

Пастернак Я. Регулярні системи тонких неоднорідностей в анізотропному тілі / Пастернак Я., Сулим Г. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 3. — С.49-56. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Я. Пастернак<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук; Г. Сулим<sup>2</sup>, докт. фіз.-мат. наук

<sup>1</sup>Луцький національний технічний університет

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

## РЕГУЛЯРНІ СИСТЕМИ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ В АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ

**Резюме.** Побудовано крайові інтегральні рівняння та відповідну схему методу граничних елементів для розв'язування плоских задач теорії пружності тіл із подвійно періодичними системами тріщин і тонких неоднорідностей. Отримано інтегральні подання для середніх напружень та деформацій, що дають можливість визначати ефективні механічні характеристики тіл із подвійно періодичними системами тонких включень. Наведено числові приклади аналізу узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень та ефективних характеристик композитних матеріалів із тонкими пружними включеннями.

**Ключові слова:** тонке пружне включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, анізотропія, подвійно періодичний, ефективні характеристики.

Ia. Pasternak, H. Sulym

## REGULAR ARRAYS OF THIN INHOMOGENEITIES IN THE ANISOTROPIC SOLID

**The summary.** This paper develops boundary integral equations and the boundary element method for a solution of 2D problems of anisotropic elasticity for doubly periodic arrays of cracks or thin inhomogeneities. The integral representations of mean stress and strain are obtained, which allow determination of effective properties of solids with doubly periodic arrays of thin inhomogeneities. The numerical examples are presented for generalized stress intensity factors and effective properties of composite materials with thin elastic inclusions.

**Key words:** thin elastic inclusion, generalized stress intensity factors, anisotropy, doubly periodic, effective properties.

**Вступ.** Усі матеріали, зокрема й конструкційні, часто містять дефекти у формі тріщин і тонких включень. При дослідженні взаємодії таких дефектів, як правило, зосереджуються на вивченні регулярно розташованих неоднорідностей, адже, як зазначено у роботах [1, 2], такими можна вважати системи тріщин, що наявні у шаруватих кристалах, гірських породах та композитних матеріалах. Періодичні системи тріщин в ізотропному матеріалі розглянуто у монографіях [3, 4] та великій кількості статей, зокрема [1, 2]. Значно менше робіт стосується періодичних систем тріщин в анізотропному середовищі. Серед них можна відзначити монографію [5].

Важливість дослідження подвійно та потрійно періодичних задач зумовлена також можливістю за допомогою їхнього розв'язку вирішити проблему визначення та оптимізації ефективних механічних властивостей композитного матеріалу з регулярною структурою [3, 4]. При побудові відповідних моделей армованого волокнами чи платівками композиту зміцнювальні елементи найчастіше описують тонкими абсолютно жорсткими включеннями [6, 7]. У монографії [4] для випадку антиплоскої деформації ці результати узагальнено на випадок систем тонких пружних включень. У роботі [8] досліджено ефективні властивості композиту з анізотропною матрицею, що армована системою тонких гнучких включень.

**Метою цієї роботи** є побудова загального аналітично-числового підходу, що дає би можливість розглядати подвійно періодичні системи тонких неоднорідностей в анізотропних тілах. Як засіб числового розв'язування побудованих сингулярних

інтегральних рівнянь відповідних задач вибрано модифікацію [9] методу граничних елементів, яка засвідчила свою ефективність при вивченні впливу тонких включень на фізико-механічні поля, що діють в анізотропних і п'єзоелектричних матеріалах, зокрема й при обчисленні коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вістря неоднорідності.

**Формулювання задачі.** Розглянемо плоску задачу теорії пружності для безмежного анізотропного середовища із системою тонких пружних включень. Відповідно до принципу спряження континуумів різної вимірності [4] останні моделюватимемо лініями  $\Gamma_s$  ( $s \in \square$ ) розриву полів напружень і переміщень. Тоді інтегральні рівняння задачі для тіла з лініями стрибків набудуть вигляду [9]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(\mathbf{y}) &= \sum_{s \in \square} \left[ \int_{\Gamma_s^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_s^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + I_i^\infty(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} \Delta t_i^k(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \Xi_{ij}^\infty + \sum_{s \in \square} \left[ \int_{\Gamma_s^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_s^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\mathbf{y} \in \Gamma_k$  ( $k \in \square$ ) – точка колокації;  $u_i, t_i$  – компоненти векторів переміщень та напружень;  $\Delta(\square) = (\square)^+ - (\square)^-, \Sigma(\square) = (\square)^+ + (\square)^-; t_i^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j^\pm$  ( $n_j^\pm$  – компоненти векторів зовнішніх нормалей  $\mathbf{n}^\pm$  до утворених розрізом  $\Gamma_s$  поверхонь  $\Gamma_s^\pm$ );  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma_s^+$  та  $\Gamma_s^-$ . Функції  $I_i^\infty(\mathbf{y}), \Xi_{ij}^\infty(\mathbf{y})$ , що окреслюють переміщення та напруження у відповідній задачі за відсутності включень, означені виразами

$$I_i^\infty(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma^\infty} [U_{ij}(x, \mathbf{y}) t_j^\infty(x) - T_{ij}(x, \mathbf{y}) u_j^\infty(x)] d\Gamma(x), \quad \Xi_{ij}^\infty(\mathbf{y}) = C_{ijmq} I_{m,q}^\infty(\mathbf{y}), \quad (2)$$

де  $\Gamma^\infty$  – безмежно віддалений контур. Індeksi у позначеннях відповідають проєкціям векторів на осі глобальної системи координат  $Ox_1x_2$ . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла відповідно до залежностей формалізму Stroh [10] мають вигляд [9]

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ A_{i\alpha} A_{j\alpha} \ln Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right], \quad T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ A_{i\alpha} B_{j\alpha} \frac{(n_2 - n_1 p_\alpha)}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} A_{k\alpha} \frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} B_{k\alpha} \frac{n_2 - n_1 p_\alpha}{[Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^2} \right], \quad Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + p_\alpha x_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Комплексні сталі  $p_\alpha$  та матриці  $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_\alpha], \mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_\alpha]$  визначаються за заданими компонентами  $C_{ijkm}$  тензора пружних сталей із задачі на власні значення формалізму Stroh [10].

Для розв'язування поставленої задачі до інтегральних рівнянь (1) слід долучити певні співвідношення моделі тонкого включення

$$\Sigma u_i^k(\mathbf{y}) = F_{ik}^u(\mathbf{y}, \Delta u_j^k, \Sigma t_j^k), \quad \Delta t_i^k(\mathbf{y}) = F_{ik}^t(\mathbf{y}, \Delta u_j^k, \Sigma t_j^k), \quad (4)$$

що пов'язують між собою розриви (стрибки) та середні значення векторів напружень і

переміщень на протилежних берегах неоднорідності. Конкретизацію виразів (4) можна знайти у роботах [9, 11].

За знайденими значеннями крайових функцій  $\Delta u_j^k$ ,  $\Sigma t_j^k$  переміщення, напруження та функції напружень у довільній точці  $\xi$  середовища обчислюються відповідно за такими інтегральними поданнями [9]:

$$u_i(\xi) = \sum_{s \in \square} \int_{\Gamma_s^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma t_j^s(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta u_j^s(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + I_i^\infty(\xi), \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}(\xi) = \sum_{s \in \square} \int_{\Gamma_s^+} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma t_k^s(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \Delta u_k^s(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \Xi_{ij}^\infty(\xi), \quad (6)$$

$$\varphi_i(\xi) = \sum_{s \in \square} \int_{\Gamma_s^+} [G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma t_j^s(\mathbf{x}) - F_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta u_j^s(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\mathbf{x}_0}^{\xi} \Xi_{ij}^\infty(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (7)$$

де ядра  $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  задані виразами

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} [B_{i\alpha} A_{j\alpha} \ln Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ B_{i\alpha} B_{j\alpha} \frac{n_2 - n_1 p_\alpha}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \quad (8)$$

а функції напружень  $\varphi_i$  означені залежностями [10]

$$\sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \varphi_{i,1}, \quad \varphi_i(\xi) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\xi} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (9)$$

**Підсумовування ядер за подвійної періодичності.** У випадку подвійно періодичної системи ідентичних тонких включень чи їхніх груп, а також існування аналогічної повторюваності навантажувальних чинників, унаслідок трансляційної симетрії можна стверджувати, що розриви напружень  $\Sigma t_i^s$  та переміщень  $\Delta u_i^s$  є однаковими для кожного включення. Тому систему рівнянь (1) можна записати у формі

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_i^0(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_0^+} U_{ij}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_0^+} T_{ij}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + I_i^\infty(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} \Delta t_i^0(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \Xi_{ij}^\infty + \int_{\Gamma_0^+} D_{ijk}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_0^+} S_{ijk}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де ядра  $\mathbf{K}^{\text{dp}} = [U_{ij}^{\text{dp}}, T_{ij}^{\text{dp}}, D_{ijk}^{\text{dp}}, S_{ijk}^{\text{dp}}]$  мають загальний вигляд

$$\mathbf{K}^{\text{dp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}^{(1)} + m\boldsymbol{\omega}^{(2)}, \mathbf{y}). \quad (11)$$

Тут  $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\omega_{x_1}^{(1)}, \omega_{x_2}^{(1)})$ ,  $\boldsymbol{\omega}^{(2)} = (\omega_{x_1}^{(2)}, \omega_{x_2}^{(2)})$  – вектори відповідних періодів.

Виходячи із (3) та (11), для розв'язування поставленої задачі необхідно спочатку обчислити подвійні суми

$$S_{1\alpha}^{\text{dp}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \ln(u_\alpha + s\omega_\alpha^{(1)} + m\omega_\alpha^{(2)}), \quad S_{2\alpha}^{\text{dp}} = \frac{dS_{1\alpha}^{\text{dp}}}{du_\alpha}, \quad S_{3\alpha}^{\text{dp}} = -\frac{dS_{2\alpha}^{\text{dp}}}{du_\alpha}, \quad (12)$$

де  $\omega_\alpha^{(1)} = Z_\alpha(\boldsymbol{\omega}^{(1)})$ ,  $\omega_\alpha^{(2)} = Z_\alpha(\boldsymbol{\omega}^{(2)})$ .

Позначивши  $\tau_\alpha = \omega_\alpha^{(2)} / \omega_\alpha^{(1)}$ ,  $\text{Im}(\tau_\alpha) > 0$ , перепишемо суму  $S_{1\alpha}^{\text{dp}}$  у вигляді

$$S_{1\alpha}^{\text{dp}} = \ln \left[ \frac{u_\alpha}{\omega_\alpha^{(1)}} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{s=-\infty \\ |m|+|s|\neq 0}}^{\infty} \left( 1 + \frac{u_\alpha}{\omega_\alpha^{(1)}(s+m\tau_\alpha)} \right) \right] + \ln \omega_\alpha^{(1)} + C_{\infty\alpha}^{\text{dp}}, \quad (13)$$

$$C_{\infty\alpha}^{\text{dp}} = \ln \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{s=-\infty \\ |m|+|s|\neq 0}}^{\infty} \omega_\alpha^{(1)}(s+m\tau_\alpha).$$

Використовуючи співвідношення (20.5.14) та (23.6.9) [12], рівність (13) можна записати так:

$$S_{1\alpha}^{\text{dp}} = \ln(\sigma(u_\alpha)) - \frac{\eta_\alpha^{(1)}}{\omega_\alpha^{(1)}}(u_\alpha)^2 + C_{\infty\alpha}^{\text{dp}}, \quad (14)$$

де  $\sigma(u_\alpha) = \sigma(u_\alpha | \omega_\alpha^{(1)}, \omega_\alpha^{(2)})$  – сигма-функція Вейерштрасса;  $\eta_\alpha^{(1)}$  – циклічна стала, що означена виразом (23.6.8) [12]. Двічі диференціюючи (14) за змінною  $u_\alpha$ , обчислимо значення двох інших сум:

$$S_{2\alpha}^{\text{dp}} = \zeta(u_\alpha) - \frac{2\eta_\alpha^{(1)}}{\omega_\alpha^{(1)}}u_\alpha, \quad S_{3\alpha}^{\text{dp}} = \wp(u_\alpha) + \frac{2\eta_\alpha^{(1)}}{\omega_\alpha^{(1)}}, \quad (15)$$

де  $\zeta(u_\alpha) = \zeta(u_\alpha | \omega_\alpha^{(1)}, \omega_\alpha^{(2)})$ ,  $\wp(u_\alpha) = \wp(u_\alpha | \omega_\alpha^{(1)}, \omega_\alpha^{(2)})$  відповідно зета- та пе-функції Вейерштрасса.

Тобто, при розв’язуванні задач із подвійно періодичними системами включень в ядрах (3) для їхнього використання в інтегральних рівняннях (10) необхідно зробити такі заміни:

$$\ln Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rightarrow S_{1\alpha}^{\text{dp}}, \quad [Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{-1} \rightarrow S_{2\alpha}^{\text{dp}}, \quad [Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{-2} \rightarrow S_{3\alpha}^{\text{dp}}. \quad (16)$$

За виконання умов  $\int_{\Gamma_s^+} \Sigma t_i^s d\Gamma = 0$  статично урівноваженого навантажування розрізів  $\Gamma_s$  відповідно до (10) сталі  $C_{\infty\alpha}^{\text{dp}}$  з (13) не впливатимуть на розв’язок задачі, тому при розрахунках їх можна відкинути.

**Визначення середніх напружень і деформацій.** Функція  $\Xi_{ij}^\infty$ , що відповідає зумовленому віддаленим навантаженням полю напружень, повинна бути регулярною й обмеженою в усій площині  $Ox_1x_2$ , тому відповідно до теореми Ліувілля вона є сталою. Таким чином, інтеграли  $I_i^\infty$  та  $\Xi_{ij}^\infty$  унаслідок лінійності задачі можна записати у вигляді суми двох складових, зумовлених дією середніх напружень  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  та деяких поки що невідомих напружень  $\sigma_{ij}^*$ , тобто

$$I_i^\infty(\mathbf{y}) = u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y}, \langle \sigma_{km} \rangle) + u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y}, \sigma_{km}^*), \quad \Xi_{ij}^\infty = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^*, \quad (17)$$

де  $u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y}, \sigma_{km})$  – поле переміщень у бездефектному середовищі, що відповідає заданим на безмежності компонентам  $\sigma_{km}$  тензора напружень.

Для обчислення напружень  $\sigma_{ij}^*$  розглянемо функції напружень  $\varphi_i$ . Із періодичності напружень випливає, що вони є квазіперіодичними:

$$\varphi_i(\mathbf{x} + \mathbf{w}^{(k)}) = \varphi_i(\mathbf{x}) + \Delta\varphi_i^{(k)} \quad (k=1, 2). \quad (18)$$

Циклічні сталі  $\Delta\varphi_i^{(k)}$  обчислимо відповідно до (9) так:

$$\Delta\varphi_i^{(k)} = \varphi_i(\mathbf{x} + \mathbf{w}^{(k)}) - \varphi_i(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + \mathbf{w}^{(k)}} t_i(s) ds = - \langle \sigma_{i1} \rangle \omega_{x_2}^{(k)} + \langle \sigma_{i2} \rangle \omega_{x_1}^{(k)}. \quad (19)$$

З іншого боку, функції напружень можна визначити за допомогою інтегрального подання (7), застосувавши до ядер (8) заміни (16). Зважаючи на те, що відповідно до (23.2.11), (23.2.12), (23.2.14) та (23.2.15) [12]

$$\begin{aligned}\zeta(u_\alpha + \omega_\alpha^{(k)}) &= \zeta(u_\alpha) + 2\eta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma(u_\alpha + \omega_\alpha^{(k)}) = -e^{2\eta_\alpha^{(k)}(u_\alpha + \omega_\alpha^{(k)}/2)} \sigma(u_\alpha), \\ \eta_\alpha^{(1)} \omega_\alpha^{(2)} - \eta_\alpha^{(2)} \omega_\alpha^{(1)} &= \pi\sqrt{-1}, \quad \eta_\alpha^{(k)} = \zeta(\omega_\alpha^{(k)}/2)\end{aligned}\quad (20)$$

та використовуючи (7), (16) і (19), отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta\phi_i^{(k)} &= -\langle\sigma_{i1}\rangle\omega_{x_2}^{(k)} + \langle\sigma_{i2}\rangle\omega_{x_1}^{(k)} - \sigma_{i1}^*\omega_{x_2}^{(k)} + \sigma_{i2}^*\omega_{x_1}^{(k)} + \Delta\hat{\phi}_i^{(k)}, \quad \Delta\hat{\phi}_i^{(1)} = 0, \\ \Delta\hat{\phi}_i^{(2)} &= 2\operatorname{Re}\left\{B_{i\alpha}/\omega_\alpha^{(1)} \int_{\Gamma_0^+} \left[A_{j\alpha}Z_\alpha(\mathbf{x})\Sigma t_j^0(\mathbf{x}) - B_{j\alpha}(n_2 - n_1 p_\alpha)\Delta u_j^0(\mathbf{x})\right] d\Gamma(\mathbf{x})\right\}.\end{aligned}\quad (21)$$

На підставі зв'язків (19) та (21) напруження  $\sigma_{ij}^*$  дорівнюють

$$\sigma_{ij}^* = \Delta\hat{\phi}_i^{(2)}\omega_{x_j}^{(1)} / (\omega_{x_1}^{(1)}\omega_{x_2}^{(2)} - \omega_{x_1}^{(2)}\omega_{x_2}^{(1)}). \quad (22)$$

Для обчислення середніх деформацій розглянемо вектор переміщень, який також є квазіперіодичною функцією. На основі (5), (16) та (20) циклічні сталі  $\Delta u_i^{(k)}$  знаходимо з таких співвідношень:

$$\begin{aligned}\Delta u_i^{(k)} &= \left[u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\langle\sigma_{km}\rangle) + u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\sigma_{km}^*)\right]\omega_{x_j}^{(k)} + \Delta\hat{u}_i^{(k)}, \quad \Delta\hat{u}_i^{(1)} = 0, \\ \Delta\hat{u}_i^{(2)} &= 2\operatorname{Re}\left\{A_{i\alpha}/\omega_\alpha^{(1)} \int_{\Gamma_0^+} \left[A_{j\alpha}Z_\alpha(\mathbf{x})\Sigma t_j^0(\mathbf{x}) - B_{j\alpha}(n_2 - n_1 p_\alpha)\Delta u_j^0(\mathbf{x})\right] d\Gamma(\mathbf{x})\right\}.\end{aligned}\quad (23)$$

Тому середні деформації обчислюємо за формулами

$$\begin{aligned}\langle u_{i,1} \rangle &= -\Delta\hat{u}_i^{(2)}\omega_{x_2}^{(1)} / (\omega_{x_1}^{(1)}\omega_{x_2}^{(2)} - \omega_{x_1}^{(2)}\omega_{x_2}^{(1)}) + u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\langle\sigma_{km}\rangle) + u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\sigma_{km}^*), \\ \langle u_{i,2} \rangle &= \Delta\hat{u}_i^{(2)}\omega_{x_1}^{(1)} / (\omega_{x_1}^{(1)}\omega_{x_2}^{(2)} - \omega_{x_1}^{(2)}\omega_{x_2}^{(1)}) + u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\langle\sigma_{km}\rangle) + u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\sigma_{km}^*),\end{aligned}\quad (24)$$

де  $u_{i,j}^{\operatorname{hom}}(\sigma_{km})$  – деформації однорідного бездефектного середовища, зумовлені прикладеними на безмежності напруженнями  $\sigma_{km}$ .

**Розв'язування задачі.** Систему крайових інтегральних рівнянь (10) та (22) розв'язуватимемо методом граничних елементів [9], що завдяки введенню спеціальних граничних елементів, які моделюють приторцеві ділянки тонкого включення, дає можливість безпосередньо та з високою точністю обчислювати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) за формулами [9]

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \mathbf{S}^T \cdot \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (25)$$

де  $\mathbf{k}^{(i)} = [K_{2i}, K_{1i}]^T$ ,  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1, \Delta u_2]^T$ ,  $\Sigma \mathbf{t} = [\Sigma t_1, \Sigma t_2]^T$ ;  $s$  – відстань до вершини лінії  $\Gamma_0$ ;  $K_{ij}$  – узагальнені КІН, причому у випадку тріщини  $K_{11} = K_1$ ,  $K_{21} = K_{12}$ ,  $K_{12} = K_{22} = 0$ , а  $K_1$ ,  $K_{12}$  – класичні КІН теорії тріщин;  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{S} = \sqrt{-1}(2\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{I})$  – дійсні тензори Barnett – Lothe [10].

Оскільки при підсумовуванні ядер за подвійної періодичності їхні особливості не змінюються, то для числового визначення слабо-, сильно- і гіперсингулярних інтегралів у цих випадках також можна використовувати запропоновані у роботі [9] квадратури та поліноміальні відображення, що згладжують підінтегральний вираз на кінцях проміжку інтегрування.

Для обчислення ефективних податностей рівняння (10) та (22) відповідно до [3] найзручніше розв'язувати для таких трьох варіантів середніх напружень:

- 1)  $\langle\sigma_{11}^{(1)}\rangle = 1$ ,  $\langle\sigma_{22}^{(1)}\rangle = 0$ ,  $\langle\sigma_{12}^{(1)}\rangle = 0$ ,
- 2)  $\langle\sigma_{11}^{(2)}\rangle = 0$ ,  $\langle\sigma_{22}^{(2)}\rangle = 1$ ,  $\langle\sigma_{12}^{(2)}\rangle = 0$ ,

$$3) \langle \sigma_{11}^{(3)} \rangle = 0, \langle \sigma_{22}^{(3)} \rangle = 0, \langle \sigma_{12}^{(3)} \rangle = 1$$

та для кожного з них обчислювати середні деформації  $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle = (\langle u_{i,j}^{(k)} \rangle + \langle u_{j,i}^{(k)} \rangle) / 2$ , де верхнім індексом відзначено номер варіанта навантажування. Тоді матриця

$$\mathbf{A}^{\text{eff}} \equiv \begin{bmatrix} a_{11}^{\text{eff}} & a_{12}^{\text{eff}} & a_{16}^{\text{eff}} \\ a_{12}^{\text{eff}} & a_{22}^{\text{eff}} & a_{26}^{\text{eff}} \\ a_{16}^{\text{eff}} & a_{26}^{\text{eff}} & a_{66}^{\text{eff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle & \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle & \langle \varepsilon_{11}^{(3)} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle & \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle & \langle \varepsilon_{22}^{(3)} \rangle \\ 2\langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle & 2\langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle & 2\langle \varepsilon_{12}^{(3)} \rangle \end{bmatrix}$$

є шуканою матрицею ефективних податностей  $a_{ij}^{\text{eff}}$ .

**Числовий аналіз прикладів.** Верифікація розробленого підходу здійснена шляхом порівняння результатів, отриманих для плоскої задачі теорії пружності тіла із двоперіодичною системою тріщин на основі методу малого параметра [7] і за аналітично-числовим розв'язком [2]. Для абсолютно жорстких включень числові дані запропонованого методу зіставлялися із розв'язком [7]. У випадку тріщин відхилення між даними розрахунку за МГЕ та відомими результатами є незначним. Для систем жорстких включень це відхилення дещо більше і досягає близько 3,3%. Для задачі антиплоского деформування похибка числового визначення узагальнених КІН порівняно із аналітичним розв'язком [6] не перевищує 0,3%.

Як приклад, розглянемо виготовлену зі склопластику анізотропну пластину з такими пружними характеристиками:  $E_1 = 48,26$  ГПа;  $E_2 = 17,24$  ГПа;  $\nu_{12} = 0,29$ ;  $G_{12} = 6,89$  ГПа. У ній наявна подвійно періодична система паралельних до осі  $Ox_1$  ізотропних тонких включень завдовжки  $2a$  та завтовшки  $2h$ , причому  $h = 0,01a$ . Відносна жорсткість включень характеризується параметром  $k = G^i / G_{12}$ , де  $G^i$  – модуль зсуву матеріалу неоднорідності. Коефіцієнт Пуассона включень  $\nu^i = \nu_{12}$ . Дослідимо два типи ґраток: квадратну ( $\omega^{(1)} = (d, 0)$ ,  $\omega^{(2)} = (0, d)$ ) та правильну трикутну ( $\omega^{(1)} = (d, 0)$ ,  $\omega^{(2)} = (d/2, \sqrt{3}d/2)$ ). Зазначимо, що за таких періодів питома частка включень за прямокутного укладання ( $V_f = \lambda^2 h / a$ ) є дещо меншою, аніж за трикутного ( $V_f = 2\lambda^2 h / (\sqrt{3}a)$ ). Отримані за всебічного розтягу ( $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = p$ ) анізотропного середовища нормовані значення  $K_{ij}^* = K_{ij} / (p\sqrt{\pi a})$  узагальнених КІН зображені на рис. 1. Унаслідок використання на рисунках двох осей ординат для різних узагальнених КІН відповідні графіки зображені до місця виходу на асимптоту.

Із рис. 1 бачимо, що для трикутної ґратки узагальнені КІН податних ( $k < 1$ ) включень дещо більші за відповідні для квадратної. Натомість для відносно жорстких ( $k > 1$ ) включень спостерігається протилежна картина. Зі збільшенням параметра  $\lambda = 2a / d$ , тобто зі зближенням включень, узагальнені КІН зростають. Для податних включень ( $k < 1$ ) вплив зміни величини  $\lambda$  більший, ніж для жорстких ( $k > 1$ ).

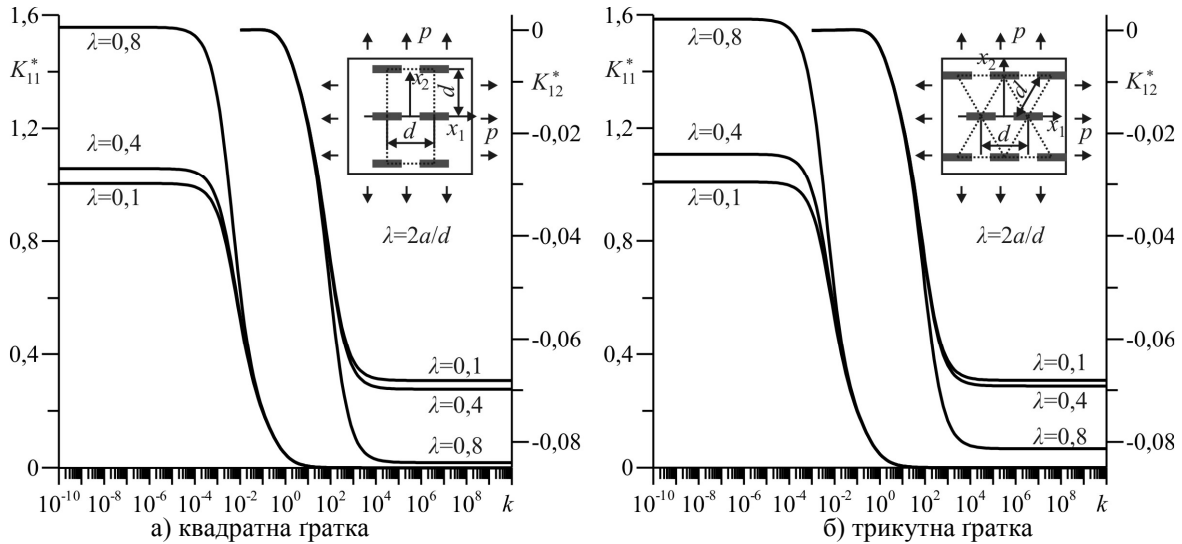


Рисунок 1. Нормовані значення узагальнених КІН для двоперіодичних систем тонких пружних включень

На рис. 2 зображено залежність ефективних модулів пружності анізотропної пластини з регулярними системами пружних включень. Відповідні задачі для податних ( $k < 1$ ) неоднорідностей моделюють властивості матеріалу з регулярними системами залікованих тріщин. У випадку жорстких ( $k > 1$ ) включень отримуємо ефективні властивості пластин, підсилених зміцнювальними накладками [8].

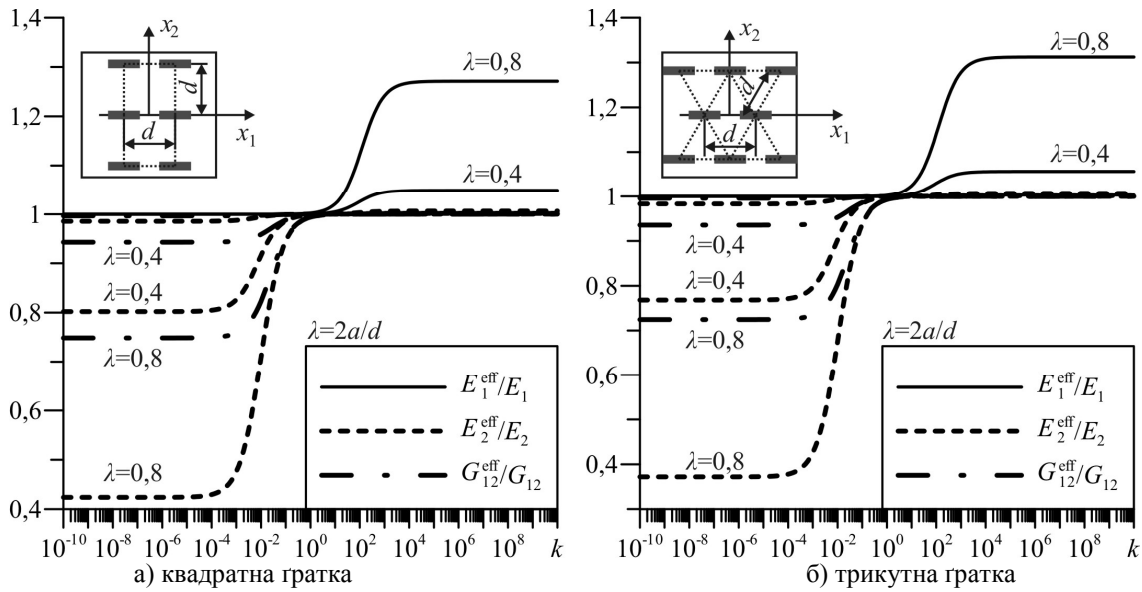


Рисунок 2. Ефективні модулі композиту із регулярними системами тонких пружних неоднорідностей

Для трикутної ґратки (рис. 2б) жорстких включень отримані значення ефективних модулів пружності дещо більші, ніж для квадратної. При цьому, як бачимо з рис. 1, узагальнені КІН за всебічного розтягу пластини із трикутною ґраткою включень є меншими. Кращою стосовно використаної кількості абсолютно жорстких включень також є трикутна ґратка. Зокрема, для питомої частки  $V_f = 0,64h/a = 0,64\%$  неоднорідностей (відповідно  $\lambda = 0,8$  для квадратної ґратки та  $\lambda = 0,8\sqrt{3}/\sqrt{2}$  для правильної трикутної) за всебічного розтягу анізотропної пластини із квадратним укладанням зміцнювальних накладок модуль узагальненого КІН  $K_{12}$  на 23,5 % більший за відповідний для ізольованого включення, а ефективний модуль пружності  $E_1^{\text{eff}}$  композиту зростає на 27,1 % порівняно з  $E_1$ . Натомість для трикутної ґратки КІН  $K_{12}$

збільшується за модулем лише на 13,7 % (майже в два рази менше) за практично такого ж зростання  $E_1^{\text{eff}}$  (на 25 %).

**Висновки.** Побудовані у роботі аналітично-числові підходи дослідження плоских подвійно періодичних задач теорії пружності для систем тонких пружних включень у необмеженому середовищі дають можливість із високою точністю розрахувати напружено-деформований стан, а також описати локальний напружений стан біля вершин тонких неоднорідностей. Це дозволяє здійснити оптимальний вибір геометричних і механічних параметрів складових стрічкових композитних матеріалів, а також обчислити граничне навантаження на матеріал із періодичними системами неоднорідностей.

#### **Література**

1. Коваленко, Ю.Ф. Трещиновидные неоднородности и их влияние на эффективные механические характеристики [Текст] / Ю.Ф. Коваленко, Р.Л. Салганик // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 5. – С. 76–86.
2. Wang, G.S. The interaction of doubly periodic cracks / G.S. Wang // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2004. – 42. – P. 249–294.
3. Линьков, А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости [Текст] / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
4. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
5. Божидарнік, В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами [Текст] / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 228 с.
6. Xiao, J.H. Exact solution to the antiplane problem of doubly periodic conducting rigid line inclusions of unequal size in piezoelectric materials / J.H. Xiao, Y.L. Xu, C.P. Jiang // Z. Angew. Math. Mech. – 2011. – 91, No. 5. – P. 413–424.
7. Бережницкий, Л.Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле [Текст] / Л.Т. Бережницкий, В.В. Панасюк, Н.Г. Стащук. – К.: Наукова думка, 1983. – 288 с.
8. Долгих В.Н. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами [Текст] / Л.А. Фильштинский, В.Н. Долгих // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 24–30.
9. Pasternak, Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – 35. – No. 4. – P. 678–690.
10. Ting, T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.
11. Пастернак Я.М. Дуальный метод граничных элементов для задач теорії тонких включень [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – № 2. – С. 46–57.
12. NIST Handbook of Mathematical Functions / F.W. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. – New York: Cambridge University Press, 2010. – 951 p.

*Отримано 28.08.2011*