

УДК 539. 3

А. Сяський, докт. техн. наук; В. Кот

Рівненський державний гуманітарний університет

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ КОНТУРОМ, ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИМ СИСТЕМОЮ ПРУЖНИХ РЕБЕР

Резюме. Розглянуто задачу циліндричного згину на нескінченності пластини з криволінійним отвором, контур якого частково підсиленою системою двох пружних ребер, наділених жорсткістю на згин та кручення. Побудовано математичну модель задачі у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами. Методом колокації досліджено вплив жорсткості підсилювальних ребер на розподіл напружень на контурі трикутного отвору.

Ключові слова: ізотропна пластинка, напружено-деформований стан, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, часткове підсилення.

A. Syasky, V. Kot

ELASTIC EQUILIBRIUM PLATE WITH CURVILINEAR CONTOUR, PARTLY REINFORCED RIBS ELASTIC SYSTEM

The summary. The problem of cylindrical bending and infinite plate with a curvilinear hole, the path is partially reinforced system of two elastic ribs, endowed with stiffness in bending and torsion is shown. As well mathematical model of a problem as a system-integrated differential equations with logarithmic kernel is built. Collocation method of amplifying the impact stiffness of ribs on the stress distribution on the circuit opening is being investigated.

Key words: isotropic plate, the stress-strain state, singular integro-differential equations, partial reinforcement.

Вступ. Деталі пластинчастого типу, що послаблені отворами найчастіше у формі правильних багатокутників із закругленими кутами, знаходять широке застосування в різних галузях техніки. Такі деталі, як ланки складних механізмів набули широкого використання в машинобудуванні та авіабудуванні. При їх циліндричному згині на контурі отвору виникають зони високої концентрації напружень. Ці напруження можна зменшити, підсилюючи контур отвору тонкими ребрами, що мають незначну вагу в порівнянні з вагою пластинки. Поряд з цим, на контурі отвору існують зони, де концентрація напружень незначна і їх підсилення є малоефективним. Тому використання часткового підсилення є найоптимальнішим рішенням.

Задачі циліндричного згину пластин з отворами, контури яких підсилені розізмкненими пружними ребрами змінної жорсткості на згин, розглянуто в роботах [1–3]. Моделюючи підсилення пружними лініями, досліджено вплив їх жорсткості та положення на напружено-деформований стан пластинки. Що стосується задач згину пластин, підкріплених пружними ребрами змінної жорсткості на згин та кручення, то вони вивчені недостатньо. У спрощеній постановці окремі з них розглядаються у [4–5].

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену криволінійним отвором, обмеженим гладким контуром L у формі правильного N -кутника із закругленими кутами, яка згинається рівномірно розподіленими моментами M_1 та M_2 , прикладеними на нескінченності. В середній площині пластинки виберемо систему декартових координат (Oxy) так, щоб вісь Ox співпадала з віссю симетрії отвору. Початок відліку сумістимо з центром отвору. В цій

же площині розмістимо полярну систему координат (r, δ) із центром у точці O і полярною віссю Ox (рис. 1).

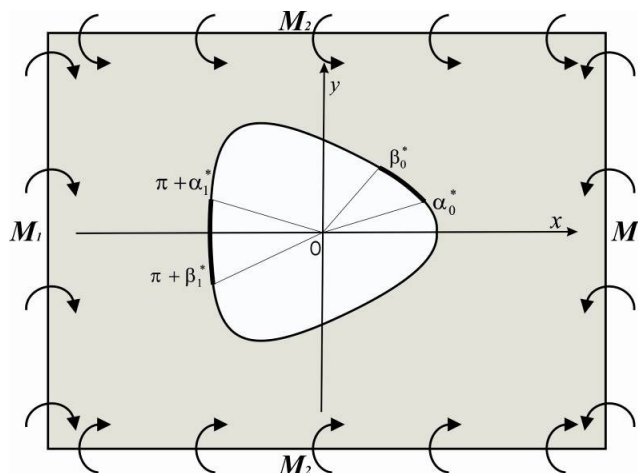


Рисунок 1. Розрахункова схема пластинки

Нехай на ділянках $L_1 = [\alpha_0^*; \beta_0^*]$ та $L_2 = [\alpha_1^* + \pi; \beta_1^* + \pi]$ контур отвору підсилено системою двох пружних ребер змінної жорсткості на згин $g_1(s)$ і кручення $g_2(s)$ (s – дуга на контурі L ; $\alpha_0^*, \beta_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*$ – полярні кути, що визначають зони підсилення). Зовнішнє навантаження на контурі отвору та підсиленнях відсутнє. Розв’язок задачі полягає у визначенні контактних моментів M_{ρ}, P у зонах підсилення та кільцевих M_{λ} і крутних $H_{\rho\lambda}$ моментів на контурі отвору.

Основні рівняння задачі. За допомогою раціональної функції [6]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

здійснимо конформне відображення зовнішності одиничного кола Γ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає середня площа пластинки; $i = \sqrt{-1}$; R_0 – характерний розмір отвору; ε – параметр, який характеризує відхилення форми многокутника від кола.

Моделюючи підсилення тонкими пружними лініями граничні умови задачі [7] можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + c_1; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + c_2, \\ \lambda &\in [\alpha_0; \beta_0]; \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_{\pi + \beta_1}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + c_3; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_{\pi+\beta_1}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + c_4,$$

$$\lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi],$$

де

$$f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{ M_{\rho}^* + iP^* \} e^{it} dt = \begin{cases} f_1^0 + if_2^0, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}; g_1 + ig_2 = \begin{cases} g_1^0 + ig_2^0, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{g}_1 + i\tilde{g}_2, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases};$$

$R_1 + iR_2 = e^{i\theta}$; $M_{\rho}^* + iP^* = (M_{\rho} + iP)\omega'(\sigma)$; $\omega'(\sigma) = \alpha + i\beta$; $[\alpha_0; \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi]$ – образ ділянки $[\alpha_0^*, \beta_0^*] \cup [\alpha_1^* + \pi, \beta_1^* + \pi]$ при відображенні (1); c_1, c_2, c_3, c_4 – дійсні сталі. Решта позначень такі ж, як і в [7].

Компоненти кута повороту нормалі в контурних точках середньої площини пластинки при заданому навантаженні на підставі [7] запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu)f_1(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{\prime 0}(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \\ \left. \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \cos \lambda - \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \cos(N-1)\lambda + 2(M_2 - M_1) \cos \lambda - \right. \\ \left. - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \sin(N-1)\lambda - (3+\nu)\tilde{C}_1 \sin \lambda \right\} + C_1; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu)f_2(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{\prime 0}(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \\ \left. - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \sin \lambda + \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \sin(N-1)\lambda - 2(M_2 - M_1) \sin \lambda - \right. \\ \left. - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \cos(N-1)\lambda + (3+\nu)\tilde{C}_1 \cos \lambda \right\} + C_2; \quad \lambda \in \gamma. \end{aligned}$$

Тут $k = \frac{1}{D(1-\nu)}$; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; C_1, C_2, \tilde{C}_1 – дійсні сталі.

Підстановка (3) у граничні умови (2) призводить до системи чотирьох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для знаходження функцій $f_1^0, f_2^0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$

$$\begin{aligned} \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu)f_1^0(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{\prime 0}(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \\ \left. \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \cos \lambda - \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \cos(N-1)\lambda + 2(M_2 - M_1) \cos \lambda - \right. \\ \left. - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \sin(N-1)\lambda - (3+\nu)\tilde{C}_1 \sin \lambda \right\} + \tilde{C}_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1^0} \left\{ f_2^0(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1^0}{g_2^0} R_1^2(t) \right] + f_1^0(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1^0}{g_2^0} \right) \right\} dt; \\
 & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) f_2^0(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \\
 & - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \sin \lambda + \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \sin(N-1)\lambda - 2(M_2 - M_1) \sin \lambda - \\
 & \left. - (1-\nu) \tilde{C}_1 \varepsilon \cos(N-1)\lambda + (3+\nu) \tilde{C}_1 \cos \lambda \right\} + \tilde{C}_2 = \\
 & = \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1^0} \left\{ f_2^0(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1^0}{g_2^0} - 1 \right) - f_1^0(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1^0}{g_2^0} R_2^2(t) \right] \right\} dt, \\
 & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \tag{4} \\
 & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \tilde{f}_1(\tilde{\lambda}) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \\
 & - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \cos(\tilde{\lambda} + \pi) - \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \cos(N-1)(\tilde{\lambda} + \pi) + 2(M_2 - M_1) \cos(\tilde{\lambda} + \pi) - \\
 & \left. - (1-\nu) \tilde{C}_1 \varepsilon \sin(N-1)(\tilde{\lambda} + \pi) - (3+\nu) \tilde{C}_1 \sin(\tilde{\lambda} + \pi) \right\} + \tilde{C}_3 = \\
 & \int_{\beta_1}^{\tilde{\lambda}} \frac{\sqrt{\alpha^2(\tilde{t} + \pi) + \beta^2(\tilde{t} + \pi)}}{\tilde{g}_1} \left\{ \tilde{f}_2(\tilde{t}) \left[R_2^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} R_1^2(\tilde{t} + \pi) \right] + \tilde{f}_1(\tilde{t}) R_1(\tilde{t} + \pi) R_2(\tilde{t} + \pi) \left(1 - \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} \right) \right\} d\tilde{t}; \\
 & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) f_2(\tilde{\lambda}) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} - \right. \\
 & - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \sin(\tilde{\lambda} + \pi) + \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \sin(N-1)(\tilde{\lambda} + \pi) - 2(M_2 - M_1) \sin(\tilde{\lambda} + \pi) - \\
 & \left. - (1-\nu) \tilde{C}_1 \varepsilon \cos(N-1)(\tilde{\lambda} + \pi) + (3+\nu) \tilde{C}_1 \cos(\tilde{\lambda} + \pi) \right\} + \tilde{C}_4 = \\
 & = \int_{\beta_1}^{\tilde{\lambda}} \frac{\sqrt{\alpha^2(\tilde{t} + \pi) + \beta^2(\tilde{t} + \pi)}}{\tilde{g}_1} \left\{ \tilde{f}_2(\tilde{t}) R_1(\tilde{t} + \pi) R_2(\tilde{t} + \pi) \left(\frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} - 1 \right) - \tilde{f}_1(\tilde{t}) \left[R_1^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} R_2^2(\tilde{t} + \pi) \right] \right\} d\tilde{t}, \\
 & \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi],
 \end{aligned}$$

де $\tilde{\lambda} = \lambda - \pi$; $\tilde{C}_1 = C_1 - c_1$; $\tilde{C}_2 = C_2 - c_2$; $\tilde{C}_3 = C_1 - c_3$; $\tilde{C}_4 = C_2 - c_4$; $\tilde{t} = t - \pi$.

До системи (4) необхідно додати умови рівноваги підсилень [1]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{r0}(t) dt = 0, \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{r0}(t) dt = 0, \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(t) d\tilde{t} = 0, \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0 \quad (5)$$

та умову однозначності прогину пластинки [6]

$$\frac{\varepsilon(1+\chi)}{2\pi} \int_{\gamma} [f_1'(t) \cos((N-1)t) - f_2'(t) \sin((N-1)t)] dt + (\varepsilon^2(N-1) + \chi) \tilde{C}_1 = 0, \quad (6)$$

які служать для визначення сталих $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_1$.

Контактні напруження через функції $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ визначають такими співвідношеннями

$$M_{\rho} + iP = \frac{(f_2^{r0} - if_1^{r0})\alpha + (f_1^{r0} - if_2^{r0})\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i\lambda}, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad (7)$$

$$M_{\rho} + iP = \frac{(\tilde{f}_2' - i\tilde{f}_1')\alpha + (\tilde{f}_1' - i\tilde{f}_2')\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i\lambda}, \quad \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi].$$

Кільцеві і крутні моменти на контурі L визначають за формулами [2].

Розглянемо окремі випадки задачі (4)–(6):

- поклавши в (4)–(6) $g_1 \rightarrow \infty, g_2 \rightarrow \infty$, отримаємо систему рівнянь задачі для випадку підсилення контуру отвору двома абсолютно жорсткими ребрами загального положення;
- при $g_1 \rightarrow 0, g_2 \rightarrow 0$ (підкріплення відсутнє) із (4)–(6) знаходимо розв'язок задачі для нескінченної пластини з невідкріпленим криволінійним отвором [6];
- якщо $\varepsilon = 0$, то система (4)–(6) визначає розв'язок задачі для кругового отвору;
- у випадку $g_2 \rightarrow 0$, із (4)–(6) отримуємо розв'язок задачі, коли кожне з підсилень має тільки згинальну жорсткість [1–3];
- якщо $\alpha_0 = \alpha_1, \beta_0 = \beta_1, N = 2$, то система (4)–(6) визначає розв'язок задачі про часткове підсилення контуру еліптичного отвору двома центральносиметричними ребрами змінної жорсткості;
- при $\alpha_0 = -(\beta_1 + \pi)$ і $\beta_0 = -(\alpha_1 + \pi)$ із (4)–(6) знаходимо розв'язок відповідної задачі для нескінченної пластинки з криволінійним контуром, частково відкріпленим двома симетричними відносно осі Ox ребрами змінної жорсткості;
- якщо підсилювальні елементи мають постійну ширину b_0 , то при $\frac{E_0}{E} = 1$; $\frac{h_0}{h} = 1$; $\beta_0 \rightarrow (\alpha_1 + \pi)$ і $\alpha_0 \rightarrow (\beta_1 + \pi)$ із (4)–(6) отримаємо розв'язок задачі про згин пластинки, послабленої вільним криволінійним отвором, на контурі якого наявні два фізичні надрізи глибиною b_0 .

Наближений розв'язок задачі. Оскільки характеристична частина системи (4)–(6) нічим не відрізняється від характеристичної частини системи [8], то числову реалізацію задачі проведено методом колокації [8], яким досліджено вплив жорсткості підсилювальних елементів на напружений стан пластинки. На рис. 2 наведено результати розрахунку контактних моментів на контурі трикутного ($N = 3, \varepsilon = 0.15$) отвору, який підсилений двома осесиметричними стержнями з параметрами $\alpha_0 = 30^0$ (град), $\beta_0 = 150^0$ (град), при $h_0/h = 1, b_0/\rho_0 = 1/20, b_0/h_0 = 1/3, M_1 = 1, M_2 = 0, R_0 = 1$

(E_0 – модуль Юнга матеріалу підсилення). На рис. 3. зображено епюри кільцевих і крутних моментів на контурі отвору.

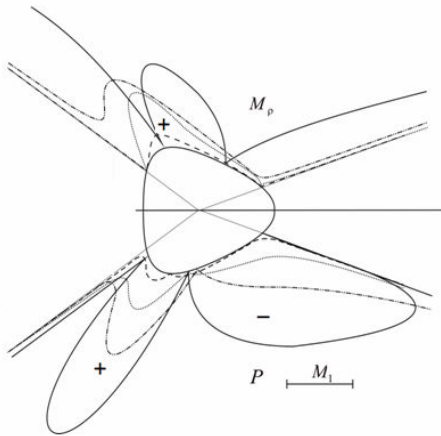


Рисунок 2. Графіки розподілу моментів M_ρ, P у зоні підсилення

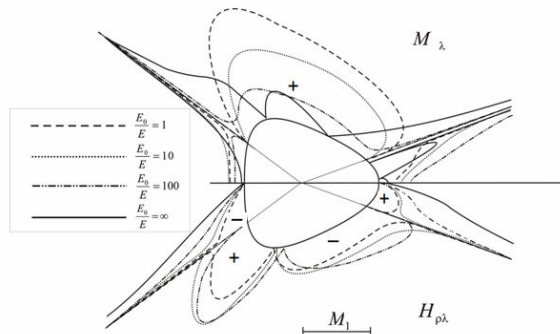


Рисунок 3. Графіки розподілу величин $H_{\rho\lambda}, M_\lambda$ по контуру отвору

Висновки. Із наведених результатів випливає, що збільшення відносної жорсткості підсилень призводить до різкого зменшення на ділянках підсилення кільцевих моментів M_λ та зростання контактних моментів M_ρ і P . Величини $M_\lambda, H_{\rho\lambda}$ в околі торців підсилень з боку вільної зони та зони підсилення набувають необмежених значень. Максимальні моменти виникають на ділянках контуру з найбільшою кривиною та ділянках, вісь симетрії яких перпендикулярна до напрямку дії зовнішнього навантаження.

Список використаної літератури

1. Сяський, А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами [Текст] / А. Сяський, С. Гаврюсев // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11. – №1. – С. 12–17.
2. Сяський, А. Контактна взаємодія пластин з криволінійними отворами і розігнутими несиметричних ребер змінної жорсткості [Текст] / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11. – №3. – С. 20–26.
3. Сяський, А.О. Дослідження несиметричності підсилення контуру пластинки розігнутим ребром змінної жорсткості [Текст] / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка». – Луцьк, 2007. – Випуск 20 (2). – С. 205–210.
4. Сяський, А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием [Текст] / А.А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. Т. 50. – №2. – С. 247–254.
5. Сяський, А.А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жесткости [Текст] / А.А. Сяський. – Ровно, 1988. – 14с. – Деп. в УкрНИИТИ 19.01.1989, №352-Ук 89.
6. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наукова думка, 1979. – 400с.
7. Сяський, А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині [Текст] / А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т.16. – №2. – С.30–36.
8. Трохимчук, О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсиленій контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці [Текст] / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету – Тернопіль, 2009. – Т. 14. – №2. – С. 30–36.

Отримано 01.02.2012