

Ловейкін В. Нелінійні маятникові коливання вантажу на гнучкому підвісі при різних режимах обертання / Ловейкін В., Бойко А., Човнюк Ю. // Вісник ТНТУ. — 2010. — Том 15. — № 3. — С. 41-48. — (машинобудування, автоматизація виробництва та процеси механічної обробки).

УДК 532.59 (023)

**В. Ловейкін, докт. техн. наук; А. Бойко, докт. техн. наук;  
Ю. Човнюк, канд. техн. наук**

*Національний університет біоресурсів та природокористування України,  
м. Київ*

## **НЕЛІНІЙНІ МАЯТНИКОВІ КОЛИВАННЯ ВАНТАЖУ НА ГНУЧКОМУ ПІДВІСІ ПРИ РІЗНИХ РЕЖИМАХ ОБЕРТАННЯ**

*Резюме.* Досліджено нелінійні маятникові коливання вантажу на канаті крана у процесі його обертання навколо осі.

*Ключові слова:* вантаж, коливання, вантажопідйомні машини, оптимізація.

**V. Loveikin; A. Boyko; Yu. Chovnyuk**

## **NONLINEAR PENDULUM'S OSCILLATIONS OF LOAD ON FLEXIBLE SUSPENSION AT DIFFERENT MODES OF ROTATION**

*The summary.* The nonlinear pendulum's oscillations of load on the crane's rope during its rotation about axes are discussed.

*Key words:* load, oscillations, lifting's machines, optimization.

**Постановка проблеми.** Основи оптимального керування рухом механізмів вантажопідйомних машин, синтез оптимальних режимів руху механізмів варіаційними методами здійснені у роботі [1].

Основна мета створення вантажопідйомних машин різного призначення – спроектувати такі машини та їх механізми, які б мали достатню продуктивність, були надійними в експлуатації, потребували небагато енергії, виконували заданий технологічний процес вантажно-розвантажувальних операцій з потрібною точністю, були легкими в керуванні, мали зменшену металомісткість тощо. Більшість із перелічених властивостей вантажопідйомних машин має суперечливий характер, тобто поліпшення одних властивостей призводить до погіршення інших. У цьому зв'язку потрібно оптимізувати режими руху кранових та інших механізмів з метою найкращого задоволення наведених властивостей, тобто мінімізувати небажані властивості або максимізувати бажані.

Практично на всі властивості вантажопідйомних машин впливають режими руху їх механізмів при виконанні того чи іншого технологічного процесу. Тому шляхом вибору певних режимів руху приводних механізмів можна досягти потрібних властивостей вантажопідйомних машин. Проте кожен із режимів руху поліпшує одні властивості машини або її механізмів, але погіршує інші. Тому для задоволення комплексу властивостей вантажопідйомної машини потрібно оптимізувати режими руху на компромісній основі.

Для оптимізації режимів руху слід мати кількісну оцінку властивостей вантажопідйомної машини або її механізмів у вигляді критерію або системи критеріїв. У [1] такі критерії обрано для вантажопідйомних машин. Саме вони відображають основні небажані властивості машин та їх механізмів протягом усього циклу руху і мають інтегральний характер.

Проблемі керування маятниковими системами присвячено монографію [2], а синтез керування маятником здійснено у [3]. Вказані праці дозволили отримати низку точних аналітичних розв'язків типових задач оптимального переміщення маятника при

різних обмеженнях на параметри керування і фазові координати. Проте деякі отримані результати неможливо реалізувати на практиці.

**Мета роботи** полягає у розробленні методики мінімізації критерію коливних рухів вантажу на гнучкому елементі (канаті) у період роботи механізму повороту вантажопідйомного крана. У результаті мінімізації критерію, який здійснюється класичними варіаційними методами [4], можна отримати оптимальні режими руху механізмів вантажопідйомних кранів. Такі режими руху (обертання крана навколо власної осі) оптимізують окремі властивості кранів (зокрема, мінімізують маятникові коливання вантажу на канаті) і дають змогу обирати найбільш вдале поєднання кількох властивостей.

**Результати дослідження.**

**1. Функція Лагранжа та аналіз рівнянь руху вантажу на канаті крана, який здійснює обертання навколо осі.**

Для визначення функції Лагранжа [4] та виведення відповідних рівнянь руху вантажу на канаті крана, який здійснює обертання навколо власної осі, використаємо підхід, розвинений у [4]. Кран, що обертається навколо власної осі, маятникові відхилення вантажу від вертикалі, які при цьому виникають, зображено на рис. 1, де введено такі позначення:  $l$  – довжина гнучкого підвісу (каната);  $m$  – маса вантажу;  $r$  – довжина стріли каната, що обертається навколо осі каната з рівномірною кутовою швидкістю  $\Omega$ ;  $\theta$  – кут відхилення вантажу від вертикалі;  $\vec{g}$  – прискорення вільного падіння. Змінними у часі  $t$  вважаємо величину  $\theta$  і швидкість обертання крана ( $\dot{\varphi} \neq \Omega$  – для випадку нерівномірного обертання крана навколо осі  $OO'$ ).

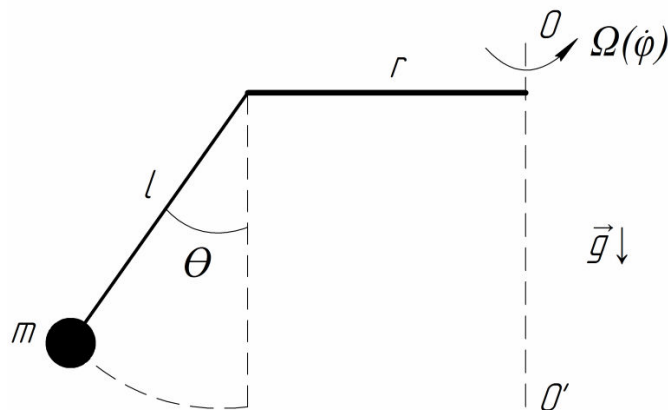


Рис. 1. Розрахункова схема крана, що обертається навколо власної осі

Для визначення функції Лагранжа  $L$  динамічної моделі кранової системи, яку розглядаємо, використаємо такі міркування. Введемо позначення

$$l_1 = r + l \cdot \sin \theta , \tag{1}$$

тоді  $dl_1$  можна записати

$$dl_1 = l \cdot \cos \theta \cdot d\theta . \tag{2}$$

У якості  $dl_2$  оберемо елемент дуги, який відповідає зміщенню стріли крана  $r$  у площині її повороту перпендикулярно до осі  $OO'$ . Зрозуміло, що

$$dl_2 = (l \cdot \sin \theta + r) \cdot d\varphi , \tag{3}$$

де  $\varphi$  – центральний кут повороту стріли крана у площині повороту. Тоді

$$d\tilde{l}^2 = dl_1^2 + dl_2^2 = (l \cos \theta)^2 \cdot d\theta^2 + (l \sin \theta + r)^2 \cdot d\varphi^2. \quad (4)$$

Використовуючи співвідношення (4), можна записати

$$\frac{d\tilde{l}^2}{dt^2} = (l \cos \theta)^2 \cdot \frac{d\theta^2}{dt^2} + (l \sin \theta + r)^2 \cdot \frac{d\varphi^2}{dt^2} = (l \cos \theta)^2 \cdot \dot{\theta}^2 + (l \sin \theta + r)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

**1.1. Розглянемо випадок рівномірного обертання стріли каната навколо його власної осі**, тобто  $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$ . Тоді кінетична енергія кранової системи  $T$  матиме вигляд

$$T = \frac{m}{2} \cdot \{l^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + (l \sin \theta + r)^2 \cdot \Omega^2\} \quad (6)$$

Потенціальна енергія  $U$  вантажу  $m$  набуде вигляду

$$U = -mgl \cdot \cos \theta \quad (7)$$

На основі залежностей (6) та (7) для  $L$  отримаємо

$$L = T - U = \frac{m}{2} \cdot \{l^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + (l \sin \theta + r)^2 \cdot \Omega^2\} + mgl \cos \theta. \quad (8)$$

Для функції Лагранжа  $L$  (8) маємо рівняння руху кранової системи, яку розглядаємо,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (9)$$

де

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2} \cdot l^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot 2 \cdot \dot{\theta} = ml^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}; \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2} \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot 2 \cos \theta \cdot (-\sin \theta) + \frac{m}{2} \cdot \Omega^2 \cdot 2 \cdot (l \sin \theta + r) \cdot l \cdot \cos \theta - mgl \sin \theta = \\ = -ml^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + m\Omega^2 l^2 \sin \theta \cdot \cos \theta + m\Omega^2 \cdot r \cdot l \cdot \cos \theta. \end{cases} \quad (10)$$

Тоді рівняння руху системи набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}) + ml^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - m\Omega^2 l^2 \sin \theta \cdot \cos \theta - m\Omega^2 \cdot r \cdot l \cdot \cos \theta = 0 \quad (11)$$

Після нескладних перетворень можна отримати

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}) + ml^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - m\Omega^2 l^2 \sin \theta \cdot \cos \theta - m\Omega^2 \cdot r \cdot l \cdot \cos \theta = 0 \quad (12)$$

Будемо вважати, що  $\cos \theta \neq 0$ , а  $\theta$  – суттєво малий кут, тоді з (12) отримаємо

$$\ddot{\theta} \cos \theta - (\dot{\theta}^2 + \Omega^2) \sin \theta - \Omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 0. \quad (13)$$

Лінеаризація рівняння (13) при умовах  $\theta \ll 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx \theta$ ,  $\Omega^2 \gg \dot{\theta}^2$ , дає

$$\ddot{\theta} - \Omega^2 \cdot \theta - \Omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 0. \quad (14)$$

Розв'язок (14) шукаємо у вигляді

$$\theta = \tilde{\theta} + \theta_0, \quad \theta_0 = \text{const}. \quad (15)$$

З (14) отримаємо

$$\ddot{\tilde{\theta}} - \Omega^2 \cdot \tilde{\theta} - \Omega^2 \cdot \theta_0 - \Omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 0. \quad (16)$$

$$\ddot{\tilde{\theta}} - \Omega^2 \cdot \tilde{\theta} = 0, \quad \theta_0 = \frac{r}{l}. \quad (17)$$

$$\tilde{\theta} = C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t}, \quad C_1 i C_2 = \text{const}. \quad (18)$$

Тоді загальний розв'язок (14) набуде вигляду

$$\theta = C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t} - \frac{r}{l}. \quad (19)$$

Початкові умови для рівняння (14) обираємо такими:

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}|_{t=0} = 0. \quad (20)$$

Тоді  $C_1 = C_2 = \frac{r}{2l}$ , що випливає з умов (20). Отже, загальний розв'язок (14) при умовах (20) має вигляд

$$\theta(t) = \frac{r}{2l} \cdot e^{\Omega t} + \frac{r}{2l} \cdot e^{-\Omega t} - \frac{r}{l} = \frac{r}{l} \cdot \text{ch} \Omega t - \frac{r}{l} = \frac{r}{l} \cdot \{\text{ch} \Omega t - 1\}. \quad (21)$$

Час, за який  $\theta$  досягне значення  $\frac{\pi}{2}$ , складає

$$t^* = \frac{1}{\Omega} \cdot \text{Arch} \left\{ \frac{\pi l}{2r} + 1 \right\}. \quad (22)$$

Хоча слід зазначити, що результат (22) отриманий без виконання умови  $\theta \ll 1$ . Розв'яжемо рівняння (13) у квадратурах. Спочатку подамо його у формі

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta} \cos \theta) - \Omega^2 \cdot \sin \theta - \Omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 0. \quad (23)$$

Далі перепишемо (23) таким чином:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) - \Omega^2 \cdot \sin \theta - \Omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 0. \quad (24)$$

Введемо заміну:  $\sin \theta = \psi$ . Тоді (24) перейде у

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \Omega^2 \cdot \psi - \Omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 0. \quad (25)$$

Позначимо  $\psi = \tilde{\psi} + \psi_0$ . Тоді з (25) отримаємо

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dt^2} - \Omega^2 \cdot \tilde{\psi} = 0, \quad \psi_0 = -\frac{r}{l}. \quad (26)$$

Розв'язком (26) буде залежність

$$\tilde{\psi} = C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t}; \quad C_1 i C_2 = const. \quad (27)$$

Тоді для (23) маємо загальний розв'язок

$$\sin \theta = C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t} - \frac{r}{l}. \quad (28)$$

Нехай  $\theta(t)$  задовольняє початковим умовам (20). Тоді

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{r}{l} = 0, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{r}{2l}. \quad (29)$$

Отже, точний розв'язок (23) має вигляд

$$\sin \theta = \{ch\Omega t - 1\} \cdot \frac{r}{l}. \quad (30)$$

З виразу (30) отримаємо точний розв'язок (13), (23)

$$\theta(t) = \arcsin \left\{ [ch\Omega t - 1] \cdot \frac{r}{l} \right\}. \quad (31)$$

Тоді значення кута  $\theta = \frac{\pi}{2}$  досягається при  $t = t^*$ :

$$[ch\Omega t^* - 1] \cdot \frac{r}{l} = 1 \quad (32)$$

або

$$t^* = \frac{1}{\Omega} \cdot Arch \left( \frac{l}{r} + 1 \right). \quad (33)$$

**1.2. Стріла крана обертається навколо його власної осі зі змінною швидкістю  $\dot{\phi}(t)$ .**

Функція Лагранжа  $L$  у цьому випадку набуває вигляду

$$L = \frac{m}{2} l^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \cdot (l \sin \theta + r)^2 \cdot \dot{\phi}^2 + mgl \cos \theta. \quad (34)$$

Використовуючи (34), можна легко отримати рівняння руху системи у даному випадку

$$\begin{cases} \ddot{\theta} \cos \theta - (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \sin \theta - \dot{\phi}^2 \cdot \frac{r}{l} = 0; \\ (l \sin \theta + r) \cdot \dot{\phi} + 2l \cos \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\phi} = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Для другого рівняння системи (35) отримаємо розв'язок  $\phi(t)$  відомого закону  $\theta(t)$

$$\phi = \frac{C_1}{m} \cdot \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{[l \sin \theta(\tilde{t}) + r]^2} + C_2, \quad C_1, C_2 = const. \quad (36)$$

Для  $\dot{\phi}(t)$  отримаємо

$$\dot{\phi}(t) = \frac{C_1}{m \cdot [l \sin \theta(t) + r]^2}. \quad (37)$$

Підставляючи (37) у (35), отримаємо диференціальне рівняння для знаходження закону  $\theta(t)$

$$\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta - \frac{C_1^2 \cdot \left( \sin \theta + \frac{r}{l} \right)}{m^2 \cdot (l \sin \theta + r)^4} = 0, \quad C_1 = const. \quad (38)$$

Останнє рівняння можна розв'язувати у квадратурах

$$\frac{1}{l^2 \cdot m} \cdot \sqrt{-\frac{C_1^2}{\tilde{C}_3^2} + \frac{l^4 \cdot m^2}{\tilde{C}_3} \cdot \left( \sin \theta + \frac{r}{l} \right)^2} = t + C_4; \quad C_1, \tilde{C}_3, C_4 = const. \quad (39)$$

Усі зазначені вище константи можна знайти з початкових умов задачі. Константи  $C_2$  і  $C_4$  завжди можна покласти рівними нулю (для нульових початкових умов  $\theta|_{t=0} = \phi|_{t=0} = 0$ ). Константи  $C_1$  й  $\tilde{C}_3$  можна знайти з таких міркувань. Нехай

$$\dot{\phi}|_{t=t_p} = \dot{\phi}_p, \quad \theta|_{t=t_p} = \theta_p, \quad (40)$$

де  $t_p$  – тривалість перехідного процесу, після закінчення котрого швидкість обертання стріли набуває усталеної величини  $\dot{\phi}_p$ . Тоді

$$C_1 = \dot{\phi}_p \cdot m \cdot [l \cdot \sin \theta(t_p) + r]^2. \quad (41)$$

Враховуючи, що  $C_4 = 0$ , з (39) для  $\tilde{C}_3$  знайдемо рівняння

$$\frac{-C_1^2}{\tilde{C}_3^2} + \frac{L^4 m^2}{\tilde{C}_3} \cdot \left( \sin \theta_p + \frac{r}{l} \right)^2 = t_p^2 \cdot l^4 \cdot m^2. \quad (42)$$

## 2. Чисельний аналіз отриманих аналітичних розв'язків

У таблиці подані значення кута  $\theta$ , який обчислюється за формулою (31) для різних значень  $\Omega t$  та  $r/l$  (відсутність у таблиці значень  $\theta$  для деяких значень  $\Omega t$  та  $r/l$  означає, що аргумент  $\arcsin$  більше 1).

Таблиця. Значення кута  $\theta$ , град. (31)

$\Omega t$	$r/l$				
	0,1	0,5	1,0	5	7
0,001	$2,86 \cdot 10^{-8}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$2,86 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-4}$	$2,01 \cdot 10^{-4}$
0,01	$2,86 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$2,86 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$	$2,01 \cdot 10^{-2}$
0,1	$2,86 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-1}$	$2,86 \cdot 10^{-1}$	1,43	2,01
0,5	0,73	3,66	7,33	39,65	63,30
0,6	1,06	5,31	10,66	67,67	-
1,0	3,11	15,76	32,89	-	-
2,0	22,10	-	-	-	-
1,5	7,77	42,53	-	-	-

## Висновки

1. Визначено функцію Лагранжа та проведено всебічний аналіз рівнянь руху вантажу на канаті крана, який здійснює обертання навколо власної осі у режимах рівномірного і нерівномірного обертання.
2. Отримані аналітичні розв'язки задачі дозволяють встановити залежність кута відхилення  $\theta$  вантажу на канаті від вертикалі за різних значень відношення довжин стріли каната і гнучкого підвісу  $r/l$  та у різні моменти часу  $t$  при заданій власній коливній швидкості обертання  $\Omega$  стріли крана (рівномірне обертання).
3. Отримані результати можна використовувати для подальшого вдосконалення й уточнення існуючих інженерних методів розрахунку подібних систем.

## Література

1. Григоров О.В. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідійомних машин: навчальний посібник / О.В. Григоров, В.С. Ловейкін – К.: ІЗМН, 1997. – 264 с.
2. Черноуцько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноуцько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Заремба А.Т. Синтез управления маятником / А.Т. Заремба // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – №1. – С. 60–68.
4. Ландау Л.Д. Механика. Т.1. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

Отримано 05.09.2010 р.