого роду об'єктів при їх створенні, розрахунку, аналізі з метою забезпечення розв'язку поставлених перед ними задач. Наприклад, у біотехнічних та медичних застосуваннях, з точки зору електронної техніки, перш за все впадають в поле зору лікувальний енергетичний вплив на живий об'єкт, діагностика його патологій за відібраною енергією різної природи, реабілітація чи протезування втрачених функцій.

Так що застосування електронних апаратів та систем мають або інформаційний, або енергетичний характер. Наприклад, у біомедичному застосуванні вони служать або для відбору, передачі, зберігання, обробки, перетворення у інший вигляд даних з метою вибору рішення про місце, тривалість, інтенсивність керуючого, лікувального чи іншого впливів, або власне для безпосереднього чи опосередкованого впливу енергією електромагнітного поля (е.м.п.) на біооб'єкт. Енергію е.м.п. використовують також і з допоміжною (аксесуарною) метою (для приводу механізмів, обігріву і т.п.). Оскільки маємо справу з системами, то ці два аспекти часто нерозривні, пов'язані. Зауважимо, що в обох випадках використовується властивість е.м.п. транслювати енергію у просторі, а отже і з нею – інформацію.

Розглядаючи "тонку" структуру цього процесу, маніпуляцію її параметрами, при попередньому співставленні цій структурі структури інформаційного для нас образу (симптому, зображення, сигналу) говоримо про маніпуляцію інформацією (обробку, відбір, передачу і

т.п.). Якщо має місце енергетичний (загальний) погляд на процес поширення енергії, то більше уваги приділяють її локалізації у просторі з різними властивостями середовищ, які його наповнюють, а також на перетворення енергії у інший вигляд (теплову, механічну, ін.). Ці, останні, особливості характерні для застосування у лікувальній (терапевтичній) справі. Зміну у просторі і часі значення фізичної величини називають *сигналом*, якщо цій зміні співставляється (чи відповідає безпосередньо) зміна даних. У зв'язку з великою ефективністю та унікальністю можливостей радіоелектронних засобів при обробці інформації використовують перетворення сигналів різної природи у електромагнітні сигнали з наступною обробкою радіоелектронними засобами. Звичайно, необхідність у маніпуляціях з інформацією постає при наявності певної проблеми. Для того, щоб її хоч частково позбутися, потрібно детально розібратися у фізиці феномену (явища), який її породжує, і створити чи підібрати з наявних математичний опис (математичну модель). Тоді в рамках теорії математичної моделі можливо коректно поставити задачі, розв'язання яких можна буде реалізувати радіоелектронними засобами.

Навіть, коли якісь радіоелектронні засоби застосовують з інших мотивів (за аналогією, за досвідом), факт їх використання ставить користувачу певні умови, ігнорування якими є причиною незадовільних результатів. Тому першим етапом при створенні ефективної апаратури є моделювання і постановка задач, розв'язок яких приведе до усунення наявної проблеми. Часто цей етап називають *синтезом* або *системним проектуванням*. Другий етап стосується схемотехнічного проектування, або *реалізації*. Сам процес створення схем не формалізований, поширена навіть така назва – мистецтво схемотехніки. При цьому важливу роль відіграє аналіз електронних схем, а оскільки схема відображає певну фізичну сутність, то її відповідає певний мате-матичний опис процесів, що відбуваються у ній. Характеристики схем повинні задовільняти отриманим на першому етапі умовам розв'язку поставлених задач. Засоби радіоелектроніки у своєму арсеналі мають інтегровані вузли (мікросхеми), які розв'язують типові математичні задачі, що полегшує схемотехнічне проектування.

У цьому аспекті слід відмітити також системи автоматизованого проектування (САПР), засоби яких дозволяють розрахувати параметри типових характеристик схем і оптимізувати їх.

На третьому етапі відбувається конструювання радіоелектронних засобів (р.е.з.). Для ефективного конструювання з метою отримання оптимальних масогабаритних, вартісних і інших характеристик, необхідної надійності, енергоємності використовують відповідні математичні моделі. Таким чином, на всіх етапах розробки радіоелектронних засобів значну роль відіграють математичні моделі. Звичайно, при цьому чітко обмежуються і оговорюються умови, властивості модельованих об'єктів і описується зміст та об'єм основних понять.

Базовим принципом при описі радіоелектронних засобів є *лінійність*, що означає властивості суперпозиції та однорідності. Приймається також *стаціонарність*, що означає незалежність від часу (незмінність у часі) параметрів, і *недисипативність*, що означає незалежність параметрів від просторових координат. Складні ситуації намагаються звести до простіших, моделюючи їх власне лінійними, стаціонарними, недисипативними. Закладені при вивченні детермінованих явищ принципи розвивають і поширюють на випадок стохастичних (випадкових) явищ, при вивченні яких немає необхідності розглядати всі елементи і зв'язки, властиві явищу. Лише стохастичні (випадкові) сигнали є інформативними.

Динаміку процесів (їх розвиток у часі) описують диференціальними рівняннями (звичайними, а якщо приймаються до уваги просторові координати, то рівняннями у частинних похідних). Рівняння виводять на феноменологічному рівні, тобто складають, виходячи з детального розуміння фізики явища. Часто мають справу з відліками значень сигналу (дискретністю). Коли дискретність має місце у просторових координатах, то говорять про *сіткову модель (сітку)*. Часово-просторова дискретизація відіграє важливу роль у застосуваннях обчислювальної техніки. При цьому фактично нескінченномірні задачі замінюють скінченно- (або n -) вимірними (як у часі, так і в просторі).

Сучасна електронна техніка, з врахуванням перспектив її розвитку, вимагає від інженера володіння досить широким спектром теоретичних понять. Спеціалісти з розпізнавання образів, прийому чи передачі інформації, відеотелевізійної техніки, неруйнівного контролю, які у біомедичну техніку прийшли з інших областей (машинобудування, геофізики і т.п.) і переносять сюди свої здобутки, звичайно можуть сказати своє слово. Але створити ефективні зразки

техніки можна лише на основі розуміння проблем біомедицини. Їх специфіка вимагає широкої, універсальної теоретичної підготовки для інженера, не кажучи вже про наукового працівника.

Тому, теорія електронних апаратів та систем повинна поєднати в собі систематизований виклад як класичних основ теорії кіл та сигналів, які застосовують в ужитку радіо-електронних засобів у різних галузях, так і сучасних її трактовок – систем. Останні перш за все пов'язані з використанням функціонального аналізу та теорії випадкових процесів. За словами Айнштейна, викласти суть фізичного феномену без геометричних уявлень все одно, що без слів передати думку. В основі геометричних уявлень про явище лежать системи базових елементів (функцій). Такими елементами є власні функції краєвих задач математичної фізики, поліноми, сплайни (кускові поліноми), узагальнені функції, інші елементи, що дістали назву скінченних елементів. Між ними існує взаємозв'язок. Функціональний аналіз є засобом встановлення такого взаємозв'язку, коректної геометризації. Але довести до інженера його потужні ідеї в силу їх загальності непросто. Тому у даному підручнику вибрано певну схему, методику задля цього.

Посібник складається з трьох частин. У першій частині розглядаються детерміновані лінійні моделі кіл та сигналів (неперервних і дискретних). На основі феноменологічного опису біотехнічних систем та сигналів описуються їх моделі у вигляді диференціальних рівнянь, розкладів, описів типу вхід-вихід у часовій та частотній областях, у просторі змінних стану. Розглянуто також критерії фізичної реалізованості, спостережності, керовності, а також поняття про стійкість і чутливість та ін.

У другій частині розглядаються основи теоретико-множинного опису та основи функціонального аналізу, що використовуються при моделюванні. Основні ідеї і поняття цієї частини мають джерелом матеріал першої частини.

У третій частині розглянуто стохастичні моделі сигналів та деякі задачі синтезу сигналів, кіл і систем на основі понять, введених у другій частині. Дещо окремо виділяється матеріал, який стосується нелінійних моделей. Але у зв'язку з попереднім матеріалом його методи мають бути зрозумілими.

Розділ 1

ЗОБРАЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

1.1. Поняття про лінійні кола та сигнали.

Під *колом* розумітимемо множину елементів та зв'язків між ними, що мають певну природу. Розглядатимемо математичну *модель* кола. Наприклад, зміна в часі напруги $u(t)$ на конденсаторі залежить від струму $i(t)$ наступним чином: $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$, де C – значення ємності конденсатора. Тут елементами згаданої множини є джерело струму, конденсатор та з'єднання. Графічно це можна зобразити як на рис.1.1. У даному випадку струм є вхідною величиною, напруга – вихідною, а інтеграл (інтегральний оператор) – *функцією кола* (функцією передачі від входу до виходу). Виділимо у графічному зображенні кола *вузли* та *гілки*. Таким чином маємо вхідний, вихідний вузли та гілку з передачею у вигляді інтегрального оператора.

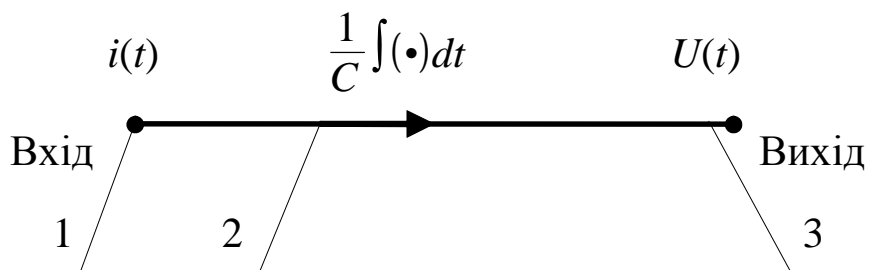


Рис.1.1. Графічне зображення кола (сигнальний граф):

- 1 — вхідний вузол,
- 2 – гілка,
- 3 – вихідний вузол

Лінійним колом називатимемо коло, функції $f(x)$ якого властиві однорідність ($f(ax) = af(x)$, де a – постійна) та суперпозиція ($f(x+y) = f(x) + f(y)$). Легко переконатись, що коло зображене на рис.1.1 є лінійним.

Якщо у графічному зображенні кола його елементи і зв'язки мають вигляд умовних (стандартних) позначень, то графічне зображення називають *принциповою схемою* кола. Якщо елементи і

зв'язки електричної природи, то схему називають *електричною* принциповою схемою (див. рис.1.2).

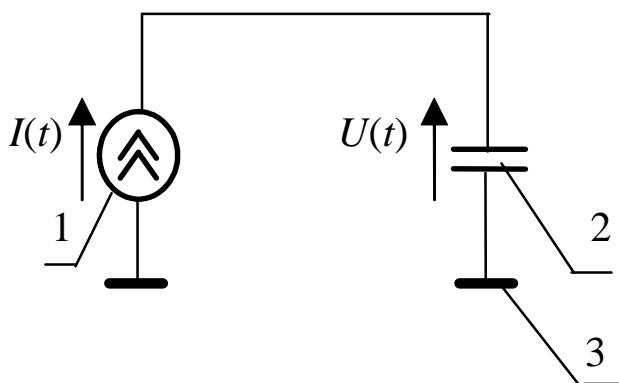


Рис.1.2. Схема електрична принципова лінійного кола:

- 1 – джерело струму,
- 2 – конденсатор,
- 3 – умовне позначення спільної шини

Коло може мати складний вигляд (як на рис.1.3). Існують методи тотожних перетворень, за результатом яких складні кола можуть бути зведені до простіших з такими ж функціями, або, як ще кажуть, *алгебра кіл* (множина елементів кола і задані на ній операції з своїми властивостями). Такі задачі вивчаються у відповідних дисциплінах і є основою побудови різних систем автоматизованого проектування.

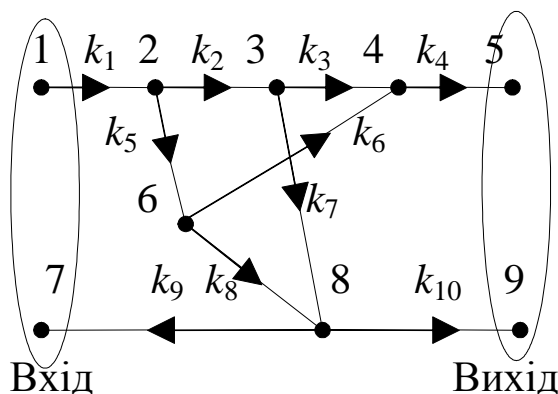


Рис.1.3. Графічне зображення складного кола (1,...,9 – вузли, $k_1...k_{10}$ – гілки)

У даному посібнику увагу звернено на інформаційний аспект лінійного кола – його властивості "обробляти" дані. Часто вживають щодо даних термін *інформація*. Носієм інформації є *сигнал*. Під сигналом розумітимемо змінну у просторі і часі фізичну величину

(струм, напругу, тиск, температуру та ін.), якщо її зміни є для нас інформативними. Інформативність змін визначається за контекстом. При цьому основну роль відіграють моделі, у рамках яких трактуються (тлумачаться) явища, з якими маємо справу. Моделлю називатимемо об'єкт, яким замінюють розглядуваний об'єкт з метою отримання певного виграшу.

У свій час було встановлено еквівалентність однієї математичної моделі явищам, об'єктам різної природи. Наприклад, лінійні кола та сигнали можуть мати своїми моделями однаковий математичний об'єкт (диференціальне рівняння, формулу тощо). Такий погляд було названо *системним*, тому деколи говорять про *лінійну систему*, не уточнюючи її природи.

1.2. Звичайні диференціальні рівняння.

Багато інженерних проблем можна описати звичайними лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Наприклад, змінна у часі величина $y(t)$ співвідноситься з іншою величиною $x(t)$ наступним чином:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t),$$

де константи $a_i, i = \overline{1, n}, b_j, j = \overline{1, m}$ можуть бути значеннями функцій різних параметрів системи. В даному випадку диференціальне рівняння має n -ий порядок. На практиці часто використовують рівняння не вище 2-го порядку (або такою є структура системи, або задля зменшення похибки числення рівняння n -го порядку розбивають на систему рівнянь 2-го порядку):

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad (1.1)$$

де коефіцієнти a_2, a_1, a_0, b_0 мають певну фізичну інтерпретацію і обчислюються за значеннями параметрів радіоелектронного кола, чи іншого об'єкту.

Позначимо $D \equiv \frac{d}{dt}$ і перепишемо (1.1) у вигляді:

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = b_0 x(t),$$

або ж так

$$\left[\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi D}{\omega_n} + 1 \right] y(t) = Kx(t),$$

де $K = \frac{b_0}{a_0}$ – статичний коефіцієнт підсилення (безрозмірна величина);

$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = 2\pi f_n$ – частота власних коливань, рад/сек,

$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ – коефіцієнт затухання (безрозмірна величина).

Такий запис називають *операторним*, а рівняння (1.1) — *диференціальним оператором другого порядку*.

Диференціальні рівняння, якими описують явище, складають (виводять), використовуючи експериментально зауважені фізичні величини, властиві даному явищу, а також зв'язки між ними, в тому числі найбільш загальні, необхідні, постійні у часі і просторі (закони).

Розглянемо приклади виводу диференціальних рівнянь, де використаємо наперед відомі зв'язки між наперед уявленими величинами, властивими розглянутим явищем.

Приклад 1. Одним з елементарних лінійних неперервних кіл є інтегруюча (згладжуюча, фільтруюча) *RC*–ланка (рис.1.4).

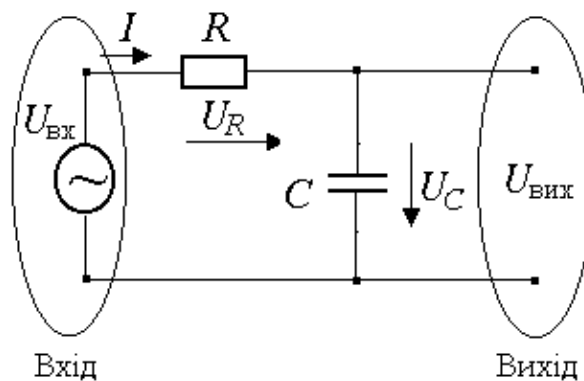


Рис. 1.4. Схема електрична принципова *RC*–ланки

Використовуючи закон Ома, закон Кірхгофа, а також задані схемою зв'язки і залежності між зарядом, струмом та напругою, можна записати:

$$U_R = IR, U_C \equiv U_{\text{ВХ}} = \frac{1}{C} \int idt, U_{\text{ВХ}} + U_R + U_C = 0.$$

Нехай $U_{\text{ВХ}} \equiv U_{\text{ВХ}}(t)$. Тоді $U_R \equiv U_R(t)$, $U_C \equiv U_C(t)$, а також $I \equiv I(t)$. Тоді закон Кірхгофа для даного кола переписеться у вигляді (змінний струм $I(t)$ протікає через резистор R і конденсатор C):

$$U_{\text{ВХ}}(t) + I(t)R + \frac{1}{C} \int I(t)dt = 0.$$

Враховуючи, що $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, де $q(t)$ – заряд на конденсаторі, маємо диференціальне рівняння:

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) + U_{\text{ВХ}}(t) = 0,$$

або у більш звичному вигляді:

$$\frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{RC} q(t) = -\frac{1}{R} U_{\text{ВХ}}(t).$$

Таким чином маємо звичайне неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Знаючи конкретний вигляд $U_{\text{ВХ}}(t)$, а також значення $q(t) \Big|_{t=0}$, $U_{\text{ВХ}}(t) \Big|_{t=0}$ можна знайти за таким рівнянням вигляд $q(t)$, а отже і $U_{\text{ВХ}}(t)$.

Приклад 2. Для прямих вимірів тиску крові у шлуночку серця використовується метод катетеризації. Розглянемо заповнений рідиною катетер як гідравлічну систему із зосередженими параметрами і змодельюємо її математично.

На рис.1.5 кожен сегмент Δl катетера 1 має активний опір руху молекул рідини R_c , вносить інерційність L_c та має запасливість C_c .

Електричними величинами, що аналогічні опору, інерційності, запасливості (аналоговими величинами) є активний опір, індуктивність та ємність. Відповідно аналогом потоку рідини є струм, а тиску – напруга.

Позначимо L_t, C_t, R_t , відповідно інерційність, запасливість і активний опір перетворювача;

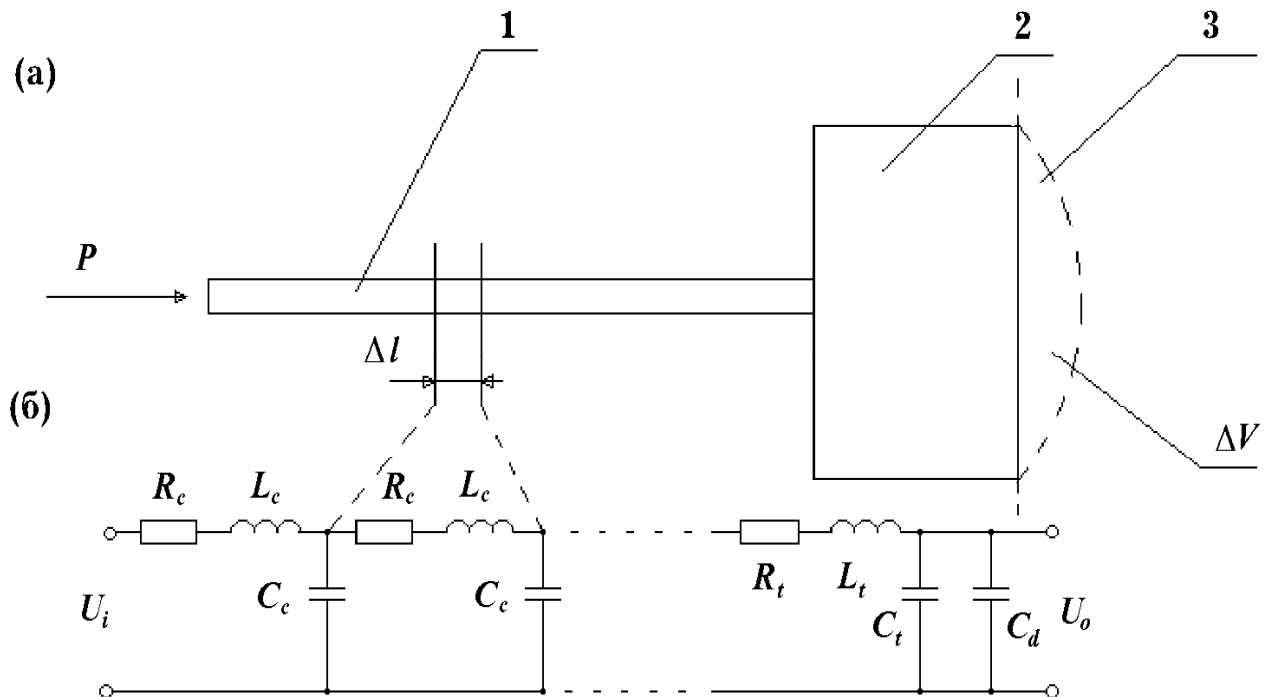


Рис.1.5. Система катетер-перетворювач: (а) — фізична модель системи катетер-перетворювач; (б) — аналогова електрична модель системи катетер-перетворювач. Позначення на рисунку: 1 — катетер; 2 — перетворювач; 3 — діафрагма; P — тиск рідини, ΔV — елемент об'єму; C_d — запасливість діафрагми.

На рис.1.6 показано відгук перетворювача на перепад тиску (довжина катетера 31 см, діаметр 0,495 мм; перетворювач типу Stathom p23C1B).

Приведені нижче фізичні величини і зв'язки між ними можна виправдати тільки шляхом міркувань на рівні фізичної строгості і достатності.

Виникнення опору R_C пов'язане з тертям між потоками рідини, яка протікає через катетер. Його величина може бути визначена за виразом:

$$R_C = \frac{\Delta P}{F} \quad (\text{Па} \cdot \text{с} / \text{м}^3)$$



Рис.1.6. Відгук перетворювача на перепад тиску: (а) — перехідні характеристики перетворювача; (б) — перехідні характеристики системи катетер-перетворювач.

$$R_C = \frac{\Delta P}{\bar{v}A},$$

де P — зміна тиску на сегменті, Па ;

F — швидкість потоку, $\text{м}^3/\text{с}$;

\bar{v} — середня швидкість, $\text{м}/\text{с}$;

A — січення перерізу, м^2 .

Справді, чим більша швидкість потоку, то це означає, що опір йому тим менший, і чим більший перепад тиску на елементі довжини, то опір тим більший. У подальшому такі міркування не приводитимемо, їх можна собі придумати самому, стараючись виправдати приведені формули.

У випадку ламінарного ("плавного") потоку

$$R = 8 \frac{\eta L}{\pi r^4},$$

де η – в'язкість в паскаль-секундах;

r – радіус катетера, м;

L – довжина катетера, м.

Інерційність L_c рідини в катетері залежить перш за все від маси рідини, тому

$$L_c = \frac{\Delta P}{dF / dt} \text{ (Па} \cdot \text{с}^2/\text{м}^3\text{)},$$

або

$$L_c = \frac{\Delta P}{aA},$$

де a – прискорення, м/с².

Останнє рівняння приводиться до вигляду

$$L_c = \frac{m}{A^2},$$

або

$$L_c = \frac{\rho L}{\pi r^2},$$

де m – маса рідини, кг;

ρ – густина рідини, кг/м³.

Інерційністю і опірністю перетворювача знехтуємо, так само як і запасливістю катетера.

Запасливість діафрагми перетворювача

$$C_d = \frac{\Delta V}{\Delta P} = \frac{1}{E_d},$$

де E_d – об'ємний модуль еластичності діафрагми перетворювача.

Використавши закон Кірхгофа для аналогової електричної схеми заміщення, знайдемо зв'язок між вихідним значенням U_o і вхідним значенням U_i напруги (що аналогічно зв'язку між тиском діафрагми і вхідним тиском), який запишемо у вигляді рівняння:

$$U_i(t) = L_c C_d \frac{d^2 U_o(t)}{dt^2} + R_c C_d \frac{dU_o(t)}{dt} + U_o(t), \quad (1.2)$$

звідки

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L_c C_d}};$$

$$\xi = (R_c / 2)(C_d / L_c)^{\frac{1}{2}}.$$

Або

$$f_n = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\pi \rho L} \frac{\Delta P}{\Delta L} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\xi = \frac{4\eta}{r^3} \left(\frac{L(\Delta V / \Delta P)}{\pi \rho} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко зауважити подібність (1.1) і (1.2). Таким чином, звичайне диференціальне рівняння є математичною моделлю системи катетер-перетворювач.

1.3. Рівняння у частинних похідних.

Таким чином, спостерігаючи природне чи штучно створене фізичне явище достатню кількість разів чи досить довго, можна узагальнити, абстрагувати певні його засади і створити кінцевий набір гіпотез, які лежать в основі цього явища. Ці гіпотези не повинні суперечити одна одній, відомим фактам і їх повинно вистачати для опису явища або інших подібних явищ. Значення величин, що ними описують явище, змінюються у просторі і часі та залежать від характеристик середовища, у якому явище має місце. Вони є важливими для прогнозу, визначення стану, діагностики, вивчення структури середовища, керування явищем і т.п. Визначити ці значення можемо, розв'язуючи диференціальні рівняння, які складаються з використанням вищезгаданих гіпотез. При наявності таких рівнянь говорять про *теорію явища*. У подальшому таку теорію можемо розвивати вже дедуктивно, шляхом логічного виводу, користуючись методами диференціального чи інтегрального числення, функціонального аналізу.

За фізичними даними складають диференціальні рівняння, які описують явище у кожній точці середовища у кожен момент часу; розв'язок рівняння (інтегрування) дає функцію часу координат кожної точки середовища, у якому проходить явище, і величин, які визначають властивості середовища; розв'язок не повинен суперечити результатам безпосередніх спостережень.

1.3.1. Рівняння теплопередачі. Розглянемо явище зміни температури у кожній точці всередині твердого тіла, нагрітого до певної температури і поміщеного у середовище з нульовою температурою (охолодження). Теплові властивості тіла характеризуються величинами питомої теплоти c , теплопровідності k , густини ρ . В загальному ці величини є функціями координат x , y , z і відомі.

За гіпотезами Фур'є, покладеними в основу аналітичної теорії тепла, складається рівняння, яке дає значення температури U в будь-якій точці тіла у даний момент часу, тобто

$$U \equiv U(x, y, z, t);$$

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \left(k \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial x^2} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial U}{\partial y} \right)}{\partial y^2} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial z^2}.$$

Звичайно, це рівняння допускає безліч розв'язків. Але, беручи до уваги значення температури у початковий момент часу, а також кількість тепла, яку тратить тіло через свою поверхню, які знайдемо шляхом експерименту, можна вибрати конкретний розв'язок. Вище згадані умови включають *початкові і граничні умови*, а в цілому таку задачу називають *краєвою*.

1.3.2. Рівняння коливань. Розглянемо явище коливання струни. Нехай струна натягнута горизонтально і закріплена на кінцях. Прийmemo пряму, на якій розташовані всі точки струни у початковий момент часу, за вісь x . Відхилимо всі точки струни від осі x , надаючи їм тим самим різні швидкості, та залишимо їх самих на себе. Під впливом пружних сил струна починає коливатися. Якщо U — відхилення, то воно залежить від часу і координати x . Пружні властивості кожного елемента струни характеризують модулем пружності E та густиною ρ .

За гіпотезами Коші, покладеними в основу теорії пружних тіл, складається диференціальне рівняння

$$\rho \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}.$$

Відомо, що для точок на кінцях струни для всіх t величина $U(x,t)$ рівна нулю, а також відомі початкові відхилення і швидкості точок струни. За цими умовами вибирають розв'язок з множини розв'язків.

1.3.3. Рівняння переносу речовини. Розглянемо рух однорідної маси газу (стискуваної рідини). Нехай кожна частинка рухається так, що існують проекції u , v , ω її швидкості на осі x , y , z . Це означає, що існує функція U часу і координат x , y , z , частинними похідними якої є u , v , ω , або рідина рухається з потенціалом швидкостей $U(x,y,z,t)$.

У гідродинаміці доведено, що потенціалу швидкостей в момент часу t і в кожній точці x , y , z відповідає рівняння:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right);$$

$$U \equiv U(x, y, z, t).$$

І в цьому випадку не кожен розв'язок рівняння відповідає конкретним умовам. Необхідно, щоб U і $\frac{\partial U}{\partial t}$ мали цілком певний вигляд у початковий момент часу.

Крім того, і газ і рідина повинні заповнювати весь об'єм посудини, у якій вони течуть, без розривів і пустот.

Тому нормальна складова швидкості частинок рідини чи газу на стінках посудини рівна нормальній складовій швидкості руху самої стінки, яка є відомою.

1.3.4. Рівняння хвиль. У фізиці світла, електрики, магнетизму розглядають рівняння:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t} ;$$

$$U \equiv U(x, y, z, t)$$

де ε – діелектрична проникність середовища;

μ – магнітна проникність середовища;

λ – електропровідність;

c – швидкість світла.

У даному випадку середовище, у якому має місце явище, безмежне. Величина $4\pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t}$ характеризує затрату електричних сил з часом (*абсорбцію*).

Для вакууму $\varepsilon=1$, $\mu=1$, $\lambda=0$. Тоді рівняння подібне на попередні.

1.3.5. Система диференціальних рівнянь у частинних похідних. У загальному явище характеризується кількома величинами, причому кожна з них є функцією кількох незалежних змінних. В результаті, для опису явища складають *систему диференціальних рівнянь у частинних похідних*. Найпростішими прикладами можуть служити загальні рівняння гідродинаміки, коливань твердих пружних тіл і т.п. Так, закон коливання твердого тіла стане відомим, якщо будуть відомі величини u , v , ω переміщення кожної точки тіла у

функції часу та координат x, y, z . Величини u, v, ω визначають з рівнянь:

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}; \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}; \\ \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},\end{aligned}$$

де μ – густина, X, Y, Z – функції від x, y, z , які є проекціями заданих сил, що діють на частини тіла, на осі координат, а $X_i, Y_i, Z_i, i=x,y,z$, – лінійні функції від частинних похідних першого порядку по x, y, z функції u, v, ω з постійними коефіцієнтами, які залежать від властивостей тіла. У початковий момент нам відомі u, v, ω і $\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial t}$. Таким чином, ці умови є *початковими* і допомагають вибрати розв'язок з множини розв'язків. Крім того, відомі сили, які прикладені до зовнішньої поверхні тіла. Вважатимемо, що частинки тіла не вириваються з його поверхні. За цією умовою, беручи до уваги основні положення теорії пружності, прийдемо до таких умов на поверхні тіла:

$$\begin{aligned}X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z); \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z); \\ Z_n &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z),\end{aligned}$$

де X_n, Y_n, Z_n – проекції на осі координат нормальної складової зовнішніх сил, прикладених до точок поверхні тіла, n – напрям нормалі.

Так що розв'язок в цьому випадку шукають таким, щоб відповідав вірцевим початковим і трьом граничним умовам.

1.3.6. Стаціонарні рівняння. Можливі явища, при яких параметри середовища, зв'язки між величинами не залежать від часу. У цьому випадку мають місце так звані *стаціонарні*, чи *усталені рухи*.

Нехай нестискувана рідина міститься в замкнутій посудині, яка обертається навколо нерухомої осі. Рідина буде рухатися з потенціалом швидкостей, який не залежить від часу, а лише від координат x, y, z . Матимемо стаціонарну течію рідини.

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 ;$$

$$U \equiv U(x, y, z).$$

Зрозуміло, що початкові умови розглядати не потрібно. Але граничні умови повинні виконуватися (рівність нормальних складових швидкостей частинок рідини, які прилягають до стінок і частинок самої стінки). Проекціями u, v, ω , швидкостей точки рідини на осі координат є

$$u = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial U}{\partial z},$$

а нормальна складова задається виразом

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(n, z) = 0.$$

Нормальна складова швидкості точок стінок задається функцією $f(x, y, z)$. Тому задача зводиться до вибору такого розв'язку, щоб

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(n, z) = f(x, y, z).$$

Така задача є основною у гідродинаміці і носить назву *задачі Неймана*.

1.3.7. Рівняння Лапласа. До подібних задач приводяться інші статичні явища: теплова рівновага, розподіл зарядів на провіднику та ін. Так, розподіл заряду на провіднику заданої поверхні приводить до визначення потенціалу U :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0;$$

$$U \equiv U(x, y, z),$$

і таке рівняння називають *рівнянням Лапласа*. Тут необхідно знати розподіл заряду на поверхні провідника:

$$U_r = \text{const}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} U_r = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

1.3.8. Загальний випадок. Можна розглядати інші випадки – *задачу Діріхле* (або *зовнішню задачу*). У загальному випадку розглядають *зовнішню* і *внутрішню задачі*. Остання пов'язана із знехтуванням потенціалу всередині провідника, при заданій границі $f(x, y, z)$, до якої наближається $U(x, y, z)$ зсередини провідника до його поверхні.

Узагальнимо вищевикладене. Спочатку відмітимо, що у всіх наведених випадках ми мали справу з рівняннями не вище 2-го порядку. Звичайно, є явища, які можна описати рівняннями вищих порядків. Крім того, у приведених рівняннях частинні похідні пов'язані лінійним чином. На практиці зустрічають і *нелінійні зв'язки*. І, нарешті, зменшуючи просторову розмірність явищ, можна прийти до *звичайних диференціальних рівнянь* (у стаціонарному випадку).

А приведені вище рівняння можна отримати з такого загального рівняння:

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b \frac{\partial U}{\partial t} + \sum A_{\alpha+\beta+\gamma} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} + m \frac{\partial U}{\partial x} + n \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial U}{\partial z} + lU = 0;$$

$$U \equiv U(x, y, z, t),$$

де $a, b, m, n, g, l, A_{\alpha+\beta+\gamma}$ – функції x, y, z .

Такі рівняння можна розглядати, як рівняння, в яких:

- $a=0, b \neq 0$ – рівняння теплопередачі;
- $a \neq 0, b=0$ – теорія звуку, електрики, стаціонарні явища;
- $a=0, b=0$ – явище рівноваги, стаціонарні явища.

Випадок $a \neq 0, b \neq 0$ не розглядаємо. Неважко тепер побачити зв'язок цього загального рівняння з розглянутими.

1.4. Структура розв'язку диференціального рівняння.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння за умови його лінійності, що дає можливість скористатися *принципом суперпозиції* та властивістю однорідності. Тоді є можливість, знайшовши достатню кількість часткових розв'язків диференціального рівняння, знайти будь-який інший розв'язок як їх лінійну комбінацію:

$$U = \sum_i C_i \Phi_i .$$

Постулюючи незмінність властивостей середовища у просторі (однорідність, ізотропність) та часі (стаціонарність) бачимо, що від $U(x,y,z,t)$ слід чекати якихось фундаментальних властивостей, які є наслідком цього постулату. Інтуїтивно ці властивості, як властивості симетрії простору-часу, було знайдено у вигляді ідеї розділення змінних.

1.4.1. Розв'язок рівняння Лапласа. Розглянемо рівняння Лапласа для двовимірного випадку:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 ,$$

де $U \equiv U(x,y)$.

Спробуємо шукати його розв'язок у такому специфічному вигляді:

$$U = X(x)Y(y),$$

тобто, розділимо змінні.

Підставивши цю функцію у диференціальне рівняння та розділивши його на U , отримаємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0, \quad (1.3)$$

або

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} .$$

Таким чином, рівняння Лапласа (у прямокутній системі координат) є *роздільним*.

Візьмемо частинну похідну по x від обох частин. Отримаємо:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{X''(x)}{X(x)} \right] = 0.$$

Оскільки $\frac{X''}{X}$ залежить лише від x , то частинна похідна є повною похідною. Це означає, що

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

Звідси робимо висновок, що $U=X(x)Y(y)$ є розв'язком диференціального рівняння, коли:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0; \\ Y''(y) - \lambda Y(y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

для деякої постійної λ .

Розв'язавши два звичайних диференціальних рівняння, отримаємо часткові розв'язки рівнянь у вигляді сім'ї однопараметричних розв'язків:

$$\begin{aligned} e^{\pm\sqrt{\lambda}y} \cos \sqrt{\lambda}x, e^{\pm\sqrt{\lambda}y} \sin \sqrt{\lambda}x, & \quad \lambda > 0 \\ 1, x, y, xy, & \quad \lambda = 0 \\ e^{\pm\sqrt{-\lambda}x} \cos \sqrt{-\lambda}y, e^{\pm\sqrt{-\lambda}x} \sin \sqrt{-\lambda}y, & \quad \lambda < 0 \end{aligned}$$

У загальному випадку для області D (граничні умови) знайти лінійну комбінацію з цих розв'язків, яка б відповідала граничним умовам, досить важко.

Розглянемо простий випадок (область D є "квадратом" зі стороною, рівною одиниці):

$$0 < x < 1, 0 < y < 1,$$

і, що

$$\begin{aligned} U(x,0) &= f_1(x); \\ U(1,y) &= f_2(y); \\ U(x,1) &= f_3(x); \\ U(0,y) &= f_4(y), \end{aligned}$$

де f_1, f_2, f_3, f_4 – задані функції (рис.1.7).

Маючи справу з лінійною задачею, шукатимемо розв'язок як суму розв'язків:

Краєві умови

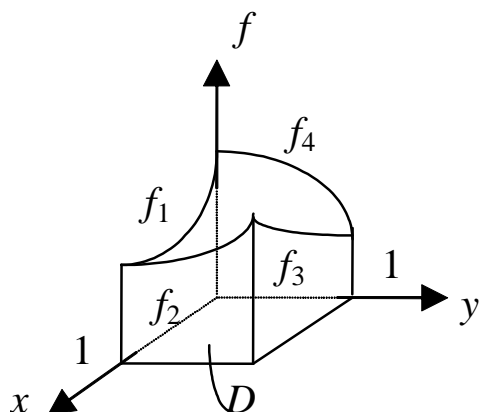


Рис.1.7.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(x,0) = f_1(x);$$

$$U(1,y) = 0; \quad ;$$

$$U(x,1) = 0;$$

$$U(0,y) = 0,$$

і трьох інших, для яких $U=0$, крім одного з інших країв "квадрату".

Розглянемо випадок $U=0$ при $x=0$ і $x=1$ для першого з рівнянь:

$$X'' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Відразу видно тривіальний розв'язок $X \equiv 0$. Якщо $\lambda < 0$, то умова $X(0)=0$ говорить, що $X(x)$ має множником $sh\sqrt{-\lambda}x$. Так як $sh\sqrt{-\lambda}x$ ніколи не дорівнює нулю, умова $X(1) = 0$ показує, що цей множник повинен дорівнювати нулеві.

Для $\lambda = 0$ $X(x)$ слід помножити на x , і з умови $X(1)=0$ маємо $X \equiv 0$.

Для $\lambda > 0$ $X(x)$ має множником $\sin\sqrt{\lambda}x$. Так як $X(x)$ не нуль тоді і тільки тоді, коли $\sin\sqrt{\lambda}x = 0$, то $\lambda = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \dots$.

Ми знайшли нескінченний ряд дискретних значень λ , для яких має місце нетривіальний розв'язок. Ці значення називають *власними числами*, а функції $X_n(x) = \sin n\pi x$, $n=1,2,\dots$ відповідно *власними функціями* диференціального рівняння.

Маючи знайденим ряд значень λ , шукаємо відповідні функції $Y(y)$. З (1.3) отримаємо розв'язки для:

$$Y'' = n^2 \pi^2 Y = 0;$$

$$Y(1) = 0.$$

Легко побачити, що тут множниками є $sh n\pi(1-y)$. Побудуємо часткові розв'язки:

$$U_n(x, y) = \sin n\pi x \cdot sh n\pi(1-y),$$

які відповідають умовам (1.4).

Це ж справедливо і для будь-якої лінійної комбінації. Спробуємо зобразити розв'язок $U(x,y)$ нескінченним рядом функцій $sh n\pi(1-y)$:

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(x, y).$$

Коефіцієнти C_n знайдемо з умови $U(x,0)=f_1(x)$, $f_1(x)$ – задана функція. Відразу виникає необхідність у дослідженні збіжності такого ряду.

Підставивши $y = 0$, отримаємо:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sh n\pi \cdot \sin n\pi x.$$

Позначивши $b_n = C_n sh n\pi$, одержимо задачу визначення b_n таких, щоб для заданої функції $f_1(x)$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x.$$

Розклад довільної функції в ряд за власними функціями називають *рядом Фур'є*. Залишається знайти коефіцієнти та умови збіжності ряду.

1.4.2. Розв'язок рівняння хвиль. Подібні викладки можна зробити для хвильового рівняння. Для одномірного випадку

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 ;$$

$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l ;$$

$$U(0,t) = 0 ;$$

$$U(l,t) = 0.$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді $U=X(x)T(t)$. Рівняння хвиль також роздільне:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = C^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Власними числами будуть $\lambda = \frac{n^2 \pi^2 C^2}{l^2}$, власними функціями –

$X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$. Знайдемо також $T_n = \cos \frac{n\pi C}{l} t$. Тоді

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi C}{l} t.$$

Поклавши $t=0$, побачимо, що для b_1, b_2, \dots $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Знову одержимо синусний ряд Фур'є для $f(x)$.

1.4.3. Розв'язок рівняння теплопровідності. Для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} - R \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 ;$$

$$\begin{aligned}
 U(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l; \\
 U(0,t) &= 0; \\
 U(l,t) &= 0
 \end{aligned}$$

матимемо:

$$\frac{T'}{T} = k \frac{X''}{X}.$$

Власними числами будуть $\lambda = n^2 \pi^2 k$, власними функціями – $X_n = \sin n\pi x$. Часткові розв'язки візьмемо у вигляді $U_n = e^{-n^2 \pi^2 kt} \sin n\pi x$.

Шукаючи розв'язок у формі:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 kt} \sin n\pi x,$$

поклавши $t=0$, побачимо, що необхідно знайти b_1, b_2, \dots і тоді

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

тобто отримаємо синусний ряд Фур'є.

1.4.4. Загальні зауваження. Зробимо ряд зауважень. Функції, що є розв'язками звичайних диференціальних рівнянь, розкладаються в ряд Фур'є. Виникає ряд запитань:

– чи можливо знайти коефіцієнти b_n для заданої функції;

– коли границя ряду задовільняє диференціальному рівнянню та заданим початковим та граничним умовам

Факт того, що власними функціями є $\sin n\pi x$, виходить з граничних умов $U=0$. Якщо покласти $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ для $x=0$ і $x=1$, то

отримаємо косинусний ряд Фур'є.

Метод розділення змінних може бути застосованим до рівнянь певного виду при певних умовах. Пояснення умов застосування

розділення змінних буде зроблено пізніше на основі теоретико-групових уявлень, як фундаментальної властивості лінійного оператора (диференціального оператора).

1.5. Ортогональність функцій.

Розглянемо задачу апроксимації функції $f(x)$, заданої на інтервалі $[a, b]$. У нашому випадку слово *апроксимація* означає такий вибір C_n ,

що сума $S_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x)$ стає близькою до $f(x)$ для кожного x з інтервалу $[a, b]$. Якщо $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$, то ряд $S_N(x)$ збігається до $f(x)$.

Формалізуємо поняття збіжності. Якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке N_ε незалежне від x , що $|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ для всіх

$x \in [a, b]$ всюди для $N \leq N_\varepsilon$ то кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x)$ монотонно

збігається до $f(x)$, або $S_N(x)$ монотонно апроксимує $f(x)$. Такого роду збіжність дає можливість практично реалізувати обчислення розв'язків, отриманих методом розділення змінних. Але коефіцієнти C_n легше знайти, коли має місце збіжність іншого роду – *середньоквадратична*, що означає: для деякої додатньої вагової функції $p(x)$ величина $\int_a^b [f(x) - S_N(x)]^2 \cdot p(x) dx$ прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$. Таким чином, на

деяких інтервалах з $[a, b]$, сумарна довжина яких дуже мала, $f(x)$ може відрізнитися від $S_N(x)$.

Якщо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b (f - S_N)^2 p dx = 0,$$

то $S_N(x)$ сходиться в *середньому* до $f(x)$, а інтеграл називається *середньоквадратичним відхиленням* $S_N(x)$ від $f(x)$. Мусимо тепер встановити збіжність $S_N(x)$ для класу функцій $\Phi_n(x)$ у середньоквадратичному сенсі.

Функції $\Phi(x)$ та $\Psi(x)$ називають *ортогональними* з вагою $p(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо:

$$\int_a^b \Phi(x)\Psi(x)p(x)dx = 0.$$

Наприклад, $\Phi(x)=1$ і $\Psi(x)=x$ є ортогональними на інтервалі $[-1,1]$, так як $\int_{-1}^1 1 \cdot x dx = 0$. Тут $p(x)=1$. Далі матимемо справу з функціями $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots$, які взаємноортогональні відносно ваги $p(x)$:

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)p(x)dx = 0,$$

коли $m \neq n$.

Власні функції, які з'явилися при розділенні змінних, є ортогональними, в чому легко переконатися.

Розглянемо:

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^N C_n \Phi_n(x) \right]^2 p(x) dx = \int_a^b f^2 p dx - 2 \sum_{n=1}^N C_n \int_a^b f \Phi_n p dx + \sum_{n=1}^N C_n^2 \int_a^b \Phi_n^2 p dx$$

Привівши праву сторону до вигляду

$$\sum_{n=1}^N \int_a^b \Phi_n^2 p dx \left\{ C_n - \frac{\int_a^b f \Phi_n p dx}{\int_a^b \Phi_n^2 p dx} \right\}^2 + \int_a^b f^2 p dx - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f \Phi_n p dx]^2}{\int_a^b \Phi_n^2 p dx},$$

бачимо, що C_n є тільки в першому доданку, і ми маємо суму квадратів, тому цю суму можна мінімізувати, якщо всі доданки рівні нулеві. Тоді, вибравши:

$$C_n = \frac{\int_a^b f \Phi_n(x) p(x) dx}{\int_a^b \Phi_n^2(x) p(x) dx},$$

матимемо мінімум виразу.

Таким чином, показано, що існують коефіцієнти ряду Фур'є, при яких можна отримати найкращу у середньоквадратичному сенсі апроксимацію $f(x)$. Ці коефіцієнти називають *коефіцієнтами ряду Фур'є* для функції $f(x)$. Взагалі, ряди вигляду $\sum C_n \Phi_n(x)$ називають *рядами Фур'є*.

1.6. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля.

Підставивши коефіцієнти Фур'є у вираз середньоквадратичного відхилення, бачимо:

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^N C_n \Phi_n(x) \right]^2 p(x) dx = \int_a^b f^2(x) p(x) dx - \sum_{n=1}^N C_n^2 \int_a^b \Phi_n^2(x) p(x) dx$$

Оскільки ліва сторона рівності невід'ємна, то

$$\sum_{n=1}^N C_n^2 \int_a^b \Phi_n^2(x) p(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) p(x) dx$$

для будь-якого N . Ця нерівність називається *нерівністю Бесселя*.

Якщо

$$\int_a^b f^2(x) p(x) dx < \infty,$$

ТО

$$C_n^2 \int_a^b \Phi_n^2(x) p(x) dx = \frac{\int_a^b \Phi_n(x) f(x) p(x) dx}{\int_a^b \Phi_n^2(x) f(x) p(x) dx} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, і маємо ряд, що збігається у середньоквадратичному, а при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \int_a^b \Phi_n^2(x) p(x) dx = \int_a^b f^2(x) p(x) dx.$$

Цю рівність називають *рівністю Парсеваля*. Вона має місце при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N C_n \Phi_n(x) \right)^2 p(x) dx = 0.$$

Якщо ця границя рівна нулеві для кожної $f(x)$, для якої $\int_a^b f^2(x) p(x) dx < \infty$, то множину функцій $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ називають *повною*.

Будь-яка функція $f(x)$, для якої $\int_a^b p(x) dx < \infty$, повністю визначається своїми коефіцієнтами Фур'є відносно повної множини функцій.

Підсумок.

З наведеного матеріалу видно, що:

1) будь-яка неперервна, обмежена функція однієї чи кількох змінних, яку вважають за модель сигналу (як змінну у просторі, часі величину, що є для нас інформативною), є розв'язком лінійного

диференціального рівняння (звичайного чи у частинних похідних) і може бути зображена при допомозі певної структури (лінійної форми);

2) лінійне диференціальне рівняння є моделлю реальних фізичних явищ і з'являється при вивченні цих явищ феноменологічно, на основі знання фізичних законів, евристичних умовиводів;

3) власні функції лінійного диференціального оператора є ортогональними, складають повну множину функцій відносно середньоквадратичної збіжності. Інакше, ці функції є координатними функціями, так як будь-яку функцію можна зобразити при їх допомозі;

4) очевидно, що розділення змінних є фундаментальною властивістю множини функцій, наслідком її лінійності, а також замкнутості цієї множини стосовно збіжності послідовностей функцій у сенсі метрики (віддалі), заданої на цій множині як інваріанту перетворень, що допускаються, а саме – до зсуву, чи узагальненого зсуву. Це буде розглянуто у другій частині.

Розділ 2

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.1. Перетворення Фур'є.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь методом розділення змінних з'явився ряд Фур'є.

Оскільки

$$\cos nx = \frac{1}{2} \left(e^{inx} + e^{-inx} \right), \sin nx = \frac{1}{2i} \left(e^{inx} - e^{-inx} \right),$$

перепишемо ряд Фур'є так:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-inx}.$$

Позначивши

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_n + ib_n), n \geq 0 \\ \frac{1}{2} (a_{-n} - ib_{-n}), n < 0 \end{cases}$$

дістанемо вираз

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Так що періодичну функцію $f(x)$ в інтервалі $-\pi < x < \pi$ можна розкласти в ряд Фур'є з коефіцієнтами розкладу:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Якщо необхідно представити функцію $f(x)$ на інтервалі $L \leq x \leq L$ рядом Фур'є, то вводять змінну

$$x' = \frac{\pi}{L} x,$$

тоді

$$f\left(\frac{L}{\pi} x'\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-inx'},$$

де

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} x'\right) e^{inx'} dx'.$$

Повертаючись до змінної x , маємо:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(L)} e^{-in\pi x/L},$$

де

$$C_n^{(L)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx.$$

Коефіцієнти C_n однозначно визначають функцію $f(x)$ на інтервалі $(-L, L)$ її періодичності.

Зауважимо, що при $L \rightarrow \infty$ множина чисел вигляду $n\pi/L$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ стає все "щільнішою" на дійсній осі. Це вмотивовує заміну $n\pi/L$ неперервною змінною ω . Отримаємо граничну функцію:

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} 2LC_n^{(L)} \omega L/\pi,$$

або

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (2.1)$$

замість $C_n^{(L)}$.

Якщо інтеграл (2.1) сходиться, його називають *перетворенням Фур'є* функції $f(x)$. Часом його позначають $F\{f(x)\}$. Інтеграл (2.1) може сходиться, якщо сходиться інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx .$$

Перетворення Фур'є знайшло застосування завдяки своїм корисним властивостям. Зокрема, диференціюванню $f(x)$ відповідає домноження $\hat{f}(\omega)$ на $i\omega$:

$$F\{f'\} = -i\omega F\{f\}.$$

Іншою корисною властивістю є те, що $\hat{f}(\omega)$ однозначно визначає $f(x)$.

Зауважимо також, що для дійсної функції $f(x)$ маємо $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$, де риска означає комплексну спряженість, так що дійсна частина є парною функцією, а уявна – непарною функцією від ω .

Функція $f(x)$ називається *абсолютно інтегрованою*, якщо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty .$$

Функція $f(x)$ називається *інтегрованою з квадратом*, якщо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є інтегровними з квадратом, то їх добуток є абсолютно інтегровним.

В математиці доводиться нерівність:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx ,$$

яка називається *нерівністю Шварца*. Наслідком нерівності Шварца є *нерівність "трикутника"*:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Справді, якщо $f(x)$ і $g(x)$ уявити сторонами трикутника, то у цьому легко переконатися.

Ці нерівності використовують при дослідженнях збіжності у середньоквадратичному.

Приведемо рівність Парсеваля для інтегрального перетворення Фур'є:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (2.2)$$

А узагальнена формула рівності Парсеваля має вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Вона справедлива для будь-яких інтегровних з квадратом функцій $f(x)$ і $g(x)$, дійсно та комплекснозмінних, а при $f(x) = g(x)$ приймає вигляд (2.2).

2.2. Застосування перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є належить до так званого класу інтегральних перетворень, які широко застосовуються у практичній діяльності інженера електронної апаратури при її розробці, зокрема, воно дозволяє спростити математичні викладки при розв'язуванні задач синтезу її характеристик.

Знаходження перетворень Фур'є функцій, як і знаходження інтегралів, може бути здійсненим при допомозі спеціальних таблиць.

Існують таблиці інтегралів вигляду: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\omega x} dx.$

Простою заміною x на ω і ω на x можна, користуючись тими ж таблицями, обчислювати пряме чи зворотнє перетворення Фур'є.

Користь, яку дає перетворення Фур'є, подібна користі від логарифмів, коли множення чи ділення замінюються на додавання чи віднімання з наступним застосуванням зворотнього перетворення. Так само, диференціювання чи інтегрування при використанні перетворення Фур'є зводиться до множення чи ділення.

Все таки, всі можливі випадки перетворення затабулювати неможливо. Деколи доводиться використовувати техніку контурного інтегрування у комплексній площині, або навіть числове інтегрування.

Приведемо деякі практично корисні формули. За аналогом вже приведеної формули $F\{f'\} = -i\omega F\{f\}$ можна отримати, що

$$\frac{d}{d\omega} F\{f\} = F\{ixf(x)\}.$$

Якщо $g(x) \equiv f(ax-b)$ (лінійна заміна змінної), то

$$F\{f(ax-b)\} = \frac{1}{|a|} e^{i\omega b/a} f\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Зокрема, для фіксованого x_0 - перетворення Фур'є $f(x-x_0)$ рівне

$$e^{i\omega x_0} \hat{f}(-\omega).$$

За рівністю Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_0} \hat{f}(-\omega) \overline{g(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x) \overline{g(x)} dx.$$

Нехай $h(x) = \overline{g(x)}$, тоді

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} g(x) dx = g(-\omega).$$

Таким чином:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_0} \hat{f}(-\omega) \hat{h}(-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x) h(x) dx.$$

Вираз, який дає функція від x_0 , що з'явився справа у рівності, називається *згорткою* функцій $f(x)$ та $h(x)$, позначається $f*h$ і тлумачиться як оператор:

$$(f * h)(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x)h(x)dx .$$

Властивості згортки багато чим нагадують властивості звичайного добутку:

- 1) $(af_1 + bf_2) * h = af_1 * h + bf_2 * h$;
- 2) $f * (ah_1 + bh_2) = af * h_1 + bf * h_2$;
- 3) $f*h = h*f$ – комутативність;
- 4) $f*(g*h) = (f*g) * h$ – асоціативність.

Важливою є **теорема згортки**:

Якщо $f(x)$ та $h(x)$ абсолютно інтегровні і інтегровні з квадратом і якщо $\hat{f}(\omega)$ та $\hat{h}(\omega)$ є їхніми Фур'є трансформантами, то добуток $\hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)$ є Фур'є трансформантою згортки $f*h$.

2.3. Перетворення Лапласа.

Перетворення Лапласа є поширенням ідей перетворення Фур'є на випадок, коли $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \rightarrow \infty$ (тобто, для функцій, не інтегрованих з квадратом) шляхом введення “абсциси збіжності” σ .

Одностороннє перетворення Лапласа дійсної функції $f(t)$, заданої на інтервалі $(0, \infty)$, позначається через $F(s)$ або $L\{f(t)\}$ і означається як:

$$F(s) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.3)$$

для всіх значень s , при яких (2.3) існує (збігається). Часом інтеграл (2.3) називають *інтегралом Лапласа*. Тут і в подальших викладах s служить для позначення комплексної змінної, областю зміни якої є *комплексна площина S*. Дійсну і уявну частину s позначатимемо

відповідно через $\operatorname{Re}(s) = \sigma$, $\operatorname{Im}(s) = \omega$, отже $s = \sigma + i\omega$. $F(s)$ існує для всіх s , для яких інтеграл (2.3) "абсолютно" збіжний:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty. \quad (2.4)$$

Може бути, що область збіжності в S -площині визначається, як інтервал $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) = \sigma < \sigma_2$, а нижня межа інтегрування може бути рівною $0 + \varepsilon$, де ε – нескінченно мала величина.

Коли в точці $t=0$ функція $f(t)$ несингулярна, то межею інтегрування може бути і точка 0.

Розглянемо на прикладах виконання перетворення Лапласа функції $f(t)$ згідно означення (2.3).

Приклад 1. Якщо $f_1(t) = 6$, то перетворення Лапласа:

$$\mathbf{F}_1(s) = \int_0^{\infty} 6e^{-st} dt = \left. \frac{6e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = 0 \Big|_{\sigma > 0} = \frac{6}{s}.$$

Отже,

$$\mathbf{L}\{6\} = \frac{6}{s}, \quad \sigma > 0.$$

Приклад 2. $f_2(t) = 5e^{-2t}$,

$$\mathbf{F}_2(s) = \int_0^{\infty} 5e^{-2t} e^{-st} dt = \left. \frac{5e^{-(s+2)t}}{-(s+2)} \right|_0^{\infty} = \frac{5}{s+2},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} 5e^{-(s+2)t} = 0, \quad \text{при } \sigma > -2.$$

Отже,

$$\mathbf{L}\{5e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2.$$

Приклад 3. $f_3(t) = \cos t$,

$$\mathbf{F}_3(s) = \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt.$$

При інтегруванні по частинах:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Позначимо $e^{-st} = u$, $\cos t dt = dv$, тоді:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3(s) &= \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt = e^{-st} \sin t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin t de^{-st} = \\ &= e^{-st} \sin t \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} d \cos t = e^{-st} \sin t \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s} \left(\cos t e^{-st} - \int_0^{\infty} \cos t de^{-st} \right) = \\ &= e^{-st} \sin t \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s} \cos t e^{-st} - \frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) = e^{-st} \left(\sin t - \frac{1}{s} \cos t \right) \Big|_0^{\infty},$$

$$\int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt = \frac{e^{-st} (s \sin t - \cos t)}{s \left(1 + \frac{1}{s^2} \right)} \Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2 + 1} e^{-st} (s \sin t - \cos t) \Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Перетворення Лапласа, коли воно існує, є інтегральним відображенням дійсних функцій у множину функцій комплексного змінного (рис.2.1).

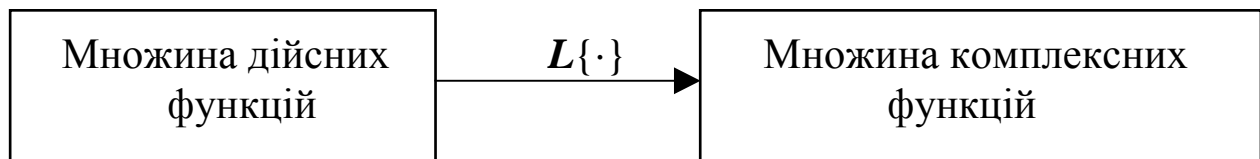


Рис.2.1. Інтерпретація перетворення Лапласа

Аналіз і синтез радіоелектронних систем та пристроїв в комплексній області відображень (частотній області) часом більш простий у порівнянні з аналізом чи синтезом в дійсній (часовій) області.

В табл.2.1 подано зображення Лапласа основних функцій. Більш повна таблиця *оригіналів* (функцій $f(t)$) та їх *зображень* $F(s)$ знаходиться у відповідній літературі.

2.4. Основні властивості перетворення Лапласа.

В табл.2.2 приводяться (без доведення) деякі основні властивості одностороннього перетворення Лапласа. Доведення цих властивостей розглянуто у відповідній літературі.

Використання цих властивостей часто спрощує виконання перетворення Лапласа.

Розглянемо застосування даних властивостей.

Приклад 4. $f(t) = (t - 2)u(t - 2) \Leftrightarrow F(s) = e^{-2s} \frac{1}{s^2}$,

$$u(t - 2) = \begin{cases} 1, & t > 2; \\ 0, & t \leq 2. \end{cases}$$

Тут використано властивість "зсуву".

Табл. 2.1. Деякі перетворення Лапласа.

$F(t)$	$F(s)$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{j\beta t}$	$\frac{1}{s - j\beta} = \frac{s}{s^2 + \beta^2} + j \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$

Табл. 2.2. Основні властивості перетворення Лапласа.

$f(t)$	$F(s)$	Назва
1. $af(t)+bg(t)$ $a, b = const$	$aF(s)+bG(s)$ $\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$	"Лінійність"
2. $f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \sigma > \sigma_1$	"Масштаб"
3. $f(t-a), a > 0$	$e^{-as} F(s), \sigma > \sigma_1$	"Зсув"
4. $e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	"s - Зсув"
5. $\int_0^\tau f(t)g(\tau - t)dt$	$F(s)G(s)$	"Згортка"

6. $f(t) \cdot g(t)$	$\int F(s)G(p-s)ds$	"Комплексна згортка"
7. $\int_0^{\infty} t^n f(t)dt$	$(-1)^n F^n(0)$	Момент
8. $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - \sum_{p=0}^{n-1} s^{n-p-1} \frac{d^p}{dt^p} f(0)$	Похідна
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$	
9. $\int_0^t f(\alpha)d\alpha$	$\frac{F(s)}{s}, \sigma > \sigma_1$	Інтеграл
10. $f(0+) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$		Початкове значення
11. $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$		Кінцеве значення

Приклад 5. $f(t) = \cos 4t \cdot e^{-2t}$.

Використаємо властивості масштабування та "s-зсуву". Згідно табл.2.1.

$$L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2 + 4^2} \quad \text{і} \quad L\{\cos 4t \cdot e^{-2t}\} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4^2}.$$

Цей приклад стосується практично важливого випадку, коли $F(s)$ має два (комплексно спряжених) *полюси* (полюс – значення s , при яких знаменник рівний нулеві):

$$L\{e^{-\alpha t} \cos \beta t\} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}; \quad L\{e^{-\alpha t} \sin \beta t\} = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Теорема однозначності. Справедливе наступне:

$$\mathbf{L}^{-1}\{\mathbf{L}\{f(t)\}\} = f(t).$$

Таким чином $\mathbf{L}\{\cdot\}$ і $\mathbf{L}^{-1}\{\cdot\}$ є операторами *взаємно-однозначного відображення* (рис.2.2).

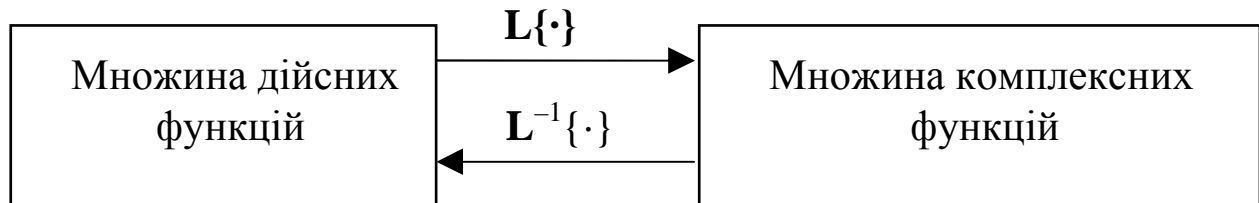


Рис.2.2. Ілюстрація до теореми однозначності

2.5. Зворотнє перетворення Лапласа.

Зворотнє перетворення Лапласа зводиться до інтегрування у комплексній площині S :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad \sigma > \sigma_1,$$

або

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} F(s)e^{st} ds, \quad \sigma > \sigma_1,$$

де C_1 – неперервна лінія (див. рис.2.3, а):

$$C_1(s) = \sigma_1 + j\theta, \quad -\infty < \theta < \infty ;$$

Така лінія еквівалентна замкнутій лінії C , що охоплює полюси функції $F(s)$. Тоді (лема Жордана):

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(s)e^{st} ds \quad (2.5)$$

де C охоплює полюси $F(s)$ (див. рис.2.3, б).

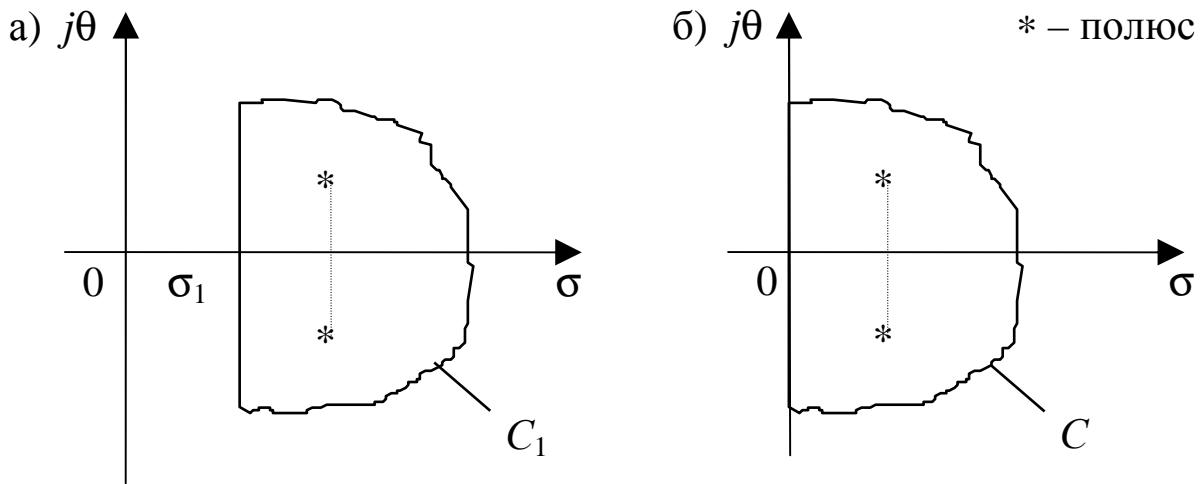


Рис.2.3. Межі інтегрування на комплексній площині

Формула (2.5) встановлює однозначну відповідність між зображенням і оригіналом в точках неперервності оригіналу. Обчислення оригіналу по формулі (2.5) зручно виконувати за допомогою лишків (*вычет* – рос., *residue* – франц.). *Лишком* $\varphi(s)$ відносно точки s_0 називають інтеграл:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C F(s) e^{st} ds,$$

що записують

$$\text{Res } \varphi(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(s) e^{st} ds,$$

де лінія C охоплює s_0 . Тоді (2.5) можна переписати у вигляді:

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \text{Res } F(s) e^{st} \Big|_{s=s_k},$$

де N – кількість полюсів $F(s)$.

Отже, для обчислення зворотнього перетворення Лапласа, слід вміти знаходити лишки. Для цього використовується такий факт. Лишок $\varphi(s)$ в точці s_0 дорівнює коефіцієнту a_{-1} при $(s-s_0)^{-1}$ у розкладі $\varphi(s)$ в ряд Лорана в околі s_0 :

$$\text{Res } \varphi(s) = a_{-1}.$$

$$s=s_0$$

На практиці для $\varphi(s)$ з k -кратним полюсом в точці s_0 застосовують формулу:

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} \varphi(s) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [\varphi(s)(s-s_0)^k],$$

де $(k-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)$. Зокрема, якщо $k=1$ (простий полюс), то:

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} \varphi(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} [\varphi(s)(s-s_0)].$$

Коли ж $\varphi(s) = \frac{f(s)}{\psi(s)}$, то $\operatorname{Res}_{s \rightarrow s_0} \varphi(s) = \frac{f(s_0)}{\psi'(s_0)}$.

2.6. Приклади виконання зворотнього перетворення Лапласа.

Зворотнє перетворення Лапласа можна виконати шляхом тотожніх перетворень, "підгоном" $F(s)$ під табличний вигляд, застосовуючи його властивості (див. табл.2.2).

Наприклад, розкладаючи $F(s)$ на вирази, перетворення яких відоме:

а) $\frac{3s+2}{s^2} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}$, $f(t) = 3 + 2t$;

б) $\frac{3s+2}{s^2+16} = \frac{3s}{s^2+16} + \frac{2}{4} \frac{4}{s^2+16}$, $f(t) = 3 \cos 4t + 0.5 \sin 4t$;

в) $\frac{3s+2}{s^2+2s+5} = \frac{3s}{(s+1)^2+2^2} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{1}{(s+1)^2+2^2}$, $f(t) = 3e^{-t} \cos 2t - 0.5e^{-t} \sin 2t$

Справа тільки за тим, як здогадатися до такого розкладу. В багатьох прикладних задачах зображення сигналу є дробово-раціональною функцією, тобто є відношенням двох поліномів:

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad (2.6)$$

причому $m \leq n$ та коефіцієнти a і b – дійсні.

Обчисливши корені знаменника, тобто знайшовши полюси функції s_i ($i=1,2,\dots,l$), представимо (2.6) у вигляді:

$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \dots (s - s_l)^{k_l}}$	(2.7)
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

Тут k_i – кратність кореня s_i , $k_1+k_2+\dots+k_l = n$.

Далі розкладають многочлен на множники – прості вирази, **L**-перетворення яких відомі ("табличні"). Це можна зробити методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо приклад.

Приклад 6. Виконати зворотнє **L**-перетворення функції

$$F(s) = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s^2 + 4)}.$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4} = \frac{As^2 + 4A + Bs^2 + Cs + Bs + C}{(s+1)(s^2 + 4)} = \\ &= \frac{As^2 + Bs^2 + Cs + Bs + 4A + C}{(s+1)(s^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях s у чисельнику, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ C + B = 2; \\ 4A + C = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B; \\ C + B = 2; \\ -4B + C = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 2 - B; \\ -4B + 2 - B = 3; \\ -5B = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -0.2; \\ A = 0.2; \\ C = 2.2. \end{cases}$$

Отже, многочлен $F(s)$, розкладений на прості множники, матиме вигляд:

$$F(s) = \frac{0.2}{s+1} + \frac{-0.2s + 2.2}{s^2 + 4}.$$

Відповідно оригінал (функція $f(t)$) матиме вигляд:

$$f(t) = 0.2e^{-t} - 0.2\cos 2t + 1.1\sin 2t.$$

У зв'язку з громіздкістю обчислень при розкладі функції $F(s)$ за методом невизначених коефіцієнтів використовують методи, у яких враховують вигляд функції $F(s)$.

2.6.1. Випадок дійсних полюсів. Для знаходження оригіналу, який відповідає заданому зображенню, скористаємось формулою (2.7). Розглянемо два можливі випадки:

- 1) полюси (корені знаменника) дійсні, різні;
- 2) полюси дійсні, кратні.

Випадок 1. Полюси дійсні, різні.

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}.$$

Тоді:

$$F(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}.$$

Для знаходження A_1 домножимо обидві сторони на $s-s_1$ і покладемо $s=s_1$:

$$A_1 = (s-s_1)F(s)\Big|_{s=s_1}. \quad (2.8)$$

Приклад 7. Знайти зворотнє перетворення Лапласа:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Дійсно, згідно вищеописаного:

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3};$$

$$A_1 = (s+1) \frac{s^2 + s2 + 2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1-2+2}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$A_1 = (s+1) \frac{s^2 + s2 + 2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1-2+2}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$A_1 = (s+1) \frac{s^2 + s2 + 2}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1-2+2}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$F(s) = \frac{0.5}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{2.5}{s+3}..$$

Використавши табл.1.2, одержимо:

$$f(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + 2.5e^{-3t}, \quad t > 0.$$

Випадок 2. Полюси дійсні, кратні.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_i)^k D_i(s)},$$

де s_i не є коренем $N(s)$. Тоді:

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-s_i)} + \frac{A_2}{(s-s_i)^2} + \dots + \frac{A_p}{(s-s_i)^k} + K(s).$$

Або

$$F(s)(s-s_i)^k = A_1(s-s_i)^{k-1} + A_2(s-s_i)^{k-2} + \dots + A_{k-1}(s-s_i) + A_k + K(s)(s-s_i)^k$$

Прийmemo $s_i = a$, тоді для $s = a$

$$A_k = (s - \alpha)^k F(s) \Big|_{s=\alpha}.$$

А диференціюючи по s ліву і праву частини, відповідно отримаємо:

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= \frac{d}{ds} \left[(s - \alpha)^k F(s) \right] \Big|_{s=\alpha}; \\ A_{k-2} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s - \alpha)^k F(s) \right] \Big|_{s=\alpha}; \\ &\vdots \\ A_{k-m} &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{ds^m} \left[(s - \alpha)^k F(s) \right] \Big|_{s=\alpha}. \\ A_{k-m} &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{ds^m} \left[(s - a)^k F(s) \right] \Big|_{s=a}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти оригінал, якщо задано зображення:

$$F(s) = \frac{3s^2 + 4s + 2}{(s+1)^2(s+3)}.$$

Чисельник розкладається на множники:

$$3 \left(s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{2}{3} \right) = 3(s + 0.67 + j0.47)(s + 0.67 - j0.47).$$

Отже, корені чисельника ("нулі") не компенсуються коренями знаменника ("полюсами"). Тоді:

$$F(s) = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{(s+3)^2}.$$

Домноживши на $s+3$ вирази для $F(s)$ для $s = -3$ маємо, що

$$A_1 = \frac{3(9)^2 + 4(-3) + 2}{(-3+1)^2} = 4.25;$$

$$A_3 = \frac{3(-1)^2 + 4(-1) + 2}{-1+3} = 0.5;$$

Аналогічно, для $(s+1)^2$ дістанемо:

$$A_3 = \frac{3(-1)^2 + 4(-1) + 2}{-1+3} = 0.5,$$

отже

$$F(s) = \frac{4.25}{s+3} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{0.5}{(s+1)^2}$$

для всіх s . Наприклад, для $s=0$

$$\frac{2}{3} = \frac{4.25}{3} + A_2 + 0.5; \quad A_2 = -1.25,$$

$$F(s) = \frac{4.5}{s+3} - \frac{1.25}{s+1} + \frac{0.5}{(s+1)^2}.$$

Підставивши табличні значення оригіналів, одержимо:

$$f(t) = 4.2e^{-3t} - 1.25e^{-t} + 0.5e^{-t}, \quad t > 0.$$

Проте, цей же результат можна отримати "механічно", за формулами.

2.6.2. Випадок комплексно-спряжених полюсів. Розглянемо два найпоширеніших на практиці випадки:

- 1) комплексно-спряжені полюси;
- 2) "зсунуті" комплексно-спряжені полюси.

Випадок 1. Комплексно-спряжені полюси.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s^2 + \beta^2)D_1(s)}.$$

Якщо $s^2 + \beta^2$ не є множником $N(s)$, то $F(s)$ розкладається на множники:

$$F(s) = \frac{a + jb}{s + j\beta} + \frac{a - jb}{s - j\beta} + K(s).$$

Множники $a + jb$ та $a - jb$ шукаються за наступними формулами:

$$\begin{aligned} \alpha + j\beta &= (s + j\beta)F(s) \Big|_{s=-j\beta}; \\ \alpha - j\beta &= (s - j\beta)F(s) \Big|_{s=j\beta}. \end{aligned}$$

Оригінал знаходиться за формулою:

$$f(s) = [2a \cos \beta t + 2b \sin \beta t] - \mathbf{L}^{-1}\{K\}.$$

Приклад 9. Виконати зворотнє перетворення Лапласа функції:

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 4}.$$

Згідно вже описаного:

$$F(s) = \frac{2s + 3}{(s + 2j)(s - 2j)} = \frac{a + jb}{s + 2j} + \frac{a - jb}{s - 2j},$$

$$a + jb = (s + 2j) \frac{2s + 3}{(s + 2j)(s - 2j)} \Big|_{s=-2j} = \frac{-4j - 3}{-4j} = 1 + \frac{3}{4}j,$$

$$a - jb = 1 - \frac{3}{4}j.$$

Отже:

$$f(t) = 2 \cos 2t + 1.5 \sin 2t.$$

Випадок 2. "Зсунуті" комплексно-спряжені полюси.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2] D_1(s)} .$$

Якщо $(s + \alpha)^2 + \beta^2$ не є множником $N(s)$, то $F(s)$ розкладається на множники:

$$F(s) = \frac{a + jb}{(s + \alpha) + j\beta} + \frac{a - jb}{(s + \alpha) - j\beta} + K(s) .$$

Множники $a + jb$ та $a - jb$ шукаються за наступними формулами:

$$\begin{aligned} \alpha + j\beta &= [(s + \alpha) + j\beta] F(s) \Big|_{s = -\alpha - j\beta} ; \\ \alpha - j\beta &= [(s + \alpha) - j\beta] F(s) \Big|_{s = -\alpha + j\beta} . \end{aligned}$$

Оригінал знаходиться за формулою:

$$f(t) = e^{-\alpha t} [2a \cos \beta t + 2b \sin \beta t] + L^{-1} \{D_1\} .$$

2.6.3. Випадок кратних комплексно-спряжених полюсів. У випадку кратних комплексно-спряжених полюсів знаменник має вигляд: $(s^2 + \beta^2)^p [(s + \alpha)^2 + \beta^2]^q$. Тоді для $(s^2 + \beta^2)^p$ дістанемо:

$$f(t) = (a_1 + a_2 t + \dots + a_p t^p) \cos \beta t + (b_1 + b_2 t + \dots + b_p t^p) \sin \beta t .$$

Коефіцієнти в такого роду виразах обчислюються при допомозі обчислювальної техніки за спеціальними (прикладними) програмами чи "оболонками" (в зв'язку з громіздкістю обчислень "вручну").

Підсумок.

Інтегральні перетворення функцій є операторними перетвореннями, при допомозі яких функціям дійсної змінної

ставляться у відповідність функції комплексної змінної. За такого видимого ускладнення дістаємо й спрощення – диференціальні рівняння переходять у алгебраїчні, операція згортки переходить у операцію множення.

В техніці і науці використовують й інші інтегральні перетворення (Мелліна, Радона і ін.). Їх позірна відмінність від перетворень Фур'є, Лапласа – у використанні інших функцій (замість експоненціальних) у якості ядра. Властивості цих функцій і фізичне тлумачення перетворень нагадують розглянуті.

Важливим для практики і теорії є *кореляційне* перетворення. Аналогією за інтерпретацією для кореляційного перетворення є інтегральне перетворення, ядром якого є сама ж зсунута функція.

Розділ 3

ЗОБРАЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ КІЛ У ВИГЛЯДІ ВХІД-ВИХІД

3.1. Зображення вигляду вхід-вихід у часовій та частотній областях.

Розглядаючи систему з *зосередженими параметрами* (значення яких не залежать від просторових координат), які не залежать від часу, як і у випадку системи катетеризації (див. підрозділ 1.2, приклад 2), приймаючи до уваги лінійність, можна скласти диференціальне рівняння. У загальному випадку воно матиме вигляд:

$$\sum_{i=0}^m a_i x^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^n b_j y^{(j)}(t)$$

де верхній індекс означає порядок похідної, a_i , b_j – параметри; t – незалежна змінна (наприклад, час).

Здійснимо перетворення Лапласа лівої і правої частин рівняння. Отримаємо:

$$\left(\sum_{i=0}^m a_i s^i \right) X(s) = \left(\sum_{j=0}^n b_j s^j \right) Y(s),$$

де $X(s)$, $Y(s)$ – відповідні образи дійсних функцій $x(t)$, $y(t)$, а комплексні змінні s – у степені, що відповідає порядку похідної.

Розглянемо відношення:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=1}^m a_i s^i}{\sum_{j=1}^n a_j s^j}.$$

Зауважимо, що це дробово-раціональна, комплекснозначна функція з дійсними коефіцієнтами, що означає комплексну

спряженість чи дійсність коренів чисельника і знаменника. Цю функцію називають *функцією передачі* системи. Можна записати:

$$Y(s)=H(s)\cdot X(s) .$$

Такий запис розуміють як аналітичний вираз лапласівського образу сигналу $Y(s)$ на виході системи при подачі на її вхід сигналу, перетворення Лапласа якого є $X(s)$ (рис.3.1), коли дія системи на останній описується функцією передачі $H(s)$. А модель системи з одним входом і одним виходом називають *зображенням вигляду вхід-вихід*.

З властивостей добутку лапласівських образів (табл.2.2) маємо, що:

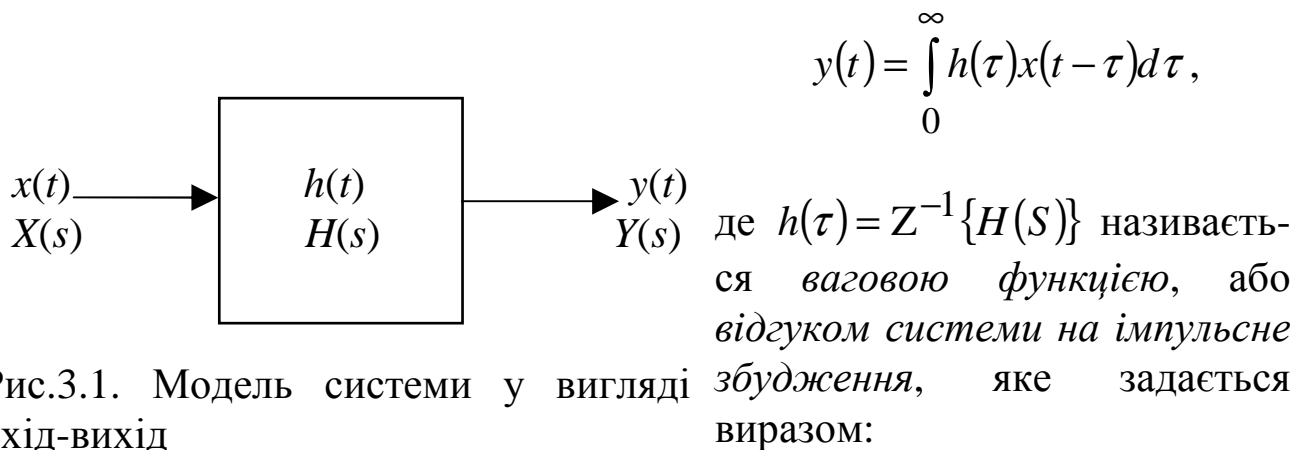


Рис.3.1. Модель системи у вигляді вхід-вихід

$$x(t) = \begin{cases} x_0 , t = 0 \\ 0 , t > 0 . \end{cases}$$

Звичайно, таке збудження є теоретичним, оскільки практично отримати його неможливо. Теоретичний сенс виразу буде пояснено у розділі 4.

Функції $H(s)$ та $h(t)$ мають важливе значення для практики. Вони повністю описують детерміновані лінійні *часово-інваріантні* (незалежні від часу) системи. Їх отримують при аналізі діючих систем, як експериментально, так і при розрахунку (синтезі), розв'язуючи відповідні задачі.

Таким чином, системи та їх ланки, що описуються диференціальними рівняннями, можна описувати функцією передачі чи функцією відгуку на імпульсне збудження.

Приклад 1. Знайдемо функцію передачі для інтегруючої RC -ланки (див.1.2, приклад 1). Диференціальне рівняння такої ланки має вигляд:

$$\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{RC}q(t) = -\frac{1}{R}U_{\text{вх}}(t).$$

Візьмемо перетворення Лапласа $L\{\cdot\}$ від правої і лівої частин даного рівняння, одержимо:

$$pQ(p) + \frac{1}{RC}Q(p) = -\frac{1}{R}U_{\text{вх}}(p),$$

де

$$s=j\omega, \quad \omega=2\pi f, \quad j=\sqrt{-1},$$

а $Q(s)$ і $U_{\text{вх}}(s)$ – лапласівські образи функцій $q(t)$ і $U_{\text{вх}}(t)$ відповідно.

Знайдемо функцію передачі системи:

$$H_C(s) = \frac{Q(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = -\frac{R^{-1}}{R^{-1}C^{-1} + s}.$$

Індекс C означає, що ця функція описує зв'язок між зарядом на конденсаторі і вхідною напругою. Щоб знайти зв'язок між вихідною та вхідною напругами, розділимо останнє рівняння на C :

$$H(p) = -\frac{1}{1 + RCp}.$$

3.2. Схема диференціального рівняння.

Фізична природа явищ, величин, зв'язків може бути самою різноманітною. Ми розглядали опис системи у вигляді диференціального рівняння (як математичну модель). Існують інші методи моделювання: фізичне, коли систему замінюють засобами такої ж природи, але зі зміною масштабів, і аналогове – коли заміна відбувається засобами іншої природи, зокрема радіоелектронними.

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$y''(t) + b_1 y'(t) + b_0 y(t) = x(t), \quad (b_2=1).$$

Зауваживши, що

$$y'(t) = \int y''(t)dt ; y(t) = \int y'(t)dt ;$$

$$y''(t) = -\frac{b_1}{b_2} y'(t) - \frac{b_0}{b_2} y(t) + \frac{1}{b_2} x(t) ,$$

бачимо, що розв'язок можна записати так:

$$y(t) = -b_1 \int_0^{\infty} y(t)dt - b_0 \int_0^{\infty} \int y''(t)dt + x(t) .$$

Якщо взяти інтегратори, помножувачі на коефіцієнт, суматори, то можна побудувати електронну модель розв'язку диференціального рівняння. На рис.3.2 приведено схему диференціального рівняння. За схемою можна отримати аналогову модель.

3.3. Деякі властивості дробово-раціональних функцій.

Спочаткуведемо кілька тотожних записів функцій передачі:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{j=0}^n b_j s^j} = k \frac{\prod_{i=0}^l (s - s_{oi})}{\prod_{j=0}^p (s - s_{*j})} .$$

де s_{oi} – корені чисельника, s_{*j} – корені знаменника.

Зауважимо, що $n \geq m$ (це необхідно для забезпечення стійкості). Поняття стійкості обговоримо пізніше. Корені чисельника називають *нулями функції передачі*, а корені знаменника – *полюсами*; як нулі, так і полюси можуть бути лише дійсними або комплексноспряженими. Часто розглядають карту нулів та полюсів системи на комплексній S -площині (рис.3.3).

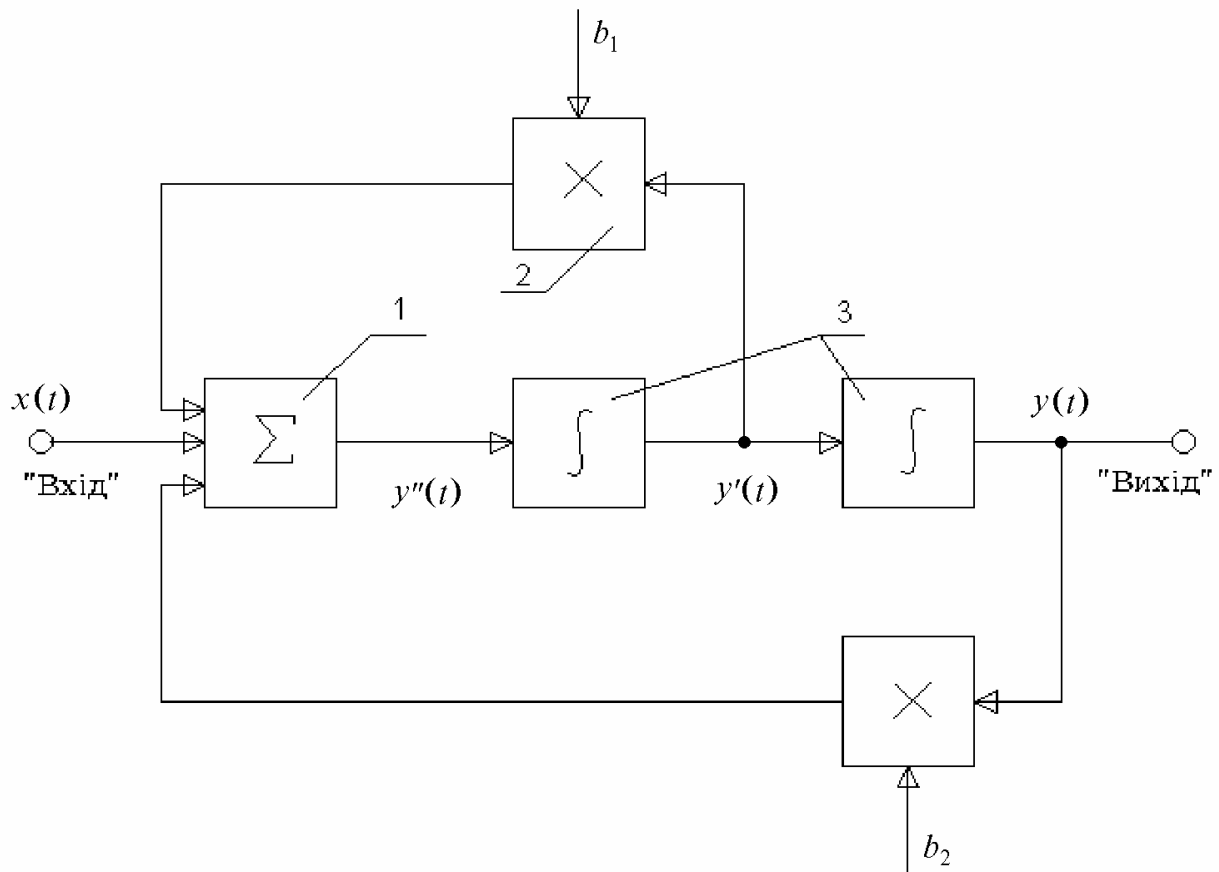


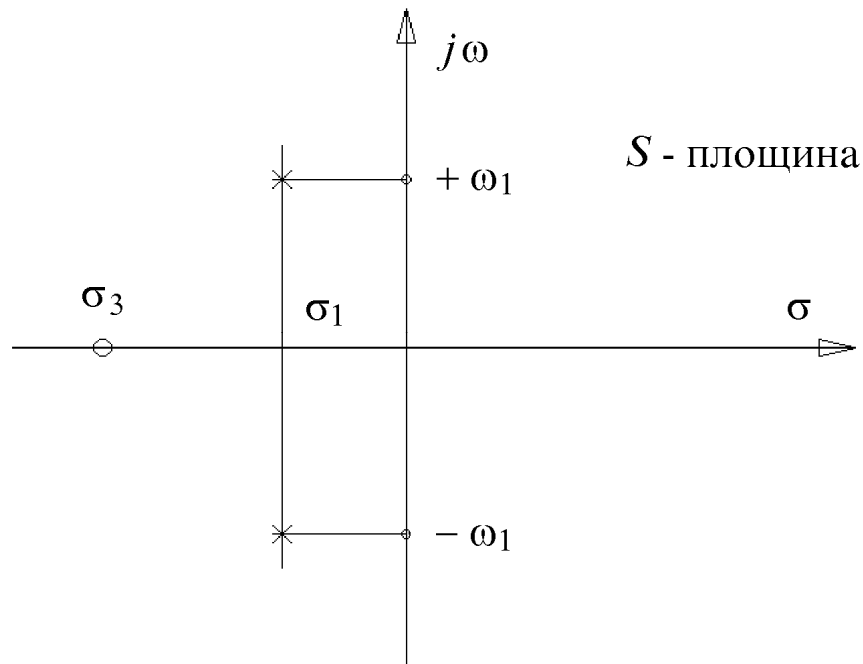
Рис.3.2. Схема диференціального рівняння (1 – суматор; 2 – помножувач; 3 – інтегратор)

Розглядають також модуль та фазу $H(s) = A(\omega) + jB(\omega)$, модуль називають *амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ)*, а фазу – *фазочастотною (ФЧХ)*:

$$|H(s)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \varphi = \angle H(s) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)};$$

або

$$H(s) = |H| e^{j\varphi} = |H| (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$



* – полюс; ° – нуль.

Рис.3.3. Карта нулів та полюсів

Можна розглядати парну H_1 і непарну H_2 частини $H(s)$:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{N_1(\omega) + j\omega N_2(\omega)}{D_1(\omega) + j\omega D_2(\omega)} = \frac{N_1 D_1 + \omega^2 D_2 N_2}{D_1^2 - \omega^2 D_2^2} + j\omega \frac{N_2 D_1 - N_1 D_2}{D_1^2 - \omega^2 D_2^2} = \\
 &= H_1(\omega) + jH_2(\omega).
 \end{aligned}$$

Звідки:

$$H(-j\omega) = H_1(\omega) - jH_2(\omega); |H(\omega)|^2 = H(-j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}; \quad H_1(\omega) = \frac{H(j\omega) + H(-j\omega)}{2};$$

$$H_2(\omega) = \frac{H(j\omega) - H(-j\omega)}{2j};$$

$$H^2(j\omega) = H^2(\omega) e^{i2\varphi(\omega)}; \quad j\varphi(\omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{H(j\omega)}{H(-j\omega)}.$$

Враховуючи вищеперераховані властивості і умову фізичної реалізованості (приведена далі), функцію передачі можна знайти за заданими її компонентами. Якщо задано модуль функції передачі, то шукаємо нулі та полюси за умовами:

а) $s^2 - \alpha^2 = (s + \alpha)(s - \alpha)$ – нулі чи полюси на дійсній осі;

б) $s^4 + \alpha s^2 + \beta$ – комплексноспряжені нулі і полюси;

в) $s^2 + \alpha^2$ – нулі та полюси на уявній осі.

Якщо задано фазочастотну характеристику, то врахувавши, що

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)},$$

маємо:

$$H(s) = \frac{1 + j \operatorname{tg} \varphi(\omega)}{1 - j \operatorname{tg} \varphi(\omega)}.$$

Якщо задано дійсну частину функції передачі, то, використавши, наприклад $H_1(s) = \frac{1}{2} [H(s) + H(-s)]$, можна знайти функцію передачі.

Приклад 2. Знайдемо модуль та фазу функції передачі RC -ланки (див. приклад 1). Для цього домножимо чисельник та знаменник одержаного виразу для $H(s)$ на комплексноспряжений до знаменника вираз :

$$\begin{aligned} H(s) &= -\frac{1}{1 + RCs} = -\frac{1}{1 + j\omega RC} = -\frac{1 - j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)} = \\ &= -\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}; \end{aligned}$$

де $s = j\omega$, $\omega = 2\pi f$, $j = \sqrt{-1}$. Тоді

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}; \varphi = \operatorname{arctg}(-\omega RC).$$

Графіки амплітудно-частотних та фазо-частотних характеристик приведені на рис.3.4, рис.3.5.

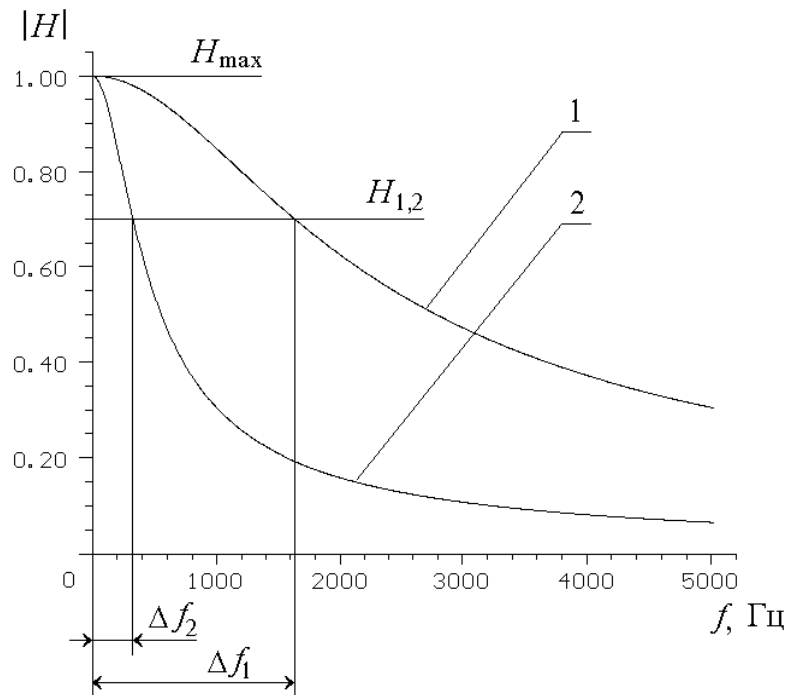


Рис.3.4. Амплітудно-частотна характеристика RC -ланки:

- 1) $R_1=1$ кОм, $C_1=0,1$ мкФ;
- 2) $R_2=1$ кОм, $C_2=0,5$ мкФ.

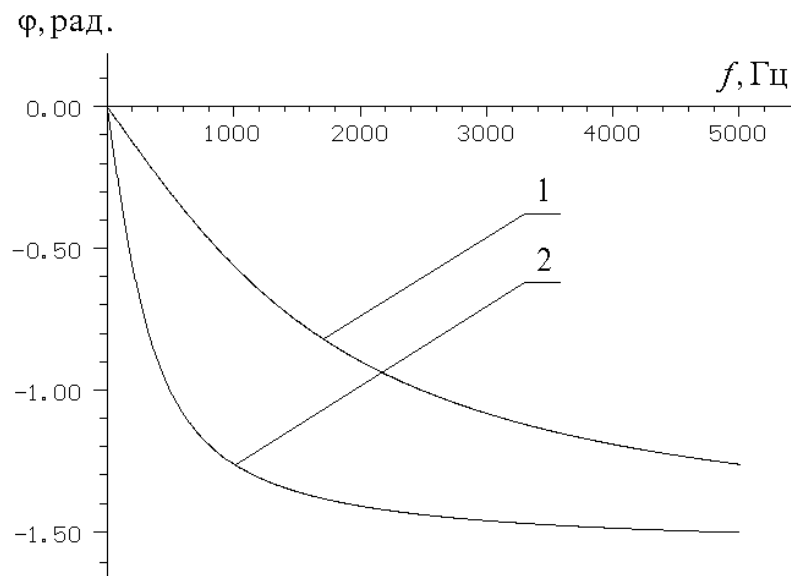


Рис.3.5. Фазо-частотна характеристика RC -ланки:

- 1) $R_1=1$ кОм, $C_1=0,1$ мкФ;
- 2) $R_2=1$ кОм, $C_2=0,5$ мкФ.

Знайдемо нулі та полюси. Дана функція передачі має нуль у нескінченності, полюс знайдемо з рівняння: $1+sRC=0$, звідки

$s = -\frac{1}{RC}$. Карти нулів і полюсів приведено на рис.3.6.

Для прикладів взято $R_1=1 \text{ кОм}$, $C_1=0,1 \text{ мкФ}$; $R_2=1 \text{ кОм}$, $C_2=0,5 \text{ мкФ}$.

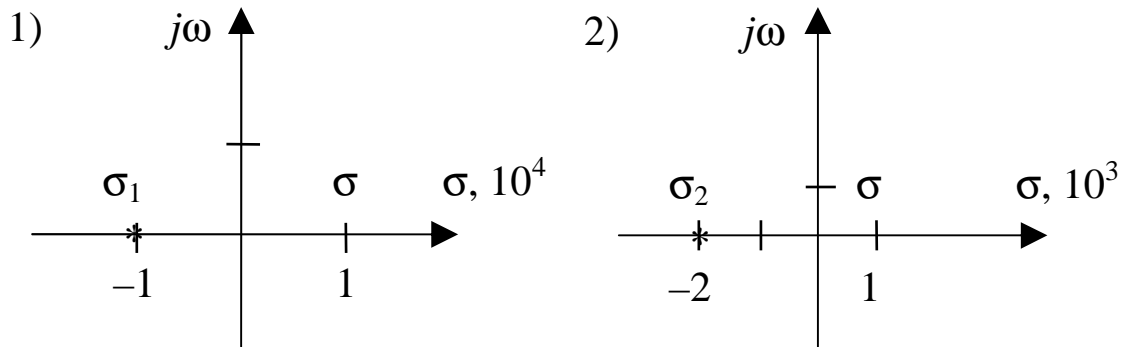


Рис.3.6. Карти нулів і полюсів:

- 1) $R_1=1 \text{ кОм}$, $C_1=0,1 \text{ мкФ}$;
- 2) $R_2=1 \text{ кОм}$, $C_2=0,5 \text{ мкФ}$.

Взявши зворотнє перетворення від функції передачі, знайдемо імпульсну вагову функцію (відгук). Для цього скористаємось табл.2.1 (розділ 2). Отримаємо: $h(t) = e^{-\alpha t}$, де $\alpha=1/RC$.

Графіки цієї функції для вже заданих R та C приведені на рис.3.7.

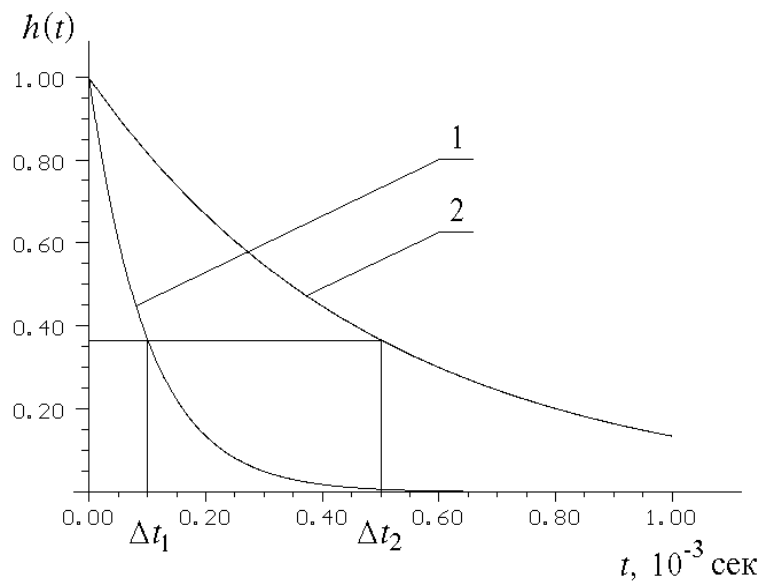
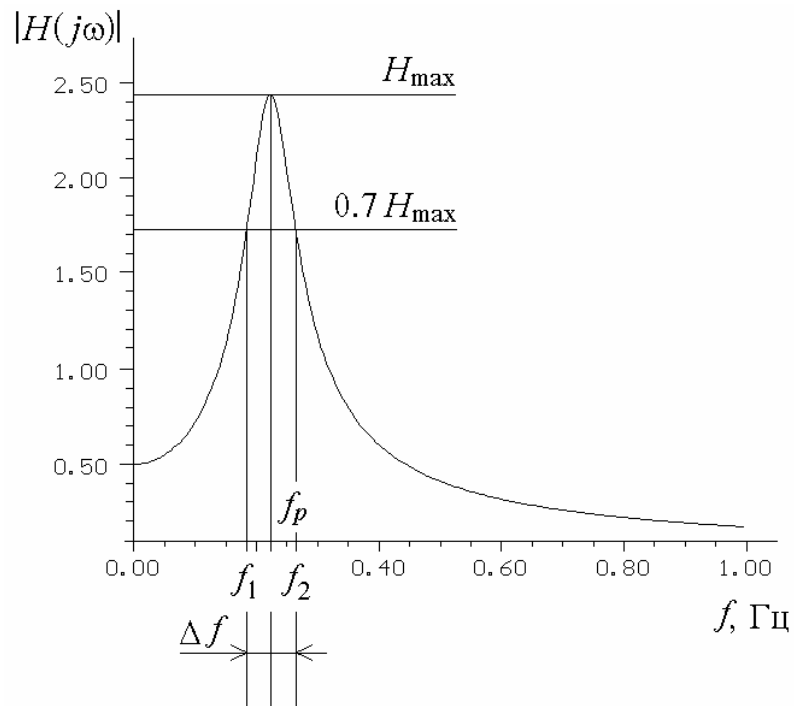


Рис.3.7. Перехідна функція RC -ланки:

- 1) $R_1=1 \text{ кОм}$, $C_1=0,1 \text{ мкФ}$;
- 2) $R_2=1 \text{ кОм}$, $C_2=0,5 \text{ мкФ}$.

3.4. Співвідношення між частотними і часовими характеристиками лінійних систем.

На рис.3.8 приведено типовий вигляд амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик, а на рис.3.9 – вагової функції лінійних систем 2-го порядку.



$f_p/\Delta f=Q$, де Q – добротність,

$$H(j\omega) = \frac{s - a}{s^2 - b_1s - b_2} .$$

Рис.3.8. Типові АЧХ, ФЧХ системи 2-го порядку

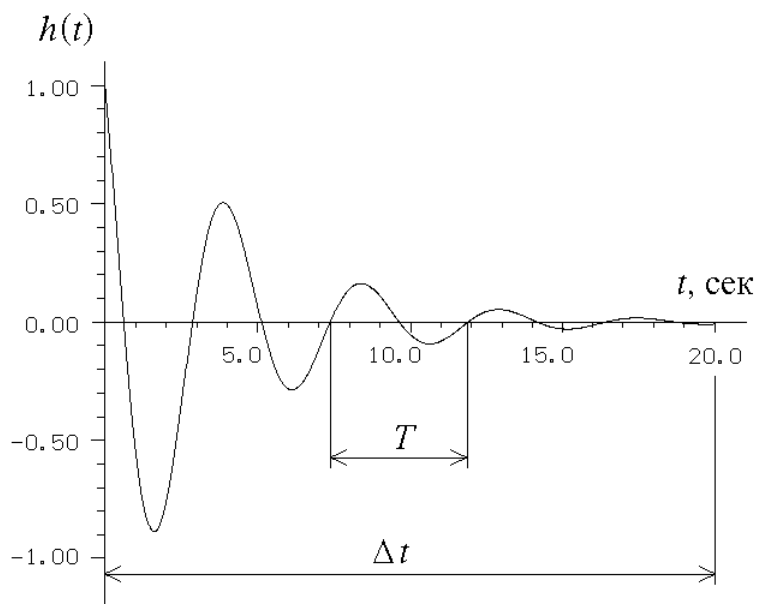
Встановлено, що співвідношення між частотними і часовими характеристиками лінійних систем має вигляд:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta\omega \cdot \tau < C ,$$

або

$$\Delta f \cdot \tau \leq C ,$$

де Δf – смуга частот, Δt – час перехідного процесу. Наприклад, Δf визначатимемо за умовою зосередженості у цій смузі частот половини енергії сигналу, а Δt – за величиною зменшення амплітуди вагової функції.



$$T=1/f_p, f_p/\Delta f=Q, \Delta t=1/\alpha, \alpha \approx 1/Q,$$

$$H(j\omega) = \frac{s-1}{s^2 + 0.5s + 2}.$$

Рис.3.9. Типова вагова функція системи 2-го порядку

Для інтегруючої ланки $\Delta t=1/\alpha=RC$, а Δf в загальному випадку шукатимемо за співвідношеннями:

$$\frac{|\Delta H|^2}{|H|^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|\Delta H|}{|H|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7, \quad |\Delta H| = 0.7|H|.$$

Таким чином, Δt залежить від вигляду вагової функції (добротності кола) і називається *постійною часу* кола (наприклад, інтегруючої ланки).

Величина константи (*const*) залежить від порядку системи (порядку диференціального рівняння чи знаменника функції передачі).

Справді, при зменшенні Δf (зростанні добротності) час збільшується, а добуток $\Delta f \cdot \Delta t$ залишається незмінним.

Приклад 3. Знайдемо для функції передачі RC -ланки (див. приклад 2) смугу частот Δf . Для цього прирівняємо вираз для модуля функції передачі, знайдений у прикладі 2, до величини $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}};$$

$$\varphi = \arct(-\omega RC)$$

звідки:

$$\omega = \frac{1}{RC},$$

для інтегруючої ланки: $\Delta f = f - 0 = f = \frac{1}{2\pi RC}$.

Знайдемо величину постійної часу Δt . Як було показано, для інтегруючої ланки $\Delta t = RC$.

Підставивши значення, знайдемо: для $R_1=1$ кОм, $C_1=0,1$ мкФ $\Delta f_1=1592$ Гц, $\Delta t_1=0,1$ мс; для $R_2=1$ кОм, $C_2=0,5$ мкФ – $\Delta f_2=212$ Гц, $\Delta t_2=0,5$ мс. Як видно, при зміні параметрів ланки змінюються смуга частот та постійна часу, проте величина їх добутку залишається сталою і залежить лише від порядку системи (в даному випадку ми маємо справу з ланкою 1-го порядку).

3.5. Фізична реалізованість систем.

При розв'язуванні задач синтезу характеристик систем з заданими властивостями виникає проблема виявлення можливості реалізації знайденої характеристики практично, тобто, можливості існування систем, які б мали бажану характеристику. Критерій фізичної реалізованості було встановлено Вінером і Пелі.

Нехай $\varphi(\omega)$ – дійсна, невід'ємна, не рівна нулю функція, визначена на $\omega \in (-\infty; \infty)$, інтегровна з квадратом в цій області. Збіжність інтегралу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \varphi(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

є достатньою і необхідною умовою існування дійсної або комплекснозначної функції $f(t)$, що рівна 0 при $\omega < s_0$ і такої, що її перетворення Фур'є

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jst} dt$$

задовільняє умові:

$$|G(s)| = \varphi(\omega) .$$

Є цілий ряд функцій передачі з інтегровним квадратом АЧХ. Якщо умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

не виконується, то $H(j\omega)$ є умовно причинною, тобто, необхідно вимагати існування сигналу

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ x(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

з перетворенням Фур'є $X(j\omega)$ таким, що тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)X(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

і

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|X(j\omega)H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty .$$

Приклад 4. Перевіримо, чи є фізично реалізовною RC-ланка, розглянута в попередніх прикладах.

Згідно критерію Пелі-Вінера, АЧХ такої ланки повинна задовільняти умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty.$$

У прикладі 2 було знайдено вираз для АЧХ RC-ланки:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}.$$

Виконаємо необхідну підстановку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \ln \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \right|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| -\frac{1}{2} \ln(1+\omega^2 R^2 C^2) \right|}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(1+\omega^2 R^2 C^2)|}{1+\omega^2} d\omega.$$

Отже, задача зводиться до дослідження на збіжність інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(1+\omega^2 \tau^2)|}{1+\omega^2} d\omega,$$

де $\tau = RC$. Доведено, що такий інтеграл збігається, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(1+\omega^2 \tau^2)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty.$$

Таким чином, RC-ланка є фізично реалізованою.

Підсумок.

Зображення кола у вигляді вхід-вихід є результатом намагання пояснити природні явища за видимими ознаками – впливом і відгуком – та невидимою причиною переходу впливу у відгук. Таке зображення

часто називають *моделлю лінійної системи у вигляді "чорного ящика"*. У радіоелектронних системах та апаратах будь-якого призначення в якості характеристики використовують функцію передачі, трактуючи її змінну як частоту коливань власної функції лінійного перетворювача. Іншою характеристикою тоді є імпульсна (вагова) функція лінійного перетворювача. Для випадку, коли фізична величина змінюється у просторі, використовують термін *"просторова частота"*. Фізичний зміст вказаних функцій дозволяє пояснювати різні явища, будувати методики досліджень як за їх виглядом, так і за значеннями їх параметрів.

Розділ 4

УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ.

4.1. Загальні положення.

У попередніх розділах обґрунтовано розклад змінної у часі величини на множині взаємнонезалежних функцій, які є власними функціями лінійних перетворень, і для періодично змінної величини послідовність коефіцієнтів розкладу є комплекснозначною. Ці послідовності використовуються у застосуваннях радіоелектронної техніки при розв'язуванні задач. Такого роду розклади дістають на основі розділення змінних, яке приводить до інтегральних Фур'є-перетворень. Але для неінтегровних з квадратом функцій доводиться розглядати інші інтегральні перетворення (перетворення Лапласа). Виникає питання – якого роду функції у цих випадках виконують роль базисних? Відповідь на таке питання одночасно розв'яже проблему зображення (розкладу) величин, значення яких відбираються в окремі моменти часу (дискретних величин).

У теорії систем та сигналів в залежності від ситуації поняття функції доводиться розуміти з різним ступенем загальності. В одних випадках розглядаються неперервні, гладкі, багато разів диференційовні функції. В інших – доводиться припускати, що функції диференційовні лише кілька разів або лише один раз.

Нагадаємо, що вкладається у поняття функції. Під *функцією* розуміють правило, згідно якого кожному x з області визначення функції X ставиться у відповідність число $y=f(x)$, що належить множині Y або $f: y=f(x), x \in X, y \in Y$. Але часом можливості опису залежності звичайними функціями не є достатніми. Наприклад, не описуються "звичайними" функціями шуми, процеси, траєкторії яких у деяких точках, або навіть на всій множині, не можна продиференціювати (процеси типу броунівського руху). Такого ускладнення можна уникнути, не розглядаючи таких процесів, але тоді багато проблем, що мають місце при системному підході, залишаються нерозв'язаними. Свого часу цю складність вдалося подолати, розширивши поняття функції шляхом введення поняття узагальнених функцій.

4.2. δ - Функція.

Узагальнені функції дістали застосування у фізиці та техніці ще до того, як було побудовано їх коректну математичну теорію. Вже цей факт характеризує їх значення для практики. Конкретною причиною для вводу поняття узагальненої функції стала реальна неможливість виміряти значення фізичної величини в точці. Практично можливо виміряти середнє значення величини в достатньо малому околі точки. Отже, використання узагальнених функцій дозволяє описати різні фізичні величини, розподілені в точці, а тому дає можливість поширити методи аналізу на більш широкий клас фізичних величин. Основна ідея побудови теорії узагальнених функцій полягає в тому, що кожній неперервній, *фінитній* (тобто рівній нулю поза деяким інтервалом) функції $\varphi(x)$ ставиться у відповідність число за допомогою фіксованої на прямій функції $f(x)$:

$$(\epsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad (4.1)$$

де (f, φ) – скалярний добуток.

Така відповідність називається *функціоналом*. Внаслідок фінитності $\varphi(x)$ фактично інтеграл береться на деякому скінченному інтервалі.

Коли функції $f(x)$ інтегровні на будь-якому скінченному інтервалі, то вони породжують узагальнені функції, які прийнято називати *регулярними* і зображати у вигляді (4.1). Всі інші функції, які не можна зобразити у вигляді (4.1), називаються *сингулярними*.

Прикладом узагальненої функції є *дельта-функція* (δ -функція):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

причому "площа" фігури, заданої функцією,

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Тоді, згідно (4.1), маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k)\varphi(x)dx = \varphi(k).$$

4.3. Властивості δ -функції.

Часто знаходять застосування такі властивості δ -функції:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)dt = f(a) - \text{вибору};$$

$$2) f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a) - \text{зсуву};$$

$$3) \delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) - \text{масштабування};$$

$$4) f(t) * \delta(t - a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t - u - a)du = f(t - a) - \text{згортки}.$$

Доведення цих властивостей розглянуто у відповідній літературі.

4.4. Дискретна δ -функція.

Функцію $\delta(n)$, $n=0,1,2,\dots$, задану виразом

$$\delta(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

називають *символом Кронекера*. Її властивості аналогічні властивостям функції $\delta(t)$:

$$1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n - k) = f(k);$$

$$2) f(n)\delta(n-k) = f(k)\delta(n-k);$$

$$3) \delta(an+b) = \delta\left(n + \frac{b}{a}\right), \frac{b}{a} \in N;$$

$$4) f(n) * \delta(n-k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(p)\delta(t-p-k) = f(n-k).$$

4.5. Моделювання δ -функції.

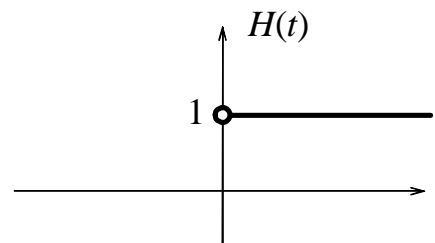
Вперше поняття δ -функції ввів П. Дірак (20-ті роки ХХ ст.) у своїх дослідженнях з квантової механіки. Проте вона була відомою і використовувалася до Дірака О. Гевісайдом. Основи теорії узагальнених функцій заклав С. Л. Соболев в 1936 р., а в 50-х роках Л. Шварц дав систематичний виклад теорії і вказав деякі з її застосувань у математичній фізиці та теорії диференціальних рівнянь. Узагальнені функції знаходять широке застосування у практичній діяльності радіоінженерів.

При моделюванні лінійних систем використовують такі операції над функціями: сумування, множення, інтегрування та оператор "згортки" функцій. Оскільки узагальнені функції фізично (в природі) не існують, то їх самих моделюють, застосовуючи розривні функції.

Використовують наступні типи розривних функцій: "прямо-кутну" $\Pi(t)$, "трикутну" $\Lambda(t)$, а також $Sinc(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ і функцію одиничного стрибка (або функцію Гевісайда) – $H(t)$. Їх графіки приведено на малюнках:

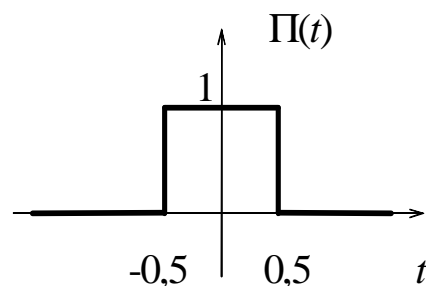
а) функція одиничного стрибка (функція Гевісайда):

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



б) "прямокутна" функція $\Pi(t)$:

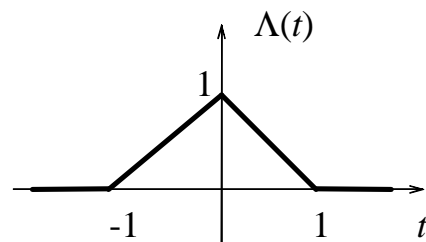
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5; \\ 0, & |t| > 0.5. \end{cases}$$



Площа, обмежена цією функцією, рівна одиниці.

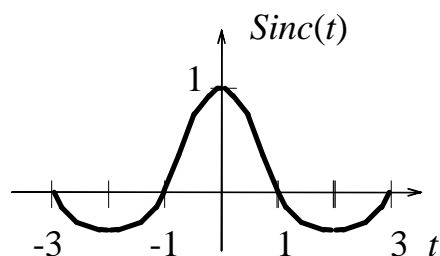
в) "трикутна" функція $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$



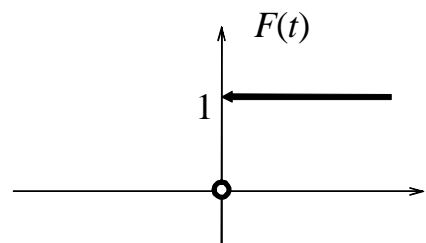
г) функція $Sinc(t)$:

$$Sinc(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad |t| < \infty.$$

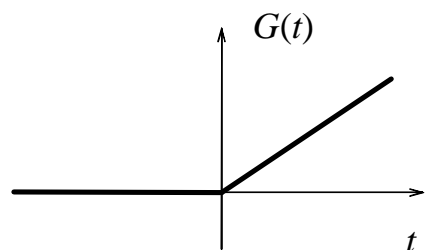


д) функція $F(t)$:

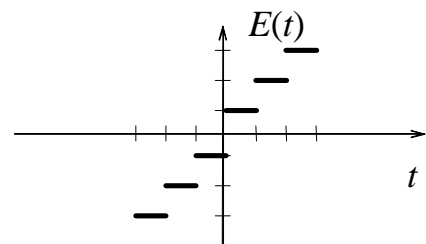
$$F(t) = 1 - H(-t).$$



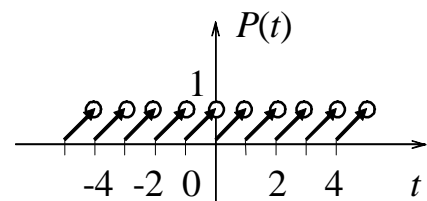
е) функція $G(t)$:



є) ціла частина числа $E(t)$:

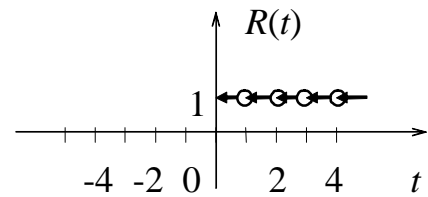


ж) дробова частина числа $P(t)$:



з) функція $R(t)$:

$$R(t) = F\{P(t)\}.$$



Для узагальнених функцій означено операції додавання і множення на число.

Для регулярних узагальнених функцій ці операції збігаються з операціями над "звичайними" функціями.

Якщо α – нескінченно диференційовна функція, то природньо означити добуток функції α на узагальнену функцію f формулою:

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha \varphi).$$

Добуток двох узагальнених функцій не вводиться.

Розглянемо операцію диференціювання узагальнених функцій. Для цього вяснимо, що являє собою похідна звичайної неперервно диференційовної на осі функції f , коли розглядати її як функціонал (f', φ) :

$$U(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx,$$

тоді

$$\frac{dU(\varphi)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)df(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Звідси похідна від узагальненої функції:

$$\frac{dU}{dx}(\varphi) = -U(\varphi').$$

Із означення похідної узагальненої функції випливає:

- будь-яка узагальнена функція має похідні всіх порядків;
- якщо послідовність $f_n \rightarrow f$, то (f_n, φ) існує для всіх φ і тоді $f_n' \rightarrow f'$, тобто будь-який збіжний ряд узагальнених функцій можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Функції $\Pi(t)$, $\Lambda(t)$ та $Sinc(t)$ можна використати для моделювання δ -функції. Розглянемо модель δ -функції, в якій застосована функція $\Pi(t)$. Для цього розглянемо вираз:

$$p_1(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

який буде математичною моделлю δ -функції, якщо він задовільнятиме умовам, які означають δ -функцію, а саме:

1. $\delta(-t) = \delta(t)$.

2. $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$

3. $\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Отже, маємо:

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \Pi(t/\varepsilon) = p_1(t) = p_1(-t)$ (див. означення функції $\Pi(t)$);

2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi(t/\varepsilon) = \infty$;

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \Pi(t/\varepsilon) dt = \frac{1}{\varepsilon} t \Big|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = 1$.

Таким чином, функція $p_1(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi(t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ може служити моделлю δ -функції.

В теорії сигналів та систем розглядаються функції розподілу:

а) енергії сигналу по частотах $E(f)$;

б) потужності сигналу по частотах $P(f)$;

в) густини імовірності появи сигналу.

Узагальнені функції пов'язані з функціями розподілу: узагальнена функція – це також розподіл фізичної величини (але не на відрізку, а в точці). Наприклад, лінійна густина розподілу заряду $q(l)$ дасть нам повний заряд Q при інтегруванні $q(l)$ по l :

$$Q = \int_{-a}^b q(l)dl.$$

Якщо мають місце точкові заряди, то для їх опису застосовують δ -функцію.

Приклад 1. Лінійна густина розподілу точкового заряду задається виразом

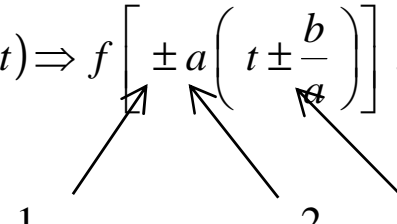
$$q(l) = \begin{cases} 2 + 0.5\delta(l-1) + 4\delta(l), & -5 < l < 2; \\ 0, & l < -5, \quad l > 2. \end{cases}$$

Тоді

$$Q = \int_{-5}^2 [2 + 0.5\delta(l-1) + 4\delta(l)]dl = 2l \Big|_{-5}^2 + 0.5 \Big|_{l=1}^2 + 4 \Big|_{l=0}^2 = 18.5 \text{ (кулона)}.$$

4.6. Перетворення "зсуву", "стиску-розтягу", "віддзеркалення".

Ці перетворення застосовують при моделюванні сигналів і систем, в тому числі при допомозі узагальнених функцій (δ -функції). Нагадаємо їх ще раз:

$$f(t) \Rightarrow f \left[\pm a \left(t \pm \frac{b}{a} \right) \right],$$


де 1 – "віддзеркалення" (від осі ординат), 2 – "стиск-розтяг" (по осі абсцис), 3 – "зсув" (вліво чи вправо по осі абсцис).

На рис.4.1 приведено приклади виконання перетворень "зсуву", "стиску-розтягу" та "віддзеркалення" для деякої початкової функції $f(t)$.

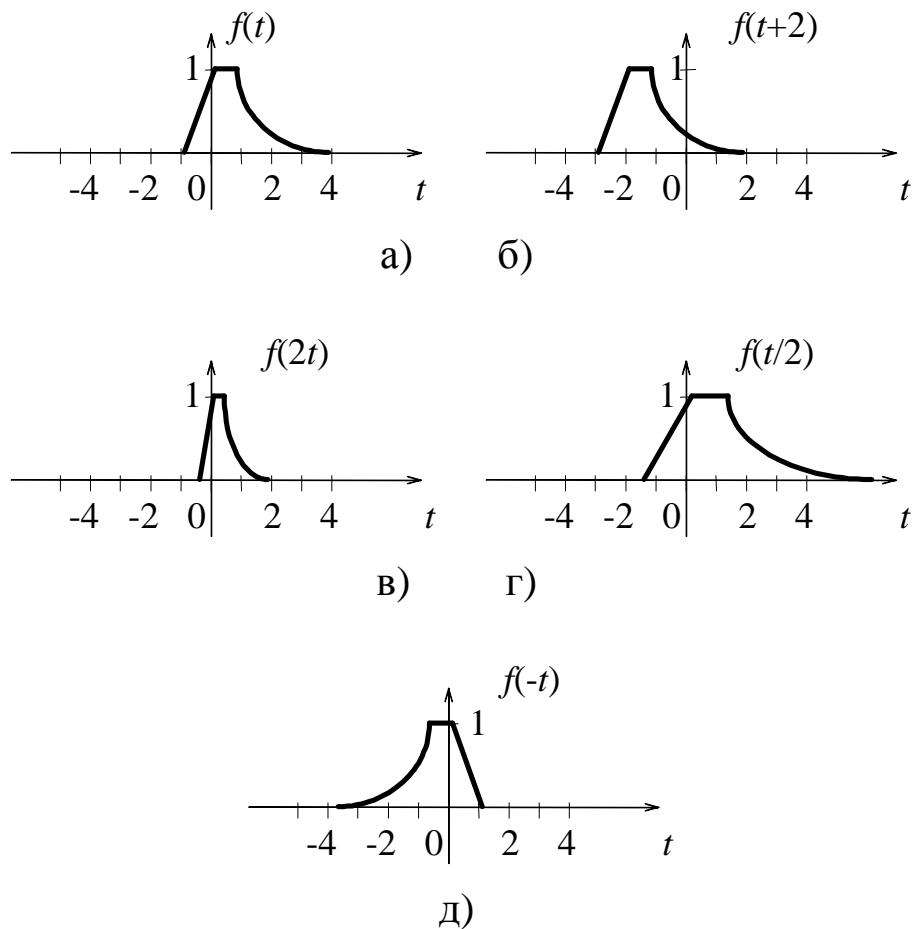


Рис.4.1. Приклади перетворень "зсуву", "стиску-розтягу", "віддзеркалення": а) початкова функція; б) "зсув"; в) "стиск"; г) "розтяг"; д) "віддзеркалення".

Більш детально ознайомитись із властивостями цих перетворень можна у відповідній літературі.

4.7. Модель похідної δ -функції.

Моделлю похідної δ -функції може бути будь-яка функція, що задовільняє умові:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0).$$

Зокрема, похідна від функції, що є моделлю δ -функції, є математичною моделлю похідної δ -функції.

Покажемо, що похідна від функції $p(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \Lambda\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right]$ є

моделлю $\delta'(t)$.

Візьмемо будь-яку диференційовну функцію $f(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)p'(t)dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\varepsilon}^0 \frac{1}{\varepsilon^2} f(t)dt + \int_0^{\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) f(t)dt \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} f\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = -f'(0). \end{aligned}$$

Властивості похідної від δ -функції:

$$1) f(t)\delta'(t) = -f'(0)\delta(t);$$

$$2) \delta'(at+b) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \delta'\left(t + \frac{b}{a}\right), & a > 0; \\ -\frac{1}{a^2} \delta'\left(t + \frac{b}{a}\right), & a < 0; \end{cases}$$

$$3) \int_{-\infty}^t \delta'(p-a)dp = \begin{cases} \delta(t-a), & t > a; \\ 0, & t \leq a. \end{cases}$$

Приклад 2. Дано $f(x)=H(x)$. Знайти $H'(x)$ (похідну від функції Гевісайда).

Функція Гевісайда $f(x)$ визначає наступний функціонал

$$(f, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx ,$$

де $\varphi(x)$ – узагальнена функція. Тому

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^{\infty} = -[\varphi(\infty) - \varphi(0)] = \varphi(0)$$

(функція $\varphi(x)$ за означенням фінітна). Звідси похідна функції Гевісайда є δ -функцією.

Приклад 3. Коли функція $f(x)$ має в точках x_k , $k=1, 2, \dots$ скачки h_1, h_2, \dots і диференційовна в інших точках, то похідна від неї є сумою $f'(x)$ (у точках, де вона існує), і виразу

$$\sum_k h_k \delta(x - x_k).$$

Приклад 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ має сумою функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x \leq \pi; \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \pi \leq x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Узагальнена похідна від неї (див. приклад 3) рівна

$$-\frac{1}{2} + p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Це узагальнена функція. Почленно диференціюючи ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$,

дістанемо розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$. Але щодо збіжності у сенсі уза-

гальнених функцій, то він має сумою вищезнайдену узагальнену функцію.

Підсумок.

Узагальнені функції, на відміну від "звичайних" функцій, дають змогу описати різні фізичні величини, розподілені в точці. Такі величини називаються ще *дискретними*. Тобто, узагальнені функції описують дискретні величини, тоді як "звичайні" – лише неперервні.

З дискретними фізичними величинами досить часто приходиться зустрічатися на практиці. Типовими прикладами дискретних величин є імпульси різної природи, частіше всього електричні.

Але узагальнені функції не тільки описують величини, розподілені в точці. Весь арсенал математичних методів, зокрема методів аналізу, які були розроблені для "звичайних" функцій, з таким же успіхом можна застосувати і до імпульсів, "розривних" сигналів за допомогою узагальнених функцій. Наприклад, використовуючи функцію Гевісайда та інтеграл Стільтьєса можемо одержати таких же результатів як і при використанні дельта-функції та інтегралу Рімана. Деколи математичний апарат на основі поняття інтегралу Стільтьєса зручніший на практиці.

Таким чином, ми одержуємо можливість досліджувати більш широкий клас фізичних величин та явищ, використовуючи узагальнені функції.

Розділ 5

z - ПЕРЕТВОРЕННЯ

5.1. Загальні положення.

При обробці сигналів засобами електронно-обчислювальної техніки неперервний сигнал потрібно "оцифрувати", тобто перетворити з неперервного вигляду в "цифровий". "Оцифровку" сигналу можна описати як відбір його значень у визначені моменти часу (дискретизацію) та кодування (квантування – ставлення у відповідність отриманим значенням вибраних фіксованих значень).

Розглянемо сигнал як неперервну детерміновану функцію часу $f(t)$. Тоді дискретизовану функцію можемо записати у вигляді:

$$f^*(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_B),$$

або

$$f^*(nT) = \int_0^{\infty} f(t)\delta(t - nT_B)dt,$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція.

Такий дискретизований сигнал отримується шляхом відбору значень неперервного сигналу при допомозі комутації ключем K з частотою дискретизації f_D (рис.5.1).

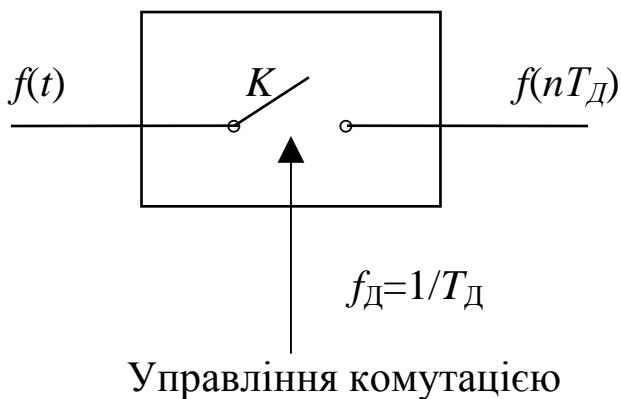


Рис. 5.1. Дискретизація неперервного сигналу

Перетворення Лапласа дискретизованого сигналу $f(nT_D)$, $m = \overline{0, \infty}$, можна розглядати як перетворення Лапласа функції, що складається з послідовності зміщених дельта-функцій. Розкладемо функцію $f(t)$ у степеневий експоненціальний ряд:

$$f(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \dots + a_n e^{s_n t} = \sum_{k=1}^n a_k e^{s_k t},$$

де $t > 0$, $s_k \in R$. Тоді дискретизований сигнал матиме вигляд:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k e^{s_k t} \cdot \delta(t - nT), \quad m = \overline{0, \infty}.$$

Застосовуючи до цієї функції перетворення Лапласа, на основі фільтруючої властивості дельта-функції і її перетворення Лапласа

$$L\{\delta(t - nT)\} = e^{snT},$$

а також, прийнявши до уваги відому тотожність:

$$1 + a_k + a_k^2 + \dots = \frac{1}{1 - a_k},$$

одержимо вираз:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 - e^{(s_k - s)T_D}},$$

k -тий член якого

$$F_k(s) = \frac{a_k}{1 - e^{(s_k - s)T_D}}. \quad (5.1)$$

Зробимо заміни: $z = e^{sT_D}$, $\beta = e^{s_k T_D}$. Тоді з (5.1) отримаємо:

$$F_k(z) = \frac{a_k}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z a_k}{z - \beta}.$$

Таким чином, для випадку інваріантних у часі дискретних сигналів отримано вираз, подібний до виразів, які зустрічаються у випадку перетворення Лапласа неперервних сигналів. Виникає необхідність в апараті z -перетворення аналогічного перетворенню Лапласа.

5.2. Означення z-перетворення.

Нехай $\{f_n\}_0^\infty$ – послідовність скалярних величин (наприклад, дискретизований сигнал). Тоді z-перетворення цієї послідовності являє собою функцію комплексної змінної z:

$$F(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} . \quad (5.2)$$

z-перетворення прийнято позначати $Z\{f_n\} \equiv F(z)$. Функція f_n повинна задовільняти умові:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty .$$

Для степеневого ряду (5.2) за теоремою Коші-Адамара визначається радіус його збіжності. За цією теоремою ряд (5.2) збігається абсолютно в кожній точці круга $|z| < R_f$, де R_f – радіус збіжності степеневого ряду, рівний

$$R_f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|f_n|} ,$$

де *sup* – найменша верхня грань множини значень (*supremum*).

Степеневий ряд збігається абсолютно для $|z| > R_f$ і рівномірно для $|z| > R$, де $R > R_f$. $F(z)$ є аналітичною функцією в області $|z| > R_f$.

Розглянемо приклади виконання z-перетворення за означенням.

Приклад 1.

а) $f_1(n) = 0.5^n$.

$$F_1(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.5^2 z^{-2} + \dots + 0.5^n z^{-n} + \dots = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

(як сума степеневого ряду);

б) $f_2(n) = 2\delta(n) - 3\delta(n-2) + 4\delta(n-5)$.

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [2z^{-n} \delta(n) - 3z^{-n} \delta(n-2) + 4z^{-n} \delta(n-5)] = 2 - 3z^{-2} + 4z^{-5};$$

$$в) f_3(n)=2+4(-3)^n.$$

$$F_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2+4 \cdot (-3)^n) \cdot z^{-n} = \frac{2z}{z-1} + \frac{4z}{z+3} = \frac{6z^2 + 2z}{(z-1)(z+3)}.$$

Аналіз та синтез дискретних систем в області z -зображень більш простий у порівнянні з аналізом та синтезом в основній області, що і визначає практичну цінність z -перетворення.

5.3. Знаходження z -перетворення методом зведення до суми "табличних" перетворень.

У табл.5.1 приведені z -перетворення деяких функцій. Більш повна таблиця перетворень приведена у відповідній літературі. Розглянемо приклади знаходження z -перетворення шляхом зведення до суми "табличних" перетворень.

Табл. 5.1. Таблиця z -перетворень деяких функцій.

$f(n)$	$F(z)$
a^n , або $a^n H(n)$	$\frac{z}{z-a}, z > a $
$\delta(n)$	1, для всіх z
$H(n)$ або 1	$\frac{1}{z-1}, z > 1$
na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}, z > a $
n	$\frac{z}{(z-1)^2}, z > 1$
$n(n-1)a^{n-2}$	$\frac{2z}{(z-a)^3}, z > a $
$n(n-1)$	$\frac{2z}{(z-a)^3}, z > a $
n^2	$\frac{2z}{(z-a)^3}, z > a $
$n(n-1)(n-2)a^{n-3}$	$\frac{6z}{(z-a)^4}, z > a $

Приклад 2.

$$а) f(n)=6n^2 \cdot 0.8^n.$$

Додатково перетворимо функцію $f(n)$ задля зведення її до вигляду, зручного для використання таблиці:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 6n^2(0.8)^n = 6[n(n-1) + n]0.8^n = \\ &= 6n(n-1)0.8^2 0.8^{n-2} + 6n(0.8)(0.8)^{n-1}. \end{aligned}$$

Згідно табл. 5.1

$$\mathbf{Z}\{6n(n-1)(0.8)^{n-2}\} = \frac{12z}{(z-0.8)^3},$$

тоді одержимо:

$$\mathbf{Z}\{f(n)\} = \frac{12(0.8)^2 z}{(z-0.8)^3} + \frac{6(0.8)z}{(z-0.8)^2},$$

або

$$\mathbf{Z}\{f(n)\} = \frac{4.8z^2 + 3.8z}{(z-0.8)^3}$$

$$\text{б) } f(n) = (a_1 + a_2n + a_3n^2)\alpha^n.$$

Виконавши перетворення

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2n + a_3n^2)\alpha^n &= a_1\alpha^n + a_2\alpha n\alpha^{n-1} + \\ &+ a_3n(n-1)\alpha^2\alpha^{n-2} + a_3n\alpha\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

за табл.5.1 одержимо:

$$F(z) = \frac{a_1z}{z-a} + \frac{(a_2a + a_3a)z}{(z-a)^2} + \frac{2a_3a^2z}{(z-a)^3} = \frac{N(z)}{(z-a)^3}.$$

5.4. Використання властивостей z -перетворення.

В табл.5.2 приводяться без доведення основні властивості z -перетворення. Доведення цих властивостей розглянуто у відповідній літературі.

Табл. 5.2. Основні властивості z -перетворення.

№	$f(n)$	$F(z)$	Назва
1.	$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$	Масштабування
2.	$f(n-1)H(n-1)$ $f(n-k)H(n-k)$	$z^{-1}F(z)$ $z^{-k}F(z)$	Зсуву
3.	$f(n)H(n) * g(n)H(n) =$ $= \left[\sum_k f(k) \cdot g(n-k) \right] \cdot H(n)$	$F(z) \cdot G(z)$	"Згортки"
4.	$a \cdot f(n) + b \cdot g(n)$	$a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$ $\forall z > \max R_f, R_g$	Лінійності
5.	$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$		Початкове значення

Розглянемо, як і у випадку перетворення Лапласа, використання даних властивостей при знаходженні z -перетворення.

Приклад 3.

a) $(-2)^n H(n)$.

Так як z -перетворення функції Хевісайда $\mathbf{Z}\{H(n)\} = \frac{z}{z-1}$,

ТО

$$\mathbf{Z}\{(-2)^n H(n)\} = \frac{z/-2}{(z/-2)-1} = \frac{z}{z+2}.$$

(Тут використана властивість масштабування);

$$\text{б) } 2^n H(n) * (n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} H(n-1).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\left\{2^n \cdot H(n) * (n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} H(n-1)\right\} &= \mathbf{Z}\left\{2^n \cdot H(n)\right\} \mathbf{Z}\left\{(n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} H(n-1)\right\} = \\ &= \frac{z}{z-2} \cdot z^{-1} \mathbf{Z}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{z}{z-2} \cdot z^{-1} \left(\frac{1}{3}\right) \frac{z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{z}{z-2} \frac{1}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{z}{(z-2)\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} \end{aligned}$$

(використана властивість "згортки").

5.5. Зворотнє z -перетворення.

Зворотнє z -перетворення (аналогічно перетворенню Лапласа) зводиться до інтегрування на комплексній площині, яку називають *z -площиною*:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\Gamma} F(z) \cdot z^{n-1} dz, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.3)$$

де Γ – довільна замкнута спрямлена крива, яка охоплює початок координат і лежить поза кругом $|z|=R>R_f$. Інтегрування відбувається проти годинникової стрілки (тоді змінна інтегрування z змінюється від $c-j\pi$ до $c+j\pi$).

Зворотнє z -перетворення позначають $\mathbf{Z}^{-1}\{f(z)\}$.

Приймаючи до уваги, що функція $F(z) \cdot z^{-1}$ є аналітичною поза контуром Γ і на самому контурі Γ , для обчислення інтегралу (5.3) можна застосовувати теорему про лишки, за якою маємо:

$$f(n) = \sum_{k=1}^l \operatorname{Res} s F(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_k}, \quad (5.4)$$

де $z=z_k$ – полюс функції $F(z) \cdot z^{n-1}$, що лежить всередині контуру Γ .

Лишок в простому полюсі визначається за формулою:

$$\operatorname{Res} s F(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_k} = \lim_{z \rightarrow z_k} \left\{ F(z) \cdot (z - z_k) \cdot z^{n-1} \right\}. \quad (5.5)$$

Лишок в r_k -кратному полюсі визначається за формулою:

$$\operatorname{Res} s F(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{(r_k - 1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{r_k-1}}{dz^{r_k-1}} \left\{ F(z) \cdot (z - z_k)^{r_k} \cdot z^{n-1} \right\}. \quad (5.6)$$

З формули (5.3) випливає, що при умові $R_f < \infty$ z -перетворення є взаємнооднозначним відображенням простору послідовностей на множину функцій, аналітичних в деякому околі нескінченності.

Зворотнє z -перетворення можна виконувати шляхом тотожних перетворень, «підгоном» $F(z)$ під табличний вигляд. Розглянемо приклади виконання зворотнього z -перетворення.

Приклад 4.

$$\text{а) } F(z) = \frac{z}{z + 0.6}.$$

Використавши табл.5.1, запишемо:

$$z^{-1} \{F(z)\} = f(n) = (-0.6)^n \cdot H(n).$$

$$\text{б) } F(z) = \frac{z+2}{z+0.6}.$$

Розкладемо $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z+2}{z+0.6} = \frac{z}{z+0.6} + \frac{2}{z+0.6},$$

і, використавши табл.5.1, отримаємо:

$$f(n) = (-0.6)^n \cdot H(n) + 2 \cdot (-0.6)^{n-1} H(n-1).$$

Для лінійних дискретних кіл зображення $F(z)$ функції передачі є дробово-раціональною функцією:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Тут важливі два випадки:

1) якщо $m=n$, то $F(z)$ розкладається на множники:

$$F(z) = \frac{A_1 z}{(z - \alpha_1)} + \frac{A_2 z}{(z - \alpha_1)^2} + \dots \quad (5.7)$$

де $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ – дійсний, кратний полюс функції $F(z)$.

$$\begin{aligned} \frac{A_1 z}{(z - \alpha_1)} &\Leftrightarrow A_1 (\alpha_1)^n H(n); \\ \frac{A_2 z}{(z - \alpha_1)^2} &\Leftrightarrow A_2 n (\alpha_1)^{n-1} H(n); \\ &\vdots \\ \frac{A_p z}{(z - \alpha_1)^{p+1}} &\Leftrightarrow \frac{A_p}{p!} (n)_p (\alpha_1)^{n-p} H(n), \end{aligned} \quad (5.8)$$

де p – кратність кореня, $(n)_{p-1} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+2)$;

2) якщо $m < n$, то $F(z)$ розкладається на множники:

$$F(z) = \frac{A_1}{(z - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(z - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{B_1}{(z - \alpha_2)} + \frac{B_2}{(z - \alpha_2)^2} + \dots, \quad (5.9)$$

і ми одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{(z - \alpha_1)} &\Leftrightarrow A_1 (\alpha_1)^{n-1} H(n-1); \\ \frac{A_2}{(z - \alpha_1)^2} &\Leftrightarrow A_2 (n-1)(\alpha_1)^{n-2} H(n-1); \\ &\vdots \\ \frac{A_p}{(z - \alpha_1)^p} &\Leftrightarrow \frac{A_p}{(p-1)!} (n-1)_{p-1} (\alpha_1)^{n-p} H(n-1) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Приклад 5. Знайти оригінал $f(n)$ функції за її зображенням:

$$\text{а) } F(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z + 0.5) \cdot (z - 1)},$$

Для того, щоб знайти $f(n)$, використаємо формули (5.7) і (5.8).

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{A_1 z}{z + 0.5} + \frac{A_2 z}{z - 1}; \\ F(z) &= \frac{-2.33z}{z + 0.5} + \frac{3.33z}{z - 1}, \end{aligned}$$

тоді

$$f(n) = -2.33(-0.5)^n H(n) + 3.33 H(n).$$

$$\text{б) } F(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)(z-0.5)^2}.$$

Для того, щоб знайти $f(n)$, використаємо формули (5.9) і (5.10).

$$F(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)(z-0.5)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-0.5} + \frac{A_3}{(z-0.5)^2} = \frac{-0.44}{z+1} + \frac{A_2}{z-0.5} + \frac{0.83}{(z-0.5)^2},$$

Якщо $z = 0$, то

$$-0.44 - 2A_2 + 3.32 = 0;$$

$$A_2 = 1.44.$$

Отже,

$$f(n) = -0.44(-1)^{n-1} H(n-1) + 1.44(0.5)^{n-1} H(n-1) + 0.83(n-1)(0.5)^{n-2} H(n-1)$$

$$\text{в) } F(z) = \frac{z}{(z - e^{-\beta})^2}.$$

Визначимо за формулою (5.6) лишок у точці $z_1 = e^{-\beta}$:

$$\text{Res } F(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \frac{z \cdot z^{n-1}}{(z - z_1)^2} (z - z_1)^2 = \lim_{z \rightarrow z_1} n z^{n-1} = n \cdot e^{-\beta(n-1)}.$$

Використавши формулу (5.4), отримаємо:

$$f(n) = n e^{-\beta(n-1)}.$$

$$\text{г) } F(z) = \frac{a_1 z + a_2}{(z - e^{-\beta}) \cdot (z - e^{-\alpha})}.$$

Знайдемо за формулою (5.5) лишки в точках $z_1 = e^{-\beta}$ та $z_2 = e^{-\alpha}$:

$$\operatorname{Re} s \left. \frac{(a_1 z + a_2) \cdot z^{n-1}}{(z - z_1) \cdot (z - z_2)} \right|_{z = z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[\frac{(a_1 z + a_2) \cdot z^{n-1}}{z - z_2} \right] = \frac{(a_1 z_1 + a_2) \cdot z^{n-1}}{z_1 - z_2},$$

$$\operatorname{Re} s \left. \frac{(a_1 z + a_2) \cdot z_1^{n-1}}{(z - z_1) \cdot (z - z_2)} \right|_{z = z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[\frac{(a_1 z + a_2) \cdot z^{n-1}}{z - z_2} \right] = \frac{(a_1 z_1 + a_2) \cdot z^{n-1}}{z_1 - z_2},$$

За формулою (5.4) отримаємо шуканий оригінал:

$$f(n) = \frac{(a_1 z_1 + a_2) \cdot z_1^{n-1}}{z_1 - z_2} + \frac{(a_1 z_1 + a_2) \cdot z_2^{n-1}}{z_2 - z_1} =$$

$$= \frac{(a_1 e^{-\beta} + a_2) \cdot e^{-\beta(n-1)}}{e^{-\beta} - e^{-\alpha}} + \frac{(a_1 e^{-\alpha} + a_2) \cdot e^{-\beta(n-1)}}{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}.$$

Підсумок.

Проводячи аналіз чи синтез радіоелектронних засобів, які мають справу з дискретними сигналами, ми зустрічаємось з необхідністю використання z -перетворення. Наприклад, цифровий сигнал – це, перш за все, сигнал, дискретизований у часі. "Класичний" математичний апарат перетворення Лапласа, такий ефективний при дослідженні неперервних сигналів, не придатний для випадку їх дискретності внаслідок громіздкості. Тому було розроблено методи z -перетворення.

z -Перетворення багато в чому подібне до перетворення Лапласа. Обидва вони дозволяють проводити аналіз чи синтез систем у комплексній області зображень, що часто набагато простіше в порівнянні з аналізом чи синтезом у дійсній основній області. Обидва мають однакові властивості, і, навіть, їхні табличні значення в дечому подібні. Корінна відмінність полягає в тому, що перше з них властиве для випадку дискретних сигналів, тоді як друге використовується в неперервному випадку. Тобто, ми маємо два зручних методи для дослідження сигналів різної природи: неперервних – перетворення Лапласа, і дискретних – z -перетворення.

Розділ 6

ЗОБРАЖЕННЯ ДИСКРЕТНИХ КІЛ І СИГНАЛІВ

6.1. Різницеві рівняння.

Можна вказати по крайній мірі на дві причини, що спонукали до розвитку так званих різницевих методів. По-перше, не завжди можна отримати розв'язок диференціального рівняння в аналітичному (формульному) вигляді. По-друге, ефективність сучасної обчислювальної техніки настільки висока, що деколи розв'язувати рівняння немає необхідності. Варто шукати його розв'язки числовими способами. Правда, це не означає, що немає потреби довести існування, єдиність та залежність розв'язку від усіх коефіцієнтів. Різницеві рівняння для звичайних диференціальних рівнянь є ефективними моделями, за якими в свою чергу легко скласти алгоритми та написати програми для реалізації їх засобами обчислювальної техніки. Тобто, вони є дискретними моделями звичайних диференціальних рівнянь і служать для побудови аналогових моделей об'єктів, які ними описуються.

Розглянемо дискретні значення y_i , $i=0,1,2,\dots$ деякої величини $y(t)$, рахуючи, що вони беруться у моменти часу t_i . Прийmemo, що $t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{const}$. Величина $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називається *різницею першого порядку*. Відповідно, величину

$$\Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

називають *різницею другого порядку*. Нарешті

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i)$$

– *різниця порядку n* . Рівняння:

$$\alpha_0 \Delta^n y_i + \alpha_1 \Delta^{n-1} y_i + \dots + \alpha_{n-1} \Delta y_i + \alpha_n y_i = f_i, \alpha_0 \neq 0, \alpha_i \in R, i = \overline{1, n}$$

називається *різницеvim рівнянням n -го порядку*. Воно аналогічне звичайному диференціальному рівнянню:

$$\alpha_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_n y(t) = f(t), \alpha_0 \neq 0.$$

Якщо $f_i=0$, то рівняння називають *однорідним*. Якщо $\alpha_i=const$, $i=0,1,\dots,n$, то це – *рівняння з постійними коефіцієнтами*. Від різницевого рівняння до диференціального можна перейти при допомозі граничного переходу. Наприклад:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t); \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=t_i} \approx \frac{y(t_i+h) - y(t_i)}{h};$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=t_i} \approx \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h};$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Різницеве рівняння першого порядку має вигляд:

$$y_{i+1} - a_{1i} y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тут коефіцієнт a_{1i} змінний. Нехай $y_0=C_0$ (початкова умова). Тоді:

$$y_1 = a_{10} y_0 + f_0;$$

$$y_2 = a_{11} y_1 + f_1 = a_{11} a_{10} y_0 + a_{11} f_0 + f_1;$$

$$y_3 = a_{12} y_2 + f_2 = a_{12} a_{11} a_{10} y_0 + a_{12} a_{11} f_0 + a_{12} f_1 + f_2;$$

.....

$$y_i = \prod_{k=0}^{i-1} a_{1k} y_0 + \sum_{k=0}^{i-1} f_k \prod_{S=k+1}^{i-1} a_{1S},$$

де при $S > i-1$ добуток $\prod_{S=k+1}^{i-1} a_{1S} = 1$, і y_i – відлік розв'язку рівняння у момент t_i .

Таку формулу практично не використовують. Зручніше (економніше) здійснювати послідовний рахунок.

Приклад 1. Розв'яжемо різницеве рівняння першого порядку для випадку $i \geq 0$:

$$y_{i+1} + 0.5y_i = 3, \quad y_{-1} = 4.$$

В загальному:

$$y_{i+1} = -0.5y_i + 3.$$

Знаючи y_{-1} , шляхом рекурсії можна знайти всі y_i , $i \geq 0$. Одержимо:

$$y_0 = -0.5(4) + 3 = 1;$$

$$y_1 = -0.5(1) + 3 = 2.5;$$

$$y_2 = -0.5(2.5) + 3 = 1.75;$$

$$y_3 = -0.5(1.75) + 3 = 2.125;$$

$$y_4 = -0.5(2.125) + 3 = 1.94;$$

$$y_5 = -0.5(1.94) + 3 = 2.03;$$

$$\text{і } y_n = 2, \quad n \geq 5.$$

Ми розв'язали різницеве рівняння *рекурсивним* методом. Деколи говорять і пишуть – ітеративним методом. Ми під ітераціями будемо розуміти кроки наближення до відліку. Коли відлік знаходиться за попереднім відліком, то такі обчислення називатимемо *рекурсією*.

Різницеве рівняння 2-го порядку має вигляд:

$$y_{i+2} = a_1 y_{i+1} + a_2 y_i = f_i; \quad a_2 \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо Y_i – розв'язок, а \tilde{y}_i – частинний розв'язок, то сума $Y_i + \tilde{y}_i$ також буде розв'язком (в силу лінійності). Звичайно, за Y_i , $i=1, 2, 3, \dots$ беруть розв'язок однорідного рівняння.

Розглянемо однорідне рівняння:

$$y_{i+2} + a_1 y_{i+1} + a_2 y_i = 0.$$

Поклавши $y_i = k^i$, отримаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Можливі наступні випадки розв'язків різницевого рівняння, які отримаємо після підстановки коренів характеристичного рівняння (за введеною заміною) у дане різницеве рівняння:

– для дійсних різних коренів:

$$y_i = C_1 k_1^i + C_2 k_2^i ;$$

– для кратного дійсного кореня:

$$y_i = (C_1 + C_2 i) k_0^i, \quad k = -\frac{a_1}{2} ;$$

– для комплексноспряжених уявних коренів:

$$k_{1,2} = \sqrt{a_2} e^{\pm \frac{\sqrt{-1}}{\varphi}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\sqrt{|D|}}{-a_1}, \quad D = a_1^2 - 4a_2 ;$$

$$y_i = (C_1 \cos i\varphi + C_2 \sin i\varphi) r^i, \quad r = \sqrt{a_2} .$$

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння, приведене в прикладі 1, іншим, так званим "класичним", методом.

Спочатку розглянемо однорідне рівняння:

$$y_{i+1} + 0.5y_i = 0 .$$

Виконавши заміну $y_i = k^i$, одержимо характеристичне рівняння

$$k + 0.5 = 0,$$

звідки $k = -0.5$, і розв'язок однорідного рівняння:

$$Y_i = C(-0.5)^i$$

для довільної сталої C .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{i+1} + 0.5y_i = 3$$

шукатимемо у вигляді $\tilde{y}_i=A$, так як його права частина $f_i=3$ для всіх i . Зробивши підстановку, одержимо

$$A+0.5A=3,$$

звідки $A=2$, і розв'язок $\tilde{y}_i=2$ для всіх i .

Загальний розв'язок

$$y_i = \tilde{y}_i + Y_i = 2 + C(-0.5)^i.$$

Прийнявши до уваги початкову умову $y_{-1}=4$, знайдемо, що $C=1$.
Отже

$$y_i = 2 - (-0.5)^i.$$

Неважко пересвідчитись, що підставляючи значення $i=1,2,\dots$, одержуємо ті ж результати, що і в Прикладі 1.

Для різницевого рівняння розв'язок можна зобразити у вигляді:

$$y_i = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cdot h_{i-m}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

(дискретної згортки чи згорткової суми).

Не торкаючись спеціальних питань обчислення такої суми, зауважимо, що вона є дискретною моделлю інтегралу згортки, а послідовність h_i , $i=0,1,2,\dots$ називають *функцією відгуку на одиничний відлік*, або *імпульсною ваговою функцією*. Одиничний відлік являє собою послідовність вигляду $\{f_i\}=1,0,0,0,\dots$. Розглянемо відгук на таке збурення системи, яку опишемо різницеvim рівнянням 1-го порядку, коли $y_0=0$:

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 0.5y_i &= f_i ; \\ y_1 &= f_1 + 0.5y_0 = 1 = h_1 ; \\ y_2 &= f_2 + 0.5y_1 = 0.5 = h_2 ; \\ y_3 &= f_3 + 0.5y_2 = 0.25 = h_3 ; \\ y_4 &= f_4 + 0.5y_3 = 0.125 = h_4 \quad \mu \square. \text{ЛБ} \end{aligned}$$

Бачимо, що практично немає необхідності розглядати h_i при великих значеннях i . Тому згорткову суму часто записують у вигляді:

$$y_i = \sum_{m=0}^M f_{i-m} h_m, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Таким чином, згорткова сума для i -го відліку розв'язку різницевого рівняння є сумою добутків "зважених" значень імпульсної вагової функції на відповідні відліки збурюючої функції f (рис.6.1).

Перейти до інтегральної згортки можна шляхом граничного переходу при необмеженому збільшенні M та i .

Припустимо, що маємо можливість запам'ятовувати значення f_{i-m} , $i = 1, 2, \dots$, $m = \overline{1, M}$. Причому, для всіх $i-m < 0$ $f_{i-m} = 0$. Тоді для обчислень при кожному наступному i виникає потреба послідовного зсуву у комірках пам'яті попередніх значень f , для того, щоб звільнити місце для нового значення. Можна подати блок-схему таких обчислень у вигляді, як на рис.6.2.

Перед тим, як записати алгоритм обчислень згорткових сум, зробимо деякі зауваження. Нехай значення імпульсної вагової функції h_m , $m = \overline{0, M}$, "зашиті" в комірках пам'яті A_0, \dots, A_M , а значення "збурюючої" функції f_i , $i = \overline{1, N}$, можна заносити в комірки B_0, \dots, B_N . Вважатимемо, що $M \leq N$. Результати обчислень, тобто значення функції y_i , $i = \overline{1, N}$, будемо розташовувати в комірках C_1, \dots, C_N . Тоді алгоритм складатиметься з кроків:

- 1) обнулюємо комірки B_0, \dots, B_N ;
- 2) покладаємо $i=1$;
- 3) записуємо значення f_i в комірку B_0 ;
- 4) перемножуємо вмістиме комірок A_k і B_k , $k = \overline{0, M}$, послідовно додаємо одержані значення і результат заносимо в C_i ;
- 5) "зсуваємо" значення у комірках:

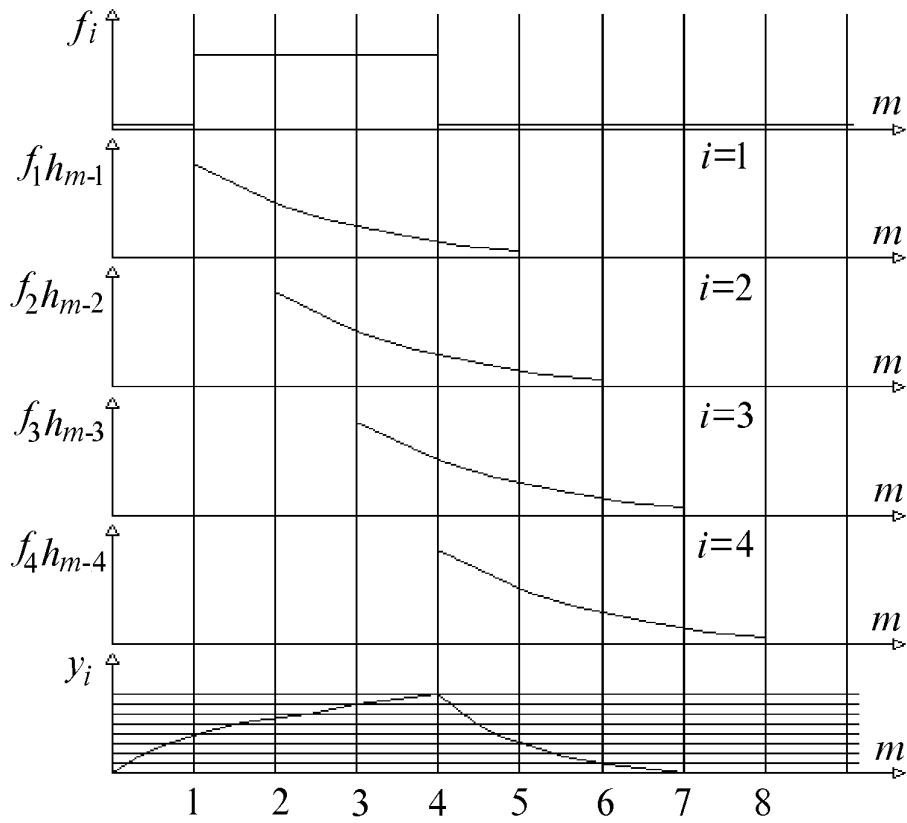


Рис.6.1. Пояснення згорткової суми

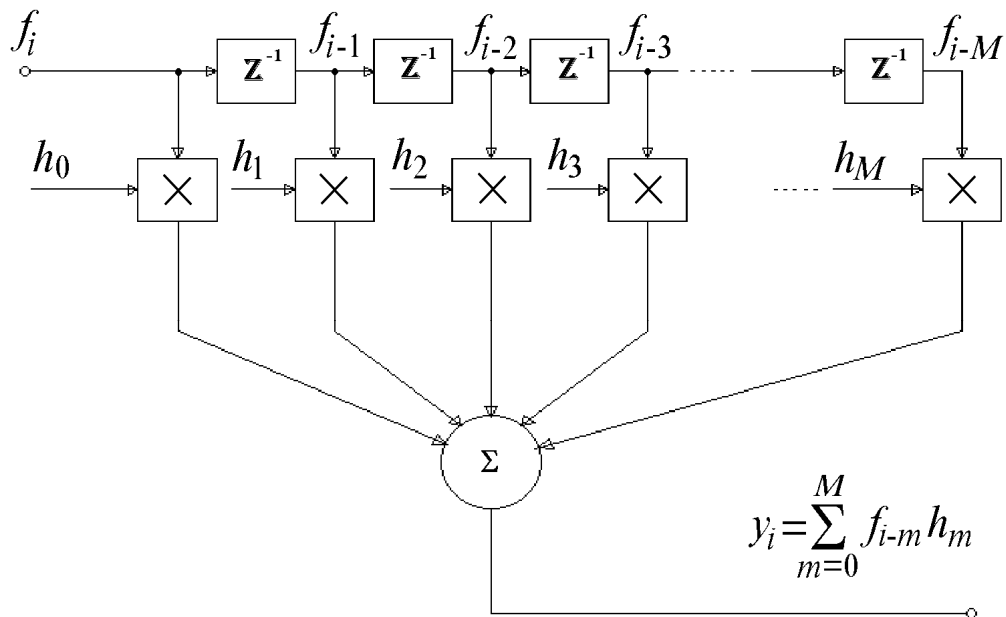


Рис.6.2. Блок-схема формування згорткової суми (Z^{-1} – затримка на один такт).

$$(B_{i-1}) \rightarrow (B_i),$$

$$(B_{i-2}) \rightarrow (B_{i-1}),$$

$$\vdots$$

$$(0) \rightarrow (1);$$

б) перевіряємо умову $i < N$;

7) якщо ця умова виконується, то збільшуємо i на одиницю та повертаємось на крок (3); у випадку невиконання умови обчислення припиняємо.

Легко впевнитись у тому, що такого роду алгоритми можна трактувати як векторно-матричні операції.

Розмірковуючи таким чином, подамо блок-схему обчислень відліків розв'язку різницевого рівняння не за формулою згортки, а безпосередньо. Вона матиме вигляд, як на рис.6.3.

6.2. Характеристики дискретних систем з одним входом і одним виходом.

Запишемо різницеве рівняння з постійними коефіцієнтами у вигляді:

$$\sum_{l=0}^m a_l x_{l-1} = \sum_{k=1}^n b_k y_{k-1}. \text{ (початкові умови не подаємо).}$$

z -Перетворення правої і лівої частин рівняння матиме вигляд:

$$\sum_{l=0}^m a_l z^{-l} X(z^{-1}) = \sum_{k=0}^n b_k z^{-k} Y(z^{-1}).$$

Таким чином, функція передачі кола дискретної системи:

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{\sum_{l=0}^m a_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^n b_k z^{-k}},$$

де $z = \exp(j\omega T_D)$, T_D – період дискретизації, $j = \sqrt{-1}$.

Поняття карти нулів та полюсів, амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик також широко використовуються і для дискретних систем. Справедливою є *теорема згортки* (її дискретний варіант). Зауважимо, що нулі та полюси у Z^{-1} -площині розташовані в середині одиничного кола.

Прикладом блок-схеми дискретної системи 1-го порядку може бути схема, приведена на рис.6.3,а. На рис.6.3,б зображено карту полюсів, яка відповідає даній схемі.

Приклад 3. Для дискретної системи, яка описується рівнянням

$$y_{i+1} - 0.5y_i = x_{i+1},$$

необхідно знайти: функцію передачі $H(z)$, імпульсну вагову функцію h_i та перехідну функцію \tilde{h}_i .

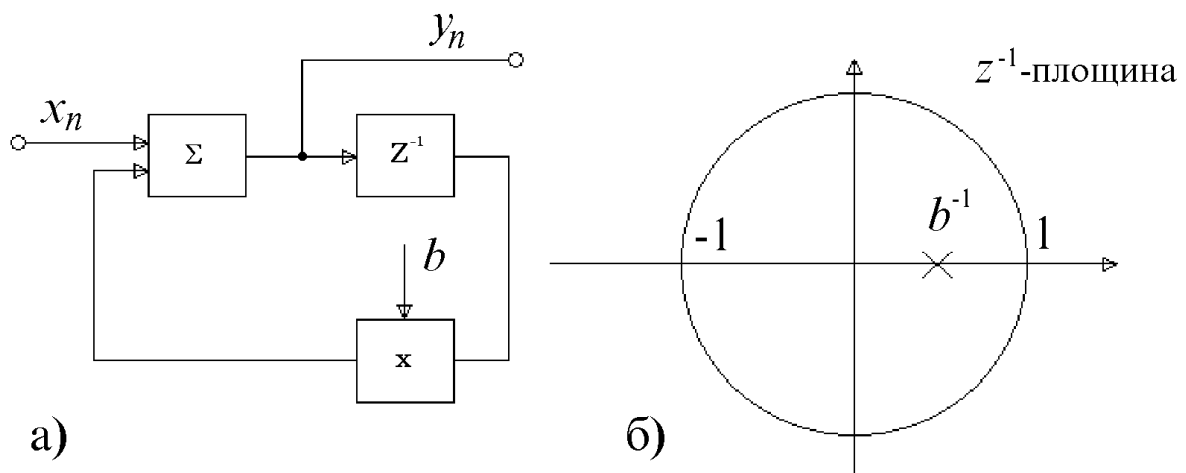


Рис.6.3. Обчислення відліків розв'язку різницевого рівняння:
 (а) схема різницевого рівняння 1-го порядку;
 (б) карта полюсів;

$$y_n = by_{n-1} + x_n,$$

$$Y(z^{-1}) = bY(z^{-1})z^{-1} + X(z^{-1}),$$

$$H(z^{-1}) = Y(z^{-1})/X(z^{-1}) = 1/(1 - bz^{-1}), \quad b=2.$$

Функція передачі системи:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - 0.5}.$$

Імпульсну вагову функцію шукатимемо за формулою:

$$h_i = z^{-1} \{H(z)\};$$

$$h_i = z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-0.5} \right\} = (0.5)^i H_i,$$

де H_i – функція Хевісайда, а $1 = \mathbf{Z}\{\delta_i\}$.

Перехідну функцію одержимо, якщо на вхід системи подамо одиничний стрибок (функцію Хевісайда):

$$\tilde{h}_i = z^{-1} \{H(z)H_i\};$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)};$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)} = \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-0.5};$$

$$\tilde{h}_i = \left[2 - (0.5)^i \right] H_i.$$

6.3. Еквівалентність зображень дискретних і неперервних кіл та сигналів.

У попередніх розділах було розглянуто інтегровні з квадратом дійсні функції f . Позначимо множину таких функцій L^2 . При дискретизації таких функцій отримаємо послідовність сумованих з квадратом дійсних чисел $f_n, n=0,1,2,\dots$.

Множину таких послідовностей позначимо l^2 . Розглядалися також лінійні перетворення $A: f(t) \rightarrow g(t), f(t), g(t) \in L^2$, такі, що $A: f(t+\tau) \rightarrow g(t+\tau)$ для кожного τ , що називається *часовою інваріантністю*. Таким чином, ці перетворення є лінійними, часовоінваріантними.

Серед них розглядається згортка:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)a(t-\tau)d\tau,$$

де $a(\tau)$ – імпульсний відгук, $a \in L^2$.

У дискретному випадку маємо:

$$A: \{f_n\} \rightarrow \{g_n\}, \{f_n\}, \{g_n\} \in L^2;$$

$$A: \{f_n\} \rightarrow \{g_n\}, \{f_n\}, \{g_n\} \in L^2 \text{ для всіх } v,$$

$$\{g_n\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i a_{n-i} \right\},$$

де $\{a_n\}$ – дискретний імпульсний відгук.

Було також обчислено перетворення Фур'є як відображення L^2 в іншу комплекснозначну множину. Позначатимемо її через $F\{L^2\}$. Відмітимо, що її елементами можуть бути як комплекснозначні послідовності, так і неперервні (аналітичні) функції.

Приведемо без доведення ряд важливих теорем.

Теорема 1 (Планшераля):

Якщо $f(t) \in L^2$, то існує $F(s) = \text{l.i.m.} \int_{-R}^R f(t) \cdot e^{-st} dt$ для $s=j\omega$ та

$F(j\omega) \in L^2$. Крім того, скалярний добуток

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |F(s)|^2 ds,$$

$$af(t) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{-iR}^{iR} F(s) e^{st} ds.$$

Тут *l.i.m.* означає *limit in medio* (границя в середньому):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{-iR}^{iR} F(s) e^{st} ds.$$

Якщо існує аналітичне розширення $F(j\omega)$ на всю S -площину, то дістанемо двостороннє перетворення Лапласа.

Теорема 2 (Парсеваля):

$$\text{Якщо } f(t), g(t) \in L^2, \text{ то } (f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) \overline{G(s)} ds.$$

Для дискретизованих функцій послідовності коефіцієнтів Фур'є, чи спектральні функції, є періодичними з періодом дискретизації T_D . На одиничному крузі комплексної площини існує z -перетворення, яке "згортає" цю періодичність.

Теорема 3 (Рісса-Вінера):

Якщо $\{f_n\} \in l_2$, то

$$F(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n z^n$$

існує для $z = e^{i\omega T}$ і $F(e^{i\omega T}) \in L^2$, де ω – незалежна змінна і не пов'язана із змінною ω з S -площини. До того ж:

$$(\{f_n\}, \{f_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |F(z)|^2 \frac{dz}{z},$$

і

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} F(z) z^n \frac{dz}{z},$$

де інтеграл береться по контуру $|z|=1$ за годинниковою стрілкою.

Як і в "неперервному" випадку, можна розглядати розширення $F(e^{j\omega T_D})$ на решту Z -площини. Це дає можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема 4 (Парсеваля):

$$\text{Якщо } \{f_n\}, \{g_n\} \in l_2, \text{ то } (\{f_n\}, \{g_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \overline{g_n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} F(z) \overline{G(z)} \frac{dz}{z}.$$

Позначимо L^2 Z -трансформант як $\mathbf{Z}\{l^2\}$.

За вищевикладеним виходить, що для здійснення переходу з S -площини в Z -площину необхідно встановити зв'язок з віссю $j\omega$ у S -площині та одиничним колом у Z -площині. Відповідність $z \rightarrow e^{sT}$ не є взаємнооднозначною. Взаємнооднозначними є дробово-лінійні перетворення:

$$s = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1+s}{1-s}.$$

Виникає "ланцюг" відображень:

$$\mu: f(t) \rightarrow F(s) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{z+1} F\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = F(z) \rightarrow \{f_n\} - \text{прямий,}$$

і зворотній

$$\mu^{-1}: \{f_n\} \rightarrow F(z) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{1-s} F\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = F(s) \rightarrow f(t).$$

Взаємозамінні відображення елементів однієї множини в елементи іншої множини, причому такі, що вони справедливі ще й для операцій, означених на відповідних множинах і для результатів цих операцій, називають *ізоморфізмами*. Беручи до уваги все вищевикладене, можна показати, що відображення μ є ізоморфізмом, підставивши, наприклад, $z = (1+s)(1-s)$ у рівність Парсеваля:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s)\overline{G(s)}ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} F(z)\overline{G(z)}\frac{dz}{z} = (\{f_n\}, \{g_n\}).$$

Коли $f \neq g$, то $(f-g, f-g) = (\{f_n\} - \{g_n\}, \{f_n\} - \{g_n\}) \neq 0$. Це означає, що $\{f_n\} \neq \{g_n\}$ і μ є взаємнооднозначним відображенням, яке справедливе для внутрішнього добутку (скалярного добутку). Також, раціональні z -перетворення відповідають раціональним s -перетворенням (наприклад, дробово-раціональні функції від s стають дробово-раціональними функціями від z). Природній шлях отримання

ізоморфізму $L^2 \rightarrow l^2$ – відображення довільної функції з L^2 на послідовність її коефіцієнтів деякого ортонормованого розширення в l_2 . Це і було зроблено для послідовності δ -функцій, яка є ортонормованим дискретним базисом, а в подальшому використовувалось при застосуванні перетворень Фур'є до тригонометричних функцій.

Очевидно, що ізоморфізм дозволяє описувати один і той же об'єкт різними способами.

Для лінійних часово-інваріантних перетворень (ЛЧІП) справедливі такі співвідношення:

$$A = \mu A \mu^{-1}$$

та

$$A = \mu^{-1} A \mu ,$$

де A – ЛЧІП в L^2 , а A – ЛЧІП в l^2 , причому, як в L^2 , так і в l^2 кожне з цих перетворень має свій вираз (відповідно інтегральної чи сумової згортки або добутку).

6.4. Теорема відліків.

При дискретизації важливим є вибір її періоду. Інтуїтивно зрозуміло, що сигнал суттєво змінитися не може за час, менший ніж півперіоду найбільшої його гармоніки з достатньою амплітудою. Залишається уточнити слова "суттєво", "достатньою".

Якщо $F(j\omega)$ є спектр сигналу $f(t)$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega ,$$

де W – ширина спектру, тобто $|F(\omega)|=0$ поза смугою W . Покладемо значення часу, у який здійснюється відбір значень сигналу, рівними $t_n = \frac{n}{2W}$, де $T_\Delta = \frac{1}{2W}$ – період дискретизації; а $n=0,1,2 \dots$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Легко "впізнати" вираз n -го коефіцієнту Фур'є-перетворення у отриманій рівності. Це означає, що $f(n/2W)$ є коефіцієнтами Фур'є-перетворення, а, отже, повністю визначають $f(t)$.

З теорії Фур'є-перетворення відомо, що спектр, який є постійним в смузі $(-W, W)$, має функція вигляду

$$\frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt};$$

ця функція рівна одиниці в $t=0$ і нулю при всіх $t=n/2W$.

Тоді "довільна" функція

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)},$$

де x_n – значення n -го відліку функції (при $t=t_n$).

Якщо функція обмежена часовим інтервалом T , а відліки взято через $1/2W$, то отримаємо $T: 1/2W=2WT$ відліків. Всі відліки поза інтервалом T рівні нулеві (за означенням). Тоді можна говорити, що будь-яка функція, задана на інтервалі T і обмежена смугою W , повністю визначається $2\pi W$ своїми відліками.

Теорема (Шеннона, 1948р.):

Функція $f(t)$ з обмеженим смугою W спектром повністю визначається своїми відліками, взятими через інтервал $1/2W$.

Подібного роду проблеми розглядалися математиками (Уітекер, 1935р.), фізиками (Найквіст, 1928р.). Зокрема, Найквіст зауважив, що в природі фінітних функцій (з обмеженим інтервалом часу і смугою спектру) не існує, тому на практиці є невеликі розходження з теоремою.

За часів СРСР подібну теорему сформулював Котельников (1933р.), тому в російськомовній літературі цю теорему деколи називають теоремою Котельникова.

На основі уявлень про можливість відобразити сигнал його відліками К. Шенон, за аналогією з трьома координатами точки у просторі, зробив висновок про те, що сигнал (функція) є точкою у просторі (функційному просторі), але $2WT$ -мірному. Перевага такого зображення сигналу (моделі сигналу) – у аналогії його з геометричним об'єктом. Наприклад, можна ввести поняття віддалі від початку координат

$$d = \sqrt{\sum_{n=1}^{2TW} x_n^2},$$

де x_n – n -й відлік.

На основі того, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(2Wt - m)}{\pi(2Wt - m)} \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2W} & m = n \end{cases}$$

можна отримати:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2W} \sum_n x_n^2.$$

Якщо сигнал із завадою, то це означає "зміщення" точки у функційному просторі (наприклад, якщо завада з сигналом змішані аддитивно). В багатомірному просторі (за аналогією з трьохмірним) можна побудувати безліч координатних систем, тому виникає проблема оптимального вибору функційної координатної системи (базису).

Розглядаючи сигнал як n -мірний вектор, можна ввести інтерпретацію лінійної обробки сигналу як зсуви і повороти такого вектора.

Всі ці ідеї було викладено в роботі К. Шеннона "Зв'язок в присутності завад" (1948р.).

Такі ж ідеї було використано О. О. Харкевичем, а пізніше й іншими вченими. Тепер вони складають основу теорії сигналів.

Підсумок.

В даному розділі були розглянуті методи зображення і дослідження дискретних лінійних кіл та сигналів. В основі цих методів лежать різницеві рівняння. У випадку дискретних систем різницеві рівняння відіграють таку ж саму роль, що і диференціальні рівняння при розгляді неперервних систем. Знаючи різницеве рівняння, яке описує систему, ми можемо знайти такі важливі її характеристики, як функцію передачі і імпульсну вагову функцію, представити систему у вигляді вхід-вихід, провести аналіз чи синтез системи як в дійсній, так і в комплексній областях, перевірити, чи буде система фізично реалізовною, дослідити її на стійкість і чутливість до малих змін параметрів (що буде показано в наступних розділах). Важливо також те, що різницеві рівняння ми можемо безпосередньо, без будь-яких додаткових перетворень, використовувати при моделюванні систем засобами цифрової електронної техніки.

Розділ 7

ДЕЯКІ ПОНЯТТЯ З ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ

7.1. Характеристичний та мінімальний многочлени.

Одним із важливих понять теорії матриць, яке знаходить широке практичне застосування, є поняття характеристичного многочлена.

Якщо:

$$Ax = \lambda x, \quad (7.1)$$

де A – деяка матриця, x – вектор, а λ – число, то, досліджуючи рівняння $Ax - \lambda x = 0$ для нетривіального випадку ($x \neq 0$), приходимо до розгляду многочлена:

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E),$$

де E – одинична матриця такої ж розмірності, що і матриця A .

Многочлен $\Delta\lambda$ називають *характеристичним многочленом* матриці A , а його нулі (корені) $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ – *характеристичними числами*. Вектори x , які задовільняють рівнянню (7.1), називають *власними векторами* матриці A . Серед характеристичних чисел можуть бути кратні (рівні). Тому застосовують ще такий запис характеристичного многочлена:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

де множення здійснюється по σ різних значеннях характеристичних чисел матриці A , а m називають *кратністю* i -го числа.

Означення 1: *Мінімальним многочленом* матриці A називається многочлен $\Psi(A)$ найменшої степені і такий, що $\Psi(A) = 0$ і коефіцієнт при найвищій степені λ рівний одиниці.

Приклад 1. Дано матрицю A : $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Характеристичний многочлен такої матриці:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Тут $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 2$; $\sigma = 2$; $m_1 = 1$; $m_2 = 2$.

Мінімальний многочлен:

$$\Psi(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2,$$

звідки:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^2 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^1 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^0 = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 \cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

що відповідає означенню мінімального многочлена.

Приведемо без доведення ряд теорем.

Теорема 1 (Келі-Гамільтона):

Нехай \mathbf{A} – матриця, а $\Delta(\lambda)$ – її характеристичний многочлен. Тоді:

$$\Delta(\mathbf{A}) = 0.$$

Іншими словами, матриця задовільняє своєму характеристичному многочлену.

Теорема 2:

Нехай $\Psi(\lambda) = \prod_{i=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ – мінімальний многочлен матриці \mathbf{A} ,

$p(\lambda)$, $g(\lambda)$ – два довільних многочлени. Тоді:

$$p(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) \Leftrightarrow p = g \pmod{\Psi}.,$$

де індекс $\text{mod } \Psi$ означає величину g , взяту за модулем мінімального многочлену (іншими словами, "остачі" від ділення p і g на Ψ рівні).

Теорема 3:

$$p(A) = g(A) \Leftrightarrow p^{(l)}(\lambda_k) = g^{(l)}(\lambda_k),$$

де $l = \overline{0, m_k - 1}$; $k = \overline{1, \sigma}$; λ_k – характеристичні числа.

Тобто многочлени $p(\lambda)$ і $g(\lambda)$ від матриць рівні тоді і тільки тоді, коли значення цих многочленів від λ при рівних характеристичних числах λ_k рівні і рівні значення l -тих похідних від многочленів для кратних характеристичних чисел, причому $l = \overline{0, m_k - 1}$, де m_k – кратність характеристичного числа.

Приведені поняття і теореми лежать в основі подальших викладок.

7.2. Означення функції матриці.

В теорії лінійних технічних систем, які описуються диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами (наприклад, системою рівнянь $dx/dt = Ax + Bu$, тут і далі, x, u , – вектори, A, B – матриці), розглядають матриці вигляду e^{At} (інший запис – $\exp(At)$). Тобто розглядається функція матриці $f(A) = e^{At}$.

Нехай для функції $f(A)$ має місце збіжний розклад:

$$f(A) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Тоді формальний запис $f(A)$ будемо розуміти як матрицю, рівну:

$$\sum_{n=0}^N a_n A^n,$$

де $A^0 = E$ – одинична матриця.

З вищесказаного виходить, що, наприклад,

$$e^A = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Якщо:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$, то:

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Якщо

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix},$$

то

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_1) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda_1) \\ 0 & f(\lambda_2) & f'(\lambda_2) & \dots & \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_{n-1}) & f'(\lambda_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{vmatrix}.$$

Останній вираз можна перевірити, виконавши піднесення до степеня матриці \mathbf{A} і просумувавши з відповідними коефіцієнтами отримані матриці.

У загальному випадку не все так очевидно.

Нехай \mathbf{A} – матриця з характеристичними числами λ_k , $k = \overline{1, \sigma}$. Нехай f – функція, аналітична на відкритій множині, що містить λ_k . Нехай

$p(\lambda)$ – многочлен, такий, що $p^{(l)}(\lambda_k) = f^{(l)}(\lambda_k)$, де $l = \overline{0, m_k - 1}$, $k = \overline{1, \sigma}$, а $p^{(l)}(\lambda_k)$ – значення l -ної похідної λ_k . Тоді означимо функцію f матриці \mathbf{A} як:

$$f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}).$$

Наслідки: Для функцій f, g , аналітичних на відкритій множині, що містить λ_k , справедливо:

$$f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}), \text{ коли } h = f + g;$$

$$f(\mathbf{A}) \cdot g(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}), \text{ коли } h = f \cdot g;$$

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^N a_k \mathbf{A}^k, \text{ коли } f(\lambda) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k;$$

$$f(\mathbf{A}) = 0, \text{ коли } f^{(l)}(\lambda_k) = 0, l = \overline{0, m_k - 1}, k = \overline{1, \sigma}.$$

Таким чином $f(\mathbf{A})$ залежить тільки від поведінки f на множині характеристичних чисел матриці \mathbf{A} . Якщо λ_k – простий корінь, то $f(\mathbf{A})$ залежить тільки від значення f в точці λ_k . Якщо λ_k – корінь порядку m_k , то $f(\mathbf{A})$ залежить також від значення її $(m_k - 1)$ -их похідних в точці λ_k .

На основі приведених означень та теорем розроблено метод знаходження залежності, яка визначає функцію матриці. Але для того, щоб зрозуміти цю залежність, розглянемо ще декілька понять, що стосуються геометричної структури лінійного перетворення, яке задається матрицею \mathbf{A} .

7.3. Матриця як лінійне перетворення.

Розглядаючи для кожного λ_k підмножини векторів x_k з множини векторного простору, в якому задано перетворення \mathbf{A} , бачимо, що для кожного характеристичного числа λ_k можна отримати інваріантні підпростори цього простору. Тобто, виконується рівність (7.1) для всіх векторів цього підпростору для λ_k . Розмірності цих підпросторів рівні кратності λ_k (порядку нулів λ_k многочлена $\Delta(\lambda)$).

Розбиття всього простору на інваріантні підпростори має надзвичайно важливе значення. Наприклад, якщо базисом простору вибрати об'єднані базиси інваріантних підпросторів, то матриця

перетворення прийме діагонально-блочний вигляд (матриця Жордана):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_k \end{vmatrix},$$

де підматриці \mathbf{M}_i такі, що ненулеві елементи в них розміщені на головній діагоналі і безпосередньо нижче чи вище головної діагоналі.

Коли корені многочлена $\Delta(\lambda)$ прості, матриця \mathbf{A} прийме діагональний вигляд.

Таким чином, "дія" матриці \mathbf{A} на векторний простір зводиться до "суттєвої" зміни векторів підпросторів кожним з блоків матриці, виключаючи "свій" підпростір.

7.4. Основна формула функції матриці.

Для блочних випадків матриці розглядають її спектральний розклад (блочно-діагональна матриця, в свою чергу, вимагає розгляду функцій від матриць-блоків, але ці підматриці простіше представити неможливо):

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{l=0}^{m_k-1} f^{(l)}(\lambda_k) \mathbf{Z}_{kl},$$

де \mathbf{Z}_{kl} – компонентні матриці матриці \mathbf{A} , залежать від матриці \mathbf{A} , і можуть бути записані як многочлени від неї.

Компонентні матриці лінійно незалежні між собою, тобто не виражаються одна через одну, і можуть бути розраховані у випадку простих матриць ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$) за формулою:

$$\mathbf{Z}_{kl} = \mathbf{C}(\lambda_k) / \Psi^{(l)}(\lambda_k),$$

де $C(\lambda_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^{\sigma} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})$ – приєднана незвідна матриця;

$\Psi^{(\ell)}(\lambda_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^{\sigma} (\lambda_k - \lambda_j)$ – значення першої похідної від мінімального

ного многочлена при $\lambda = \lambda_k$.

Нагадаємо, що *приєднана матриця* – це транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Теорема 4: Якщо матриця не проста, тобто, коли $m_k \neq 1 \quad \forall k$ (є кратні корені характеристичного многочлену), то:

$$\mathbf{z}_{kl} = \frac{1}{(l-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})^{l-1} \mathbf{z}_{k1}.$$

Як видно з наведених формул, процедура обчислення функцій від матриці є досить громіздкою. Тому для цього застосовують сучасну обчислювальну техніку.

Підсумок.

Даний розділ безпосередньо не відноситься до теорії лінійних кіл та сигналів. Але теоретичні відомості, приведені в ньому, допоможуть краще зрозуміти подальший виклад матеріалу.

У розділі розглянуто основні поняття, що стосуються теорії матриць. Зокрема, пояснено суть характеристичного і мінімального многочленів матриці, а також її характеристичних чисел і власних векторів, означено функцію матриці, приведено формулу для знаходження такої функції, розглянуто матрицю як лінійне перетворення. При детальному ознайомленні зі змістом даного розділу стає очевидним, що матричне числення у деяких випадках має свої зручності. Що це за випадки, стане зрозумілим з наступних розділів, де буде розглянуто опис систем у просторі змінних стану і введено поняття стійкості та стабільності систем. Отже, матричне числення є одним із зручних математичних методів аналізу і синтезу лінійних кіл та сигналів.

Розділ 8

ОПИС ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ У ПРОСТОРИ ЗМІННИХ СТАНУ

8.1. Модель лінійної системи у просторі змінних її стану.

Розглянемо різницеве рівняння 2-го порядку:

$$b_2 y_{n-2} + b_1 y_{n-1} + y_n = x_n.$$

Зробимо таку заміну: $y_{n-1} = v_n$, тоді $y_{n-2} = v_{n-1}$ і рівняння прийме вигляд системи різницевих рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= v_n; \\ v_{n-1} &= -\frac{b_1}{b_2} v_n - \frac{1}{b_2} y_n + \frac{1}{b_2} x_n, \end{aligned}$$

або у векторно-матричному вигляді:

$$\mathbf{Y}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \mathbf{B}\mathbf{X}_n,$$

де

$$\mathbf{Y}_{n-1} = \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{b_2} & -\frac{b_1}{b_2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ v_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вектор \mathbf{Y}_n називають *вектором стану системи*; вектор \mathbf{X}_n – *вектором входу*; матрицю \mathbf{A} – *матрицею стану*; матрицю \mathbf{B} – *матрицею входу*.

Таким чином, дістанемо можливість моделювати (розглядати) динамічні системи з багатьма входами і багатьма виходами.

У більш загальному випадку розглядають такі системи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n-1} &= \mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \mathbf{B}\mathbf{X}_n; \\ \mathbf{Y}_n^{(\% \text{ виходу})} &= \mathbf{C}\mathbf{Y}_n + \mathbf{D}\mathbf{X}_n, \end{aligned}$$

де матриця **C** називається *матрицею виходу*, а матриця **D** – *матрицею зв'язку*. Компоненти матриць можуть залежати від часу.

Ми отримали модель системи у вигляді рівнянь у просторі змінних стану формальним чином. Але вони мають і фізичний зміст: компоненти вектору Y_n (незалежно від їх впорядкованості) відповідають конкретним величинам, які характеризують стан системи, який вцілому описує вектор; матриця **A** описує зв'язки між цими величинами; матриця **B** – визначає вплив на стан системи вхідних змінних і т. д. В залежності від того, які елементи такого опису нам відомі (які величини можна виміряти), маємо ряд задач: оцінки параметрів системи, оцінки стану системи, оцінки вхідного впливу, оцінки реакції системи (виходу). Наприклад, оцінка параметрів системи за відомим входом і виходом або відомим входом і бажаним виходом.

Таке ж зображення можна отримати і для неперервного випадку у вигляді векторно-матричного диференціального рівняння. Зауважимо, що відразу можна вказати розв'язок для звичайного векторно-матричного диференціального рівняння першого порядку вигляду:

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(t)y(t) + b(t)x(t),$$

як

$$y(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)b(\tau)x(\tau)d\tau$$

де

$$\Phi(t, \tau) = \exp [a(t) \cdot t].$$

8.2. Взаємозв'язок між простором змінних стану і зображеннями типу вхід - вихід.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = U(t).$$

Якщо позначити $x(t)=x_1(t)$, а $\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$, то отримаємо систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} + a_1x_2(t) + a_0x_1(t) = U(t), \end{cases}$$

або

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ U(t) \end{vmatrix},$$

чи

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (8.1)$$

де \mathbf{x} – вектор стану, \mathbf{u} – вектор входу, \mathbf{A} – матриця стану, \mathbf{B} – вхідна матриця.

Приведене рівняння – одне з тих рівнянь, що виникають у прикладних науках, наприклад, у медичних: в осциляційній моделі нейронних сіток; при моделюванні систем нюху, пам'яті, зору, локомоції (руху), дихання; при виборі медикаментів; при аналізі різних фізіологічних систем та систем управління; при описі процесів обробки сигналів, зокрема селективної фільтрації. Зрозуміло, що важливим є отримання розв'язку такої системи. Оскільки (8.1) можна зв'язати з реальними (фізично наявними) станами у системі, то таке зображення має значення для імітаційного моделювання біомедичних систем на ЕОМ при постановці та розв'язуванні задач спостереження (фільтрації), діагностики, керування процесом реабілітації і лікування, управління виконавчими механізмами механічних систем. При цьому виникає необхідність знаходження функцій $\exp(\mathbf{A})$, так як розв'язок (8.1) можна подати у вигляді:

$$\mathbf{x}(t) = [\exp(\mathbf{A}t_0)]\mathbf{x}_0 + \int_0^t [\exp \mathbf{A}(t - \tau)]\mathbf{Bu}(\tau)d\tau, \quad (8.2)$$

де $x_0 = x(t_0)$.

Зображення систем у просторі змінних стану пов'язані з їх зображеннями типу вхід-вихід. Порівняльна характеристика цих зображень приведена в табл.8.1.

Табл. 8.1. Порівняльна характеристика описів систем.

Вигляд опису системи	Часова область	Частотна область
Опис неперервної системи у вигляді вхід-вихід	$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$	$Y(s) = H(s)X(s)$
Опис дискретної системи у вигляді вхід-вихід	$y_n = \sum_i x_i h_{n-i}$	$Y(z) = H(z)X(z)$
Опис неперервної системи у просторі змінних стану	$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$	$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \end{cases}$
Опис дискретної системи у просторі змінних стану	$\begin{cases} \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{AX}_n + \mathbf{BU}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{CX}_n + \mathbf{DU}_n \end{cases}$	$\begin{cases} z\mathbf{X}(z) = \mathbf{AX}(z) + \mathbf{BU}(z) \\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{CX}(z) + \mathbf{DU}(z) \end{cases}$

Для конкретних систем вигляд відповідних матриць дозволяє виконати потрібні перетворення і отримати формули для кожного із зображень, в результаті чого можна знайти взаємо-зв'язки між ними. При виконанні перетворень доводиться знаходити функцію (експоненту) матриці.

Наявність таких зв'язків у вигляді формул дозволяє ефективно реалізувати на універсальних ЕОМ чи спеціальних обчислювачах алгоритми управління, ідентифікації, фільтрації і ін., а також створювати середовища для інформаційних технологій та ефективні спеціалізовані обчислювальні середовища.

Приклад 1. Система задана рівнянням:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10 \frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = u(t).$$

Знайти рівняння системи у просторі станів.

Позначимо $x_1(t) = y(t)$ і $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$. Тоді

$$\ddot{y}(t) = u - 20x_1 - 10x_2 = \dot{x}_2$$

і $\dot{x}_1 = x_2$. Тепер ми можемо записати

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t);$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t),$$

або, у матричному записі:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t). \end{aligned}$$

Приклад 2. Розглянемо цифрову систему 2-го порядку (цифровий рекурсивний резонатор) (рис. 8.1), для якої справедливе рівняння:

$$AX = X_0,$$

де

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k_1 & k_2 \\ 0 & -z^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z^{-1} & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тут x_i – відповідні z -перетворення змінних стану системи.

Функція передачі

$$H_{01}(z^{-1}) = \frac{x_1}{x_0} = \Delta \mathbf{A}_{21}^* / \Delta \mathbf{A}^*,$$

де \mathbf{A}_{21}^* – доповнення до елемента a_{21} матриці \mathbf{A}^* , а через Δ позначено детермінант. Тоді, відповідно,

$$\Delta \mathbf{A}_{21}^* = 1 - z^{-2}; \quad \Delta \mathbf{A}^* = k_2 \cdot z^{-2} - k_1 \cdot z^{-1} + 1.$$

Комплексно-спряжені полюси функції передачі:

$$H_{01}(Z^{-1}) = (1 - Z^{-2}) (k_2 Z^{-2} - k_1 Z^{-1} + 1)$$

рівні

$$a_{1,2} = r \exp(\pm j \omega_p T_D),$$

де r – віддаль від початку координат до полюса, ω_p – резонансна частота, T_D – період дискретизації, причому $\angle \varphi = \omega_p T_D$ визначає нахил r до осі абсцис. Можна легко знайти, що $k_1 = 2r \cos(\omega_p T_D)$, $k_2 = r^2$, оскільки $a_{12} = r \cos(\omega_p T_D)$, а $\Delta \mathbf{A} = (z - a_1) \cdot (z - a_2)$ з відомих співвідношень теорії комплексних чисел, лінійних алгебраїчних рівнянь.

Часто використовуються функції передачі між будь-якими вузлами (вигляду $H_{lm}(z)$).

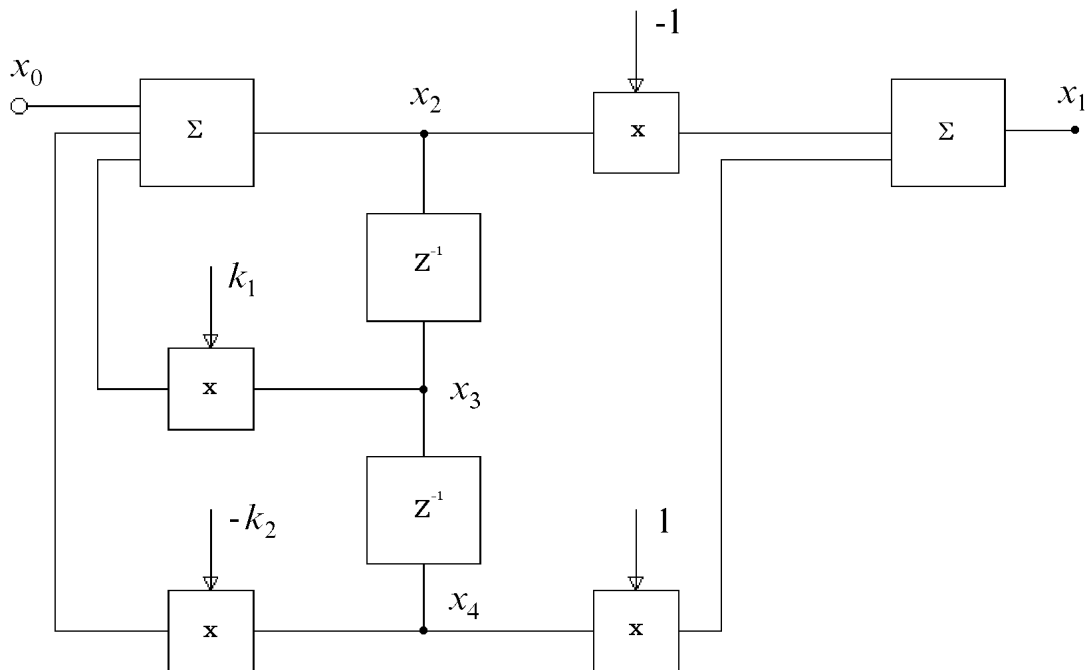


Рис.8.1. Блок-схема дискретної (цифрової) системи 2-го порядку (рекурсивний резонатор)

Рівняння цифрового рекурсивного резонатора в просторі стану матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}\mathbf{U}_n ; \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{C}\mathbf{X}_n + \mathbf{D}\mathbf{U}_n , \end{cases} \quad (8.3)$$

$$n = \overline{1, \infty}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} k'_1 & -k'_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ – матриця стану;}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ – вхідна матриця;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} k'_1 & 1-k'_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ – матриця виходу;}$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ – матриця зв'язку;}$$

$$\mathbf{X}_n = \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \text{ – вектор станів;}$$

$$\mathbf{Y}_n = \begin{vmatrix} x_1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ – вектор виходу;}$$

$$\mathbf{U}_n = \begin{vmatrix} x_0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ – вектор входу,}$$

причому кожна компонента векторів залежить від n .

Розв'язок системи (8.3) матиме вигляд:

$$\mathbf{X}_g = \sum_n \left\{ [\exp \mathbf{A}(g - g_0)] \mathbf{X}_{g_0} + \sum_{m=g_0}^g [\exp \mathbf{A}(g - m)] \mathbf{F}(m) \right\} \delta_n, \quad (8.4)$$

де індекс $g = \overline{g_0, \infty}$;

$$\mathbf{X}_g = \begin{vmatrix} x_3(g) \\ x_4(g) \end{vmatrix}$$

– шуканий вектор;

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & g = n; \\ 0, & g \neq n; \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_{g_0} = \begin{vmatrix} x_3(g_0) \\ x_4(g_0) \end{vmatrix}$$

– вектор початкових умов і $\mathbf{F}(m) = \mathbf{B}\mathbf{U}_m$.

Розглянемо перехід від зображення системи у просторі станів до її зображення типу вхід-вихід. Для цього скористаємось формулою (8.2). Перехід будемо проводити поступово.

Спочатку знайдемо $\exp(\mathbf{A})$ для \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} k'_1 & -k'_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Характеристичне рівняння (див. Розділ 7):

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda & -k'_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - k'_1 \lambda - k'_2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{k'_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k'_1}{2}\right)^2 + k'_2}.$$

Звідки $m_1 = m_2 = 1$, $\sigma = 2$.

Основна формула функції матриці (див. підрозділ 7.4) прийме вигляд:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{\sigma} f(\lambda_k) \mathbf{Z}_{kl}. \quad (8.5)$$

Знайдемо значення першої похідної від мінімального многочлена при $\lambda = \lambda_k$

$$\Psi^{(1)}(\lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \Psi^{(1)}(\lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$$

та приєднаної незвідної матриці:

$$\mathbf{C}(\lambda_1) = \mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E} = \begin{vmatrix} k'_1 & -k'_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda_2 & -k'_2 \\ 1 & -\lambda_2 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{C}(\lambda_2) = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E} = \begin{vmatrix} k'_1 & -k'_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda_1 & -k'_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо компонентні матриці \mathbf{Z}_{11} і \mathbf{Z}_{22} матриці \mathbf{A} :

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{C}(\lambda_1) / \Psi^{(1)}(\lambda_1);$$

$$\mathbf{Z}_{21} = \mathbf{C}(\lambda_2) / \Psi^{(1)}(\lambda_2);$$

$$\mathbf{Z}_{11} = \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda_2 & -k'_2 \\ 1 & -\lambda_2 \end{vmatrix} / (\lambda_1 - \lambda_2); \quad \mathbf{Z}_{21} = \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda_1 & -k'_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{vmatrix} / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

За формулою (8.5) $\exp(\mathbf{A})$ рівна:

$$\exp(\mathbf{A}) = \frac{\exp(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda_2 & -k'_2 \\ 1 & -\lambda_2 \end{vmatrix} + \frac{\exp(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{vmatrix} k'_1 - \lambda_1 & -k'_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{vmatrix}.$$

Звідси можна знайти розв'язок (8.4).

8.3. Спряженість, спостережність, керовність.

Розглянемо систему, яка описується рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (8.6)$$

де \mathbf{x} – вектор стану системи, \mathbf{u} – вектор входу, \mathbf{y} – вектор виходу, \mathbf{A} – матриця стану, \mathbf{B} – матриця входу, \mathbf{C} – матриця виходу.

Зміст цих рівнянь полягає у тому, що вхідні збурення (вектор \mathbf{u}) впливають (матриця \mathbf{B}) на стан системи (матриця \mathbf{A}), від якого залежать (матриця \mathbf{C}) вихідні змінні (вектор \mathbf{y}).

Якщо стоїть завдання перевести систему з одного стану в інший за допомогою вхідного впливу \mathbf{u} при можливості спостереження за виходом системи \mathbf{y} , то необхідно розв'язати задачу керування. Зауважимо, що стан \mathbf{x} системи спостерігається не безпосередньо, а

лише за її виходом y . Тому виникає питання оцінки спостережності системи. Тобто, чи можна за виходом y оцінити стан системи x ? Аналогічний сумнів справедливий і стосовно керовності системи: чи можна повністю вплинути на стан системи з її входу? Очевидно, формальна відповідь на це питання залежить від вигляду матриць \mathbf{B} і \mathbf{C} . Може стояти інше завдання – оцінки стану системи при заданому впливові u на вході системи при спостереженні виходу y . Виходить, що ці дві задачі взаємообернені, і системі властива *спряженість* (*двоакість*). Це поняття вперше означив Р. Калман у 1960 р. Практична цінність такого розуміння систем полягає у можливості використання результатів розв'язку задач спостереження при розв'язуванні задач керування.

Зауважимо, що ці задачі часто мають дещо іншу трактовку, а загалом, і назву. Спостереження називають *фільтрацією*, а керування – *регулюванням*. Більш детально такі задачі розглядаються відповідними дисциплінами ("Теорія автоматичного управління", "Автоматизація обробки біомедичних сигналів" і ін.).

Звести рівняння системи у просторі змінних стану до рівнянь спряженої їй системи можна, виконавши наступні дії:

- а) обернути час $t \rightarrow -t$;
- б) поміняти місцями матриці \mathbf{B} і \mathbf{C} ($\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}$);
- в) транспонувати матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T$).

Тоді дістанемо систему:

$$\begin{cases} -\dot{\xi} = \mathbf{A}^T \xi + \mathbf{C}^T v; \\ \eta = \mathbf{B}^T \xi. \end{cases}$$

Припустимо, що перехідна матриця системи $\psi(t, t_0) = \exp(-\mathbf{A}t)$, тоді $\frac{d}{dt} \psi(t, t_0) = -\mathbf{A}^T \psi(t, t_0)$ і, помноживши на транспоновану матрицю переходу спряженої системи $\phi^T(t, t_0)$, отримаємо:

$$\phi^T(t, t_0) \frac{d}{dt} \psi(t, t_0) + \phi^T(t, t_0) \mathbf{A}^T \psi(t, t_0) = 0.$$

Звідки маємо:

$$\phi^T(t, t_0)\psi(t, t_0) = 1,$$

$$\psi(t, t_0) = \phi^T(t, t_0).$$

Це означає, що перехідна матриця спряженої системи спряжена перехідній матриці вихідної системи.

Якщо

$$\mathbf{x}^T(t)\xi(t) = \mathbf{x}^T(t_0)\phi^T(t, t_0)\psi(t, t_0)\xi(t_0) = \mathbf{x}^T(t_0)\xi(t_0),$$

то добуток фазового стану взаємодвоєвих усталених систем постійний у часі (не залежить від часу).

Нехай розмірності матриць будуть:

$$\mathbf{A}(n \times n), \mathbf{B}(n \times m), \mathbf{C}(q \times n).$$

Систему, яку під впливом \mathbf{u} можна перевести з будь-якого стану в стан $\mathbf{x}=0$, називають *керовною*. Критерій керовності встановив Р. Калман. Складаємо матрицю $\mathbf{G}(n \times nm)$: $G = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]$. Якщо ранг цієї матриці $\text{rang}(\mathbf{G})=n$, то система називається *повністю керовною*, коли ж $\text{rang}(\mathbf{G}) < n$ – система *неповністю керовна*.

Частинний випадок має місце при $m=1$. Тоді \mathbf{G} – квадратна матриця. Значить, $\text{rang}(\mathbf{G})=n$ і система є керовною. Шляхом еквівалентних перетворень матриці можна перейти від неповністю керовної системи до керовної (але при цьому може втратитися властивість спостережності).

Приклад 3. Визначити, чи буде керовною система, задана матрицями:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тут $n=3$, $m=2$. Складемо матрицю \mathbf{G} розміром (3×6) :

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vdots & 2 & 4 & \vdots & 4 & 9 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 2 & \vdots & 0 & 2 \\ 2 & 1 & \vdots & 2 & 3 & \vdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Перевіримо:

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

отже, $\text{rang}(\mathbf{G})=3$ і система буде повністю керовною.

Якщо за \mathbf{u} можна знайти всі \mathbf{x} при заданому \mathbf{u} , то система повністю спостережна. Складемо матрицю розміру $(n \times nq)$:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : (\mathbf{A}^T)^2 : \mathbf{C}^T : \dots : (\mathbf{A}^T)^{n-1} : \mathbf{C}^T \right].$$

Якщо $\text{rang}(\mathbf{H})=n$, то система повністю спостережна. У випадку $q=1$ система буде повністю спостережною ($\text{rang}(\mathbf{H})=n$).

Приклад 4. Визначити, чи буде спостережною система, задана матрицями:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тут $n=3$, $q=2$. Знайдемо транспоновані матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

і утворимо матрицю \mathbf{H} розміром (3×3) :

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & \vdots & 2 & \vdots & 4 \end{vmatrix}.$$

Перевіримо:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 1 - 4 = 1 \neq 0,$$

отже, $\text{rang}(\mathbf{H})=3$ і система буде повністю спостережною.

Зробимо ще деякі зауваження відносно розв'язку систем рівнянь, або оцінки стану систем. По-перше, нами не приймалися до уваги спонтанні (випадкові) відхилення параметрів систем (коефіцієнтів рівнянь), а також компонентів векторів \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{u} . Проблеми, які виникають при цьому, будуть розглянуті у подальших частинах посібника. По-друге, відмітимо, як і в попередніх випадках, коли розглядалися неперервні чи дискретні одномірні (з одним входом) системи, що є два способи отримання розв'язку. Перший спосіб називається "класичним", і для системи (8.6) виглядає:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{B}\mathbf{u}; \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}^T \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} &= \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(n-1)} \mathbf{x} + \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(n-2-i)} \mathbf{B}\mathbf{u}^{(i)}, \end{aligned}$$

і другий – числовий спосіб розв'язування рівнянь у просторі змінних стану (використовується, якщо матриця при \mathbf{x} не вироджена).

З другого боку,

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, T) \mathbf{B}(T) \mathbf{U}(T) dT.$$

Матриця $\phi(t, t_0) = \exp \mathbf{A}(t)$ є перехідною матрицею системи. Відмітимо, що при цьому спостереження у не потрібне.

Повністю керовна система може бути неповністю спостережною. І навпаки. З цього випливає, що при еквівалентних перетвореннях можна втратити спостережність при отриманні керовності. І навпаки.

І останнє зауваження. Деякі змінні стану системи практично спостерігати неможливо по причині фізичних особливостей системи.

Тому важливою задачею є їх оцінювання шляхом спостереження інших змінних стану.

Підсумок.

Виявляється, лінійні кола і системи можна описувати не тільки у вигляді вхід-вихід. Існує також опис систем у просторі станів. Він ґрунтується на тому, що крім вхідних та вихідних величин розглядають ще й величини, які характеризують внутрішню структуру системи, – змінні її стану. Математичним апаратом такого опису є матричне числення.

Опис систем у просторі станів має ряд переваг. При дослідженні так званих *SISO* (*single input single output* – англ. – з одним входом і одним виходом) систем застосування цього опису може здатися зайвим ускладненням. Його зручність і ефективність найкраще проявляються у випадку *MIMO* (*multiple input multiple output* – англ.) систем, тобто таких, які мають багато входів і багато виходів. В загальному, варіант опису – у просторі станів чи у вигляді вхід-вихід – необхідно вибирати, виходячи з конкретних умов.

Розгляд систем у просторі станів дозволяє по-новому подивитися на такі їх властивості як спряженість, керовність і спостережність. Більше того, він дає змогу одержати ефективні критерії цих властивостей.

Розділ 9

ПОНЯТТЯ ПРО СТІЙКІСТЬ І СТАБІЛЬНІСТЬ СИСТЕМ

9.1. Чутливість характеристик кіл до малих змін їх параметрів.

Параметри (коефіцієнти) характеристик систем (наприклад, амплітудно-частотних і фазо-частотних) залежать від властивостей і параметрів середовищ, елементів. Вони змінюються з часом, залежать від зовнішніх умов (тиску, температури, механічних впливів). Звичайно, ці зміни досить малі. Але все-таки вони впливають на функціонування системи. Виникає задача оцінки впливу малих змін параметрів на характеристики системи. Ступінь впливу називають *чутливістю*. Її можна шукати як у часовій, так і в частотній областях, розглядаючи абсолютні чи відносні зміни характеристик.

Розглянемо таку систему рівнянь:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_n a_{in} \cdot x_n(t) + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Нехай параметри системи залежать від деяких факторів α :

$$a_{i1} = a_{i1}(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \dots, a_{in} = a_{in}(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; t; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad i = \overline{1, n},$$

і при змінах α_i отримаємо:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \psi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n; t; \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta\alpha_m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Це означає, що поряд з "траєкторією" x_1, x_2, \dots, x_n існують інші траєкторії в межах зміщення $\Delta x_i = \bar{x}_i - x_i$, або можливі "додаткові" стани.

При малих $\Delta\alpha_i$ маємо:

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \cdot \Delta \alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m \dots$$

Позначимо $u_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$. Тоді:

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^m u_{ij} \Delta \alpha_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

Функція u_{ij} називається *чутливістю абсолютних змін i -ї компоненти стану системи до абсолютних змін j -го параметру*.

Для того, щоб знайти функцію чутливості, будемо виходити з рівності:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j},$$

або

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \cdot u_{kj} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

(при заміні порядку диференціювання в лівій частині рівняння). Таке рівняння називається *рівнянням чутливості*.

Приклад 1. Задано систему:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T} \cdot x + \frac{K}{T} \cdot g(t).$$

Потрібно знайти чутливість функції $x(t)$ до абсолютних змін параметрів T і K .

Позначимо функції чутливості $u_T = \frac{\partial x}{\partial T}$ і $u_K = \frac{\partial x}{\partial K}$. Отримаємо систему рівнянь чутливості:

$$\frac{du_K}{dt} = -\frac{1}{T} \cdot u_K + \frac{K}{T} \cdot g(t);$$

$$\frac{du_T}{dt} = -\frac{1}{T} \cdot u_T + \frac{K}{T^2} \cdot [x - K \cdot g(t)].$$

Розв'язування такої системи рівнянь в аналітичному вигляді складне (див. Приклад 2, Розділ 8). Практично такі рівняння розв'язують числовим способом (моделюючи їх різницевами).

Значно простіше розглядати чутливість не траєкторії стану системи, а, наприклад, функції передачі. Для приведеної системи маємо функцію передачі $H(s) = \frac{K}{1 + Ts}$ і модуль функції передачі (амплітудно-частотну характеристику):

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}},$$

звідки:

$$u_{HT} = \frac{\partial |H(j\omega)|}{\partial T} = -\frac{KT\omega^2}{(1 + T^2 \omega^2)^{3/2}},$$

а

$$u_{HK} = \frac{\partial |H(j\omega)|}{\partial K} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}.$$

Одномірну функцію чутливості відносних змін амплітудно-частотної характеристики H до відносних змін параметру P_m можна означити як:

$$S_{P_m}^H = \frac{dH(P_m)}{dP_m} \cdot \frac{P_m}{H(P_m)},$$

або

$$\frac{\Delta H}{H} \approx S_{P_m}^H \frac{\Delta P_m}{P_m}.$$

Приклад 2. Функція передачі системи задається формулою:

$$H(s) = \frac{a_0}{1 + bs}.$$

Визначити чутливості абсолютних і відносних змін амплітудно-частотної характеристики системи відповідно до абсолютних і відносних змін її параметра b .

Запишемо функцію передачі системи у вигляді

$$H(j\omega) = \frac{a_0}{1 + j\omega b}$$

і знайдемо її АЧХ:

$$|H(j\omega)| = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \omega^2 b^2}}.$$

Тоді чутливість абсолютних змін:

$$u_{Hb} = \frac{\partial |H(b)|}{\partial b} = -\frac{a_0 b \omega^2}{(1 + \omega^2 b^2)^{3/2}},$$

а чутливість відносних змін:

$$S_b^H = \frac{d|H(b)|}{db} \cdot \frac{b}{|H(b)|} = \frac{\omega^2 b^2}{1 + \omega^2 b^2}.$$

9.2. Стійкість.

На відміну від *стійкості в малому* (або *стійкості за Адрономим*), як ще називають чутливість, *стійкістю у великому* (або *стійкістю за Ляпуновим* чи просто *стійкістю*) називають властивість системи повертатися у стан рівноваги після його порушення (нагадаємо, що

чутливість визначає величину відхилень характеристик чи стану системи при малих відхиленнях її параметрів).

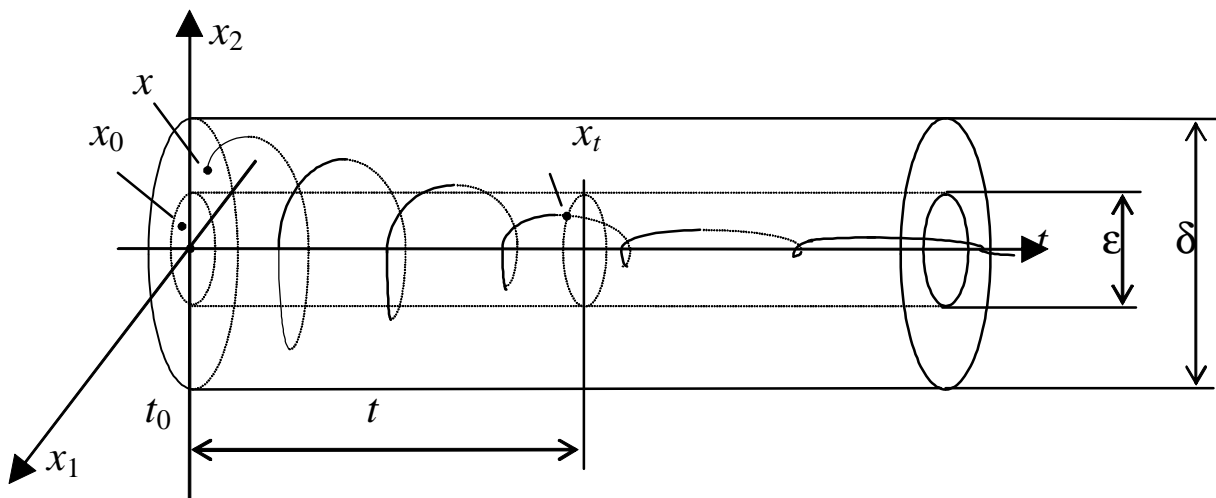


Рис.9.1. Пояснення стійкості системи 2-го порядку

З метою конкретної ілюстрації розглянемо систему 2-го порядку, вектор станів якої має розмірність 2: $x \equiv x_1(t), x_2(t)$.

Система буде *стійкою*, коли при нульовому вході можна вказати таке мале число ϵ , що для будь-якого числа з δ -околу нуля через час t стає справедливим співвідношення:

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|x|t; t_0, x_0\| < \epsilon \text{ для } t > t_0,$$

де $\|x\|$ – довжина вектора стану, а $\|x|t; t_0, x_0\|$ означає довжину вектора x_t з початкового стану x_0 , де x_0 – початковий стан, x_t – стан у момент часу t . Сказане проілюстровано на рис. 9.1.

В залежності від характеру процесу повернення системи у стійке положення розрізняють *абсолютну* і *асимптотичну* стійкість.

Ознакою (критерієм) стійкості може служити вигляд імпульсної вагової функції системи. Інтуїтивно зрозуміло, що у стійких системах ця функція має зникати з часом, тобто $\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = 0$. Проте таке

зникання може мати різний характер. На практиці систему рахують стійкою, якщо після імпульсного збурення відгук системи має характер трьох коливань відносно стану рівноваги, а далі –

асимптотичного наближення до нього. Для функцій передачі стійких систем характерне розташування полюсів у лівій півплощині комплексної S -площини. Відомі критерії стійкості Гурвіца, Гауса, Михайлова та ін.

Докладніше питання стійкості розглядається у курсах "Теорія автоматичного керування", "Моделювання і управління в біотехнічних системах".

Приклад 3. Система описується рівнянням:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 2s + 2} X(s).$$

Визначити, чи буде вона стійкою. Функція передачі даної системи:

$$H(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 2s + 2}.$$

Знайдемо полюси – корені знаменника:

– дискримінант $D = -4$, тоді

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm j,$$

де $i = \sqrt{-1}$. Як бачимо (рис.9.2), полюси функції передачі розташовані в лівій півплощині комплексної S -площини. Отже, система буде стійкою.

Підсумок.

У розділі розглянуто такі характеристики систем як стійкість і чутливість до малих змін параметрів або, по-іншому, стійкість в малому. Важливі при функціонуванні радіоелектронної апаратури і систем, вони набувають особливого значення при аналізі чи синтезі радіоелектронних засобів та їх конструюванні. Адже у цих випадках при їх допомозі виробляються вимоги та обмеження, що накладаються на радіоелектронні елементи, конструкцію і, навіть, методи

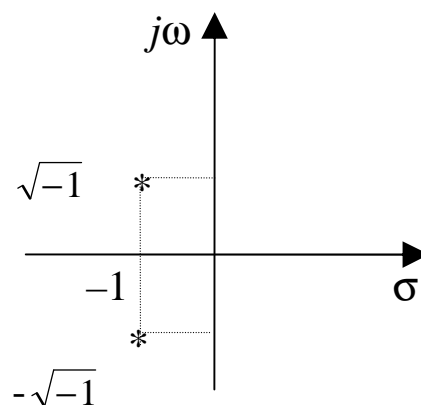


Рис.9.2. Карта полюсів

розв'язування задач. Стійкість електронних схем є важливою для практики. Щодо точності і стабільності, тож чим кращі ці параметри, тим кращим вважається радіоелектронний прилад, але відповідно він буде дорожчим. Тому необхідно намагатися збільшувати точність і стабільність систем лише в необхідних межах. Це потребує ґрунтовної теоретичної підготовки. Даний розділ може бути корисним у цьому плані.

Розділ 10.

НЕЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ. НЕЛІНІЙНІ КОЛА ТА СИСТЕМИ.

У цьому розділі розглянемо основи опису такого вигляду перетворень сигналу, коли принципи суперпозиції та однорідності не зберігаються. Зрозуміло, що перетворення тоді здійснюються у колах, елементи яких є нелінійними. У радіоелектронних колах такими елементами є діоди, варистори, а в цифрових колах квантування дискретних значень сигналу є нелінійними перетворенням. Це означає також, що характеристики (зображення) нелінійного сигналу містять операції, функції чи описуються операторами, функціоналами, що є нелінійними. Деколи розглядають не елемент, а цілий блок, схему, функція яких є нелінійною. Як правило, відразу не зауважується неконструктивне, негативне смислове навантаження поняття нелінійний. Конструктивнішою є характер нелінійності. Наприклад, квадратичне, логарифмічне, експоненціальне перетворення. Справді, коли $y = f(x)$, де $x, y \in R^1$ (множина дійсних чисел), і відомо тільки що $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$, то неможливо розробити пристрій, чи описати аналітично його функцію задля подальшого аналізу чи розробки програмного забезпечення (наприклад, імітаційного моделювання). Коли ж $y = x^2$, то $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$, але зрозуміло що робити у сказаному сенсі.

Ще складнішим є випадок, коли $x \equiv x(t)$. Наприклад, $y = x^2 = \sin^2 \omega t$. Тоді, $\sin^2 \omega t = \sin \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$. Тобто, в результаті нелінійного перетворення отримано гармонічне коливання з подвоєною частотою ω . Елементи з квадратичними ділянками їх перехідної характеристики власне і використовують для подвоєння частоти (помножувач частоти). Легко зауважити, що таким способом можна отримати “сітку” частот, кратних степенем двійки. Якщо перехідна характеристика складніша за квадратичну, наприклад, поліноміальна, скажемо, третьої степені, то очевидно, що на виході такого нелінійного елемента появляться гармонічні складові вищого порядку (“гармоніки”) - коливання кратні основній частоті. Зокрема, характеристикою випрямляча є характеристика вигляду $y = |x|$. Її можна

наблизити (описати) степеневим рядом (поліномом). Значить на виході випрямляча появляться гармоніки, тому після “випрямлення”, як правило, використовують низькочастотну фільтрацію. Досить часто у схемотехніці отримуємо характеристики вигляду зон нечутливості (“сходінка”), обмеження, тощо (рис. 10.1).

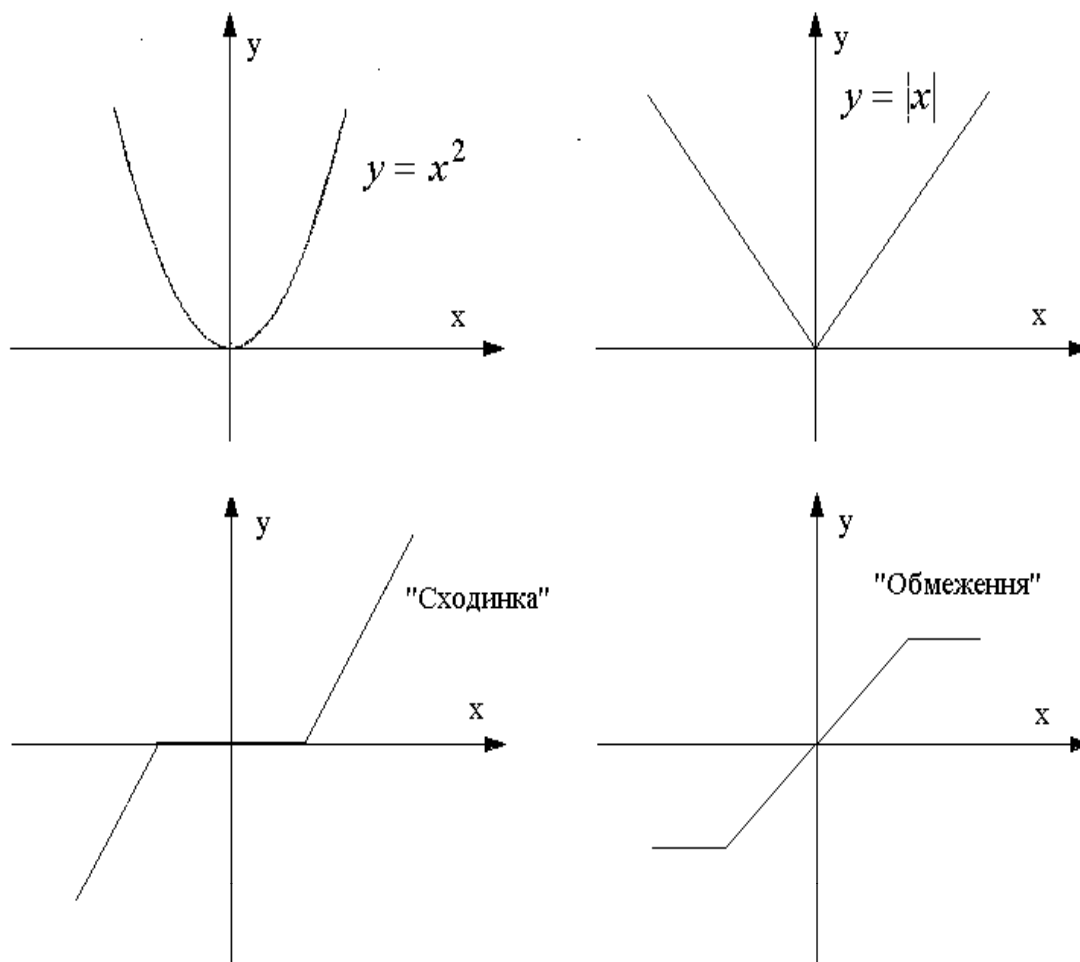


Рис 10.1. Приклади нелінійних характеристик.

Одним із способів аналізу нелінійних елементів є графічний. Нелінійні елементи можна також моделювати обчислювальним процесом на комп'ютері. Проте корисним і важливим є математичний опис функцій нелінійних ланок радіоелектронних кіл. Він дозволяє створити теорію окремих вузлів, систем, що забезпечує коректність їх інженерних розрахунків (гарантує існування результатів аналізу, забезпечує визначення точності, чутливості, стійкості, дає основу для подальших досліджень).

Розглянемо деякі методи аналізу функцій кіл з нелінійними елементами.

Звичайно, нелінійне коло намагаються звести до кола з лінійною ланкою. У тривіальному випадку це означає розгляд такого динамічного діапазону зміни значень вхідної величини, щоби характеристику нелінійної ланки можна було замінити лінійною характеристикою.

10.1. Гармонічна лінеаризація.

В основу моделювання нелінійних ланок методами гармонічної лінеаризації покладено ідею заміни нелінійної залежності $x_2=f(x_1)$ лінійною, вигляду $x_2=kx_1+b$. Очевидно, що k та b (коефіцієнти гармонічної лінеаризації) повинні бути такими, щоби не викликати великих відхилень результату вибраного лінійного перетворення величини x_1 від результату заданого нелінійного перетворення. Зауваживши, що нелінійна ланка “породжує” гармоніки, а також спадання амплітуд вищих гармонік, що надає можливість ними нехтувати, запишемо для заданого $x_1 = A \sin \omega t$ вираз $x_2 = f(x_1)$ у вигляді $x_2 = f(A \sin \omega t, A \omega \cos \omega t)$:

$$x_2(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t);$$

поклавши $\omega t = u$, випишемо коефіцієнти ряду Фур’є a_0, a_k, b_k :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A \omega \cos u) du$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A \omega \cos u) \cos k u du$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A \omega \cos u) \sin k u du, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо сигнали симетричні, то парні гармоніки (для $k = 2, 4, \dots$) відсутні (а якщо ні, то їх можна “симетризувати”); крім того, вищі гармоніки відкинемо за умови, що нелінійна ланка з’єднана з динамічною лінійною ланкою (рис.10.2), яка в реальних системах є низькочастотним фільтром (наприклад, інерційною ланкою першого

порядку), що зменшує амплітуди вищих гармонік і оправдовує їх відкидання. Тому будемо розглядати коефіцієнти тільки для $k = 0, 1$. Тоді можна записати нелінійне перетворення $x_2 = f(x_1)$ як $x_2 = f(x_1, x_1')$, оскільки “синусні” та “косинусні” члени зв’язані через похідну ($x' = A\omega \cos \omega t = (A \sin \omega t)'$).

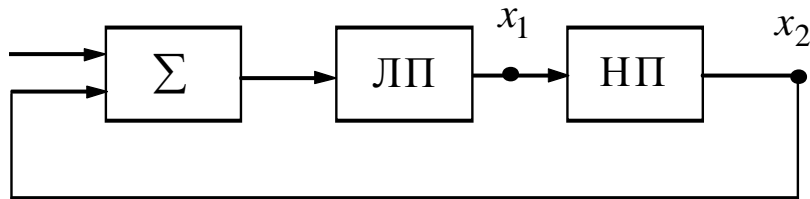


Рис. 10.2 Нелінійна ланка системи: Σ - суматор, ЛП - лінійне перетворення, НП - нелінійне перетворення

Отже,

$$x_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot, \cdot) \cos u du \cos u + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot, \cdot) \sin u du \sin u;$$

де

$$\sin \omega t = \frac{x_1}{A}; \quad \cos \omega t = \frac{x_1'}{A\omega};$$

і коефіцієнти гармонічної лінеаризації:

$$k(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(\cdot, \cdot) \sin u du;$$

$$b(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(\cdot, \cdot) \cos u du;$$

Звідси:

$$x_2 = k(A, \omega)x_1 + \frac{b(A, \omega)}{\omega} x_1'.$$

Вигляд $f(\cdot, \cdot)$ задається при описі нелінійності.

Наприклад, для “релейної” характеристики нелінійності (рис. 10.3) при

$$x_2 = \begin{cases} c, & x_1 > 0 \\ -c, & x_1 < 0, \end{cases}$$

маємо:

$$x_2 = \frac{4c}{\pi A} x_1,$$

(тут $b = 0$, і k від ω не залежить).

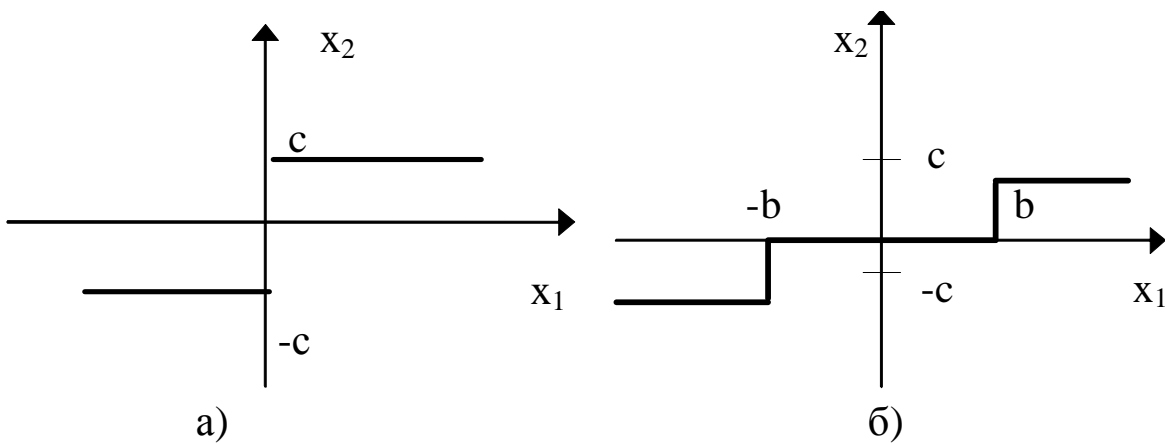


Рис.10.3. Релейна характеристика (а), релейна характеристика з зоною нечутливості (б).

Для “релейної” з нечутливістю характеристики нелінійності (рис. 10.3), коли

$$x_2 = \begin{cases} c, & x_1 > c \\ -c, & x_1 < -c \end{cases}$$

легко можна отримати

$$k(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}},$$

$$x_2 = k(A)x_1.$$

10.2. Структурно динамічна класифікація лінійних та нелінійних ланок систем [9].

Для наочності розглянемо сумісну класифікацію лінійних та нелінійних ланок, поклавши в основу класифікації інерційні властивості, або, як їх ще характеризують, наявність пам'яті (наприклад реактивних елементів у пасивних електричних колах). Дуже зручно інерційні нелінійні системи зображати у вигляді з'єднання лінійних інерційних та “чистих” нелінійних ланок (рис. 10.2):

а) *лінійні ланки без пам'яті* мають зображення (опис) вигляду $y(t) = kx(t)$, де $x(t)$ — сигнал на вході, $y(t)$ — сигнал на виході;

б) *нелінійні ланки без пам'яті* мають зображення вигляду $y = f(x)$, інколи у неявній формі $y = f(x, y)$, що означає наявність зворотнього зв'язку;

в) *лінійні з пам'яттю* мають зображення вигляду

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (10.2.1)$$

де $h(t, \tau)$ — імпульсна функція. Для фізично реалізованих систем при $t < \tau$

$$h(t, \tau) \equiv 0. \quad (10.2.2)$$

Таким чином, лінійне функціональне перетворення повністю задається однією функцією двох змінних $h(t, \tau)$.

Для часткового випадку лінійне перетворення з постійними коефіцієнтами має більш простий вираз:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau,$$

або із врахуванням (10.2.2):

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (10.2.3)$$

Лінійне перетворення також можна задати у неявній формі:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, \tau) \left[x(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau, s) y(s) ds \right] d\tau, \quad (10.2.4)$$

що відповідає описові системи як системи із зворотнім зв'язком (замкнутої системи). Тут $h_0(t, \tau)$ — імпульсна функція прямої ланки, а $k(\tau, s)$ — імпульсна функція ланки зворотнього зв'язку.

Неявне задання (10.2.4) по суті являє собою задання вихідних сигналів за допомогою інтегрального рівняння з ядром, залежним від значень вхідного сигналу у різні проміжки часу. Більш поширеним є задання лінійного перетворення за допомогою диференціальних рівнянь, які звичайно складаються, виходячи з аналізу перетворюючих властивостей елементів реальної системи:

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)y = R\left(\frac{d}{dt}\right)x, \quad (10.2.5)$$

де $Q\left(\frac{d}{dt}\right), R\left(\frac{d}{dt}\right)$ — поліноми від оператора диференціювання з постійними або залежними від часу коефіцієнтами. Будь-яке інше зображення можна привести до цього, приводячи ненульові умови до еквівалентних вхідних сигналів.

В загальному випадку задання перетворення у вигляді (10.2.1) або (10.2.5) не є еквівалентним, оскільки визначення імпульсної функції $h(t, \tau)$, відповідній рівнянню із змінними в часі коефіцієнтами є досить складним завданням.

Проте для рівнянь із постійними коефіцієнтами неявна форма задання (10.2.5) досить легко перетворюється в явну і, більш того, в ряді випадків є більш зручною для використання.

Застосуємо до рівняння (10.2.5) перетворення Лапласа:

$$Q(p)Y = R(p)X,$$

або

$$Y = H(p)X.$$

З іншого боку, застосовуючи перетворення Лапласа до (10.2.3), знаходимо, що:

$$Y = X \int_0^{\infty} e^{-p\tau} h(\tau) d\tau,$$

і відповідно:

$$H(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} h(\tau) d\tau,$$

тобто, функція передачі являє собою перетворення Лапласа імпульсної функції. За допомогою функції передачі легко виконується приведення неявного зображення лінійного перетворення до явного (приведення замкнутої схеми до еквівалентної незамкнутої). Перетворюючи рівняння (10.2.4) за Лапласом, неважко знайти явне зображення для функції передачі замкнутої системи:

$$H(p) = \frac{H_0(p)}{1 + K(p)H_0(p)},$$

де $H(p)$, $H_0(p)$, $K(p)$ — відповідно функції передачі замкнутої системи, прямої вітки та зворотної вітки (рис. 10.4).

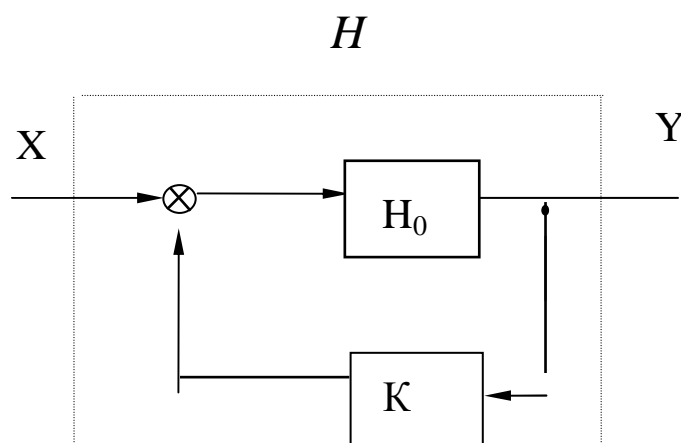


Рис. 10.4. Система з ланкою зворотнього зв'язку.

г) нелінійні перетворення з пам'яттю. Основним способом завдання цього вигляду перетворень є неявне завдання за допомогою диференціальних рівнянь:

$$f\left(\frac{d}{dt}, y, x, t\right) = 0.$$

Введення в якості аргументу оператора диференціювання означає, що функціональною залежністю зв'язані не лише самі сигнали x та y , але і їхні похідні як завгодно високого порядку.

Знаходження явної залежності для нелінійного перетворення є неможливим через відсутність загальних методів розв'язування диференціальних рівнянь.

Для теорії автоматичних систем дуже важливими є кілька більш вузьких підкласів нелінійних перетворення з пам'яттю.

1) Нелінійні перетворення, які зводяться до лінійних (нелінійні перетворення без зворотнього зв'язку). Такі перетворення отримуються в результаті послідовного застосування до вхідного сигналу спочатку нелінійного перетворення без пам'яті, а згодом — лінійного перетворення:

$$z = f(x), \quad y = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) z(\tau) d\tau,$$

або

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) f[y(\tau)] d\tau. \quad (10.2.6)$$

До цього ж підкласу можна віднести більш складне перетворення вигляду

$$y = \sum_{r=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t, \tau) f_r[x(\tau)] d\tau, \quad (10.2.7)$$

яке відповідає (рис. 10.5) паралельному проведенню декількох перетворень (10.2.6), і перетворення

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t, \tau) f \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau, s) x(s) ds \right] d\tau, \quad (10.2.8)$$

яке відповідає послідовному проведенню лінійного, нелінійного без пам'яті і знову лінійного перетворення (рис. 10.6).

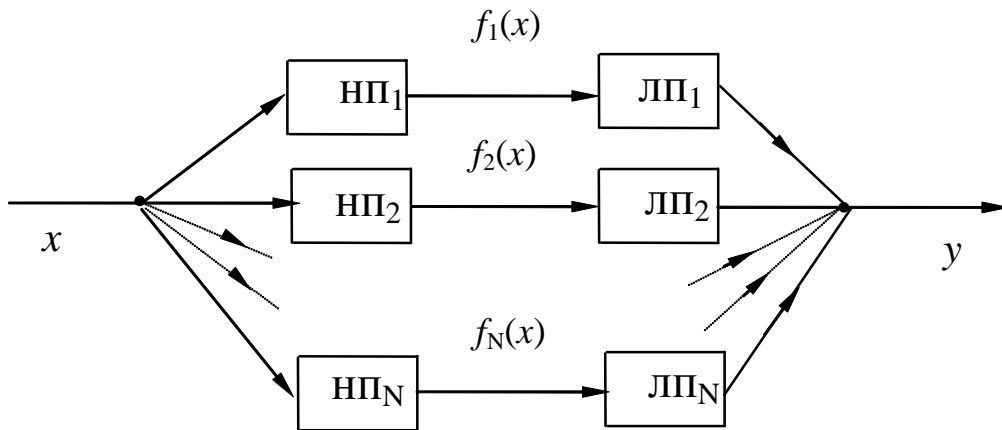


Рис. 10.5. Нелінійні перетворення без зворотнього зв'язку

За своєю структурою і відносною простотою описані перетворення подібні до лінійних, що і дозволяє називати їх зведеними до лінійних.

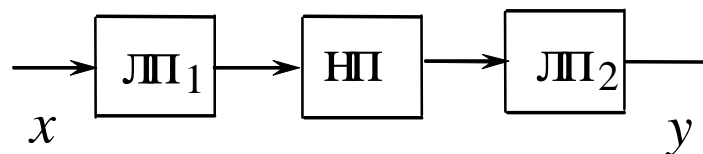


Рис. 10.6. Структурна схема зведених до лінійних нелінійних перетворень

Підклас нелінійних перетворень, зведених до лінійних, може бути узагальненим шляхом введення до розгляду більш складних інтегральних операторів, ніж заданих у формулах (10.2.7, 10.2.8), наприклад:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} H\{x(\tau), t\} d\tau,$$

де H — довільна нелінійна функція. Однак, при цьому втрачається простота співставлення цього оператора із відповідним диференціальним рівнянням, і відповідно із фізично реалізовною системою, здатною виконати таке перетворення. Найбільш практично важливим є наступний підклас нелінійних перетворень із пам'яттю.

2) *Нелінійні перетворення із зворотнім зв'язком.* Перетворення цього типу задаються рівнянням

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, \tau) f \left[x(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau, s) y(s) ds \right] d\tau,$$

яке відповідає рівнянню, згідно структурної схеми, яка зображена на рис. 10.7.

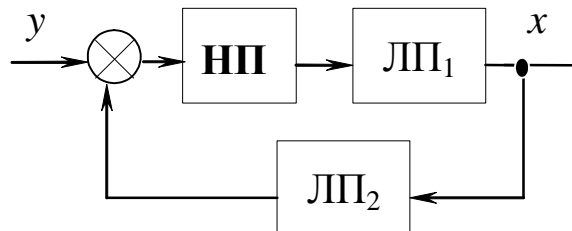


Рис. 10.7. Структурна схема нелінійного перетворення із зворотнім зв'язком

Тут $h_0(t, \tau)$ — імпульсна функція лінійної частини прямої вітки перетворення, $k(t, \tau)$ — імпульсна функція зворотнього зв'язку, f — функція, яка визначає безінерційність перетворення в прямій вітці.

10.3. Опис нелінійних перетворень функціональними рядами.

Аналогічно відомій теоремі Вейерштраса про можливість апроксимації неперервної функції поліномами є теорема Фреше

(1910 р.) про апроксимацію неперервного функціоналу рядом з кратних згорток (див. В. Вольтерра “Теория функционалов, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений”). Цей факт покладено в основу моделювання нелінійних динамічних ланок (нелінійностей з пам’яттю). Вперше з такою метою його було використано Н. Вінером у 1942 р. при аналізові нелінійних перетворень випадкових процесів.

Розглянемо нелінійну ланку (нелінійність) $y = f(u)$. Нехай u залежить від часу, тобто $u \equiv u(t)$. Тоді значення y в момент часу t_0 буде функцією, наприклад N змінних (як показано на рис. 10.8).

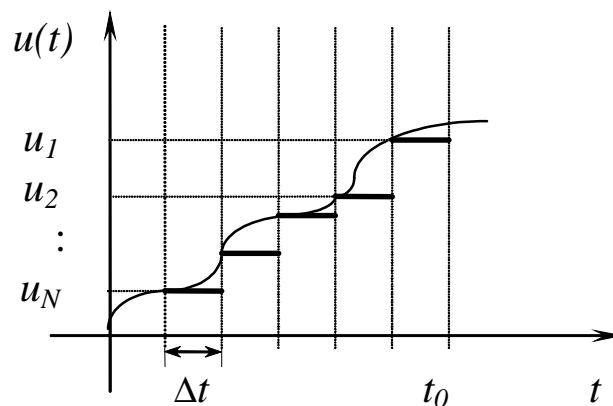


Рис.10.8. Апроксимація неперервної функції поліномами.

В цьому випадку u_n при $n > N$ вже не впливає на $y(t_0)$ (час пам’яті кінцевий). З іншої сторони, вважатимемо, що $u(t) = 0$ при $t < 0$. Вибір Δt , поки що залишимо поза увагою, але вважатимемо, що $\Delta t < \tau$ (постійної часу), отже,

$$\hat{y}(t_0) \rightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_N).$$

Для функції N змінних може існувати розклад в ряд Тейлора (10.3.1):

$$\begin{aligned}
\hat{y} &\rightarrow (a_1 u_1 + a_2 u_2 + K + a_N u_N) + (a_{11} u_1^2 + a_{12} u_1 u_2 + K + a_{NN} u_N^2) + \\
&+ (a_{111} u_1^3 + a_{123} u_1 u_2 u_3 + K + a_{NNN} u_N^3) + K = \\
&= \sum_{i=1}^N a_i u_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} u_i u_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk} u_i u_j u_k + K = \\
&= \hat{y}_{\text{лін}} + \hat{y}_{\text{квадр}} + \hat{y}_{\text{куб}} + K
\end{aligned}$$

(многочлени Колмогорова - Габора).

Розглянемо лінійний член $\hat{y}_{\text{лін}} = \sum_{i=1}^N a_i u_i$ з цього ряду. Візьмемо

$a_i = h_i \Delta t$, де h_i — ідгук ланки на збурення $u_i \equiv 1$. Зауважимо, що такий вибір коефіцієнту пояснюється (за аналогією) рядом Тейлора

$$\begin{aligned}
f(t) &= f_0(t) + f'(\cdot)t + \frac{1}{2} f''(\cdot)t^2 + K + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\cdot)t^n + K = \\
&= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + K + a_n t^n + K
\end{aligned}$$

де коефіцієнт при відповідному степені змінної (тут t) $a_1 = f'(t_0)$. Врахувавши дискретність для динамічної ланки, а також, що $h(t_i)x(t_i) = x(t_i)$, дістанемо шуканий коефіцієнт, тут $dt \rightarrow \Delta t$. Тоді,

$$y_{\text{лін}}(t_0) = h_1 u_1 \Delta t + h_2 u_2 \Delta t + \dots = \sum_{i=1}^N h_i u_i \Delta t.$$

Якщо $\Delta t \rightarrow \infty$, тт $N \rightarrow \infty$, а $N\Delta t \rightarrow t_0$. Тоді,

$$y_{\text{лін}}(t_0) = \int_0^{t_0} h_1(\tau) u(t_0 - \tau) d\tau.$$

Аналогічно, $a_{ij} = h_{ij} \Delta t \Delta t$, тоді квадратичний член ряду рівний

$$h_{ij} u_i^2 \Delta t \Delta t + 2h_{ij} u_i u_j \Delta t \Delta t + h_{jj} u_j^2 \Delta t \Delta t,$$

а в граничному переході

$$\hat{y}_{\text{квадр}}(t_0) = \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t_0 - \tau_1) u(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

А в загальному

$$y(t) = \int_0^t h_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots$$

Вираз

$$\underbrace{\int \dots \int}_i h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) \dots u(t - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i \quad (10.3.2)$$

називають *функціоналом i -го порядку*, а $h_i(\dots)$ - *ядром* такого функціоналу, або *імпульсною ваговою функцією i -го порядку*. Таким чином отримано функціональний степеневий ряд (ряд Вольтера). При відсутній пам'яті

$$h_1(\tau) = c_1 \delta(\tau), h_2(\tau) = c_2 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \dots,$$

і тоді $y(t) = c_1 u(t) + c_2 u^2(t) + \dots$. Вираз $|u(t)| < r$ визначає радіус збіжності ряду. Зауважимо властивості ядер:

а) $h_n(\tau_1, \dots) = 0, \tau_i < 0, i=1, 2, \dots, n$;

б) $\lim h_n(\cdot) = 0, i = 1, 2, \dots, n$;

в) $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ - або симетричне, або симетризоване.

10.3.1. Знаходження ядер. Багатовимірні ядра можна знайти:

а) підстановкою ряду Вольтера у диференціальне рівняння яким описують даний динамічний об'єкт, що містить нелінійність (нелінійність з пам'яттю).

В принципі цю задачу можна розв'язати, підставляючи ряд Вольтера для $y(t)$ та його похідні в диференціальне рівняння, як це було зроблено при дослідженні лінійних систем.

б) застосовуючи багатовимірне перетворення Лапласа.

Багатовимірне перетворення Лапласа визначається наступною формулою:

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \exp\left[-\sum_{i=1}^n s_i \tau_i\right] d\tau_1 \dots d\tau_n$$

і називається перетворенням Лапласа n -ої степені. Для того щоб перетворити функціонал (10.3.1) введемо нові змінні t_1, t_2, \dots, t_n замість однієї змінної t . Якщо

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \stackrel{\dots}{=} H(s_1, \dots, s_n)$$

і

$$\bullet \\ u(t) = U(s), \\ \bullet$$

то

$$Y_n(s_1, \dots, s_n) = H_n(s_1, \dots, s_n) U(s_1) \dots U(s_n).$$

Тепер функцію $y_n(t)$ можна знайти, застосовуючи зворотнє перетворення Лапласа до $Y_n(s_1, \dots, s_n)$ з наступною підстановкою $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$.

У просторі (s_1, \dots, s_n) ядрам властива симетрія, яка визначається наступним чином:

$$H_{n \text{ сим}}(s_1, s_2, \dots, s_n) \Leftrightarrow \frac{1}{n!} \{H_{n \text{ асим}}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n) + \dots + H_{n \text{ асим}}(s_n, s_{n-1}, \dots, s_2, s_1)\}$$

в) експериментально.

Звичайно, кожен метод вимагає апріорно висхідних відомостей. Докладніше про це можна прочитати в літературі.

Наприкінці зауважимо, що опис нелінійного перетворення функціональним рядом нічого принципово нового не вносить. Це лише ієрархічно погоджений з лінійними описами опис нелінійних перетворень. До речі досить громіздкий, і ефективний лише для нелінійностей вигляду квадратичних із-за чутливості до похибок обчислень членів з ядрами вищих порядків.

Підсумок.

Наведені у даному розділі математичні моделі нелінійностей у детермінованому неперервному та дискретному випадках можна застосувати для аналізу та синтезу радіоелектронних кіл та систем. Ці моделі не відрізняються за своїми властивостями від приведених в інших розділах моделей об'єктів з лінійними і детермінованими властивостями. Їх покладено в основу методів розрахунку різної радіоелектронної апаратури: зв'язкової, медичної, систем керування і т.п.

ПІДСУМКИ

Закони природи і принципи, що базуються на їх основі, використовуються при розробці математичних моделей різного роду явищ та об'єктів, в тому числі створених чи спричинених людиною. З другого боку, без математичних моделей неможливе ефективне створення цих явищ та об'єктів, оскільки метод проб і помилок без сумніву програє перед науково обгрунтованими розрахунками.

Створення корисних математичних моделей, адекватних явищу чи об'єкту, можливе лише при врахуванні характерних для них принципів, особливостей, законів. В тій чи іншій мірі ці речі розглядалися у даному підручнику. Приведемо таблицю альтернатив, що включає назви основних особливостей і принципів, які потрібно обов'язково приймати до уваги при аналізі чи моделюванні систем і сигналів.

Розглядаються також такі характеристики: фізична реалі-зовність, чутливість до малих змін параметрів, стійкість, спряженість, спостережність, керовність. Зауважимо, що поняття надійності, точності, стабільності і ін. відносяться до конструкторсько-технологічного аспекту електронного приладобудування. Хоча їх і не можна розглядати ізольовано, вони все-таки більше залежать від конструкторсько-технологічних особливостей. Щодо теоретичного аспекту, зауважимо лише, що для опису моделей використовують векторно-матричний апарат, диференціальні, інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння і описи.

Показано, що неперервні функції і їх послідовності (дійсні чи комплексні) є ізоморфними та ізометричними моделями сигналів і характеристик систем. Інтуїтивно очікується єдиний загальний спосіб їх опису за допомогою інтегральних, диференціальних і інших рівнянь математичного аналізу. Така потреба викликана практикою, вона виникла у ХХ столітті і знайшла своє відображення перш за все у працях математика Стефана Банаха.

В її основу покладено теоретико-множинний підхід, який ґрунтується на аксіоматичній теорії, що дістала назву *функціонального аналізу*. Деколи функціональний аналіз називають ще матаналізом-3, у продовження традиційних матаналізу 1 і 2 (числення нескінченно малих і диференціального та інтегрального числення).

Табл. 10.1 Основні особливості і принципи опису систем.

№ п/п	Принципи і особливості опису		Примітки
1.	Лінійність	Нелінійність	Поняття нелінійності і нестационарності негативно означені, тому не можуть бути покладені в основу назви класу явищ чи об'єктів. Фактично розглядають конкретні види нестационарності і нелінійності.
2.	Стаціонарність	Нестационарність	
3.	Зосередженість	Розподіленість	У просторі
4.	Неперервність	Дискретність	У часі
5.	Детермінованість	Стохастичність	В залежності від можливості врахування всіх зв'язків та змінних
6.	Континуальність	Сітки	Сітка – дискретність у просторі
7.	У дійсній області	У комплексній області	Апарат математичного опису
8.	У вигляді вхід-вихід	У просторі змінних стану	Вигляд опису в залежності від структури зв'язків між змінними

Звичайно, дійти до інженерного розуміння актуальності функціонального аналізу можна лише на основі певного досвіду. Матеріал, викладений в першій частині, повинен допомогти у цьому. В подальшому буде зроблено виклад основних ідей функціонального аналізу.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Структура моделей радіоелектронних кіл та сигналів.

- 1.1. Радіоелектронні кола. Поняття про системи.
- 1.2. Функції радіоелектронних кіл.
- 1.3. Сигнал.
- 1.4. Модель та моделювання.
- 1.5. Дані та відомості. Інформація.
- 1.6. Роль обробки сигналів при відборі інформації.
- 1.7. Моделювання сигналів.
- 1.8. Перетворення Фур'є неперервних сигналів.
- 1.9. Перетворення Лапласа неперервних сигналів.
- 1.10. Одностороннє z -перетворення за означенням.
- 1.11. Одностороннє z -перетворення неперервного детермінованого сигналу.
- 1.12. Обернене z -перетворення. Методи зведення до табличного виду.
- 1.13. Обернене z -перетворення інтегруванням у комплексній площині.
- 1.14. Поняття про узагальнені функції.
- 1.15. Дельта-функція та її властивості.
- 1.16. Дії над узагальненими функціями.
- 1.17. Поняття про похідну від узагальненої функції.
- 1.18. Властивості інтегралів від виразів з узагальненими функціями.
- 1.19. Загальна характеристика інтегральних перетворень (Лапласа, Фур'є).
- 1.20. Теорема про зображення згортки.
- 1.21. Властивості перетворення Лапласа.
- 1.22. Застосування перетворення Лапласа. Операційне числення.
- 1.23. Поняття про ортогональність функцій.
- 1.24. Поняття про лінійну незалежність множини функцій.
- 1.25. Функційний простір. Базис функційного простору.
- 1.26. Рівність Парсеваля.
- 1.27. Нерівність Бесселя.
- 1.28. Умови існування інтегральних перетворень.

2. Зображення детермінованих лінійних стаціонарних систем.

- 2.1. Зображення типу вхід-вихід у частотній області лінійних неперервних систем.
- 2.2. Зображення типу вхід-вихід у часовій області лінійних неперервних систем.
- 2.3. Взаємозв'язок між зображеннями типу вхід-вихід у часовій та частотній областях неперервних лінійних систем.
- 2.4. Зображення типу вхід-вихід у частотній області лінійних дискретних систем.
- 2.5. Зображення типу вхід-вихід у часовій області лінійних дискретних систем.
- 2.6. Взаємозв'язок між зображеннями типу вхід-вихід у часовій та частотній областях лінійних дискретних систем.
- 2.7. Зображення лінійних систем у вигляді диференціального рівняння.
- 2.8. Різницеві рівняння.
- 2.9. Зображення лінійних систем у вигляді різницевого рівняння.
- 2.10. Блок-схеми дискретних систем.
- 2.11. Блок-схеми неперервних систем.
- 2.12. Векторно-матричні зображення типу вхід-вихід у часовій області лінійних систем.
- 2.13. Векторно-матричні зображення типу вхід-вихід у частотній області лінійних систем.
- 2.14. Зображення лінійних неперервних систем у просторі змінних стану.
- 2.15. Зображення лінійних дискретних систем у просторі змінних стану.
- 2.16. Взаємозв'язок між зображенням типу вхід-вихід та у просторі змінних стану лінійних систем.
- 2.17. Функція передачі дискретних лінійних систем.
- 2.18. Функція передачі неперервних лінійних систем.
- 2.19. Імпульсна функція відгуку лінійних систем.
- 2.20. Фізична реалізованість системи.
- 2.21. Стійкість лінійної системи.
- 2.22. Чутливість характеристик лінійних систем.
- 2.23. Спостережність у лінійних системах.
- 2.24. Керовність у лінійних системах.
- 2.25. Спряженість лінійних систем.
- 2.26. Співвідношення невизначеності у лінійних системах.
- 2.27. Взаємозв'язок між зображеннями системи у вигляді диференціального рівняння та у просторі змінних стану.
- 2.28. Властивості функції передачі системи.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ

1. Знайти функцію $\exp(\mathbf{A}^T)$,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Математична модель сигналу описується виразом

$$x(t) = x_0 t \cdot \exp(Lt) \cdot H(t).$$

Опишіть зсунутий на τ , віддзеркалений, стиснутий в a раз в часі та підсилений в k раз по амплітуді сигнал. Приведіть графіки.

3. Математична модель сигналу задана функцією $f(t)$, $-\infty < t < \infty$. Запишіть функцію $f(t)$ у вигляді $f(t) = f_{\Pi}(t) + f_{\text{H}}(t)$, де $f_{\Pi}(t)$ – парна частина, а $f_{\text{H}}(t)$ – непарна.

4. Імпульсна перехідна функція системи $h(t) = e^{-Lt}$. На вхід системи в момент часу $t_0 = 0$ починає поступати сигнал

$$x(t) = \sin \omega t.$$

Знайти сигнал $y(t)$ на виході системи.

5. Функція передачі системи

$$H(s) = \frac{1}{s + L}.$$

Знайти сигнал $y(t)$ на виході системи, коли на її вхід поступає сигнал $x(t) = \sin \omega t$.

6. Дискретна система описується, рівнянням:

$$y_{n-3} + 2y_{n-2} + y_n = x_{n-2} + x_{n-3}.$$

Описати систему у просторі змінних стану.

7. Перевірити для $t, f \in (-\infty, \infty)$ твердження

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(f) = 1$$

(використати рівність Парсеваля).

8. Привести блок-схему системи, що описується рівняннями:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 = f(t);$$

$$y = x - \frac{dx}{dt}.$$

9. Привести блок-схему системи, що описується рівняннями:

$$y_{n-2} + b_1 y_{n-1} + b_0 = x_n ;$$

$$y_n^{\text{вих}} = y_n .$$

10. Система задана рівнянням:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10 \frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = x(t).$$

Знайти рівняння системи у просторі станів.

11. Система задана рівняннями:

$$y_1(k+2) + y_2(k+1)$$

Привести рівняння системи у просторі станів.

12. Знайти функцію передачі системи, що описується рівнянням:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} - 10y(t) = x(t).$$

13. Привести блок-схему системи:

$$y_{k+2} = x_k - 2y_{k+1} - 2y_k.$$

14. Впевнитись, що при $n \rightarrow \infty$ границею послідовності функцій $f_n(t) = (n/2)e^{-nt}$ буде функція Дірака $\delta(t)$.

15. Перевірити, чи є причинним оператор $H(s) = (s-1)/(s+1)$ для сигналу

$$x(t) = \begin{cases} e^{-Lt}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

16. Чи буде система з імпульсною характеристикою $h(t) = e^{-Lt} \sin \omega t$, $t > 0$, $L > 0$ стійкою?

17. Визначити чутливість абсолютної зміни амплітудно-частотної характеристики системи до абсолютної зміни параметра b в її функції передачі, яка задається формулою:

$$H(s) = \frac{a_0}{bs + 1}.$$

18. Система описується рівнянням:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 2s + 2} X(s).$$

Визначити, чи буде система стійкою?

19. Визначити чутливість відносних змін амплітудно-частотної характеристики системи до відносних змін її параметра b , якщо функція передачі системи задається формулою:

$$H(s) = \frac{a_0}{s - b}.$$

20. Система задана рівняннями:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = U; \quad y = x_2.$$

Визначити, чи є система повністю спостережною?

21. Визначити, чи керована система, яка описується рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + U. \end{aligned}$$

22. Амплітуда гармонічного сигналу 1В. Знайти амплітуду спектрального зображення сигналу.

23. Амплітуда спектральної складової гармонічного сигналу рівна 1. Знайти амплітуду гармонічного сигналу.

24. Знайти функцію передачі Г-подібної LC-ланки.

25. Скласти диференціальне рівняння, що описує Г-подібну LC-ланку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баскаков С.І. Радіотехнічні кола і сигнали. Підручник для вузів по спеціальності “Радіотехніка”. М.: Вища школа, 1988.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1985.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1985.
4. Жуков В.П., Карташев В.Г., Николаев А.М. Сборник задач по курсу “Радиотехнические цепи и сигналы”. М.: Советское радио, 1972.
5. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (метод пространства состояний). М.: Наука, 1970.
6. Колмогоров А.Н., Фомін С.В. Элементы теории і функціонального аналізу. К.: Вища школа, 1974.
7. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Мир, 1978.
8. Мандзій Б.А., Желяк Р.І. Основы теории і сигналів (навчальний посібник). Львів: 1994.
9. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. Государственное изд. физико-математической литературы. М.: 1962.
10. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Сов. радио, 1978.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
12. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.:Наука, 1983.
13. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
14. Френкс Л. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
15. Яворский Б.И. Взаимосвязь между представлениями цифрового рекурсивного резонатора в частотной области и пространстве состояний / В сб. "Автоматизация производственных процессов". Львов, 1979, вып. 28.
16. Яворский Б.И. Цифровой рекурсивный резонатор / В сб. "Отбор и передача информации", 1985, вып. 71, с. 67-74.
17. Medical Instrumentation. Application and Design. John G. Webster, Ed. Houfton, Mifflin Co. , Boston, 1978.

18. O'Flym Michael, Eugene Moriarty. Linear Systems: Time Domain and Transform analysis.

19. Weinberger H. F. A First Course in Partial Differential Equations. J.Wiley & Sons, N.Y., 1965.