

УДК 539.3

Я. Пастернак<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук; Г. Сулим<sup>2</sup>, докт. фіз.-мат. наук

<sup>1</sup>Луцький національний технічний університет

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

## ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ТОНКИМИ ГІЛЛЯСТИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

*Резюме.* Запропоновано підхід для моделювання тонких гіллястих включень за допомогою методу граничних елементів. Записано умови контакту нерозгалужених ланок для випадків жорсткого та шарнірного їх поєднання. Числово розглянуто випадки хрестоподібного та двотаврового включень в ізотропному та анізотропному середовищах. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень поблизу кінців включень та внутрішні зусилля в характерних точках неоднорідностей.

*Ключові слова:* тонке гіллясте включення, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод граничних елементів, анізотропія, умови контакту.

Ia. Pasternak, H. Sulym

## PLANE PROBLEM OF ELASTICITY FOR AN ANISOTROPIC SOLID CONTAINING A THIN BRANCHED ELASTIC INCLUSION

*The summary.* This paper presents a novel approach for modeling of thin branched inclusions based on the boundary element method. Contact conditions are developed for rigid or hinge joints of the chains of inclusions. The numerical analysis is provided for a cross-like and I-beam profile inclusions. The stress intensity factors along with the internal forces at the characteristic points of the inhomogeneities are evaluated.

*Key words:* thin branched inclusion, stress intensity factor, boundary element method, anisotropy, contact conditions.

**Вступ.** Тонкі неоднорідності матеріалів, зокрема й конструкційних, є надзвичайно поширеним типом структурних дефектів [1]. До них відносять тріщини, заповнені газом чи іншою субстанцією порожнини, оксидні та сульфідні включення в металах тощо. Часто такі дефекти мають негладку форму, а також можуть бути розгалуженими. Вони зумовлюють значну концентрацію напружень у своїх вершинах, що може спричинити передчасне зношування, відмову чи руйнування відповідальних елементів машин та конструкцій.

Важливим завданням механіки неоднорідних структур є також дослідження концентрації напружень поблизу арматури у залізобетонних конструкціях чи композитних матеріалах. Часто відповідні зміцнювальні елементи виконані зі стандартного сортаменту (тавр, двотавр, швелер, кутник тощо) і за формою є тонкими негладкими чи гіллястими (розгалуженими) включеннями.

Аналіз пружних ламаних чи перехрещених включень, в основному, стосується задач антиплоскої деформації. Зокрема у роботах [2, 3] розглянуто системи довільно орієнтованих злучених стрічкових пружних включень. У праці [4] досліджено тонке пружне ламане дволанкове включення. У роботах [5–7] здійснено аналіз антиплоскої деформації середовища, що містить систему зв'язаних тонких жорстких включень, зокрема, у формі фасонних профілів кутника, тавра, двотавра тощо.

У межах плоскої задачі теорії пружності розроблені методи опису тріщин ламаного профілю [8–10], а також перехрещених абсолютно жорстких включень [11, 12]. Гнучке пружне хрестоподібне включення розглянуто у роботі [13]. Використовуючи модифікацію [14] методу граничних елементів, у праці [15] досліджено плоску задачу для тіла з викривленими і ламаними тонкими включеннями

довільної жорсткості. У роботі [16] модифікацію [14] методу граничних елементів розвинено стосовно застосування до анізотропного п'єзоелектричного матеріалу. При цьому запропоновано спеціальні базові функції (функції форми) для високоточного визначення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень та досліджено взаємодію ламаної тріщини з двома включеннями різної жорсткості. Питання ж аналізу гіллястих (розгалужених) тонких включень довільної жорсткості досі залишається цілком не дослідженим.

У цій роботі розглянуто загальний підхід до розв'язування плоских задач теорії пружності ізотропного та анізотропного тіла із системами зв'язаних багатоланкових тонких пружних включень за допомогою модифікованого дуального методу граничних елементів [14, 16].

**1. Формулювання та загальна схема розв'язування задачі.** При моделюванні тіл із тонкими неоднорідностями часто явно чи неявно використовують принцип спряження континуумів різної вимірності [1]. Його суть полягає у заміні тонкого включення із певним об'ємом деякою математичною поверхнею розриву полів напружень, переміщень, температури тощо. Найчастіше у ролі цієї поверхні вибирають серединну поверхню тонкої неоднорідності. У такий спосіб включення вилучається з розгляду як геометричний об'єкт певної товщини і припускається, що його механічний вплив зводиться до формування у тілі певної поверхні (у двовимірних задачах – лінії) розриву фізико-механічних полів. При цьому відповідно до методу функцій стрибка [1] вивчення напруженого стану тіла (як *зовнішньої* щодо включення задачі) можна пов'язати з невідомими наперед функціями стрибка і розглядати без огляду на конкретні властивості матеріалу включення. Зрозуміло [1], що напружений стан тіла залежить лише від функцій стрибка, властивостей його матеріалу (матеріал включення та його товщина мають вплив на функції стрибка), геометричної конфігурації задачі (зокрема й поверхні розриву полів напружень і переміщень), умов контакту тонкої неоднорідності із середовищем та зовнішнього навантаження.

З іншого боку, вектори напружень і переміщень на протилежних берегах тонкого включення повинні бути пов'язані між собою. Відповідні залежності, у які входять механічні властивості включення та його товщина, є математичною моделлю неоднорідності, яка цілком не залежить від властивостей тіла і може розглядатися як *внутрішня задача*. До математичної моделі тонкого включення висуваються лише три основні вимоги [1]: 1) кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих величин, заданих на берегах математичного розрізу в зовнішній задачі; 2) модель повинна бути достатньо простою, щоб результуючу систему рівнянь було зручно розв'язувати; 3) модель повинна мати достатній рівень адекватності, відображаючи істотні для дослідника особливості деформування включення.

Оскільки розв'язування зовнішньої та внутрішньої задач методом функцій стрибка [1] є цілком незалежним, то зміна моделі включення при тому самому розв'язку певної зовнішньої задачі дає можливість розв'язувати задачі для того самого тіла із різними типами неоднорідностей. І навпаки, для тієї ж моделі включення можна сформулювати різні типи зовнішніх задач.

З урахуванням ідеології методу функцій стрибка та принципу спряження розглянемо плоску задачу теорії пружності анізотропного неоднорідного тіла, на деякій частині  $\Gamma_t \subset \Gamma$  зовнішньої межі  $\Gamma$  якого задано вектор напружень  $\mathbf{t}$ , а на її доповненні  $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_t$  – вектор переміщень  $\mathbf{u}$  (рис. 1). Вилучимо тонке пружне гіллясте включення як геометричний об'єкт, а його вплив на тіло замінимо лінією  $\Gamma_c$  розриву (стрибка) вектора переміщень та нормальних стосовно цієї лінії складових тензора напружень.

Відповідно до [14, 16] інтегральні рівняння зовнішньої задачі, коли точка колокації  $y$  лежить на межі  $\Gamma$  тіла, мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(y) = & \int_{\Gamma_c^+} [U_{ij}(x,y)\Sigma t_j(x) - T_{ij}(x,y)\Delta u_j(x)]d\Gamma(x) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(x,y)t_j(x)d\Gamma(x) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(x,y)u_j(x)d\Gamma(x), \end{aligned} \quad (1)$$

а коли точка колокації  $y$  розташована на лінії  $\Gamma_c$  розриву фізико-механічних полів, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u_i(y) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}(x,y)\Sigma t_j(x)d\Gamma(x) - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}(x,y)\Delta u_j(x)d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Gamma} [U_{ij}(x,y)t_j(x) - T_{ij}(x,y)u_j(x)]d\Gamma(x); \\ \frac{1}{2}\Delta t_i(y) = & n_j^+(y) \left[ \int_{\Gamma} [D_{ijk}(x,y)t_k(x) - S_{ijk}(x,y)u_k(x)]d\Gamma(x) + \right. \\ & \left. + \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_{ijk}(x,y)\Sigma t_k(x)d\Gamma(x) - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_{ijk}(x,y)\Delta u_k(x)d\Gamma(x) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $u_i$  – компоненти вектора переміщення;  $t_i$  – складові вектора напруження;  $\Sigma(\square) = (\square)^+ + (\square)^-$ ,  $\Delta(\square) = (\square)^+ - (\square)^-$ ;  $t_i^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j^\pm$ , де  $\sigma_{ij}$  – складові тензора напружень, а  $n_j^\pm$  – компоненти векторів нормалей  $\mathbf{n}^\pm$  до поверхонь  $\Gamma_c^\pm$ ; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються утворених математичним розрізом  $\Gamma_c$  поверхонь  $\Gamma_c^+$  та  $\Gamma_c^-$ ; символами RPV позначено величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value); HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value). У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності ізотропного тіла подано у роботах [14, 15], а для анізотропного – у книзі [17].

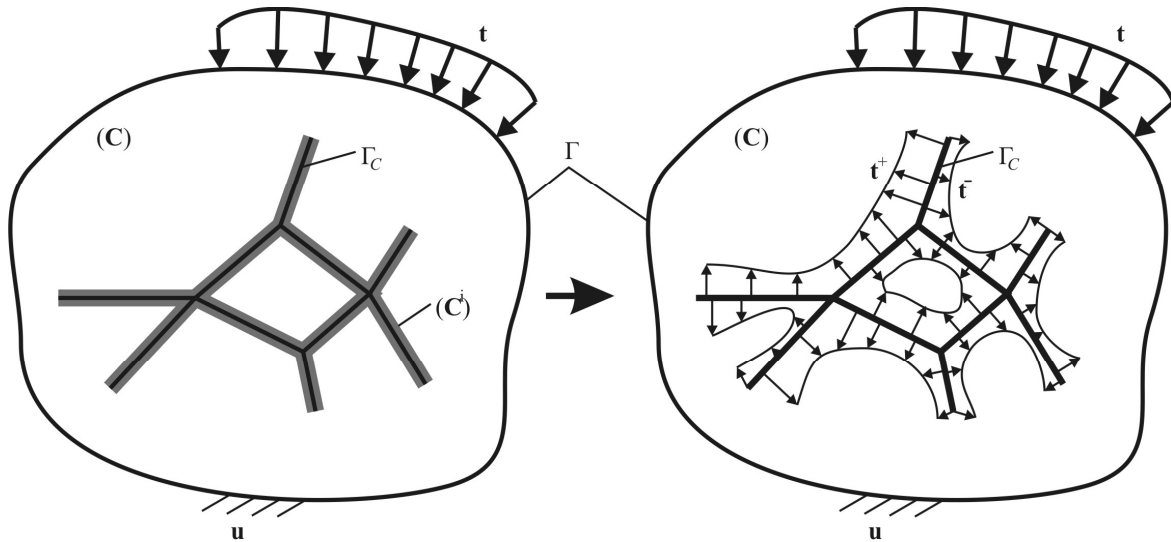


Рисунок 1. Схема моделювання тонкого розгалуженого включення за принципом спряження

У працях [14, 16] для нерозгалужених тонких пружних ізотропних та п'єзоелектричних анізотропних включень побудовано розгорнені вирази їхньої математичної моделі, котру можна подати у загальному функціональному вигляді

$$\Sigma \mathbf{u}(y) = \mathbf{F}^u(y, \Sigma \mathbf{t}, \Delta \mathbf{u}, \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1, M^0, M^1), \quad \Delta \mathbf{t}(y) = \mathbf{F}^t(y, \Sigma \mathbf{t}, \Delta \mathbf{u}, \mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1, M^0, M^1), \quad (3)$$

де  $\mathbf{P}^0, M^0, \mathbf{P}^1, M^1$  – головні вектори та моменти сил, прикладених відповідно до лівого та правого кінців тонкого включення. Модель (3) використаємо як базову для опису ланок розгалужених неоднорідностей.

При вивченні тонкого гіллястого включення опишемо його ненаправленим графом  $G(V)$ , ребрами  $E_{ji} = E_{ij} = (v_i, v_j)$ ,  $v_i, v_j \in V$  якого є нерозгалужені ланки включення. Вважатимемо, що граф  $G(V)$  не має петель ( $E_{ii} = (v_i, v_i) \in 0$ ) та ізольованих вершин. Причому відсутність петель не означає брак можливості розрахунку напруженого стану тіла із замкненими включеннями, які можна описати за допомогою двох розімкнених ланок, об'єднаних у двох вершинах. Ті вершини, в яких сходяться два і більше ребер, називатимемо вузлами, а решту – вільними кінцями гіллястого включення. Кожне з ребер  $E_{ij}$  моделюватимемо за допомогою тих чи інших конкретизованих варіантів рівнянь (3).

Нехай тонке гіллясте включення складається з  $n$  ребер, поєднаних  $m \leq n$  вузлами. Якщо контакт між ребрами включення ідеальний, то у кожному із  $m$  вузлів повинні виконуватися умови рівноваги

$$\sum_{k=1}^q \mathbf{P}^k = \mathbf{0}, \quad \sum_{k=1}^q M^k = 0, \quad (4)$$

де  $q$  – кількість ланок включення, об'єднаних вузлом;  $\mathbf{P}^k, M^k$  – сила та момент на кінці  $k$ -ої ланки, що входить у вузол. Крім цього, для задоволення умови нерозривності вузла (жорсткого вузла) прирівняємо середні значення переміщень  $\mathbf{u} = 1/2 \sum \mathbf{u}$  та поворотів  $\omega$  кожного із ребер у вузлі

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 = \dots = \mathbf{u}^q, \quad \omega^1 = \omega^2 = \dots = \omega^q, \quad (5)$$

причому кути повертання осі включення визначатимемо з рівняння Ейлера – Бернуллі

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = -\frac{M(s)}{D}. \quad (6)$$

Тут  $D$  – згинальна жорсткість відповідної ланки включення;  $s$  – дугова координата;  $M(s)$  – згинальний момент. Розгорнена граничноелементна модель обчислення кута повертання  $\omega$  подана у роботі [14].

Співвідношення (4), (5) формують  $3q$  додаткових рівнянь для визначення  $3q$  невідомих складових векторів контактних сил  $\mathbf{P}^k$  та моментів  $M^k$  у вузлах гіллястого включення за ідеального механічного контакту нерозгалужених ланок (ребер графа).

Окрім співвідношень (4), (5) можна також запропонувати як альтернативу умови шарнірного з'єднання ланок у вузлі, прирівнявши до нуля моменти на кінцях ребер  $M^k = 0, k = 1, \dots, q$ . Тоді отримаємо  $2q$  додаткових рівнянь для визначення невідомих складових векторів сил  $\mathbf{P}^k$

$$\sum_{k=1}^q \mathbf{P}^k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 = \dots = \mathbf{u}^q. \quad (7)$$

При числовому дослідженні напружено-деформованого стану тіл із тонкими гіллястими включеннями для опису їхніх вільних кінців слід використовувати спеціальні граничні елементи [16], що моделюють кореневу особливість поля напружень у вершинах неоднорідності та дають можливість високоточного обчислення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) за формулами [16]

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \mathbf{S}^T \cdot \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (8)$$

де  $\mathbf{k}^{(i)} = [K_{2i}, K_{1i}]^T$ ,  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1, \Delta u_2]^T$ ,  $\Sigma \mathbf{t} = [\Sigma t_1, \Sigma t_2]^T$ ;  $s$  – відстань до вершини лінії  $\Gamma_C$ ;

$K_{ij}$  – узагальнені КІН, які описують напружено-деформований стан біля вершини включення [1], причому у випадку тріщини  $K_{11} \equiv K_I$ ,  $K_{21} \equiv K_{II}$ ,  $K_{12} = K_{22} = 0$ , а  $K_I$ ,  $K_{II}$  – класичні КІН теорії тріщин;  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{S}$  – дійсні тензори Barnett–Lothe [17], що залежать лише від властивостей матеріалу середовища у локальній системі координат поблизу вершини неоднорідності. Ці коефіцієнти характеризують поле напружень і переміщень у локальній системі координат  $Ox'_1x'_2$  з початком  $O$  у вільному кінці та віссю  $Ox'_1$ , спрямованою уздовж дотичної до серединної поверхні неоднорідності в точці  $O$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{k}^{(2)} \right) \right\}, \\ \boldsymbol{\phi} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{k}^{(2)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – матриці Stroh [17];  $\langle \sqrt{Z_*} \rangle = \operatorname{diag} \left[ \sqrt{x'_1 + p_1 x'_2}, \sqrt{x'_1 + p_2 x'_2} \right]$ ;  $p_1$ ,  $p_2$  – корені характеристичного рівняння Stroh [17];  $\boldsymbol{\phi}$  – вектор-функція напружень, причому компоненти тензора напружень дорівнюють похідним від відповідних складових вектора функції напружень

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 = [\sigma_{i1}] &= -\boldsymbol{\phi}_{,2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle p_* Z_*^{-1/2} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{k}^{(2)} \right) \right\}, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{i2}] &= \boldsymbol{\phi}_{,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle Z_*^{-1/2} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{k}^{(2)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Відповідно до [1, 5, 8] порядок сингулярності напружень у вузлах гіллястого включення (так само, як і у теорії гіллястих тріщин) приймається нижчим від класичного кореневого. Тому для моделювання кінців ребер, з'єднаних вузлом, використовуватимемо звичайні граничні елементи із лагранжевими базовими функціями (функціями форми).

**2. Аналіз сил та моментів на вільних кінцях включення.** Використаний в широкому колі робіт (див. монографію [1]) принцип спряження континуумів різної вимірності не дає відповіді на такі два питання: 1) якою є максимальна товщина включення, до вивчення якого все ще можна застосовувати цей принцип; 2) якими є сили та моменти на кінцях включення, повністю зануреного в матеріальний континуум (якщо включення виходить на поверхню, то навантаження на його кінці задане крайовими умовами).

Для вирішення першого питання у роботах [14, 15, 18] для різних моделей тонких включень здійснено порівняльний аналіз результатів розрахунку на підставі принципу спряження та прямого підходу. Для розв'язання другого питання у низці робіт, основні результати яких зведені у монографії [1], запропоновано задавати сили та переміщення кінців тонкого включення апіорі з урахуванням певних додаткових умов, що накладаються на розв'язок задачі, або з використанням асимптотичних залежностей для полів напружень і переміщень будувати певні інтегрально-усереднювальні співвідношення і таким чином отримувати додаткові рівняння для визначення цих параметрів. В [1] згадані апіорні умови сформульовані так, щоб отриманий на основі

принципу спряження розв'язок відповідав точному у трьох граничних випадках відносної жорсткості тонкої неоднорідності: тріщина, абсолютно жорстке включення та однорідний випадок, коли матеріали тіла та включення є однаковими. Тобто, торцьові сталі [1] (з огляду на невизначеність поняття торця у разі скінченного радіуса кривини у крайній точці включення) не є дійсними напруженнями та переміщеннями торців тонкого включення, а використовуються в сенсі сталих параметрів коригувальних складових розв'язку. Загальніший випадок змінних коригувальних функцій уведено в модель тонкої неоднорідності у роботі [16].

У цьому дослідженні будемо вважати нульовими головні вектор та момент сил на вільних кінцях повністю зануреного в середовище тонкого гіллястого включення. Зокрема, якщо поблизу торця включення діють розтягувальні напруження, то дуже швидко внаслідок високої концентрації напружень він відлущиться від середовища і під час експлуатації конструкційного елемента будуть виконуватися саме такі нульові силові умови. З іншого боку, якщо кінчик включення є більш-менш заокругленим, то можна вважати, що поверхня неоднорідності повністю прилягає до берегів лінії розриву фізико-механічних полів [19]. При цьому унаслідок нульової товщини торця за умови обмеженості напружень відповідні головні вектор та момент сил можна приймати нульовими. Однак запропонована тут схема розв'язування задачі не накладає жодних обмежень на використання апріорних чи якихось інших залежностей при врахуванні сил, моментів та переміщень на кінцях включення.

**3. Числовий аналіз прикладів.** Розглянемо плоску деформацію безмежного середовища, що містить тонке пружне ізотропне гіллясте включення. Здійснюватимемо обчислення для ізотропного і трансверсально ізотропного середовища. При цьому у першому випадку вважатимемо, що коефіцієнт Пуассона дорівнює 0,3, а в другому –  $E_2/E_1 = 2$ ,  $\nu_{21} = \nu_{12} = \nu = 0,3$ ,  $G_{12} = G = E_1/2(1 + \nu)$ .

Верифікацію підходу здійснено на прикладі з ламаним включенням [15]. Для цього тонка неоднорідність моделювалася спочатку як суцільна, а потім – у формі жорстко з'єднаних між собою окремих прямолінійних ділянок. Результати розрахунку узагальнених КІН, сил та згинальних моментів у характерних точках включення виявилися однаковими для двох використаних схем моделювання тонкої неоднорідності, що засвідчує достовірність розробленого підходу.

*3.1. Хрестоподібне тонке включення.* Розглянемо включення у формі рівнораменного хреста з довжиною  $2a$  та товщиною  $2h$  ( $h = 0,01a$ ) ланок. На безмежності середовища задане однорідне поле напружень із такими значеннями складових:  $\sigma_{11}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = p$ . Схему задачі подано на врізці до рис. 2, на якому зображено графіки для нормованих значень  $K_{ij}^* = K_{ij}/p\sqrt{\pi a}$  узагальнених КІН у вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , а також сил  $P_i^* = P_i/(pa)$  та згинального моменту  $M^* = M/(pa^2)$  на кінці  $O$  ланки  $AO$  тонкого включення (вузлі гіллястої системи) залежно від відносної жорсткості  $k = G^i/G$  останнього. Суцільні лінії відповідають ізотропному, а штрихові – анізотропному випадку.

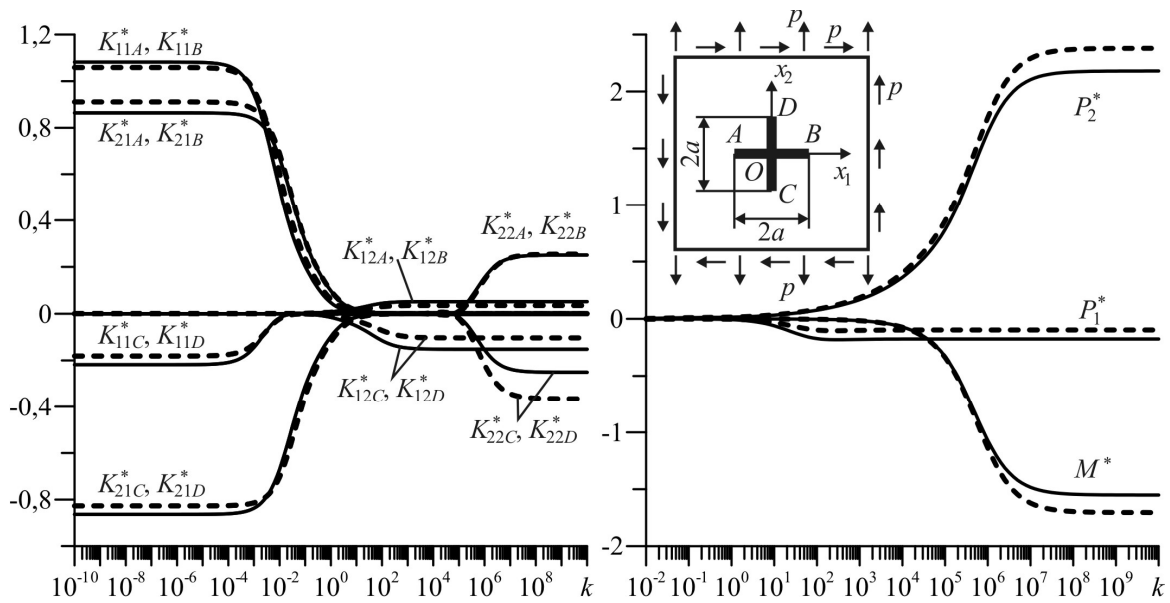


Рисунок 2. Узагальнені КІН у вершинах  $A, B, C, D$  та сили і згинальні моменти на кінці  $O$  ланки  $AO$  хрестоподібного тонкого включення залежно від його відносної жорсткості  $k$

Із рис. 2 бачимо, що у випадку сильно податного ( $k = 10^{-10}$ ) включення (фактично тріщини) КІН слабо залежать від анізотропії матеріалу середовища. КІН  $K_{11}$  у вершинах  $A$  та  $B$  незначно більший за КІН рівномірно навантаженої прямолінійної тріщини нормального відриву завдовжки  $2a$ . Натомість КІН  $K_{21}$  менший за відповідний для однорідно навантаженої тріщини моди II. У вершинах  $C$  та  $D$  за обраного навантаження КІН  $K_{11}$  від'ємний, що свідчить про можливість появи фізично некоректного ефекту перекирвання берегів включення за умови  $\Delta u_i n_i^+ > 2h$ . За ненульової товщини включення  $2h$  завжди знайдуться такі значення жорсткості середовища та його навантаження, щоб задача була фізично коректною.

Вплив анізотропії матеріалу середовища стає істотнішим у випадку жорсткого включення. Зокрема, простежується значна асиметрія узагальненого КІН  $K_{22}$ , обчисленого в точках  $A, B$  та  $C, D$ . Крім цього, узагальнений КІН  $K_{22}$  зі збільшенням відносної жорсткості  $k$  включення виходить на асимптоту значно повільніше за КІН  $K_{12}$ . Такий ефект слід пов'язувати зі згином тонкої неоднорідності (див. теж роботи [14, 15], де розглянуто викривлені та ламані включення). Зокрема, як бачимо з рис. 2, у перерізі  $O$  ланки  $OA$  включення згинальний момент  $M$  виходить на асимптоту значно повільніше, ніж нормальне зусилля  $P_1$ .

**3.2. Включення у формі двотавра.** На рис. 3 зображено нормовані значення узагальнених КІН та сили і згинального моменту в точці  $E$  ланки  $AE$  тонкого включення у формі двотавра завширшки  $2a$  та заввишки  $4a$ . Товщина ланок включення дорівнює  $2h$  ( $h = 0,01a$ ). Середовище перебуває в умовах всебічного розтягу напруженнями  $p$ . Як і в попередньому прикладі, суцільні лінії відповідають ізотропному, а штрихові – анізотропному випадку.

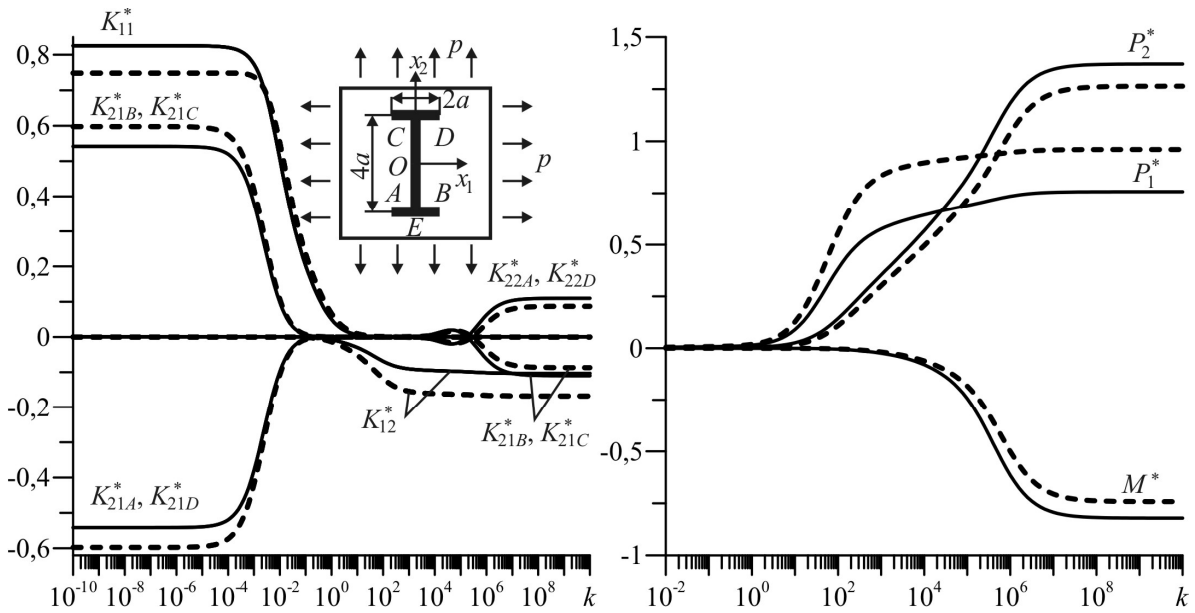


Рисунок 3. Узагальнені КІН у вершинах  $A, B, C, D$  та сили і згинальні моменти на кінці  $E$  ланки  $AE$  тонкого двотаврового включення залежно від його відносної жорсткості  $k$

Із рис. 3 бачимо, що анізотропія матеріалу середовища чинить істотний вплив на обчислені значення узагальнених КІН, зусиль та моментів у перерізах включення–двотавра за довільної відносної жорсткості останнього. Вибрані значення пружних сталей анізотропного матеріалу для податних ( $k < 1$ ) включень зменшують величину КІН  $K_{11}$  моди I, натомість збільшуючи модуль КІН  $K_{21}$  моди II. Для жорстких ( $k > 1$ ) включень спостерігається протилежна картина: модулі узагальнених КІН  $K_{12}$  більші в анізотропному випадку, а абсолютні величини КІН  $K_{22}$ , навпаки, у цьому випадку менші. Так само меншим для вибраного анізотропного середовища є і згинальний момент.

Знову ж унаслідок згину узагальнений КІН  $K_{22}$  зі зміною відносної жорсткості неоднорідності виходить на асимптоту значно повільніше, ніж КІН  $K_{12}$ . При цьому, за вибраних пропорцій включення та способу навантаження середовища, коефіцієнт  $K_{22}$  до виходу на асимптоту двічі змінює свій знак.

**Висновки.** Розроблений у роботі метод опису тонких гіллястих включень дає змогу ефективно моделювати розгалужені пружні неоднорідності, зокрема тонкостінні стандартні профілі, що армують пружне середовище. Запропонований підхід також забезпечує можливість визначення впливу на напружено-деформований стан і концентрацію напружень тонких гіллястих дефектів, що виникають під час виготовлення, обробки чи експлуатації конструкційних елементів. З'ясовано, що анізотропія матеріалу виробу чинить істотний вплив на отримані значення узагальнених КІН та зусиль і згинальних моментів у перерізах тонких неоднорідностей. Урахування цих ефектів дає можливість оптимізувати вибір складових матеріалів та геометричних параметрів арматури композитних елементів і зменшити рівень напружень у них.



## Література

1. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Осів, О.П. Антиплоска деформація ізотропного середовища зі злученими пружними стрічковими включеннями [Текст] / О.П. Осів, Г.Т. Сулим // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – 2002. – Вип. 5. – С. 154–164.
3. Osiv, O. Antiplane deformation of isotropic medium with connected elastic ribbon-like inclusions / O. Osiv, G. Sulym // Abstracts of the Fourth Polish-Ukrainian Conference “Current Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Media” (Łódź, 4–8 Sept., 2001). – Łódź: Technol. Univ. of Łódź, 2001. – P. 46.
4. Васільєв, К.В. Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанковим пружним включенням [Текст] / К.В. Васільєв, Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. наук. – 2010. – № 2. – С. 55–63.
5. Шацький, І.П. Антиплоска деформація пружного простору зі зв’язаними жорсткими стрічковими включеннями [Текст] / І.П. Шацький, А.М. Кундрат // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 55–60.
6. Кундрат А.М. Антиплоска задача для пружного простору із жорстким тонкостінним кутником [Текст] / А.М. Кундрат // Наукові нотатки. – 2007. – Вип. 20, Т. 1. – Луцький національний технічний університет. – С. 245–249.
7. Кундрат, А.М. Ізотропне тіло, армоване фасонними профілями тавра та кутника в умовах поздовжнього зсуву [Текст] / А.М. Кундрат // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. – 2009. – 46, вип. 2. – С. 173–178.
8. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
10. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие: в 4 т.; под общ. ред. Панасюка В.В. / Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – К: Наукова думка, 1988. – 620 с.
11. Антипов, Ю.А. Решение задач о концентрации напряжений возле пересекающихся дефектов при помощи задачи Римана с бесконечным индексом [Текст] / Ю.А. Антипов, Г.Я. Попов, С.И. Яцко // Прикладная математика и механика. – 1987. – 51, № 3. – С. 458–467.
12. Попов, В.Г. Динамическая задача теории упругости для плоскости, содержащей жесткое крестообразное включение [Текст] / В.Г. Попов // Прикладная математика и механика. – 1993. – 57, № 1. – С. 100–115.
13. Григорян, Э.Х. Задача для упругой плоскости, содержащей крестообразное включение [Текст] / Э.Х. Григорян, Д.Р. Торосян, С.С. Шагинян // Известия НАН Армении. Механика. – 2002. – 55, № 1. – С. 6–16.
14. Пастернак, Я.М. Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – № 2. – С. 46–57.
15. Pasternak, Ia. Stress state of solids containing thin elastic crooked inclusions / Ia. Pasternak, H. Sulym // J. Eng. Math. – Doi: 10.1007/s10665-011-9486-0. – 14 p.
16. Pasternak, Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – 35. – No. 4. – P. 678–690.
17. Ting, T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.
18. Панасюк, В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями [Текст] / В.В. Панасюк, М.М. Стадник, В.П. Силованюк. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
19. Сулим, Г. Концентрація напружень та електричних зміщень на тонких включеннях у п’єзоелектричних тілах [Текст] / Г. Сулим, Я. Пастернак // Фіз.-мат. модел. інформ. технол. – 2011. – № 13. – С. 139–148.

*Отримано 31.10.2011 р.*