Ловейкін В. Обґрунтування механічних властивостей матеріалів у процесі дослідження згинних коливань їх зразків / Ловейкін В., Човнюк Ю., Сердюченко Ю. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 4. — С.15-22. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 53.082.4

В. Ловейкін, докт. техн. наук; Ю. Човнюк, канд. техн. наук;
Ю. Сердюченко

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ У ПРОЦЕСІ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ЇХ ЗРАЗКІВ

Резюме. *Обґрунтовано методику аналізу механічних властивостей матеріалів у процесі дослідження вільних згинних коливань їх зразків скінчених розмірів. Встановлено залежності для визначення приєднаної маси стрижня у разі переходу від моделі стрижня з розподіленими параметрами до моделі стрижня із зосередженими параметрами та для встановлення фізико-механічних характеристик матеріалу стрижня за амплітудно-частотними параметрами.*

Ключові слова: *механічні властивості матеріалів; пружно-в'язка модель; згинні коливання.*

V. Loveikin, Yu. Covnyuk, Yu. Serdyuchenko

GROUNDING OF MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS DURING THE PROCESS OF RESEARCH OF FLEXURAL FLUCTUATIONS OF THEIR SAMPLES

The summary. *The method of analysis of mechanical properties of materials during the process of research of flexural fluctuations of their finite sizes' samples is grounded. Dependencies for determining the attached mass of the rod during the transition from the core model with distributed parameters to core model with concentrated parameters are established. Dependencies for determining physical and mechanical properties of the material of the rod according to the amplitude-frequency parameters are determined.*

Key words: *mechanical properties of materials; elastic-viscous model; flexural fluctuations.*

Постановка проблеми. При взаємодії робочих органів машин з оброблюваними матеріалами та середовищами необхідно визначати механічні властивості останніх у процесі дослідження різновидів коливань їх зразків (зокрема, згинних коливань). Подібний підхід дозволяє у подальшому визначити основні фізико-механічні властивості матеріалів, середовищ (їх зразків скінчених розмірів), оскільки вони суттєво впливають на умови руйнування останніх.

При експлуатації обладнання лісового комплексу, призначеного для руйнування коренів дерев, корчування пнів, а також у процесах трелювання деревини важливого значення набувають механічні властивості деревини, а також амплітудно-частотні характеристики зразків її скінчених розмірів, що здійснюють вільні коливання.

Аналіз останніх публікацій за темою дослідження. На основі досліджень, проведених у роботах [1–3], автори роботи [4] спробували провести ідентифікацію механічних властивостей матеріалів шляхом дослідження коливань зразка. Проте у вищезгаданій роботі [4] не враховані деякі фактори. Зокрема, автори публікації визначили приєднану масу стрижня, припустивши, що рівняння вигнутої лінії апріорі співпадає з розподілом у просторі (по просторовій координаті *X*) швидкості руху стрижня, який згинається. Відомо [5, 6], що вираз для останньої не зовсім схожий на наведений у [4]. Крім того, при згинних коливаннях виникає цілий спектр власних частот стрижня, а визначення приєднаної маси ($M_{екв}$), як відомо [7], вимагає врахувань конкретної резонансної гармоніки згинних коливань, що збуджується у системі. Найбільш загальний підхід змушує дослідників таких явищ враховувати всі можливі моди згинних (вільних) коливань, що властиві даному стрижню. Для товстих стрижнів необхідно це й враховувати ефекти зсуву та інерції обертання [3, 7].

У даній роботі виконано необхідні дослідження у цій царині й запропоновано точніший підхід до визначення механічних властивостей матеріалів шляхом аналізу згинних коливань їх зразків скінчених розмірів.

Мета роботи полягає у встановленні основних параметрів (геометричних, фізико-механічних) та їх зв'язку з пружно-в'язкими властивостями матеріалу зразка, який здійснює вільні згинні коливання з урахуванням маси вимірювального приладу (зосереджена маса *m*), який визначає вказані параметри. При цьому застосовані методи та підходи робіт [5-7].

Виклад основного змісту дослідження.

1. Визначення власних поперечних (згинних) коливань стрижня (довжини l).

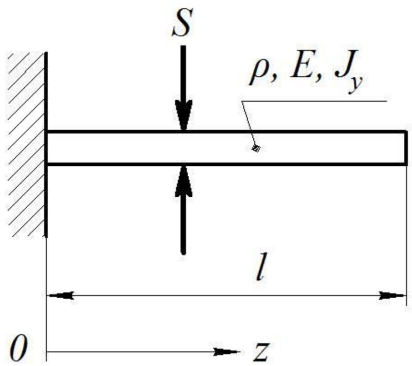

Рисунок 1. Геометрія задачі

На рис. 1 введені позначення: $\rho -$густина, $E -$модуль пружності (Юнга), $J_y -$момент інерції поперечного перерізу стрижня, площею S і довжиною l, $\left(J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \right.$, де $R -$радіус, а $D -$діаметр поперечного перерізу) відносно осі, яка проходить через його площину.

Рівняння згинних коливань стрижня (у тонких стрижнях їх вважаємо малими) мають вигляд [5, 6]

$$\rho \cdot S \cdot \ddot{X} = E \cdot J_y \cdot \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \tag{1}$$

де $X(z) -$прогин X як функції z, точка над X означає диференціювання за часом t.

Рівняння (1) при підстановці у нього $X = X_0(z) \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, де $\omega -$колова частота згинних коливань; $\alpha -$їх початкова фаза, набуває вигляду

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \chi^4 \cdot X_0, \qquad \chi^4 = \omega^2 \frac{\rho \cdot S}{E \cdot J_y}. \tag{2}$$

Загальний інтеграл цього рівняння є

$$X_0 = A \cdot \cos \chi z + B \cdot \sin \chi z + C \cdot ch \chi z + D \cdot sh \chi z. \tag{3}$$

Постійні A, B, C, D визначаються з граничних умов

$$\frac{dX}{dz} = X = 0, \text{ при } z = 0; \qquad \frac{d^3 X}{dz^3} = \frac{d^2 X}{dz^2} = 0, \text{ при } z = l. \tag{4}$$

У результаті знаходимо

$$X_0 = A \cdot \left\{ \left(\sin \chi l - sh \chi l \right) \cdot \left(\sin \chi z - sh \chi z \right) + \left(\cos \chi l + ch \chi l \right) \cdot \left(\cos \chi z - ch \chi z \right) \right\}, \tag{5}$$

і рівняння для власних частот

$$\cos \chi l \cdot ch\chi l + 1 = 0. \tag{6}$$

Найменша частота визначається так:

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2}\sqrt{\frac{E \cdot J_y}{\rho \cdot S}}. \tag{7}$$

2. Визначення форми стрижня кругового поперечного перерізу, який сильно зігнутий в одній площині прикладеними до нього зосередженими силами.

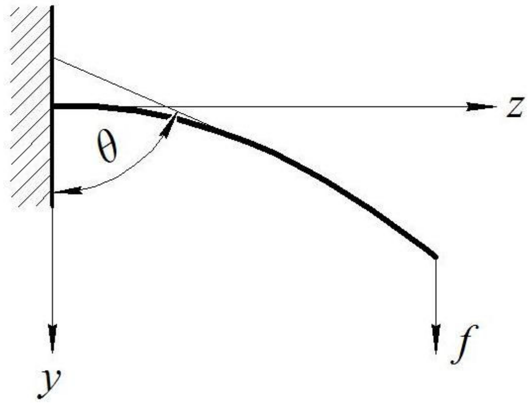

Рисунок 2. Геометрія задачі визначення форми зігнутого стрижня

Спочатку приведемо до квадратур задачу про визначення форми стрижня. Розглянемо ділянку стрижня між точками прикладання сил; на такій ділянці $\vec{F} = const$. Оберемо площину згину в якості площини (x, y), а вісь y – паралельна силі $\vec{F}$. Введемо кут θ між дотичною до лінії стрижня і віссю y . Тоді $\frac{dZ}{dl} = \sin\theta$, $\frac{dy}{dl} = \cos\theta$, де Z, y – координати точок стрижня. Рівняння чистого згину стрижнів кругового перерізу у вигляді [5, 6]

$$E \cdot I \cdot \left[\frac{d\vec{r}}{dl} \cdot \frac{d^3 r}{dl^3}\right] = \left[\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dl}\right], \tag{8}$$

де $d\vec{r}$ – радіус-вектор від деякої заданої точки до довільної точки стрижня; $d\vec{r}$ – елемент довжини стрижня, на який діє зовнішня сила $\vec{F}$, може бути використане для отримання рівняння для θ як функції дуги l :

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2\theta}{dl^2} - F \cdot \sin\theta = 0. \tag{9}$$

Перше інтегрування дає

$$\frac{E \cdot J}{2} \cdot \left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 + F \cdot \cos\theta = C_1, \tag{10}$$

звідки

$$l = \pm\sqrt{\frac{E \cdot I}{2}} \cdot \int \frac{d\theta}{\sqrt{C_1 - F \cdot cos\theta}} + C_2. \tag{11}$$

Функція $\theta(l)$ може бути виражена через еліптичні функції. Для координат $Z=\int \sin\theta \cdot dl$ і $y=\int \cos\theta \cdot dl$ отримаємо

$$\begin{cases} Z=\pm\frac{1}{F}\sqrt{2\cdot J\cdot F}\cdot\sqrt{C_1-F\cdot\cos\theta}+const. \\ y=\pm\sqrt{\frac{J\cdot F}{2}}\cdot\int\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{C_1-F\cdot\cos\theta}}+const'. \end{cases} \tag{12}$$

Момент $\vec{M}$, який дорівнює

$$\vec{M}=E\cdot J\cdot\left[\frac{d\vec{r}}{dl}\cdot\frac{d^2r}{dl^2}\right], \tag{13}$$

у даному випадку спрямований по осі Z і визначається зі співвідношення

$$M=E\cdot J\cdot\frac{d\theta}{dl}. \tag{14}$$

Тепер визначимо форму суттєво зігнутого стрижня, один кінець котрого закріплений, а до вільного кінця прикладена сила $\vec{f}$ (рис. 2).

Розв'язок цієї задачі зводиться до наступного. По всій довжині стрижня $\vec{F}=const=\vec{f}$. На закріпленому кінці $(l=0)$ $\theta=\frac{\pi}{2}$, а на вільному ($l=L$, де $L-$довжина стрижня (рис. 2)) $M=0$, тобто $\theta'=0$. Введемо позначення $\theta_0=\theta(l)$, маємо тоді з (11) $C_1=f\cdot\cos\theta_0$

$$l=\sqrt{\frac{E\cdot J}{2f}}\cdot\int_{\theta}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0-cos\theta}}. \tag{15}$$

Звідси отримаємо рівняння, яке визначає θ_0,

$$L=\sqrt{\frac{E\cdot J}{2f}}\cdot\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0-cos\theta}}. \tag{16}$$

Тоді форма стрижня визначається формулами

$$\begin{aligned} Z&=\sqrt{\frac{2\cdot J\cdot F}{f}}\cdot\left(\sqrt{\cos\theta_0}-\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}\right), \\ y&=\pm\sqrt{\frac{J\cdot F}{2\cdot f}}\cdot\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0-F\cdot\cos\theta}}. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Визначення форми прогину стрижня у випадку його слабого згину.

Введемо абсолютну величину прогину за формулою

$$\zeta=\sqrt{X(z)^2+Y(z)^2}, \tag{18}$$

де $X(z)$ і $Y(z)-$ прогини стрижня вздовж осей $0z$ і $0y$ (рис. 2).

Перерізуюча сила f при слабкому згині стрижня визначається [5, 6] з рівняння

$$f=-E\cdot J\cdot\frac{d^3\zeta}{dz^3}, \tag{19}$$

де $J\equiv J_y$ у (1).

Використовуючи граничні умови

$$\zeta = 0,\ \frac{d\zeta}{dz} = 0 \text{ при } z = 0; \qquad \frac{d^2\zeta}{dz^2} = 0 \text{ при } z = l, \quad l \equiv L, \tag{20}$$

отримаємо з (19)

$$\zeta = \frac{f}{6 \cdot E \cdot J} z^2 (3l - z), \qquad \zeta(l) = \frac{f \cdot l^3}{3E \cdot J}. \tag{21}$$

4. Визначення приведеної маси стрижня.

Спочатку визначимо форму прогину стрижня (довжини l) під впливом власної ваги, якщо один його кінець закріплений ($z = 0$), а інший ($z = l$) – вільний (рис. 3).

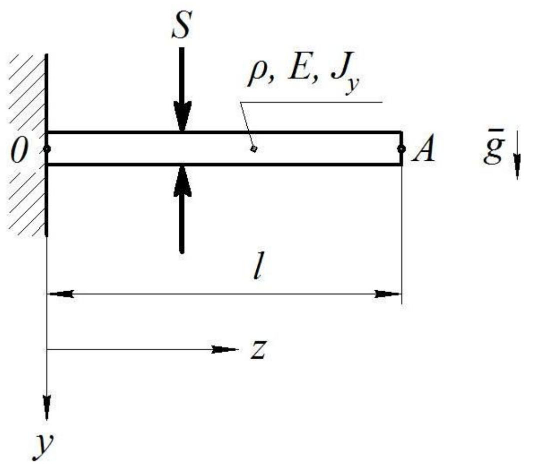

Рисунок 3. Геометрія задачі для визначення форми прогину стрижня під дією власної ваги

Шукана форма прогину визначається розв’язком рівняння [5, 6]

$$\zeta^{IV} = \frac{d^4\zeta}{dz^4} = \frac{q}{E \cdot J}, \qquad q = \frac{P}{e}, \qquad P = g \cdot \rho \cdot S \cdot l, \tag{22}$$

де P – вага стрижня; $g = 9{,}81$ м/с^2 – прискорення вільного падіння; q – вага одиниці довжини стрижня. Інші позначення введені вище.

Граничні умови задачі мають вигляд

$$\zeta = \frac{d\zeta}{dz} = 0 \text{ при } z = 0; \qquad \frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{d^3\zeta}{dz^3} = 0 \text{ при } z = l. \tag{23}$$

Розв’язок рівняння (22) за граничних умов (23) має вигляд

$$\zeta = \frac{q}{24 \cdot E \cdot J} z^2 \left(z^2 - 4l \cdot z + 6l^2\right), \qquad \zeta(l) = \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J}. \tag{24}$$

Враховуючи (22), вирази (24) можна записати так:

$$\zeta = \frac{g \cdot \rho \cdot S}{24 \cdot E \cdot J} \left(z^2 \left[z^2 - 4l \cdot z + 6l^2\right]\right), \qquad \zeta(l) = \frac{1}{8} \cdot \frac{g \cdot \rho \cdot S \cdot l^4}{E \cdot J}. \tag{25}$$

Вважаючи, що прогин стрижня $\zeta(z,t)$ можна записати, як і вище, у вигляді функції

$$\zeta(z,t) = \tilde{X}(z) \cdot \cos(\omega t + \alpha), \tag{26}$$

де $\tilde{X}(z) = \dfrac{g \cdot \rho \cdot S}{24E \cdot J} z^2 \left(z^2 - 4l \cdot z + 6l^2\right)$, а ω відповідає першій (найменшій) частоті власних згинних коливань (7), отримаємо

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\tilde{X}(z) \cdot \omega_{\min} \cdot \sin(\omega t + \alpha). \tag{27}$$

Тоді, використовуючи підхід [7], для приєднаної маси стрижня (у перерізі $z = l$) отримаємо

$$M_{\text{ïð}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot\int\limits_0^l\left[\tilde{X}(z)\right]^2\cdot\omega_{\min}^2\cdot dz}{\frac{1}{2}\cdot\tilde{X}(z)\Big|_{z=l}^2\cdot\omega_{\min}^2}, \qquad (28)$$

де опущені множники, які явно залежать від t (оскільки при переході до комплексної форми запису $\zeta(z,t)$ вони скорочуються).

Після нескладних перетворень (28) набуде остаточного вигляду:

$$M_{\text{ïð}} = \frac{104\cdot\rho\cdot S\cdot l}{405} \approx 0,257\cdot\rho\cdot S\cdot l = 0,257\cdot M_{\text{ñòð}}, \qquad (29)$$

де $M_{\text{ñòð}}$ – маса стрижня.

Цей результат практично співпадає з отриманим у [7] для першої (найнижчої) форми згинних коливань стрижнів.

5. Аналіз вільних коливань стрижнів.

Враховуючи обставину, що коливання точки А (рис. 3) можуть у даному випадку розглядатись як вертикальні з переміщеннями у напрямку осі $0y$, тоді їх вважаємо такими, що мають один ступінь вільності руху ($n = 1$). У якості узагальненої координати тепер виступає вертикальне переміщення y. В цьому випадку рівняння руху набуває вигляду

$$\left(m+M\right)\cdot\ddot{y}+k\cdot\dot{y}+C\cdot y=0, \qquad (30)$$

де $M = \grave{I}_{\text{ïð}} = \frac{104}{405}\rho\cdot S\cdot l -$ приведена до точки А (рис. 3) маса стрижня; $k = \mu\frac{\pi d^2}{4l} -$ приведений у точку А коефіцієнт в'язкості стрижня; $\mu -$ коефіцієнт в'язкості, Па·с, [4]; $C = \frac{E\cdot J}{l^3} = \frac{E\cdot\pi\cdot d^4}{64 l^3} -$ приведена жорсткість; $E -$ модуль пружності лінійних деформацій; $m -$ маса вимірювального датчика (зосереджена маса m).

Розв'язок рівняння (30) має вигляд

$$y = C_1\cdot\exp\left\{\frac{-k-\sqrt{k^2-4C\left(M+m\right)}}{2\left(M+m\right)}t\right\}+C_2\cdot\exp\left\{\frac{-k-\sqrt{k^2+4C\left(M+m\right)}}{2\left(M+m\right)}t\right\} \qquad (31)$$

Сталі інтегрування $C_{1,2}$ можуть бути визначені з початкових умов

$$\begin{cases} y\big|_{t=0} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\left(M+m\right)\cdot g\cdot l^4}{l\cdot E\cdot J} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\left(M+m\right)\cdot g\cdot l^3}{E\cdot J}; \\ \ddot{y}\big|_{t=0} = \frac{3,52^2\left(M+m\right)\cdot g}{8\rho\cdot S\cdot l} \approx 1,55\frac{\left(M+m\right)\cdot g}{\rho\cdot S\cdot l}. \end{cases} \qquad (32)$$

При введені початкових умов задачі вважаємо, що у стрижні, як системі з розподіленими параметрами, при реалізації його вільних згинних коливань збуджується тільки перша мода коливань з найменшою $\omega_{\min}$ (7).

Запишемо (31) у вигляді

$$y = C_1\cdot\exp\left\{\lambda_1\cdot t\right\}+C_2\cdot\exp\left\{\lambda_2\cdot t\right\}, \qquad (33)$$

де $\lambda_{1,2} = \dfrac{-k \mp \sqrt{k^2 - 4C(M+m)}}{2(M+m)}$. Тоді константи C_1 та C_2 можна знайти з такої системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{(M+m) \cdot g \cdot l^3}{E \cdot J}; \\ \lambda_1^2 \cdot C_1 + \lambda_2^2 \cdot C_2 = 1,55 \dfrac{(M+m) \cdot g}{\rho \cdot S \cdot l}. \end{cases} \tag{34}$$

Значення C_1 та C_2 набувають вигляду

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{(M+m) \cdot g \cdot l^3}{E \cdot J} \cdot \lambda_2^2 - 1,55 \dfrac{(M+m) \cdot g}{\rho \cdot S \cdot l}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}; \\ C_2 = \dfrac{1,55 \dfrac{(M+m) \cdot g}{\rho \cdot S \cdot l} - \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{(M+m) \cdot g \cdot l^3}{E \cdot J} \cdot \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \end{cases} \tag{35}$$

Якщо $k^2 \geq 4C \cdot (M+m)$, тоді згинні коливання стрижня будуть аперіодичними й затухаючими. При $k^2 < 4C \cdot (M+m)$ згинні коливання стрижня будуть затухаючими, але матимуть певний період.

Період коливання T набуває значення

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*}, \qquad \omega^* = \frac{\sqrt{4C \cdot (M+m) - k^2}}{2(M+m)}, \tag{36}$$

де ω^* – частота власних коливань стрижня.

Час τ, протягом якого амплітуда вільних згинних коливань зменшується в e разів, визначається співвідношенням

$$\tau = \frac{2(M+m)}{k}. \tag{37}$$

У частинному випадку, коли $C_1 = C_2$, можна визначити співвідношення α_2 / α_1, де α_2 – амплітуда коливань у момент часу $t + T$; α_1 – амплітуда коливань у момент часу t:

$$\frac{k \cdot T}{2(M+m)} = \ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right). \tag{38}$$

Комбінуючи (38) з (36), отримаємо систему рівнянь

$$T = \frac{4\pi(M+m)}{\sqrt{4C \cdot (M+m) - k^2}}, \qquad \frac{2\pi \cdot k}{\sqrt{4C \cdot (M+m) - k^2}} = \ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right). \tag{39}$$

За відомих (з вимірювань) T і $\ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$ можна, користуючись (39), знайти k та C:

$$\begin{cases} k = \dfrac{2(M+m)\cdot\ln\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{T}; & (40) \\ C = \dfrac{k^2 + \dfrac{16\pi^2}{T^2}(M+m)^2}{4(M+m)} = \dfrac{(M+m)}{T^2}\left\{\ln^2\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + 4\pi^2\right\}. & (41) \end{cases}$$

Вирази (40) і (41) дозволяють визначити μ та E матеріалу стрижня:

$$\mu = \frac{4l}{\pi d^2}k = \frac{4l}{\pi d^2}\cdot\frac{2(M+m)}{T}\ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{6l\cdot(M+m)}{\pi d^2\cdot T}\cdot\ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \tag{42}$$

$$E = \frac{64l^3\cdot(M+m)}{\pi d^4\cdot T^2}\cdot\left\{\ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + 4\pi^2\right\} \tag{43}$$

Таким чином, знаючи відношення амплітуд вільних згинних коливань стрижня $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$, обчислене за відомого значення періоду затухаючих коливань T, відомої величини приведеної до точки А (де розміщений спеціальний вимірювальний датчик масою m) маси стрижня M, можна знайти фізико-механічні характеристики матеріалу стрижня (μ та E).

Висновки. Обгрунтовано фізико-механічну модель, яка описує вільні коливання стрижня, як системи з розподіленими параметрами. Знайдено співвідношення, які визначають коректним чином приєднану масу стрижня у разі переходу від моделі стрижня з розподіленими параметрами до моделі стрижня із зосередженими параметрами. Отримано співвідношення, які дозволяють визначати, за виміряними з експерименту амплітудно-частотними параметрами, фізико-механічні характеристики матеріалу стрижня, а саме, модуль пружності та коефіцієнт в'язкості. Результати даної роботи у подальшому можуть бути використані для уточнення й удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку механічних систем на стадіях їх проектування, конструювання та експлуатації.

Література

1. Буженин, Н.В. Курс теоретической механики Т.II [Текст] / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – 496 с.
2. Биргер, И.А. Прочность, устойчивость. Колебания. Т.3 [Текст] / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.
3. Тимошенко, С.П. Курс теории упругости [Текст] / С.П. Тимошенко. – К.: Наукова думка, 1972. – 508 с.
4. Ковбаса, В.П. Визначення механічних властивостей матеріалів шляхом дослідження коливань зразка [Текст] / В.П. Ковбаса, Я.В. Коваль // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – №4(56). – С.92–96.
5. Ландау, Л.Д. Теория упругости [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
6. Ландау, Л.Д. Теория упругости: учеб. пособие. – 4-е изд., испр. и доп. [Текст] / Л.Д. Ландау – М.: Наука, 1987. – 248 с.
7. Джонсон, Р. Механические фильтры в электронике [Текст] / Р. Джонсон. – М.: Мир, 1986. – 406 с.

Отримано 06.11.2011