

Трохимчук О. Мішана контактна задача для системи двох штампів з кутовими точками і пластинки з частково підсиленним криволінійним отвором / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 4. — С. 59-66. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

О. Трохимчук; А. Сяський, докт. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет

МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ І ПЛАСТИНКИ З ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ

Резюме. Побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта і логарифмічними ядрами для задачі про тиск системи двох жорстких штампів із кутовими точками на частково підсиленій криволінійній контур нескінченної ізотропної пластинки. Методом механічних квадратур і колокації проведено дослідження впливу на напружений стан пластинки жорсткості підсилювальних ребер.

Ключові слова: нескінченна ізотропна пластинка, криволінійний отвір, штамп із кутовими точками, зона контакту, частково підсилений контур, напружений стан, інтегрально-диференціальні рівняння.

O. Trokhymchuk, A. Syasky

A MIXED CONSTANT PROBLEM FOR A SYSTEM OF TWO PUNCHES WITH ANGULAR POINTS AND A PLATE WITH PARTLY STRONGER CURVILINEAR HOLE

The summary. The system of singular integral differential equations with Gilbert kernels and logarithmic kernels in problems of pressure of a system of two stiff punches with angular points on partly stronger contour of curvilinear hole in an infinite isotropic plate is built. It is explored an influence of the booster rib's stiffness on the plate's strained state by the method of mechanical quadrature and collocation.

Key words: an infinite isotropic plate, a curvilinear hole, a punch with angular points, an interface's size, a partly stronger contour, strained state, integral differential equations.

Контактні задачі в інженерній практиці виникають завжди, коли необхідно передати зовнішнє зусилля від одного твердого тіла до іншого. Найбільш повно вони досліджені для циліндричних тіл із гладкими поверхнями [1-3]. Ці задачі складають теоретичну основу розрахунку на міцність і жорсткість підшипникових вузлів, гальмівних пристроїв, шліцьових з'єднань.

Загальна постановка задач про контактну взаємодію жорсткого штампа або системи штампів із кутовими точками і контуру криволінійного отвору нескінченної пластинки та розв'язки конкретних технічних контактних задач наведені в [4-6].

Зростаючі вимоги до надійності й довговічності інженерних конструкцій зумовлюють необхідність розв'язання якісно нових задач контактної взаємодії, зокрема, узагальнених контактних для системи двох штампів із кутовими точками при наявності за межами зон контакту тонких підсилювальних ребер змінної жорсткості. Задачу про тиск одного штампа з кутовими точками на частково підсиленій криволінійній отвір нескінченної ізотропної пластинки розглянуто в [7].

Постановка задачі. Система інтегрально-диференціальних рівнянь. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ із криволінійним отвором, контур якого Γ має вигляд правильного N - кутника із закругленими кутами. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат у середній площині пластинки оберемо

таким чином, щоб початок відліку співпадав із центром отвору, а полярна вісь – із віссю абсцис (рис.1).

В отвір пластинки вставлено два абсолютно жорсткі штампи з кутовими точками. Вважаємо, що кривини контурів кожного штампа і пластинки в зонах контакту однакові, а спільна вісь симетрії штампів співпадає з віссю отвору. Гладкий, без тертя, контакт між пластинкою і штампамі на ділянках $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*] \cup [\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$, де α_0^*, β_0^* – полярні кути торців зон контакту, забезпечується двома протилежними силами, які діють уздовж осі Ox . Пластинка без зовнішнього навантаження. За межами зон контакту дві симетричні відносно осі отвору ділянки контуру Γ $[-\beta_1^*; -\alpha_1^*] \cup [\alpha_1^*; \beta_1^*]$ підсилені тонкими пружними ребрами змінної жорсткості на розтяг (стиск).

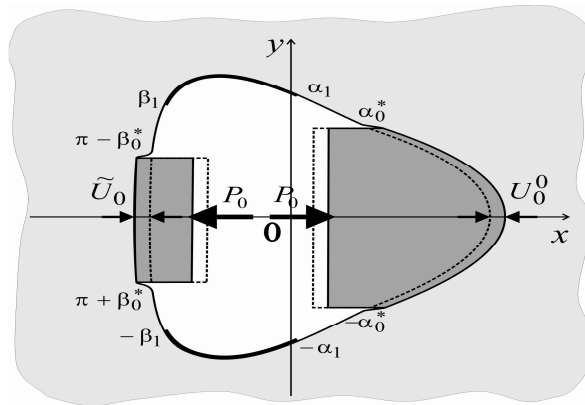


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль $T_{\rho}, S_{\rho\lambda}$ під штампамі і на ділянках підсилення, кільцевих зусиль T_{λ} на контурі Γ , а також дослідженні впливу фізико-геометричних параметрів підсилень на напружений стан пластинки.

Нехай раціональна функція [2]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає середня площа пластинки. Тут R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, вважаємо, що $R_0 = 1$); ε – параметр, який характеризує відхилення контуру Γ отвору від кола; $i = \sqrt{-1}$. При $N = 2$, $|\varepsilon| < 1$ функція (1) реалізує конформне відображення на зовнішність γ зовнішності еліпса в площині z ; при $N = 3$, $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$ – зовнішності трикутника із закругленими кутами.

Граничні умови в зонах контакту пластинки і штампів, якщо немає сил тертя, запишемо у вигляді [4-7]

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = U_0^0; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0], \quad (2)$$

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = \tilde{U}_0; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0],$$

де

$$a(\lambda) = \cos(\lambda) - \varepsilon(N-1) \cdot \cos(N-1)\lambda; \quad b(\lambda) = \sin(\lambda) + \varepsilon(N-1) \cdot \sin(N-1)\lambda;$$

U, V – компоненти вектора зміщення контурних точок; U_0^0, \tilde{U}_0 – поступальні горизонтальні зміщення штампів; $[-\alpha_0; \alpha_0], [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ – образи ділянок $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*], [\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ при відображенні (1).

Моделюючи підсилювальні ребра пружними лініями, позбавленими жорсткості на згин у площині їхньої осі, граничні умови на ділянках підсилення можна записати так [7,8]:

$$T_\rho = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{3}{2}}(\lambda)} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda; \quad (3)$$

$$S_{\rho\lambda} = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_\rho}{\partial \lambda} - \frac{T_\rho (K(\lambda)(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N)\beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1].$$

Тут

$$\Omega(\lambda) = K(\lambda)(1-N) + \alpha(\lambda)N; \quad K(\lambda) = |\omega'(\sigma)|^2 = \alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda);$$

$$\alpha(\lambda) = 1 - \varepsilon(N-1)\cos(N\lambda); \quad \beta(\lambda) = \varepsilon(N-1)\sin(N\lambda);$$

$\sigma = e^{i\lambda}$; $E_0 F(s)$ – змінна жорсткість підсилення на розтяг (стиск); $F(s) = 2h_0 b_0(s)$; $b_0(s)$ – змінна ширина ребра, $2h_0$ – його товщина; s – дуга на контурі Γ ; $[\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]$ – образи ділянок $[\alpha_1^*; \beta_1^*] \cup [-\beta_1^*; -\alpha_1^*]$ при відображенні (1).

Відносне видовження контуру Γ на підставі [7,8] визначимо за формулою

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda = & \frac{1}{2EhK(\lambda)} \left[(1-\nu)K(\lambda)T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(-R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(-R(\lambda, \bar{t}) - R(\lambda, -\bar{t}) + Q(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-\bar{t}}{2} + Q(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda+\bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(Q(\lambda, \bar{t}) - Q(\lambda, -\bar{t}) + R(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-\bar{t}}{2} - R(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda+\bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left(-R(\lambda, \tilde{t} + \pi) - Q(\lambda, \tilde{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right) \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} \right], \quad (4) \end{aligned}$$

де E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; e^{it} – точка на γ ;

$$T_\rho(\lambda) = \begin{cases} T_\rho^0(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{T}_\rho(\lambda), & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ \bar{T}_\rho(\lambda), & \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0(\lambda) = 0, & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda), & \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]; \end{cases} \quad (5)$$

$$R(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t);$$

$$t = t, \quad t \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad t = \tilde{t} + \pi, \quad t \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \quad \tilde{t} \in [-\beta_0; \beta_0]; \quad t = \bar{t}, \quad \bar{t} \in [\alpha_1; \beta_1].$$

Компоненти вектора зміщення контурних точок отвору при заданому навантаженні, відповідно до [4-6], запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 U|_{\Gamma} &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_1 \right]; \\
 V|_{\Gamma} &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_1'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_1'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right], \quad \lambda \in [-\pi; \pi]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Тут уведено позначення

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds; \quad e^{i\theta} = e^{i\lambda} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; \quad ds = \tilde{\rho} d\theta = |\omega'(\sigma)| d\lambda;$$

$$f_j'(\lambda) = \begin{cases} f_j'(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{f}_j'(\lambda), & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ \bar{f}_j'(\lambda), & \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1]; \\ 0, & \lambda \notin [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \quad j = 1, 2; \end{cases} \quad (7)$$

$\lambda = \lambda, \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \lambda = \tilde{\lambda} + \pi, \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]; \lambda = \bar{\lambda}, \bar{\lambda} \in [\alpha_1; \beta_1];$
 ds – елемент дуги; θ – кут між нормаллю до контуру Γ і віссю Ox ; $\tilde{\rho}$ – змінний радіус кривини контуру Γ ; C_1 – стала, яка визначає зміщення контуру Γ як жорсткого цілого.

Величини $f_j', \tilde{f}_j', \bar{f}_j'$ з контактними зусиллями $T_{\rho}^0, S_{\rho\lambda}^0, \tilde{T}_{\rho}, \tilde{S}_{\rho\lambda}, \bar{T}_{\rho}, \bar{S}_{\rho\lambda}$ пов'язані залежностями

$$\begin{aligned}
 T_{\rho}^0 &= \frac{a(\lambda)f_2'(\lambda) - b(\lambda)f_1'(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad S_{\rho\lambda}^0 = \frac{-a(\lambda)f_1'(\lambda) - b(\lambda)f_2'(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \\
 \tilde{T}_{\rho} &= \frac{a(\lambda)\tilde{f}_2'(\lambda) - b(\lambda)\tilde{f}_1'(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \tilde{S}_{\rho\lambda} = \frac{-a(\lambda)\tilde{f}_1'(\lambda) - b(\lambda)\tilde{f}_2'(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]. \quad (8) \\
 \bar{T}_{\rho} &= \frac{a(\lambda)\bar{f}_2'(\lambda) - b(\lambda)\bar{f}_1'(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \bar{S}_{\rho\lambda} = \frac{-a(\lambda)\bar{f}_1'(\lambda) - b(\lambda)\bar{f}_2'(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1].
 \end{aligned}$$

Підставивши (4) – (7) в граничні умови (2), (3) та врахувавши (8), отримаємо систему десяти сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення контактних зусиль $T_{\rho}^0, \tilde{T}_{\rho}, \bar{T}_{\rho}, \bar{S}_{\rho\lambda}$, сталих C^0, \tilde{C} і функцій $f_j', \tilde{f}_j', \bar{f}_j'$ ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
 &\left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \right.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \Big] = C^0;$$

$$a(\lambda) f'_1(\lambda) + b(\lambda) f'_2(\lambda) = 0; \quad T_\rho^0 = \frac{a(\lambda) f'_2(\lambda) - b(\lambda) f'_1(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0];$$

$$\begin{aligned} & \left[(1-\nu) \int_0^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(1-\nu) \int_0^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) d\tilde{t} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} + \bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] = \tilde{C}, \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]; \quad (9) \end{aligned}$$

$$a(\lambda) \tilde{f}'_1(\lambda) + b(\lambda) \tilde{f}'_2(\lambda) = 0; \quad \tilde{T}_\rho = \frac{a(\lambda) \tilde{f}'_2(\lambda) - b(\lambda) \tilde{f}'_1(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0];$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_\rho(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda)}{K^2(\lambda)} \frac{E_0 F(s)}{2E_x h} & \left[(1-\nu) K(\lambda) T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(-R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(-R(\lambda, \bar{t}) - R(\lambda, -\bar{t}) + Q(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - \bar{t}}{2} + Q(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(Q(\lambda, \bar{t}) - Q(\lambda, -\bar{t}) + R(\lambda, \bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - \bar{t}}{2} - R(\lambda, -\bar{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda + \bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left(-R(\lambda, \tilde{t} + \pi) - Q(\lambda, \tilde{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right) \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] = 0; \end{aligned}$$

$$\bar{S}_{\rho\lambda} = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \frac{\partial \bar{T}_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\bar{T}_\rho(K(\lambda)(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N)\beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)};$$

$$\bar{T}_\rho = \frac{a(\lambda) \bar{f}'_2(\lambda) - b(\lambda) \bar{f}'_1(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \bar{S}_{\rho\lambda} = \frac{-a(\lambda) \bar{f}'_1(\lambda) - b(\lambda) \bar{f}'_2(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1] \cup [-\beta_1; -\alpha_1],$$

де позначено $C^0 = 2EhU_0 - C_1$; $\tilde{C} = 2Eh\tilde{U}_0 - C_1$.

Крім системи (9), слід виконувати умови рівноваги кожного із штампів і підсилень [2,8] як жорстких цілих

$$\int_{-\alpha_0^*}^{\alpha_0^*} (T_\rho + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = -P_0; \quad \int_{\pi-\beta_0^*}^{\pi+\beta_0^*} (T_\rho + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = P_0; \quad \int_{\alpha_1^*}^{\beta_1^*} (T_\rho + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = 0, \quad (10)$$

з яких, після певних перетворень, одержимо

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) dt = -P_0; \quad \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(t) dt = P_0; \quad \bar{T}_\rho(\alpha_1) = \bar{T}_\rho(\beta_1) = 0. \quad (11)$$

Перші два співвідношення у (11) служать для визначення сталих C^0 і \tilde{C} , а решта визначають структуру нормальних зусиль на торцях зони підсилення.

Якщо величини $T_{\rho}^0, \tilde{T}_{\rho}, \bar{T}_{\rho}, \bar{S}_{\rho\lambda}$ стануть відомі, то кільцеві зусилля T_{λ} на контурі отвору визначимо за формулою [7,8]

$$T_{\lambda} = \nu T_{\rho} + 2Eh\varepsilon_{\lambda}. \quad (12)$$

Компоненти вектора зміщення контурних точок отвору через функції $f'_j, \tilde{f}'_j, \bar{f}'_j$ ($j = 1, 2$) визначимо на підставі (6).

Співвідношення (9), (11), (12) визначають математичну модель задачі про тиск системи двох жорстких штампів із кутовими точками на частково підсиленій криволінійній контур нескінченної ізотропної пластинки.

Розглянемо граничні випадки цієї задачі:

- якщо $E_0 = 0$ (немає пружного підсилення), то з (9), (11) отримаємо систему рівнянь для задачі про тиск системи двох жорстких штампів із кутовими точками на вільній криволінійній контур нескінченної ізотропної пластинки [5];
- підставивши в (9), (11) $\varepsilon = 0$, знаходимо розв'язок контактної задачі для кругового отвору;
- при $\alpha_0 \rightarrow 0$ або $\beta_0 \rightarrow 0$ штамп із кутовими точками вироджується у клиноподібний і спричиняє на контур таку ж дію, як і зосереджена сила P_0 . У випадку $\alpha_0 \rightarrow 0, \beta_0 \rightarrow 0$ система (9), (11) визначає розв'язок задачі про тиск системи двох протилежних зосереджених сил (клиноподібних штампів) на контур частково підсиленого криволінійного отвору в ізотропній пластинці.

2. Наближений розв'язок задачі. Відшукання точного розв'язку системи (9), (11) пов'язане зі значними математичними труднощами. Для її наближеного розв'язку доцільно використовувати числові методи. Оскільки нормальні контактні зусилля $T_{\rho}^0, \tilde{T}_{\rho}$ на кінцях зон контакту мають кореневу особливість [4-6], а на торцях зон підсилення \bar{T}_{ρ} дорівнюють нулю [8], то дотичні зусилля $\bar{S}_{\rho\lambda}$ на торцях зон підсилення, відповідно до (3), мають кореневу особливість. Це дає змогу реалізувати наближений розв'язок задачі методом механічних квадратур і колокації, запропонованим у [2-8].

Для пластинки з частково підсиленням трикутним отвором ($N = 3, \varepsilon = 0.2$) досліджено вплив на її напружений стан відносної жорсткості підсилювальних ребер змінної жорсткості із згладженими торцями при таких фізико-геометричних параметрах задачі: $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/4; \alpha_1 = \pi/4; \beta_1 = 3\pi/4; h_0/h = 1; b_0/\rho_0 = 0.05$.

Ширину підсилювального ребра вибрали у вигляді

$$b_0(\lambda) = \frac{b_0}{2} \begin{cases} 2, & \text{при } \lambda \in [\alpha'_1; \beta'_1]; \\ 1 + \sin \pi \left[\left(\lambda - \frac{\alpha'_1 + \alpha_1}{2} \right) / (\alpha'_1 - \alpha_1) \right], & \text{при } \lambda \in [\alpha_1; \alpha'_1]; \\ 1 + \sin \pi \left[\left(\lambda - \frac{\beta'_1 + \beta_1}{2} \right) / (\beta'_1 - \beta_1) \right], & \text{при } \lambda \in [\beta'_1; \beta_1], \end{cases} \quad (13)$$

де $[\alpha_1; \alpha'_1]$ і $[\beta'_1; \beta_1]$ – ділянки змінної ширини підсилення.

Результати числового розрахунку. Висновки. На рис.2, 3 зображено епюри розподілу контактних зусиль $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ під штампами та на ділянках підсилення і кільцевих зусиль T_λ на контурі отвору при $\beta'_1 = 2\pi/3$; $\alpha'_1 = \pi/3$.

Аналізуючи одержані результати, дійдемо таких висновків:

- при збільшенні відносної жорсткості підсилювальних ребер спостерігаємо збільшення кільцевих зусиль T_λ у зонах контакту і дотичних зусиль $S_{\rho\lambda}$ на ділянках підсилення, причому останні на торцях цих ділянок дорівнюють нулю;
- кільцеві зусилля T_λ у зонах підсилення зменшуються із збільшенням кривини контуру Γ ;
- нормальні T_ρ і кільцеві T_λ зусилля на торцях зон контакту необмежені, а на торцях зон підсилення приймають обмежених значень;
- жорсткість підсилення практично не впливає на величину нормальних зусиль T_ρ на контурі отвору.

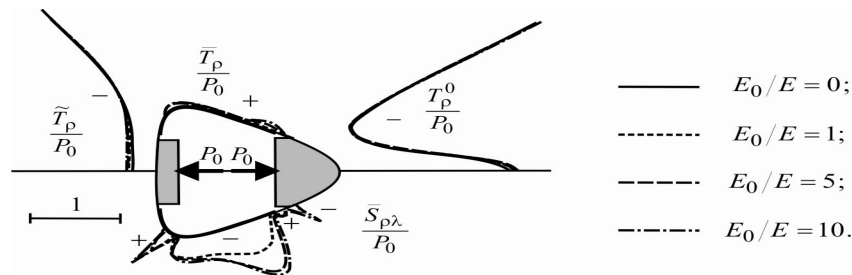


Рис.2. Розподіл зусиль $T_\rho^0, \tilde{T}_\rho, \bar{T}_\rho, \bar{S}_{\rho\lambda}$ на контурі отвору

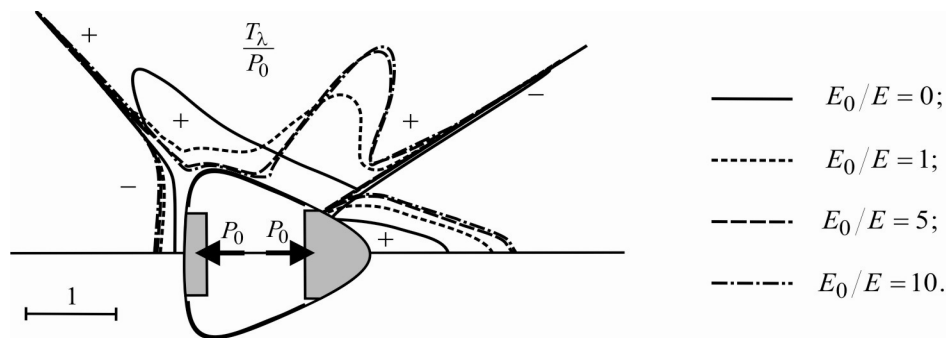


Рис. 3. Розподіл кільцевих зусиль T_λ на контурі отвору

Література

1. Панасюк В.В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В.В. Панасюк, М.Й. Теплий. – Київ: Наук. думка, 1975. – 195 с.
2. Сяський А.А. Проблемы контакта жесткого диска с криволинейным вырезом в бесконечной пластинке / А.А. Сяський. – Ровно, 1993. – 12 с. – Деп. в Укр ІНТЕІ 22.02.93, № 227 – Ук 93.
3. Сяський А.А. О контакте диска с криволинейным отверстием в бесконечной пластинке / А.А. Сяський. – Ровно, 1988. – 10с. – Деп. в УкрНИИНТИ 03.01.1989, №128 – Ук 89.
4. Сяський А.О. Контактна взаємодія двозв'язного жорсткого штампа з кутовими точками і кругового отвору в ортотропній пластинці / А.О.Сяський, В.А.Сяський // Фізика конденсованих високомолекулярних систем: Наукові записки Рівненського державного педагогічного інституту. – Рівне, 1998. – Вип. 4. – С. 99 – 101.

5. Сяський А.О. Двосторонній контакт двозв'язних симетричних гострокутних штампів з криволінійним отвором нескінченної пластинки / А.О. Сяський, В.А. Сяський // Вісник Львівського університету. Серія фіз.-мат. – Львів, 2000. Вип. 57. – С. 166 – 169.
6. Сяський А.О. Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки / А.О. Сяський, В.А. Сяський // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 122 – 125.
7. Трохимчук О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2009. – Т. 14, № 2. – С. 30 – 36.
8. Сяський А. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2004. – Т. 9, № 2. – С. 5–12.

Одержано 25.09.2009р.