

**А. Сяський. Згин зварної пластинчастої конструкції за контакту берегів колового міжфазного розрізу / А. Сяський, К. Музичук, В. Кот // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 69. — № 1. — С.20-30. — (механіка та матеріалознавство).**

УДК 539.3

**А. Сяський, докт. техн. наук; К. Музичук; В. Кот**

*Рівненський державний гуманітарний університет*

## **ЗГИН ЗВАРНОЇ ПЛАСТИНЧАСТОЇ КОНСТРУКЦІЇ ЗА КОНТАКТУ БЕРЕГІВ КОЛОВОГО МІЖФАЗНОГО РОЗРІЗУ**

***Резюме.** Наведено методику розрахунку кусково-однорідної зварної пластинчастої конструкції, що містить нескінченну ізотропну пластинку з круговим отвором і пружний круглий диск з розрізом на ділянці сполучення, береги якого контактують за дії згинальних навантажень. Моментні напруження на контурах пластинки і диска визначаються із системи сингулярних інтегральних рівнянь, наближений розв'язок якої побудовано методами механічних квадратур і колокації. Досліджено вплив на напружений стан складеної пластинки і величини зони контакту відносної жорсткості зварювального шва та величини розрізу.*

***Ключові слова:** ізотропна пластинка, ізотропний диск, зварний шов, ділянка контакту, система сингулярних інтегральних рівнянь, згинальні моменти.*

**A. Syasky, K. Muzychuk, V. Kot**

## **BENDING OF THE WELDED LAMELLAR CONSTRUCTION UNDER THE CONTACT OF THE CIRCULAR INTERPHASE CUT EDGES**

***Summary.** Mixed contact problem of the interaction of the infinity isotropic plate with the circular hole of single radius and the circular elastic disk through the open welded seam of constant rigidity in tension (compression) and bending, is considered. Under bending load, the cut edges between the plate and the disk contact partly or along the whole length in one of the common base of the composite plate. The solving of the problem includes the determination of the stress state components at the interface of the materials of the plate and the disk as well as in the welded seam.*

*General state of stress in the lamellar construction is presented as the superposition of the two-dimensional stress states: generalized two-dimensional stress state and bending in the technical theory of the bending plates.*

*The boundary conditions on the smooth contact zone are formulated as the equality of the normal displacements and rotation angles of the normal line to the mean plane in the contour points. As the perfect mechanical contact exists in the zone of soldered joint so the boundary conditions are written as equality of displacements, rotation angles and deformations between the plate, welded seam and the disk.*

*The system of singular integral-differential equations for the determination of contact stresses in the zone of soldered joint and in the contact zone is built through modeling welded seam as the elastic line which coincides with the splice lines of the plate and the disk, and, using the integral relations between the vector displacement components and the rotation angle of normal line in the contour points of the plate (disk) and the contour stress. The finding functions structure in the ends of these zones is determined.*

*The approximate solution of the problem is built by the method of mechanical quadrature and collocation which is used to analyze the influence upon the relative rigidity of welded seam and the cut size on the composite plate stress state and the size of contact zone. The numerical example is considered.*

**Key words:** isotropic plate, isotropic disk, welded seam, contact zone, system of singular integral equations, bending moments.

**Вступ.** Зварні з'єднання тонкостінних пластинчастих елементів конструкцій широко використовуються в машинобудуванні, будівництві та інших галузях інженерної практики, оскільки вони найбільш технологічні й міцні. Експлуатація таких з'єднань в умовах високоградієнтних навантажень зумовлює появу тріщин в околі зварювального шва. Такого роду дефекти є потужними концентраторами напружень і можуть призвести до передчасного руйнування конструкції. Якщо тріщина розміщена в зоні стискальних напружень, то її береги можуть контактувати частково або по всій довжині, забезпечуючи при цьому непроникність і герметичність пластинчастої конструкції. Врахування контакту берегів тріщин дозволяє точніше оцінити напружений стан пластинчастої конструкції, а, отже, її міцність і жорсткість.

Ефективність використання зварних конструкцій призвела до розроблення нових методів забезпечення їх довговічності. У роботі [1] на підставі аналізу наукових досліджень з даної проблеми, викладено основні заходи забезпечення міцності та витривалості зварних металоконструкцій на всіх етапах (стадіях) їх експлуатації.

Проблема згину однорідної пластинки з розрізом по дузі кола, береги якого контактують, досліджено в [2, 3]. Випадок кусково-однорідної пластинки з коловою межею поділу матеріалів розглянуто в [4]. Аналогічні задачі при частковому з'єднанні пластинки і пружного диска розімкненим зварювальним швом у науковій літературі не розглядалися.

**Постановка задачі. Система інтегральних рівнянь.** Нехай в круговий отвір радіусом  $\rho_0 = 1$ , який обмежений контуром  $\gamma$ , нескінченної ізотропної пластинки товщиною  $2h$  без зазору і натягу вставлено круглий ізотропний диск такої ж товщини. Систему прямокутних  $(x, y)$  і полярних  $(\rho, \lambda)$  координат у спільній середній площині складеної пластинки оберемо так, як показано на рис. 1.

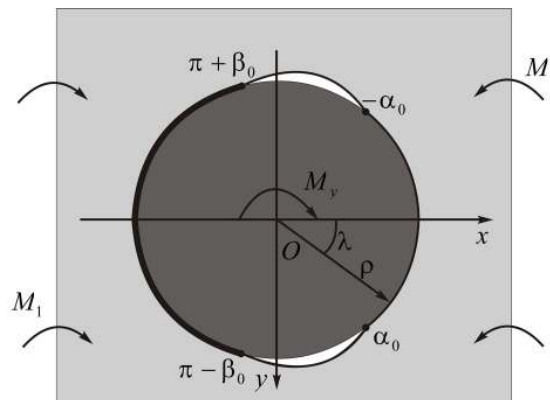


Рисунок 1. Розрахункова схема складеної пластинки

Figure 1. Analytical model of the composite plate

Позначимо через  $\gamma_1 \equiv [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$  симетричну ділянку контуру  $\gamma$ , на якій пластинка і диск зварені (спаяні) між собою. На решті контуру між ними наявний розріз, ширина якого має порядок пружних зміщень.

Пластинчаста конструкція перебуває в умовах циліндричного згину на нескінченності рівномірно розподіленими моментами  $M_1$ . У центрі диска діє зосереджена пара сил з моментом  $M_y$ . З огляду на малість ширини розрізу вважаємо, що за дії заданого навантаження його береги на ділянці  $\gamma_2 \equiv [-\alpha_0; \alpha_0]$  будуть гладко контактувати по лінії на спільній верхній основі пластинки і диска. Це означає, що складена пластинка одночасно перебуватиме в умовах узагальненого плоского напруженого стану і згину [2, 3].

Розв'язок задачі передбачає визначення величини зони спаю, для якої береги розрізу контактують частково або по всій довжині, а також компонентів напруженого стану на контурах пластинки, диска і в зварювальному шві.

Моделюючи сполучувальний елемент пружною лінією сталої жорсткості на розтяг (стиск)  $E_0 F$  і згин  $A$  в спрямлювальній площині, граничні умови на лініях поділу матеріалів пластинки, диска і зварювального шва на підставі [5, 6] можна подати у такому вигляді:

зона гладкого контакту [3, 4]

$$\cos \lambda [U + \partial w / \partial x] + \sin \lambda [V + \partial w / \partial y] = 0; S_{\rho\lambda} = P = 0; M_\rho = -h T_\rho, \lambda \in \gamma_2; \quad (1)$$

зона сполучення пластинки і диска [4, 5]

$$[T_\rho] = E_0 F \varepsilon_\lambda; [S_{\rho\lambda}] = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [T_\rho]; [M_\rho] = -AX; [P] = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [M_\rho]; \quad (2)$$

$$[U] = 0; [V] = 0; [\partial w / \partial x] = 0; [\partial w / \partial y] = 0, \lambda \in \gamma_1, \quad (3)$$

де  $T_\rho, S_{\rho\lambda}, M_\rho, P, U, V, w, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y$  – нормальні та дотичні контактні зусилля і моменти, а також компоненти вектора зміщення та кута повороту нормалі в контурних точках пластинки;  $[T_\rho] = T_\rho - \tilde{T}_\rho, [S_{\rho\lambda}] = S_{\rho\lambda} - \tilde{S}_{\rho\lambda}, [M_\rho] = M_\rho - \tilde{M}_\rho, [P] = P - \tilde{P}, [U] = U - \tilde{U}, [V] = V - \tilde{V}, [\partial w / \partial x] = \partial w / \partial x - \partial \tilde{w} / \partial x, [\partial w / \partial y] = \partial w / \partial y - \partial \tilde{w} / \partial y$  – стрибки відповідних величин при переході через контур  $\gamma$ ;  $\varepsilon_\lambda, X$  – відносне видовження контуру пластинки та його згинальна деформація. Хвилькою відзначено величини, які відносяться до диска.

Величини  $U, V, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \tilde{U}, \tilde{V}, \partial \tilde{w} / \partial x, \partial \tilde{w} / \partial y, \varepsilon_\lambda, X$  на контурі  $\gamma$  визначаються за формулами [4], які при заданому навантаженні набувають такого вигляду:

$$U + iV = \frac{1}{2Eh} \left[ (1 - \nu)(f_1(\lambda) + if_2(\lambda)) - \frac{2i}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (f_1'(t) + if_2'(t)) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2i}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (f_3'(t) + if_4'(t)) \ln \cos \frac{\lambda-t}{2} dt + C_1 \Bigg]; \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{k}{3+\nu} [(1+\nu)(g_1(\lambda) + ig_2(\lambda)) + \\
 & + \frac{2i}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (g_1'(t) + ig_2'(t)) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{2i}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (g_3'(t) + ig_4'(t)) \ln \cos \frac{\lambda-t}{2} dt + \\
 & + \frac{iM_y}{2\pi} (1+\nu)\lambda - \frac{3+\nu}{1+\nu} M_1 \cos \lambda - 2M_1 \cos \lambda + i(3+\nu)\sigma \tilde{C}_1 + C_3 \Bigg]; \\
 \tilde{U} + i\tilde{V} = & \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\tilde{\nu})(f_1(\lambda) + if_2(\lambda)) + \frac{2i}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (f_1'(t) + if_2'(t)) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\
 & + \frac{2i}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\tilde{f}_3'(t) + i\tilde{f}_4'(t)) \ln \cos \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (f_2'(t) \cos t - f_1'(t) \sin t) dt + \\
 & \left. + \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\tilde{f}_4'(t) \cos t - \tilde{f}_3'(t) \sin t) dt + C_1 \right]; \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = \frac{\tilde{k}}{3+\tilde{\nu}} [(1+\tilde{\nu})(g_1(\lambda) + ig_2(\lambda)) - \\
 & - \frac{2i}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (g_1'(t) + ig_2'(t)) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{2i}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\tilde{g}_3'(t) + i\tilde{g}_4'(t)) \ln \cos \frac{\lambda-t}{2} dt + \\
 & + \frac{iM_y}{2\pi} (1+\nu_1)\lambda + \frac{1-\nu_1}{2\pi} \sigma^2 M_y \cos \lambda + \sigma(\tilde{\alpha}_1 + i\tilde{\beta}_1) + C_3 \Bigg]; \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\lambda = & \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)(\cos \lambda f_4'(\lambda) - \sin \lambda f_3'(\lambda)) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\cos t f_2'(t) - \sin t f_1'(t)) dt + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos t f_4'(t) - \sin t f_3'(t)) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos t f_4'(t) + \sin t f_3'(t)) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt \right]; \\
 X = & \frac{k}{3+\nu} \left[ (1+\nu)(\cos \lambda g_4'(\lambda) - \sin \lambda g_3'(\lambda)) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\cos t g_2'(t) - \sin t g_1'(t)) dt - \right. \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos t g_4'(t) - \sin t g_3'(t)) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos t g_4'(t) + \sin t g_3'(t)) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - \\
 & \left. - \frac{3+\nu}{1+\nu} M_1 + 2M_1 \cos 2\lambda - \frac{1-\nu}{2\pi} M_y \cos \lambda \right]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Тут  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;  $\sigma = e^{i\lambda}$ ;  
 $k = \frac{1}{D(1-\nu)}$ ;  $D$  – циліндрична жорсткість пластинки на згин;

$$\left\{ \begin{matrix} f_1(\lambda) + if_2(\lambda), & \lambda \in \gamma_2 \\ f_3(\lambda) + if_4(\lambda), & \lambda \in \gamma_1 \end{matrix} \right\} = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{it} dt; \quad \left\{ \begin{matrix} g_1(\lambda) + ig_2(\lambda), & \lambda \in \gamma_2 \\ g_3(\lambda) + ig_4(\lambda), & \lambda \in \gamma_1 \end{matrix} \right\} = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (M_\rho + iP) e^{it} dt;$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_1(\lambda) + if_2(\lambda), & \lambda \in \gamma_2 \\ \tilde{f}_3(\lambda) + i\tilde{f}_4(\lambda), & \lambda \in \gamma_1 \end{matrix} \right\} = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (\tilde{T}_\rho + i\tilde{S}_{\rho\lambda}) e^{it} dt; \quad \left\{ \begin{matrix} g_1(\lambda) + ig_2(\lambda), & \lambda \in \gamma_2 \\ \tilde{g}_3(\lambda) + i\tilde{g}_4(\lambda), & \lambda \in \gamma_1 \end{matrix} \right\} = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (\tilde{M}_\rho + i\tilde{P}) e^{it} dt;$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1-\tilde{\nu}}{1+\tilde{\nu}} \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (g'_1(t) \sin t - g'_2(t) \cos t) dt - \frac{1-\tilde{\nu}}{1+\tilde{\nu}} \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\tilde{g}'_3(t) \sin t - \tilde{g}'_4(t) \cos t) dt;$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{1-\tilde{\nu}}{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (g'_1(t) \cos t + g'_2(t) \sin t) dt - \frac{1-\tilde{\nu}}{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\tilde{g}'_3(t) \cos t + \tilde{g}'_4(t) \sin t) dt.$$

Підставляючи (4), (5) у граничні умови (1) – (3), доходимо системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення функцій  $[T_\rho], [S_{\rho\lambda}], [M_\rho], [P], f'_1(\lambda), f'_2(\lambda), f'_3(\lambda), f'_4(\lambda), g'_1(\lambda), g'_2(\lambda), g'_3(\lambda), g'_4(\lambda), \tilde{f}'_3(\lambda), \tilde{f}'_4(\lambda), \tilde{g}'_3(\lambda), \tilde{g}'_4(\lambda)$ , яку при  $\delta = \frac{E}{E}$ ;  $\tilde{\delta} = \frac{b_0 E_0}{\rho_0 E}$ ;  $\nu = \tilde{\nu}$

запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \cos \lambda \left[ (1-\delta)(1-\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f'_1(t) dt + (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} f'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \right. \\ & + \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \cos t dt - \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_4(\tilde{t}) \cos \tilde{t} d\tilde{t} - \\ & - \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \sin t dt + \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_3(\tilde{t}) \sin \tilde{t} d\tilde{t} + C_1^0 + q \left\{ (1-\delta)(1+\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} g'_1(t) dt - \right. \\ & - (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} g'_2(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} g'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \\ & \left. - \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{g}'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \delta \tilde{\alpha}_1 \cos \lambda - \delta \tilde{\beta}_1 \sin \lambda + C_3^0 \right\} + \\ & + \sin \lambda \left[ (1-\delta)(1-\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f'_2(t) dt - (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} f'_3(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_3(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \cos t dt - \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_4(\tilde{t}) \cos \tilde{t} d\tilde{t} + \\
 & + \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \sin t dt - \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_3(\tilde{t}) \sin \tilde{t} d\tilde{t} + q \left\{ (1-\delta)(1+\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} g'_2(t) dt + \right. \\
 & + (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} g'_1(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} g'_3(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \\
 & \left. + \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{g}'_3(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \delta \tilde{\alpha}_1 \sin \lambda + \delta \tilde{\beta}_1 \cos \lambda \right\} = q \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} M_1 + 2M_1 \cos 2\lambda - \right. \\
 & \left. - \frac{1+\nu}{2\pi} (1-\delta) \lambda M_y \sin \lambda + \frac{1-\nu}{2\pi} \delta M_y \cos \lambda \right]; a(\lambda) f'_1(\lambda) + b(\lambda) f'_2(\lambda) = 0; \\
 & a(\lambda) g'_1(\lambda) + b(\lambda) g'_2(\lambda) = 0; a(\lambda) (g'_2(\lambda) + h f'_2(\lambda)) - b(\lambda) (g'_1(\lambda) + h f'_1(\lambda)) = 0, \lambda \in \gamma_2; \\
 & (1-\delta)(1-\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f'_1(t) dt + (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} f'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \\
 & + \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \cos t dt - \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_4(\tilde{t}) \cos \tilde{t} d\tilde{t} - \\
 & - \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \sin t dt + \delta \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_3(\tilde{t}) \sin \tilde{t} d\tilde{t} + C_1^0 = 0; \\
 & (1-\delta)(1-\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f'_2(t) dt - (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} f'_3(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \\
 & - \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_3(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \cos t dt - \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_4(\tilde{t}) \cos \tilde{t} d\tilde{t} + \\
 & + \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \sin t dt - \delta \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_3(\tilde{t}) \sin \tilde{t} d\tilde{t} = 0; \\
 & (1-\delta)(1+\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} g'_1(t) dt - (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} g'_2(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} g'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \\
 & - \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{g}'_4(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \delta \tilde{\alpha}_1 \cos \lambda - \delta \tilde{\beta}_1 \sin \lambda - (3+\nu) \tilde{C}_1 \sin \lambda + C_3^0 = \\
 & = 2M_1 \cos \lambda + \frac{3+\nu}{1+\nu} M_1 \cos \lambda + \frac{1-\nu}{2\pi} \delta M_y \cos 2\lambda;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\delta)(1+\nu) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} g_2'(t) dt + (1+\delta) \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} g_1'(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} g_3'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \\
 & + \frac{2\delta}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{g}_3'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \delta \tilde{\alpha}_1 \sin \lambda + \delta \tilde{\beta}_1 \cos \lambda + (3+\nu) \tilde{C}_1 \cos \lambda = \\
 & = -2M_1 \sin \lambda + \frac{3+\nu}{1+\nu} M_1 \sin \lambda - \frac{1+\nu}{2\pi} (1-\delta) M_y \lambda + \frac{1-\nu}{2\pi} \delta M_y \sin 2\lambda ; \\
 [T_\rho] & = \tilde{\delta} \left[ (1-\nu)(\cos \lambda f_4'(\lambda) - \sin \lambda f_3'(\lambda)) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\cos t f_2'(t) - \sin t f_1'(t)) dt + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos \tilde{t} f_4'(\tilde{t}) - \sin \tilde{t} f_3'(\tilde{t})) d\tilde{t} + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos \tilde{t} f_3'(\tilde{t}) + \sin \tilde{t} f_4'(\tilde{t})) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right]; \\
 [S_{\rho\lambda}] & = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [T_\rho]; [M_\rho] = -\frac{1+\nu}{3+\nu} \tilde{\delta} [(1+\nu)(\cos \lambda g_4'(\lambda) - \sin \lambda g_3'(\lambda)) + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\cos t g_2'(t) - \sin t g_1'(t)) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos \tilde{t} g_4'(\tilde{t}) - \sin \tilde{t} g_3'(\tilde{t})) d\tilde{t} - \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} (\cos \tilde{t} g_3'(\tilde{t}) + \sin \tilde{t} g_4'(\tilde{t})) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \frac{3+\nu}{1+\nu} M_1 + 2M_1 \cos 2\lambda - \frac{1-\nu}{2\pi} M_y \cos \lambda ]; \\
 [P] & = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [M_\rho]; [T_\rho] = -\sin \lambda f_3'(\lambda) + \cos \lambda f_4'(\lambda) + \sin \lambda \tilde{f}_3'(\lambda) - \cos \lambda \tilde{f}_4'(\lambda); \\
 [S_{\rho\lambda}] & = -\cos \lambda f_3'(\lambda) - \sin \lambda f_4'(\lambda) + \cos \lambda \tilde{f}_3'(\lambda) + \sin \lambda \tilde{f}_4'(\lambda); \\
 [M_\rho] & = -\sin \lambda g_3'(\lambda) + \cos \lambda g_4'(\lambda) + \sin \lambda \tilde{g}_3'(\lambda) - \cos \lambda \tilde{g}_4'(\lambda); \tag{6} \\
 [P] & = -\cos \lambda g_3'(\lambda) - \sin \lambda g_4'(\lambda) + \cos \lambda \tilde{g}_3'(\lambda) + \sin \lambda \tilde{g}_4'(\lambda), \\
 & \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]; \lambda \in \gamma_1.
 \end{aligned}$$

Цю систему доповнюємо умовами рівноваги зварювального шва [7]

$$\int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} ([M_\rho] \cos t - [P] \sin t) dt = 0; \quad \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} ([T_\rho] \cos t - [S_{\rho\lambda}] \sin t) dt = 0 \tag{7}$$

і диска [4]

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\tilde{M}_\rho \cos t - \tilde{P} \sin t) dt + \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} (\tilde{M}_\rho \cos t - \tilde{P} \sin t) dt = -M_y ; \\
 & \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\tilde{T}_\rho \cos t - \tilde{S}_{\rho\lambda} \sin t) dt + \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} (\tilde{T}_\rho \cos t - \tilde{S}_{\rho\lambda} \sin t) dt = 0. \tag{8}
 \end{aligned}$$

При симетричному відносно осі  $Ox$  навантаженні умова однозначності прогину пластинки виконуємо тотожно.

Якщо розв'язок системи (6) – (8) стане відомим, то контактні зусилля і моменти на контурі  $\gamma$  визначаємо за формулами

$$T_\rho = f_2'(\lambda) \cos \lambda - f_1'(\lambda) \sin \lambda; M_\rho = g_2'(\lambda) \cos \lambda - g_1'(\lambda) \sin \lambda, \lambda \in \gamma_2;$$

$$\bar{T}_\rho = f_4'(\lambda) \cos \lambda - f_3'(\lambda) \sin \lambda; \bar{S}_{\rho\lambda} = -f_3'(\lambda) \cos \lambda - f_4'(\lambda) \sin \lambda;$$

$$\bar{M}_\rho = g_4'(\lambda) \cos \lambda - g_3'(\lambda) \sin \lambda; \bar{P} = -g_3'(\lambda) \cos \lambda - g_4'(\lambda) \sin \lambda,$$

$$\tilde{T}_\rho = \tilde{f}_4'(\lambda) \cos \lambda - \tilde{f}_3'(\lambda) \sin \lambda; \tilde{S}_{\rho\lambda} = -\tilde{f}_3'(\lambda) \cos \lambda - \tilde{f}_4'(\lambda) \sin \lambda; \quad (9)$$

$$\tilde{M}_\rho = \tilde{g}_4'(\lambda) \cos \lambda - \tilde{g}_3'(\lambda) \sin \lambda; \tilde{P} = -\tilde{g}_3'(\lambda) \cos \lambda - \tilde{g}_4'(\lambda) \sin \lambda, \lambda \in \gamma_1.$$

Розглянемо окремі випадки задачі:

- при  $E_0 F = A = 0$  (відсутній зварювальний шов) із системи (6) – (8) отримаємо розв'язок задачі про контакт берегів колового розрізу на межі поділу матеріалів у кусково-однорідній пластинці за дії згинальних навантажень на нескінченності [3];
- якщо  $\alpha_0 = 0$  (контакт берегів розрізу відсутній), то система (6) – (8) визначає розв'язок задачі про часткове сполучення нескінченної ізотропної пластинки з круговим отвором і пружного круглого диска тонким пружним ребром сталого жорсткості на згин [8].

**Наближений розв'язок задачі.** Точний розв'язок системи (6) – (8) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях зони спаю і контакту.

Підставляючи в умову рівноваги зварювального шва (7) диференціальні залежності (2), знаходимо після обчислення відповідних інтегралів

$$\Delta T_\rho(\pi \mp \beta_0) = \Delta M_\rho(\pi \mp \beta_0) = 0.$$

З огляду на (2) функції  $\Delta S_{\rho\lambda}(\lambda)$ ,  $\Delta P(\lambda)$  при  $\lambda = \pi \mp \beta_0$  будуть мати кореневу особливість.

У зоні гладкого контакту величини  $T_\rho$ ,  $M_\rho$  обмежені, а на її кінцях  $T_\rho(\pm\alpha_0) = M_\rho(\pm\alpha_0) = 0$ . На підставі (9) таку ж структуру мають функції  $f_1'(\lambda)$ ,  $f_2'(\lambda)$ ,  $g_1'(\lambda)$ ,  $g_2'(\lambda)$ .

Як і контактні напруження  $\bar{T}_\rho$ ,  $\bar{S}_{\rho\lambda}$ ,  $\bar{M}_\rho$ ,  $\bar{P}$ ,  $\tilde{T}_\rho$ ,  $\tilde{S}_{\rho\lambda}$ ,  $\tilde{M}_\rho$ ,  $\tilde{P}$  функції  $f_3'(\lambda)$ ,  $f_4'(\lambda)$ ,  $g_3'(\lambda)$ ,  $g_4'(\lambda)$ ,  $\tilde{f}_3'(\lambda)$ ,  $\tilde{f}_4'(\lambda)$ ,  $\tilde{g}_3'(\lambda)$ ,  $\tilde{g}_4'(\lambda)$  на кінцях зони спаю мають кореневу особливість [4].

Знаючи структуру розв'язку системи (6) – (8), її наближений розв'язок можна побудувати методами механічних квадратур і колокації, ефективність якого для розглядуваного класу задач проілюстровано в роботах [4, 9].

**Результати числового розрахунку.** Для нескінченної ізотропної пластинки з круговим отвором, яка частково сполучена з круглим диском, при  $E = \tilde{E}$ ,  $\nu = \tilde{\nu}$



досліджено вплив на напружений стан конструкції відносної жорсткості зварювального шва та величини розрізу. Числову реалізацію задачі проведено за дії зосередженого згинального навантаження в центрі диска ( $M_y = 1$ ).

Встановлено величину розрізу  $\alpha_0$ , для якого повний контакт починає розмикатися в одній точці  $\lambda = \alpha_0^*$ . Числові значення величин  $\alpha_0$  і  $\alpha_0^*$  для різних значень відносної жорсткості зварювального шва  $\tilde{\delta}$  наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Характеристики розрізу, для якого розмикання відбувається в одній точці

$\tilde{\delta}$	0.100	0.010	0.001	0.000
$\alpha_0$ (град.)	76.152	69.268	66.201	64.515
$\alpha_0^*$ (град.)	72.869	67.913	65.818	64.515

Результати розрахунку контактних зусиль і моментів на лініях поділу матеріалів пластинки, зварювального шва і диска для знайдених розрізів проілюстровано на рис. 2 – 5. У верхній частині цих рисунків наведено епюри розподілу відповідних величин на контурі отвору пластинки, у нижній – на контурі диска.

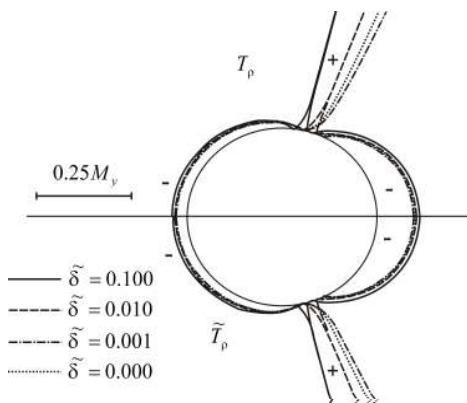


Рисунок 2. Розподіл нормальних зусиль

Figure 2. Distribution of the normal stresses  
Distribution of the tangent stresses

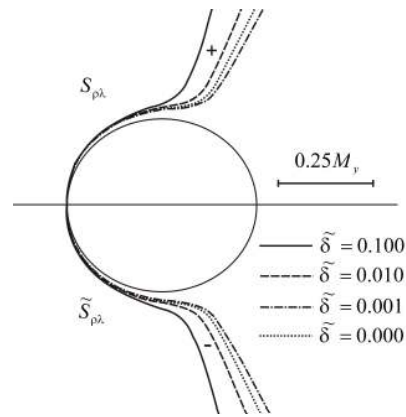


Рисунок 3. Розподіл дотичних зусиль

Figure 3.

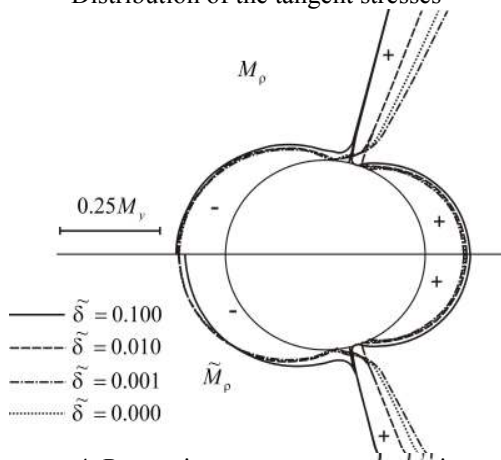


Рисунок 4. Розподіл нормальних моментів

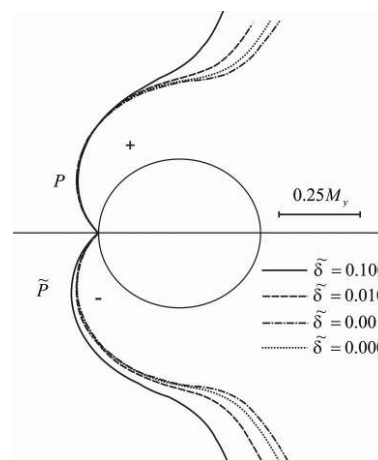


Рисунок 5. Розподіл дотичних моментів

Figure 4. Distribution of the normal moments

Figure 5. Distribution of the tangent moments

Зауважимо, що при зменшенні величини розрізу  $\alpha_0$  отримаємо випадок повного (гарантованого) контакту берегів розрізу, а при її збільшенні – зони відставання будуть розширюватися аж до виникнення ізольованої зони контакту і двох зон відставання.

**Висновки.** З отриманих результатів випливає, що у випадку повного контакту берегів розрізу жорсткість зварювального шва практично не впливає на розподіл контактних зусиль та моментів на ділянці  $\gamma_1$  контурів пластинки та диска. Це означає, що розглянуту задачу можна розв'язувати у спрощеній постановці при  $\tilde{\delta} = 0$ . Положення точки розмикання повного контакту і величини відповідного розрізу, для якого відбувається це розмикання, залежить від відносної жорсткості шва, причому величина розрізу збільшується зі збільшенням  $\tilde{\delta}$ . Для випадку  $\tilde{\delta} = 0$  точка розмикання співпадає з кінцевою точкою розрізу.

**Conclusions.** As it follows from the obtained results, in the case of full contact of the cut edges the rigidity of welded seam practically does not influence on the distributions contact stresses and moments in the  $\gamma_1$  zone of plate and disk contours. This means that the considered problem can be solved in a simple formulation when  $\tilde{\delta} = 0$ . The position of the full contact breaking point and the size of the cut, for which this breaking is happening, depends on relative rigidity of welded seam, where the size of cut is rising with  $\tilde{\delta}$  increasing. In case of  $\tilde{\delta} = 0$  the breaking point coincides with the end of breaking.

### Список використаної літератури

1. Кир'ян, В.І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій [Текст] / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, М.М. Николишин. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
2. Герасимчук, П. Згин пластинки з наскрізною тріщиною по дузі кола зосередженими моментами, прикладеними в центрі кола, з урахуванням контакту її берегів [Текст] / П. Герасимчук // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом інженерна механіка). – Луцьк: Луцький державний технічний університет. – 2005. – Вип. 17. – С. 58 – 66.
3. Божидарнік, В. Згин ізотропної пластинки, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами [Текст] / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Львівського університету. Серія «Мех.-мат.». – 2006. – Вип. 65. – С. 7 – 16.
4. Сяський, А.О. Згин кусково-однорідної пластинки з коловим розрізом, береги якого контактують [Текст] / А.О. Сяський, К.П. Музичук // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». – 2012. – Вип. 2 (58). – С. 91 – 98.
5. Сяський, А. Контактна взаємодія пластин з криволінійними отворами і розімкнених несиметричних ребер змінної жорсткості [Текст] / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, № 3. – С. 20 – 26.
6. Савин, Г.Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости [Текст] / Г.Н. Савин, Н.П. Флейшман. – К.: Наук. думка, 1964. – 384 с.
7. Шевцова, Н. Контактна взаємодія пластин з криволінійними контурами і розімкнених пружних ребер при їх несиметричному сполученні [Текст] / Н. Шевцова, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 14 – 22.
8. Сяський, А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині [Текст] / А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 30 – 36.
9. Сяський, А. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Том 16, № 1. – С. 16 – 21.

*Отримано 04.02.2013*