Ramsey-teori for grafer

Anders Lindberg Juel
Mikkel Larsen Pedersen

Aalborg Universitet

Institut for Matematiske Fag • Gruppe G4-109 Juni 2008

AALBORG UNIVERSITET

Institut for Matematiske Fag

Titel:
Ramsey-teori for grafer

Projektperiode:
MAT6:
1. februar 2008 – 5. juni 2008

Gruppe:
G4-109

Medlemmer:
Anders Lindberg Juel
Mikkel Larsen Pedersen

Vejleder:
Leif Kjær Jørgensen

Kopier:
8

Sideantal:
83

Synopsis:

Dette speciale omhandler Ramsey-teori for grafer. I den første del af rapporten vil de klassiske Ramsey-tal blive indført, og grænser og eksakte værdier tal vil blive udledt gennem en række af bevisteknikker, som er benyttet i litteraturen.
I anden del af rapporten bliver de generaliserede Ramsey-tal defineret ved at udlede grænser og eksakte værdier for flere forskellige typer af grafer, heriblandt veje, træer, vifte-grafer, bog-grafer m.m. og kombinationer heraf.
Slutteligt vil et resultat relateret til Ramsey-teori vedrørende antallet af punktdisjunkte delgrafer blive bevist.

Indhold

Forord **iv**

English Summary **1**

Indledning **2**

1 Notation og definitioner **3**

1.1 Notation 3

1.2 Definitioner 4

2 Klassiske Ramsey-tal **6**

2.1 Grænser for klassiske Ramsey-tal 6

2.1.1 Stokastiske grafer 16

2.2 Eksakte klassiske Ramsey-tal 19

2.2.1 R(4,5)=25 23

2.3 Grænser for $R(5)$ og formodningen om $R(5) = 43$ . . 25

2.4 Søgning efter (s, t, m)-grafer 29

2.4.1 Tabu-søgning 29

3 Generaliserede Ramsey-tal **32**

3.1 Ramsey-tal der involverer træer og veje 32

3.2 Ramsey-tal for vifte-grafer 37

3.2.1 Ramsey-tal for komplette grafer og parringer . 41

3.3 Paley-grafer 43
3.3.1 Ramsey-tal for komplette grafer minus én kant 47
3.4 Ramsey-tal for bog-grafer 52
3.5 Szemerédi's regularitetslemma 59
3.5.1 Ramsey-tal vha. regularitetslemmaet 63

4 Udvidet Ramsey-teori **66**
4.1 Isomorfe punktdisjunkte delgrafer 66

5 Afrunding **76**

A Uløste problemer indenfor Ramsey-teori **78**
A.1 En formodning af Erdös 78
A.2 Øvre grænse $R(3,7) = 23$ 79

B O-notation **81**

Kilder **81**

Forord

Dette speciale er udarbejdet af gruppe G4-109 på MAT6-semesteret ved Aalborg Universitet i perioden 1. februar til 5. juni 2008.

Litteraturhenvisninger er eksempelvis skrevet som [LZ05], hvor bogstaverne er initialerne af forfatterne, og tallet angiver udgivelsesåret. Ved mere specifikke henvisninger, f.eks. til sider eller kapitler, er dette eksempelvis angivet som [LZ05, s. 7-8]. Citater er skrevet i kursiv. Ved sætninger uden litteraturhenvisning kan beviserne betragtes som vores egne.

Vi takker Leif Kjær Jørgensen for vejledning og faglig støtte.

Aalborg, 5. juni 2008.

Anders Lindberg Juel

Mikkel Larsen Pedersen

English Summary

This thesis concerns different results in Ramsey theory for graphs. Given two graphs G_1 and G_2, Ramsey theory concerns the smallest integer k such that any coloring of the edges of a K^k, in two colors, contains a monochromatic G_i in color i. We write this as $R(G_1, G_2) = k$, and we call this a Ramsey number. Coloring with more than two colors have also been studied, but not in detail.

We give a broad view of Ramsey theory by presenting generel bounds for the classical Ramsey numbers, where G_1 and G_2 are complete graphs, and by deriving some exact Ramsey numbers. Finding exact Ramsey numbers is considered hard, and this will also be discussed.

Some of the first discovered bounds for classical Ramsey numbers are not very precise and have been outpaced by newer results, but they still stand as legendary. One example is Paul Erdös' proof that $R(K^k, K^k) > 2^{\frac{k}{2}}$ for $k \geq 3$, which he proved by showing that the probability that a complete two-edgecolored random graph on $2^{\frac{k}{2}}$ vertices has a monochromatic clique of size at least k, is strictly less than 1.

When G_1 and G_2 are not both complete graphs, $R(G_1, G_2)$ is called a generalized Ramsey number. The graph types books, fans, paths, trees, complete graphs missing an edge and matchings are considered.

Finally we consider the smallest order $f(n, \{H_1, H_2, \ldots, H_k\})$ of a graph G, such that the set of vertices of G can be divided into subsets of the same order, so that these subsets induces at least n vertex-disjoint copies of at least one H_i in G. This field is connected to Ramsey theory as $R(K^k, K^l) = f(1, \{K^k, \overline{K^l}\})$.

Indledning

I artiklen *On a Problem of Formal Logic* 1930, viste Frank Plumton Ramsey (Feb. 22 1903 – Jan. 19 1930) et lemma, der senere er blevet kendt som Ramseys sætning. Selvom Ramsey vidste, at dette lemma var interessant i sig selv, var det anvendelsen af lemmaet indenfor logik, der vakte hans interesse. Det var først senere, da Paul Erdös og George Szekeres i en klassisk artikel, 1935, skrev om Ramseys sætning, at interessen for sætningen for alvor begyndte. Siden denne artikel har Erdös, vha. beviser, formodninger og utallige spørgsmål, spillet en afgørende rolle i udviklingen og populariseringen af det felt indenfor grafteorien, der nu hedder Ramsey-teori. Et citat, der beskriver Ramsey-teori i dens mest generelle form, er:

> *Complete disorder is impossible* –T.S Motzkin.

En udgave af Ramseys sætning siger, at i enhver kantfarvning af en tilstrækkelig stor komplet graf vil man finde en monokromatisk komplet delgraf af en given størrelse. Sætningen kan generaliseres til vilkårlige typer grafer og idag findes mange sætninger for Ramsey-tal, der beskæftiger sig med fx. komplette grafer, træer, veje, kredse, bog-grafer, vifte-grafer og kombinationer af disse. Det mest populære problem indenfor Ramsey-teorien er bestemmelsen af Ramsey-tallene for to komplette grafer også kaldet klassiske Ramsey-tal. I 1955 bestemte Greenwood og Gleason fire klassiske Ramsey-tals eksakte værdier. Siden da er der kun blevet bestemt yderligere fem tal eksakt, hvilket skyldes, at kompleksiteten og udfordringerne har været stigende for de nye problemer. De sidste to årtier er langt de fleste nye grænser for Ramsey-tal blevet fundet ved hjælp af nye og store algoritmiske beregninger. Ramsey-teori vil med sikkerhed være en konstant kilde til udfordringer i fremtiden.

KAPITEL 1

Notation og definitioner

I dette kapitel introduceres den notation og de grundlæggende definitioner, der vil blive brugt igennem rapporten.

1.1 Notation

Med $\mathbb{N}$ betegnes mængden af heltal $\{1, 2, \ldots\}$.

Lad $G = (V, E)$ være en graf. Ved $|G|$ og $|V(G)|$ betegnes antallet af punkter i G også kaldet ordenen af G. Med $||G||$ og $|E(G)|$ betegnes antallet af kanter i G. Med $\overline{G}$ betegnes komplementærgrafen G givet ved punktmængde V og kantmængde $[V]^2 \backslash E$.

Lad $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ være to grafer. Hvis $V_1 \subseteq V_2$ og $E_1 \subseteq E_2$, så er G_1 en delgraf af G_2, skrevet $G_1 \subseteq G_2$. Hvis $G_1 \subseteq G_2$ og G_1 indeholder alle kanter $xy \in E_2$ med $x, y \in V_1$, så kaldes G_1 en induceret delgraf af G_2. Punktmængden V_1 siges også at udspænde G_1 i G_2, skrevet $G_1 = G_2[V_1]$.

Det største heltal k så $K^k \subseteq G$ kaldes kliketallet af G og betegnes $\omega(G)$. Det største heltal k så en induceret delgraf $\overline{K^k} \subseteq G$ kaldes uafhængighedstallet af G og betegnes $\alpha(G)$.

Lad $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ være grafer. Graferne G_1 og G_2 kaldes isomorfe, skrevet $G_1 \simeq G_2$, hvis der eksisterer en bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ med $xy \in E_1 \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E_2$ for alle $x, y \in V_1$.

Lad $G = (V, E)$ være en graf. Valensen $d(v)$ af et punkt v er antallet af kanter $|E(v)|$, der er forbundet til v. Med $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in$

$V\}$ betegnes den minimale valens af G og med $\Delta(G) = \max\{d(v)|v \in V\}$ den maksimale valens af G.

Det kromatiske tal $\chi(G)$ af en graf G er det mindste antal af farver der skal til for at farve punkterne i G, sådan at ingen nabopunkter har samme farve. En graf med kromatisk tal k siges at være en k-kromatisk graf og en graf med kromatisk tal $\leq k$ siges at være k-farvbar.

Ved en k-kantfarvning af en graf G menes en farvning af hver af kanterne i G med en af de givne k farver. Det er dog intet krav, at to nabokanter ikke må have samme farve.

For grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ er $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ og $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Hvis $G_1 \cap G_2 = (\emptyset, \emptyset)$ er G_1 og G_2 disjunkte.

For to grafer G_1 og G_2 er forbindelsesgrafen $G_1 + G_2$ givet ved $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ og $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup (V(G_1) \times V(G_2))$.

Med nG betegnes grafen bestående af n disjunkte G-grafer.

1.2 Definitioner

Definition 1.1 (Klassiske Ramsey-tal)
For $m, n \geq 1$, defineres $R(m, n)$ som det mindste heltal k, så alle grafer af orden k har en delgraf K^m eller en $\overline{K^n}$ som induceret delgraf. Hvis $n = m$, skrives $R(m) = R(m, m)$ og $R(m)$ kaldes et diagonalt Ramsey-tal.

En anden måde at tænke på ovenstående definition på, er ved hjælp af kantfarvning.

Definition 1.2
For $m, n \geq 1$, defineres $R(m, n)$ som det mindste heltal k, sådan at alle to-kantfarvninger af K^k, vil indeholde en K^m i farve 1 eller K^n i farve 2.

I dette speciale vil farve 1 være rød og farve 2 være blå.

Analogt kan man for $l \geq 2$ definere $R(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ som det mindste heltal k, sådan at der for alle l-kantfarvninger af K^k, vil eksistere et $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, sådan at farvningen indeholder mindst én monokromatisk K^{n_i} i farve i.

Mere generelt defineres følgende:

Definition 1.3 (Generaliserede Ramsey-tal)
For grafer $G_1, G_2, \ldots, G_l$, defineres $R(G_1, G_2, \ldots, G_l)$ som det mindste heltal k, sådan at der for alle l-kantfarvninger af K^k, vil eksistere et $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, sådan at farvningen indeholder mindst én monokromatisk G_i i farve i.

Analogt defineres for $l = 2$, at $R(G) = R(G, G)$.

KAPITEL 2

Klassiske Ramsey-tal

I 1955 fandt R. E. Greenwood og A. M. Gleason i [GG55] Ramsey-tallene $R(m,n)$ for $(m,n) = (3,3), (3,4), (3,5), (4,4)$. Siden dengang er der kun blevet fundet yderligere 5 eksakte Ramsey-tal for $m, n \geq 3$. I tabel 2.1 ses en oversigt over de eksakte og de til dato bedst kendte grænser for $R(m,n)$ for $3 \leq m, n \leq 10$. I det følgende afsnit vil der blive udledt grænser for Ramsey-tal og i det efterfølgende afsnit vil nogle af de eksakte Ramsey-tal blive udledt.

m,n	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	[40,43]
4		18	25	[35,41]	[49,61]	[56,84]	[73,115]	[92,149]
5			[43,49]	[58,87]	[80,143]	[101,216]	[125,316]	[143,442]
6				[102,165]	[113,298]	[127,495]	[169,780]	[179,1171]
7					[205,540]	[216,1031]	[233,1713]	[289,2826]
8						[282,1870]	[317,3583]	[—,6090]
9							[565,6588]	[580,12677]
10								[798,23556]

Tabel 2.1: Grænser for Ramsey-tal fra [Rad06, s. 4]

2.1 Grænser for klassiske Ramsey-tal

Følgende sætning forklarer, hvorfor tabel 2.1 kun er vist for $n \geq m$.

Sætning 2.1
Lad $m, n \geq 1$. Da er $R(m,n) = R(n,m)$.

Bevis. Antag at $R(m,n) = k$. Da vil der eksistere en graf G med

$|V(G)| = k-1$ så G ikke har en delgraf K^m eller en $\overline{K^n}$ som induceret delgraf. Da har $\overline{G}$ ikke en induceret $\overline{K^m}$ eller en K^n, så $R(n,m) \geq k = R(m,n)$. Tilsvarende for den modsatte ulighed. □

Sætning 2.2
Lad $m \geq 1$. *Da er* $R(m,1) = 1$.

Bevis. Enhver graf med mindst 1 punkt vil indeholde en K^1. □

Det ses, at sætning 2.2 kan generaliseres til $R(n_1,\dots,1,\dots,n_k) = 1$.

Sætning 2.3
Lad $m \geq 1$. *Da er* $R(m,2) = m$.

Bevis. Betragt en K^{m-1}. Denne graf indeholder ikke en K^m og heller ikke en induceret $\overline{K^2}$, da alle punkter er forbundne. Da må $R(m,2) \geq m$. Betragt nu en vilkårlig graf G med m punkter. Hvis grafen er komplet vil den indeholde en K^m og hvis den ikke er komplet, vil den indeholde en induceret $\overline{K^2}$, da der i så fald eksisterer 2 punkter, der ikke er forbundne. □

Ligesom forrige sætning kan denne sætning også generaliseres. Dette er dog mindre trivielt og beviset gives derfor.

Sætning 2.4
Lad $n_i \geq 2$ *for* $i = 1,\dots,k$. *Da er* $R(n_1,\dots,n_{i-1},2,n_{i+1},\dots,n_k) = R(n_1,\dots,n_{i-1},n_{i+1},\dots,n_k)$.

Bevis. Lad $G = K^r$ med $r = R(n_1,\dots,n_{i-1},n_{i+1},\dots,n_k)$. Der vil eksistere et $j \neq i$, så G indeholder en monokromatisk K^{n_j} i farve j. Farv nu en vilkårlig kant i G med farve i. Dermed er
$R(n_1,\dots,n_{i-1},2,n_{i+1},\dots,n_k) \leq r$.

Lad nu $G' = K^{r-1}$. Der eksisterer en farvning, hvor man undlader at bruge farve i, af G' så der heri ikke findes en monokromatisk K^{n_j} i farve j og dermed er

$$R(n_1,\dots,n_{i-1},2,n_{i+1},\dots,n_k) \geq r.$$

□

Som nævnt i indledning gav Frank P. Ramsey i en artikel om matematisk logik et resultat, hvis specialtilfælde kan skrives i grafteori på følgende måde.

Sætning 2.5 (Ramsey 1930)
Lad $k \geq 2$ og lad $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Ramsey-tallet $R(n_1, \ldots, n_k)$ eksisterer og hvis $n_i \geq 2$ for alle $i \in \{1, \ldots, k\}$, så er

$$R(n_1, \ldots, n_k) \leq 2 - k + \sum_{i=1}^{k} R(\ldots, n_{i-2}, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, n_{i+2} \ldots) \tag{2.1.1}$$

[LZ05, s. 7-8]

Bevis. Lad $k \geq 2$. Beviset for eksistensen følger pr. induktion af $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Der gælder $R(n_1, \ldots, 1, \ldots, n_k) = 1$, ved generalisationen af sætning 2.2. Fra sætning 2.4 haves

$$R(n_1, \ldots, n_{i-1}, 2, n_{i+1}, \ldots, n_k) = R(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_k).$$

Som basistrin, kan man ud fra de to foregående ligninger få eksistensen af

$$N_i = R(\ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1} \ldots), \tag{2.1.2}$$

for $i \in \{1, \ldots, k\}$, hvor $n_i = 2$ eller $n_i = 3$. Som induktionstrin, antag at $R(n_1, \ldots, n_k)$ eksisterer for $n_i \geq 4$. Da eksisterer N_i.

Se på en komplet graf K^N med $N = 2 - k + \sum_{i=1}^{k} N_i$ punkter, der har en vilkårlig k-kantfarvning med farverne $i \in \{1, \ldots, k\}$. For at vise at denne graf opfylder grænsen i (2.1.1), skal det vises, at der eksisterer mindst en farve $i \in \{1, \ldots, k\}$, så K^{n_i} er en monokromatisk delgraf af K^N. Lad v være et punkt i K^N og lad $d_i(v)$ betegne antallet af nabokanter til v farvet med farve i. Der vil gælde, at der eksisterer et i så $d_i(v) \geq N_i$: antag modsætningsvist at $d_i(v) \leq N_i - 1$. Tages summen for $i = 1, \ldots, k$ på begge sider af denne fås

$$N - 1 = \sum_{i=1}^{k} d_i(v) \leq \sum_{i=1}^{k} (N_i - 1) = N + k - 2 - k = N - 2,$$

altså en modstrid. Antag uden tab af generalitet, at for $i = 1$ er $d_1(v) \geq N_1$. Hvis denne K^{N_1}, som fås ud fra N_1 naboer til v, har en komplet monokromatisk delgraf $K^{n_1 - 1}$ af farve 1, vil der sammen med v være en monokromatisk K^{n_1} i K^N. Hvis ikke dette er tilfældet vil der pga. definitionen af N_1 fra (2.1.2), gælde at K^{N_1} indeholder en K^{n_j} i farve j for et $j \geq 2$. □

I [Rad06, s. 5] omtaler S. P. Radziszowski to generelle øvre grænser, der er brugbare for små parametre. Den ene er $R(k) \leq 4R(k, k-2) +$

2. For $k = 6$ og $R(6,4) \leq 41$ er $R(6) \leq 4R(6,4) + 2 \leq 166$, hvilket er én større end den bedst kendte øvre grænse for $R(6)$. Følgende korollar, som giver den anden omtalte grænse, er dog en bedre grænse bortset fra $k = 6$ og $k = 10$ med $k \leq 10$:

Korollar 2.6
Lad $k = 2$ og $n_1, n_2 \geq 2$. Så er

$$R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1).$$

Yderligere vil der gælde skarp ulighed, når begge led på højre siden er lige.
[LZ05, s. 9]

Bevis. Fra sætning 2.5 med $k = 2$ haves direkte

$$R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1).$$

For at vise $R(n_1, n_2) < R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1)$, når begge led på højresiden er lige, antag da modsætningsvist, at

$$N = R(n_1, n_2) = R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1),$$

hvor $R(n_1 - 1, n_2)$ og $R(n_1, n_2 - 1)$ er lige. Der findes en farvning af kanterne i $G = K^{N-1}$ sådan, at den hverken indeholder en rød K^{n_1} eller en blå K^{n_2} og for alle punkter $v \in V(G)$ vil $d_{\text{rød}}(v) \leq R(n_1 - 1, n_2) - 1$ og $d_{\text{blå}}(v) \leq R(n_1, n_2 - 1) - 1$. Men ved antagelsen er

$$d_{\text{rød}}(v) + d_{\text{blå}}(v) = N - 2 = R(n_1 - 1, n_2) - 1 + R(n_1, n_2 - 1) - 1$$

og derfor er $d_{\text{rød}}(v) = R(n_1 - 1, n_2) - 1$ og $d_{\text{blå}}(v) = R(n_1, n_2 - 1) - 1$, for hvilket som helst punkt $v \in V(R)$. Se på antallet af røde kanter i G som er

$$|E_{\text{rød}}(G)| = \frac{1}{2}(N-1)(R(n_1 - 1, n_2) - 1).$$

Da både $N - 1$ og $R(n_1 - 1, n_2) - 1$ er ulige, vil højresiden ikke være et heltal og der opnås en modstrid. □

Følgende sætning giver en øvre grænse for de diagonale Ramsey-tal, idet den for en graf G med et bestemt antal punkter giver en konstruktiv måde at finde en K^r eller en $\overline{K^r}$ som en induceret delgraf.

Sætning 2.7 (Ramsey 1930)
For alle $r \geq 2$ er

$$R(r) \leq 2^{2r-3} \tag{2.1.3}$$

[Die05, s. 252-253]

Bevis. Lad nu $r \geq 2$, $n := 2^{2r-3}$ og lad G være en graf med $|V(G)| \geq n$. Det vises nu, at n er et tilstrækkeligt antal punkter for at opnå en K^r eller en induceret $\overline{K^r}$ i G.
Konstruér en følge $V_1, V_2, \ldots, V_{2r-2} \subseteq V(G)$ og vælg $v_i \in V_i$ for $i = 1, 2, \ldots, 2r-2$ med følgende egenskaber:

1. $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ for $i = 1, 2, \ldots, 2r-2$,
2. $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ for $i = 2, 3, \ldots, 2r-2$ og
3. v_{i-1} er enten nabo med alle punkter i V_i eller ikke nabo til nogen punkter i V_i for $i = 2, 3, \ldots, 2r-2$.

Følgen opbygges induktivt: Lad $V_1 \subseteq V(G)$ med $|V_1| = 2^{2r-2-1}$ og vælg $v_1 \in V_1$. V_1 har de ønskede egenskaber (dog opfyldes 2 og 3 trivielt).

Antag nu at V_{i-1} og v_{i-1} er valgt for $1 < i \leq 2r-2$ så de har de ovenstående egenskaber. En passende delmængde V_i skal nu vælges i $V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$. Da denne opfylder

$$|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-2-(i-1)} - 1,$$

og dermed er af ulige størrelse for $1 < i \leq 2r-2$, vil V_{i-1} have en delmængde V_i med de ønskede egenskaber.

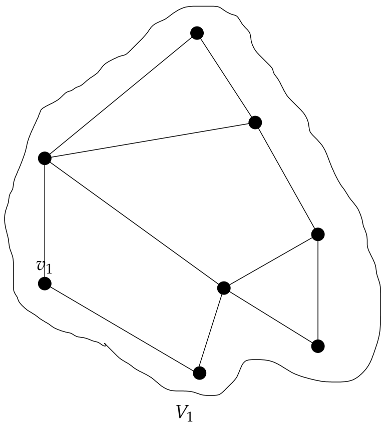
Vælg nu $r-1$ punkter i $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2r-3}\}$, som alle har vist samme opførsel i egenskab 3. De valgte punkter samt v_{2r-2} vil danne punktmængden for en K^r i G hvis de alle, set som v_{i-1}, er nabo til alle punkter i V_i eller danne en induceret delgraf $\overline{K^r}$ i G. $\square$

Eksempel 2.8
Lad os for $r = 3$ benytte bevisets fremgangsmåde til at finde en delgraf K^3 eller induceret delgraf $\overline{K^3}$ i en graf G af orden 2^3.

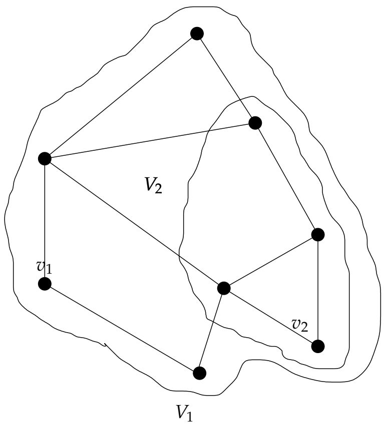
Først vælges $V_1 = V(G)$ og v_1 vælges vilkårligt heri, som det ses på figur 2.1.

V_2 vælges af størrelse 4 i $V_1 \setminus \{v_1\}$, så v_1 ikke er nabo til nogen punkter i V_1 (figur 2.2).

V_3 vælges af orden 2 i $V_2 \setminus \{v_2\}$, så v_2 er nabo til alle punkter i V_3 (figur 2.3).



Figur 2.1: Valg af V_1

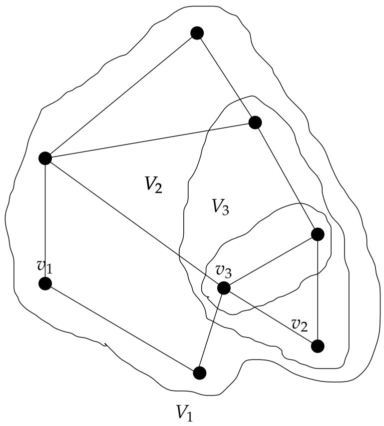


Figur 2.2: Valg af V_2

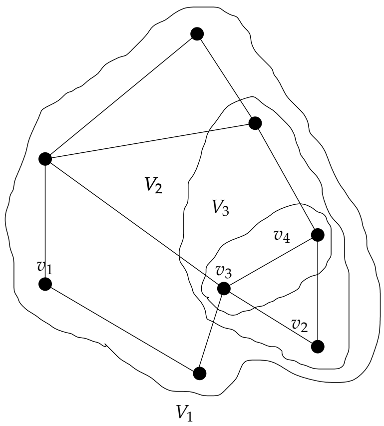
Til slut vælges $V_4 = \{v_4\}$ af størrelse 1 i $V_3 \setminus \{v_3\}$, så v_3 er nabo til v_4 (figur 2.4).

Punkterne v_2 og v_3 viser samme opførsel ved at være nabo til alle punkter i hhv. V_3 og V_4. Da vil v_2, v_3 og v_4 udspænde en K^3, nemlig $G[\{v_2, v_3, v_4\}]$.

Grænserne for de diagonale Ramsey-tal fra ovenstående sætning ses i tabel 2.3 for $r \leq 10$. Næste sætning blev første gang vist af Paul Erdös og Georg Szekeres i artiklen *A combinatorial problem in geometry* i 1935. Terminologien indenfor grafteori har ændret sig lidt siden denne artikel og sætningen ser i en lidt anden form således ud:



Figur 2.3: Valg af V_3



Figur 2.4: Valg af V_4

Sætning 2.9
For heltal $n_1, n_2 \geq 2$ vil $R(n_1, n_2)$ overholde

$$R(n_1, n_2) \leq \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}. \tag{2.1.4}$$

[LZ05, s. 8]

Bevis. Basistrin: For $n_1 = n_2 = 2$ er $R(2, 2) = 2 \leq \binom{2}{1} = 2$ og (2.1.4) er opfyldt.
Induktionstrin: Antag at (2.1.4) gælder for $n'_1 + n'_2 < n_1 + n_2$. Fra

$R(2) \leq 2$	$R(2,3) \leq 3$	$R(2,4) \leq 4$	$R(2,5) \leq 5$
—	$R(3) \leq 6$	$R(3,4) \leq 10$	$R(3,5) \leq 15$
—	—	$R(4) \leq 20$	$R(4,5) \leq 35$
—	—	—	$R(5) \leq 70$

Tabel 2.2: Grænser for Ramsey-tal.

korollar 2.6 haves

$$R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1). \tag{2.1.5}$$

Pga. induktionsantagelsen kan (2.1.4) benyttes på højresiden af (2.1.5) og dermed er

$$\begin{aligned} R(n_1, n_2) &\leq \binom{n_1 + n_2 - 3}{n_1 - 2} + \binom{n_1 + n_2 - 3}{n_1 - 1} \\ &= \frac{(n_1 + n_2 - 3)!}{(n_1 - 2)!(n_2 - 1)!} + \frac{(n_1 + n_2 - 3)!}{(n_1 - 1)!(n_2 - 2)!} \\ &= \frac{(n_1 - 1)(n_1 + n_2 - 3)! + (n_2 - 1)(n_1 + n_2 - 3)!}{(n_1 - 1)!(n_2 - 1)!} \\ &= \frac{(n_1 + n_2 - 2)!}{(n_1 - 1)!(n_2 - 1)!} \\ &= \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}. \end{aligned}$$

□

I tabel 2.2 ses grænserne for $R(n, r)$ for $n, r \leq 5$ udregnet vha. (2.1.4). For diagonale Ramsey-tal gælder følgende grænse udledt af (2.1.4):

$$R(r) \leq \binom{2(r-1)}{r-1} = \frac{(2r-2)!}{[(r-1)!]^2}. \tag{2.1.6}$$

Grænserne for de diagonale Ramsey-tal fra (2.1.6) og (2.1.3) ses sammenholdt i tabel 2.3. Generelt giver ligning (2.1.6) en bedre øvre grænse for de diagonale Ramsey-tal, men fælles for begge grænser er, at de for store r ligger langt fra grænserne i tabel 2.1.

Der findes ikke mange generelle nedre grænser for Ramsey-tal. Med kendskab til $R(m, n-1)$ giver følgende sætning en nedre grænse for $R(m, n)$.

Sætning 2.10
For $m, n \geq 3$ er $R(m, n) \geq R(m, n-1) + 2m - 3$. [BEFS89]

r	$R(r) \leq$	$R(r) \leq$
2	2	2
3	8	6
4	32	20
5	128	70
6	512	252
7	2048	924
8	8192	3432
9	32768	12870
10	131072	48620

Tabel 2.3: I tabellen ses de øvre grænser for Ramsey-tallene udregnet vha. hhv. (2.1.3) og (2.1.6).

Bevis. Beviset foregår i to dele. Først konstrueres en to-kantfarvet graf $K^{R(m,n-1)+2m-4}$ og dernæst vises, at denne hverken indeholder en rød K^m eller en blå K^n.

Lad $r = R(m, n-1)$ og lad $G = K^{r-1}$ være en to-kantfarvet graf uden en rød K^m eller en blå K^{n-1}. Grafen G indeholder en rød K^{m-1}: Antag at det ikke er tilfældet og tilføj et punkt til grafen, som forbindes med røde kanter til alle andre punkter i G. Dette giver en graf på r punkter uden en rød K^m eller en blå K^{n-1}, hvilket er i modstrid med at $r = R(m, n-1)$. Det benyttes blot, at G indeholder en rød K^{m-2}, og punkterne i denne betegnes $u_1, \ldots, u_{m-2}$. Tilføj nu punkterne $v_1, \ldots, v_{m-2}$. Der defineres en to-kantfarvning af denne graf $H = K^{r+m-3}$:

- For $i = 1, \ldots, m-2$ giv kanten $u_i v_i$ farven blå.
- For $i \neq j$ giv kanten $u_i v_j$ farven rød.
- For $i \neq j$ giv kanten $v_i v_j$ farven rød.
- For $x \neq u_i, v_j \in G$ giv kanten $x v_i$ i H den samme farve som kanten $x u_i$ har i G.

H indeholder ingen rød K^m: Antag H indeholder en rød K^m. Denne K^m kan ikke indeholde både v_i og u_i, hvilket giver, at kun $m-2$ punkter fra $\{u_1, \ldots, u_{m-2}, v_1, \ldots, v_{m-2}\}$ kan indgå. Det vil sige, at der eksistererer to punkter x_i og x_j i denne røde K^m, som ifølge farvningen er forbundet med røde kanter til både u_i og v_j i denne K^m.

Hvis v_i er et punkt i den røde K^m, vil det kunne erstattes med u_i for alle $i = 1, \ldots m-2$. Dette er i modstrid med, at grafen G ikke indeholdt en rød K^m.
Da $|H| \geq r$ og H ikke indeholder en rød K^m, vil H nu indeholde en blå K^{n-1}. Yderligere vil denne blå K^{n-1} indeholde præcist et par af punkter (u_i, v_i) og ingen andre u eller v, pga. farvningen af H.
Der tilføjes yderligere $m-1$ punkter $y_1, \ldots, y_{m-1}$ og farvningen af kanterne mellem disse nye punkter og punkter i H defineres som følger:

- For $i \neq j$ give kanten $y_i y_j$ farven rød.
- For $i = 1, \ldots, m-1$ og for alle $z \neq u_j, v_j, y_j$ giv kanten $y_i z$ farven blå.
- For $i \geq j$ giv kanten $u_i y_j$ farven rød og ellers blå.
- For $i < j$ giv kanten $v_i y_j$ farven rød og ellers blå.

Dette giver en to-kantfarvet graf $I = K^{r+2m-4}$. Det mangler nu at blive vist, at denne graf I, hverken indeholder en rød K^m eller en blå K^n.

Antag at I indeholder en rød K^m. Da H ikke indeholder en rød K^m, må der findes punkter y_i, som indgår heri, sammen med nogle u- og v-punkter. Lad y_l og y_k være hhv. y-punkterne med det største og mindste indeks i denne røde K^m. Der kan højst være $l-k+1$ y-punkter i denne K^m. De u_i-punkter, der måtte indgå i denne røde K^m, skal have indeks $i \geq l$, hvilket betyder, at der højst kan benyttes $m-1-l$ u-punkter. Ligeledes skal de v_i, der indgår i en rød K^m opfylde $i < k$, hvilket betyder, at højst $k-1$ v-punkter kan indgå. Det samlede antal u-, v- og y-punkter der kan indgå i denne røde K^m er højst $m-1$, altså en modstrid.

Antag at I indeholder en blå K^n. Da kanterne mellem y-punkterne er farvet røde, vil der præcist indgå et enkelt y i denne blå K^n . Derfor skal den blå K^n i I konstrueres udfra en blå K^{n-1} i H. Da G ikke indeholder en blå K^{n-1}, vil der være en blå kant $u_i v_i$ i denne K^{n-1}. På grund af indeksene i farvningen af I vil enten $u_i y$ eller $v_i y$ være en rød kant, hvilket er i modstrid med, at begge kanter indgår i en blå K^n. □

Som et eksempel på anvendelsen af sætning 2.10, lad $m = 9$ og $n = 10$. Med den nedre grænse for $R(9,9)$ fra tabel 2.1 giver dette

$$R(9,10) \geq R(9,9) + 2 \cdot 9 - 3 \geq 565 + 15 = 580,$$

hvilket er den bedste nedre grænse ifølge tabellen. Dvs. at gør man den nedre grænse for $R(9,9)$ bedre, gør man også den nedre grænse for $R(9,10)$ bedre.

Ved at kombinere sætning 2.10 og korollar 2.6 fåes det at at $R(m) \geq 4m - 6$. Dette er imidlertid ikke nogen god nedre grænse, da den giver at $R(4) \geq 10$, men $R(4) = 18$.

2.1.1 Stokastiske grafer

Dette afsnit er skrevet med inspiration fra [Die05, s. 293-297]. I konstruktionen af stokastiske grafer benyttes en metode, der anvender sandsynligheder. Der konstrueres et sandsynlighedsrum for alle grafer med et fast antal punkter. Herefter vil man kunne udregne sandsynligheden for, at en stokastisk graf har en speciel egenskab. Denne egenskab kunne f.eks. være, om grafen har $\chi(G) > k$ og $g(G) > k$ eller om grafen indeholder en delgraf K^k.

Notation for stokastiske grafer Lad V være en fast mængde med n elementer, $V = \{1, \ldots, n\}$, og lad ζ betegne mængden af alle grafer på V. Siden, der er n punkter i V, vil ζ indeholde $2^{\binom{n}{2}}$ elementer. For at konstruere et sandsynlighedsrum for mængden ζ, genereres en graf $G \in \zeta$ stokastisk ved Erdös-Rényi-modellen:

For hver $e \in [V]^2$ udføres et stokastisk eksperiment, der bestemmer om $e \in G$. Eksperimenterne udføres uafhængigt for hvert $e \in [V]^2$ og sandsynligheden for at e bliver accepteret, som en kant i G er givet ved $P(e \in G) = p, \forall e \in [V]^2$, hvor $0 \leq p \leq 1$.

Hvis G_0 er en fast graf på V med m kanter, er sandsynligheden for, at G_0 bliver genereret lig $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$. Der vil ofte findes flere stokastisk genererede grafer, der er isomorfe med G_0, men i Erdös-Rényi-modellen skelnes der mellem disse grafer. Hvis sandsynligheden for alle grafer $G_i \in \zeta$ er bestemt, da er hele sandsynlighedsrummet for ζ bestemt. Mængden af alle grafer bestående af n punkter og med tilknyttet sandsynlighed p, betegnes $\zeta(n,p)$.

Følgende lemma giver en øvre grænse for sandsynligheden for, at en stokastisk graf G indeholder en K^k.

Lemma 2.11
For alle heltal n, k med $n \geq k \geq 2$ opfylder sandsynligheden for at $G \in \zeta(n, p)$ indeholder en K^k

$$P[\omega(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

[Die05, s. 296]

Bevis. Sandsynligheden for at kliketallet $\omega(G)$ af en graf G opfylder $\omega(G) \geq k$, vil altid være mindre end eller lig sandsynligheden for at $\omega(G) = k$. En mængde $U \subseteq G$ på k punkter holdes fast. Udvælgelsen af U kan gøres på $\binom{n}{k}$ forskellige måder. For hver udvælgelse er sandsynligheden for, at U danner en K^k lig $p^{\binom{k}{2}}$. Heraf følger

$$P[\omega(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

□

Beviset for følgende lemma fås analogt ([Die05, lemma 11.1.2, s. 296]) til ovenstående og udelades derfor.

Lemma 2.12
For alle heltal n, k med $n \geq k \geq 2$ opfylder sandsynligheden for at $G \in \zeta(n, p)$ har en mængde af mindst k uafhængige punkter

$$P[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}}.$$

Lemmaerne 2.11 og 2.12 kan nu benyttes til at finde en nedre grænse for Ramsey-tallet $R(k)$.

Sætning 2.13 (Erdös 1947)
For ethvert heltal $k \geq 3$, fås en nedre grænse for Ramsey-tallet $R(k)$ givet ved

$$R(k) > 2^{k/2}.$$

[Die05, s. 196-197]

Bevis. For alle Ramsey-tal gælder $R(k) \geq k$. For $k = 3$ er $R(3) \geq 3 > 2^{3/2}$ og uligheden er opfyldt. Lad derfor $k \geq 4$, $G \in \zeta(n, \frac{1}{2})$ og antag

$n = 2^{k/2}$. Der ses nu på sandsynligheden

$$P[\omega(G) \geq k] + P[\alpha(G) \geq k].$$

Ideen er nu at vise, at summen af de to sandsynligheder er mindre end én, og dermed at der eksisterer grafer i $\zeta(n, \frac{1}{2})$, der hverken indeholder en K^k eller en $\overline{K^k}$, og dermed $R(k) > n$. Ved at benytte lemmaerne 2.11 og 2.12 med $p = 1/2$ fås

$$\begin{aligned} P[\omega(G) \geq k] + P[\alpha(G) \geq k] &\leq 2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \\ &= 2\binom{n}{k}\left(2^{-1}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Da $k! > 2^k$ for $k \geq 4$ er

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{k!} < \frac{n^k}{2^k} = 2^{\frac{k^2}{2}-k}. \tag{2.1.8}$$

Ved indsættelse af (2.1.8) i (2.1.7) fås

$$\begin{aligned} P[\omega(G) \geq k] + P[\alpha(G) \geq k] &< 2^{1+\frac{k^2}{2}-k-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} \\ &= 2\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \\ &< 1. \end{aligned}$$

□

Udtrykket efter sidste lighedstegn i formel (2.1.7) ønskes at kunne vurderes skarpt mindre end 1. I formel (2.1.8) vurderes binomialkoefficienten fra formel (2.1.7) mindre end $n^k/2^k$. Hvis man søger det største n, så

$$2\frac{n^k}{2^k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} < 1,$$

ser man, at et sådant n skal opfylde at $n < 2^{\frac{k+1}{2}-\frac{1}{k}}$. En kandidat vil i så fald være $n := 2^{\frac{k+1}{2}-\frac{c}{k}}$, hvor $c > 1$. Hvis man vælger $c < k/2$ (hvis $c < 3/2$ er $c < k/2$ for alle $k \geq 3$) er $2^{\frac{k+1}{2}-\frac{c}{k}}$ større end $2^{\frac{k}{2}}$ for

$k \geq 3$. Dermed fåes

$$\begin{aligned} 2\frac{n^k}{2^k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} &= 2 \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}-c}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} \\ &= 2^{1+\frac{k(k-1)}{2}-c-\frac{k(k-1)}{2}} \\ &= 2^{1-c} \\ &< 1, \end{aligned}$$

som ønsket, og sætning 2.13 er en smule forbedret. Tabel 2.4 viser de forbedrede grænser, man kan opnå med det nye n. Dog ligger disse stadig langt fra grænserne i tabel 2.1. Beviset for sætning 2.13 er dog med, idet at det er revolutionerende, at man ved at benytte fuldstændigt tilfældige grafer, stadig er i stand til at udlede informationer om strukturen af disse.

Erdös viste senere (1959), med stokastiske grafer, at der for alle k findes grafer G, der opfylder at $g(G) > k$ og $\chi(G) > k$.

k	$2^{\frac{k}{2}}$	$2^{\frac{k+1}{2}-\frac{c}{k}}, c = 1.001$
3	2.8284	3.1741
4	4	4.756
5	5.6569	6.9634
6	8	10.0782
7	11.3137	14.4901
8	16	20.7476

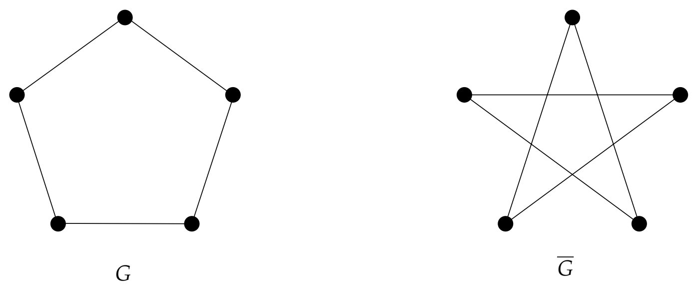
Tabel 2.4: Forbedret nedre grænse ved stokastiske grafer

2.2 Eksakte klassiske Ramsey-tal

I dette afsnit ses der på eksakte klassiske Ramsey-tal, som vises vha. en øvre og nedre grænse, der er lig hinanden. Ofte vil den nedre grænse for et Ramsey-tal $r = R(m, n)$, blive fundet ved at konstruere en graf G med $r - 1$ punkter og vise, at G hverken indeholder en K^m eller en K^n i $\overline{G}$. Det kan i dette afsnit bemærkes, at det er meget få steder, at grænserne udledt i afsnit 2.1 er tilstrækkelig gode til at give ulighederne.

Sætning 2.14
$R(3) = 6$.

Bevis. $\underline{R(3) \leq 6}$:
Lad G være en graf med 6 punkter. Et vilkårligt punkt v_1 i grafen har mindst valens 3 i enten G eller $\overline{G}$. Antag uden tab af generalitet at v_1 har valens mindst 3 i G og se på 3 naboer til v_1 i G. Enten vil mindst et nabopar til v_1 være forbundet med en kant og sammen med v_1 danne en K^3 i G, eller også vil ingen af de tre nabopunkter være forbundet. Sidstnævnte tilfælde giver en uafhængig mængde på 3 punkter i G og dermed en K^3 i $\overline{G}$.
$\underline{R(3) \geq 6}$:
Lad G være en graf med 5 punkter. For at konstruere denne graf uden en K^3 i hverken G eller $\overline{G}$, haves det fra første del af beviset, at hvert punkt i G og ligeledes $\overline{G}$ har valens mindre end 3. Dette er kun opfyldt, hvis G er 2-regulær og figur 2.5 viser den entydige (op til isomorfi) 2-regulære graf med 5 punkter.



Figur 2.5: På figuren ses en graf G med $K^3 \nsubseteq G$ samt $K^3 \nsubseteq \overline{G}$.

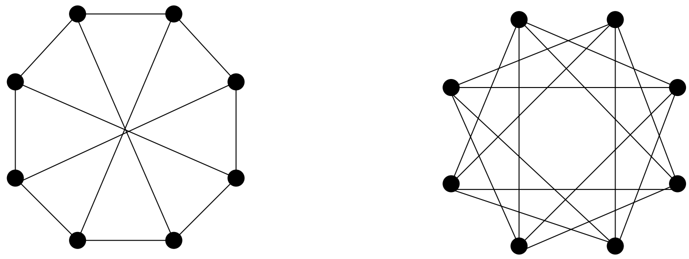
□

I følgende sætning bruges notationen $N_R(v)$ og $N_B(v)$, som defineres som de hhv. røde og blå naboer til et punkt v.

Sætning 2.15
$R(3,4) = 9$.

Bevis. $\underline{R(3,4) \geq 9}$:
Se graferne på figur 2.6 med 8 punkter.

$\underline{R(3,4) \leq 9}$:
Se på en vilkårlig to-kantfarvning af $G = K^9$ og på den røde valens



$K^3 \nsubseteq G$ $\qquad$ $K^4 \nsubseteq \overline{G}$

Figur 2.6: På figuren ses $K^3 \nsubseteq G$ samt $K^4 \nsubseteq \overline{G}$.

af et vilkårligt $v \in G$. Der er tre tilfælde: $d_R(v) \leq 2$, $d_R(v) \geq 4$ og $d_R(v) = 3$.
$d_R(v) \leq 2$: I dette tilfælde har v mindst 6 blå naboer. Da $R(3,3) = 6$ vil der enten være en rød K^3 blandt $N_B(v)$ eller en blå K^3, der sammen med v giver en blå K^4 i G.
$d_R(v) \geq 4$: Se på 4 røde naboer til v. Hvis to naboerne er forbundet med en rød kant, giver de to punkter sammen med v en rød K^3 i G og hvis ikke danner $N_R(v)$ en blå K^4.
$d_R(v) = 3$: I dette tilfælde følger det af de to foregående tilfælde, at den røde delgraf er 3-regulær. Antallet af røde kanter i hele G er dermed

$$|E_R(G)| = 3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 13.5,$$

altså en modstrid, så dette tilfælde kan ikke opnås. $\square$

Den nedre og øvre grænse i sætning 2.15 kan også vises ved brug af ulighederne fra hhv. sætning 2.10 og korollar 2.6.

Følgende sætning viser, at $R(4) = 18$. For at vise den nedre grænse for $R(4)$ vil der, i stil med tidligere, blive givet et eksempel på en graf, der opfylder $\omega(G), \alpha(G) \leq 3$. Istedet for at vise uligheden vha. en figur af en graf, vil den blive repræsenteret ved dens cykliske egenskaber. I forbindelse hermed vil der for en mængde $M = \{1, \ldots, n\}$ blive indført:

Definition 2.16 (Afstandsfunktionen)
Afstandsfunktionen af mængden M er givet ved

$$d(v,w) = min\{|v-w|, n-|v-w|\}$$

for $v, w \in M$. Afstanden $d(v,w)$ kaldes en kordelængde.

Definition 2.17 (Afstandsopdeling)
En afstandsopdeling $\mathcal{D}$ af grafen K^n defineres som

$$\mathcal{D} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\},$$

hvor $V(G_i) = V(K^n)$ og $vw \in E(G_i) \Leftrightarrow d(v,w) = i$.

Det ses, at $E(K^n) = \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E(G_i)$.

En cyklisk graf kan nu defineres.

Definition 2.18 (Cyklisk graf)
En cyklisk graf på n punkter er grafen $G_i \cup G_j \cup \ldots \cup G_k$ for $i, j, \ldots, k \in \{1, \ldots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

En cyklisk graf kan nemmest tegnes ved at placere de n nummererede punkter i en cirkel. Her vil enhver kant, som svarer til en kordelængde, eksistere mellem ethvert par af punkter som ligger i den givne afstand.

Sætning 2.19
$R(4) = 18$.

Bevis. $\underline{R(4) \geq 18}$:
Lad der være givet en mængde $M = \{1, \ldots, 17\}$ der repræsenterer 17 punkter i en graf. Afstandsfunktionen er givet som ovenfor for $n = 17$ og

$$\mathcal{D} = \{G_1, G_2, \ldots, G_8\}.$$

Den cykliske graf G, der består af $G_1 \cup G_2 \cup G_4 \cup G_8$ indeholder ingen K^4. Ligeledes indeholder $\overline{G}$ bestående af $G_3 \cup G_5 \cup G_6 \cup G_7$ ingen K^4, hvilket giver den nedre grænse.

$\underline{R(4) \leq 18}$:
Fra korollar 2.6 med $n_1 = n_2 = 4$ samt sætning 2.15 fås

$$R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18.$$

□

Den øvre grænse i sætning 2.19 kan også vises, som følger:

Sætning 2.20
$R(4) \leq 18$.

Bevis. Lad G være en graf med 18 punkter. Ethvert $v \in V(G)$ vil have mindst 9 naboer i G eller $\overline{G}$. Det kan antages, at v har 9 naboer i G. Ved at benytte $R(3,4) = 9$ på $N(v)$ vil der enten være en K^3 i blandt $N(v)$, der sammen med v giver en K^4 i G eller også vil der være en K^4 i $\overline{G}$ og tilsvarende, hvis man antager, at v har 9 naboer i $\overline{G}$. □

Sætning 2.21
$R(3,5) = 14$.

Bevis. $\underline{R(3,5) \leq 14}$:
Lad G være en graf med $|G| = 14$. Antag at der for et vilkårligt punkt $v \in G$ gælder, at $d_G(v) \geq 5$. Hvis et vilkårligt par af naboer i $N_G(v)$ er forbundet med en kant, giver dette par sammen med v en K^3 i G og hvis ingen af de mindst 5 punkter i $N_G(v)$ er indbyrdes forbundet, vil dette give en K^5 i $\overline{G}$. Antag derfor at $d_G(v) < 5$ og dermed $d_{\overline{G}}(v) \geq 9$ for alle $v \in G$. Anvend nu $R(3,4) = 9$ på $N_{\overline{G}}(v)$. Der vil enten være en K^3 i G eller også vil der være en K^4 i $\overline{G}$, der sammen med v giver en K^5 i $\overline{G}$.
$\underline{R(3,5) \geq 14}$:
Lad G være en graf med 13 punkter. Hvis G skal være en graf uden en K^3 i G eller en K^5 i $\overline{G}$ følger det fra første del af sætningen, at $d_G(v) < 5$ og $d_{\overline{G}}(v) \geq 8$ for alle $v \in G$. Det vil sige, at det eneste mulige tilfælde er, at G er 4-regulær. Den cykliske graf G, der består af $G_2 \cup G_3$, indeholder ingen K^3. Ligeledes indeholder $\overline{G}$ bestående af $G_1 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6$ ingen K^5, hvilket giver den nedre grænse. □

I de 4 forrige sætninger er de eksakte Ramsey-tal som Greenwood og Gleason fandt blevet udledt. I bestræbelserne på at finde andre eksakte Ramsey-tal $R(m,n)$, som det er blevet gjort for $(m,n) = (3,7), (3,8), (3,9)$ og $(4,5)$ må man ty til andre teknikker, for at finde de øvre grænser end dem brugt tidligere i dette afsnit. Blandt disse Ramsey-tal vil vi i det følgende afsnit se på teknikken brugt til at finde det eksakte Ramsey-tal $R(4,5)$.

2.2.1 R(4,5)=25

I dette afsnit ses på det eksakte Ramsey-tal $R(4,5)$, hvor der benyttes følgende notation:

For $s, t, n \geq 1$ er en (s, t)-graf en graf uden en klike af størrelse s og uden en uafhængig mængde af størrelse t. En (s, t, n)-graf er en (s, t)-graf af orden n. Med $\mathcal{R}(s, t)$ og $\mathcal{R}(s, t, n)$ betegnes mængden af hhv. alle (s, t)-grafer og (s, t, n)-grafer. Udfra denne notation er Ramsey-tallet $R(s, t)$ defineret som det mindste antal punkter n sådan at der ikke eksisterer nogen (s, t, n)-graf.

Lad F være en graf. Hvis $v \in V(F)$ og $W \subseteq V(F)$, lad mængden af naboer til v i mængden W, blive betegnet $N_F(v, W) = \{w \in W | vw \in E(F)\}$. For et punkt $x \in G$ defineres de inducerede delgrafer $G_x = G_x(F) = F[N_F(x, V(F))]$ og $H_x = H_x(F) = F[V(F) - N_F(x, V(F)) - \{x\}]$.

I 1995 viste B. D. McKay og S. P. Radziszowski ([MR95]) at $R(4, 5) \leq 25$, hvilket gav det eksakte Ramsey-tal for $R(4, 5)$, idet Kalbfleisch tidligere havde fundet en $(4, 5, 24)$-graf. Beviset for den øvre grænse er baseret på to udregninger, der involverede op til 110 computere ad gangen. Da algoritmerne til disse udregninger er for omfattende til at have med i denne rapport, vil vi kun give hovedtrækkene i beviset for den øvre grænse. Walker havde tidligere vist grænserne $R(4, 5) \leq 29$ og $R(4, 5) \leq 28$ vha. nogle simple lineære programmer udledt ved at tælle delgrafer på en speciel måde. Det var en udvidelse af Walkers metode, der ved at benytte endnu flere delgrafer og anvende eksakt data for $(3, 5)$- og $(4, 4)$-grafer, gjorde det muligt for McKay og Radziszowski at finde grænserne $R(4, 5) \leq 27$ og $R(4, 5) \leq 26$ i 1992. For at sænke grænsen yderligere med én, blev det en del sværere, da effektiviteten af de lineære programmer faldt drastisk, når antallet af punkter blev reduceret. De blev derfor nødt til at forbedre de tidligere algoritmer meget.

En metode, hvorpå man kan konstruere $(4, 5, 25)$-grafer, hvis en sådan findes, er ved følgende observation. Hvis F er en $(4, 5, 25)$-graf og $x \in V(F)$ med valens d, er G_x-grafen en $(3, 5, d)$-graf og H_x-grafen er en $(4, 4, 24 - d)$-graf, hvor $7 \leq d \leq 13$, idet $R(3, 5) = 14$ og $R(4, 4) = 18$. Antallet af grafer for $\mathcal{R}(3, 5, n)$ og $\mathcal{R}(4, 4, n)$ for forskellige n kan ses i tabel 2.5.

For at finde en $(4, 5, 25)$-graf kan man i princippet se på et punkt x og alle kombinationer af kanter mellem en $\mathcal{R}(3, 5, d(x))$-graf og en $\mathcal{R}(4, 4, 24 - d(x))$-graf. Som det fremgår af tabel 2.5, vil der eksistere flere hundrede millioner af sådanne sammensætninger og det var derfor ikke denne fremgangsmåde, der blev brugt. I stedet kon-

n	$\vert\mathcal{R}(3,5,n)\vert$	$\vert\mathcal{R}(4,4,n)\vert$
1	1	1
2	2	2
3	3	4
4	7	9
5	13	24
6	32	84
7	71	362
8	179	2079
9	290	14701
10	313	103706
11	105	546356
12	12	1449166
13	1	1184231
14		130816
15		640
16		2
17		1

Tabel 2.5: Antal $(3,5)$-grafer og $(4,4)$-grafer

struerede McKay og Radziszowski en mængde af $(4,5,24)$-grafer defineret på en sådan måde, at enhver $(4,5,25)$-graf ville være en $(4,5,24)$-graf udvidet med et punkt.

Kort sagt bestod beviset i to algoritmer: En algoritme til konstruktion af en mængde af $(4,5,24)$-grafer og en anden algoritme til udvidelse af disse grafer med et punkt. Der blev brugt omkring 250000 forskellige $(4,5,24)$-grafer og det blev vist, at ingen af disse var inducerede delgrafer af $(4,5,25)$-grafer, hvilket viste $R(4,5) \leq 25$. En del tid blev brugt på at verificere, at algoritmerne fungerede korrekt og konklusionen forblev den samme.

2.3 Grænser for $R(5)$ og formodningen om $R(5) = 43$

I dette afsnit ses der på grænser for Ramsey-tallet $R(5)$. Dette er det mindste diagonale Ramsey-tal for hvilket, man endnu ikke har fundet den eksakte værdi. Grænserne for dette Ramsey-tal er fra tabel 2.1 givet ved $43 \leq R(5) \leq 49$. Den nedre grænse vises ved konstruktion af en graf på 42 punkter, med en to-kantfarvning som hverken indeholder en rød eller blå K^5. Der er stor kompleksitet forbundet med at undersøge om en graf på 43 punkter, altid vil indeholde en rød eller blå K^5. Der er $2^{\binom{43}{2}} = 2^{903}$ to-kantfarvede grafer på 43 punkter. Dette antal af grafer er langt større, end en computer ville kunne undersøge indenfor rimelig tid, hvis den skulle checke alle grafer. Erdös sagde om problemet:

> *Suppose an evil spirit would tell mankind, either you tell me the answer with five people or I will exterminate the human race....it would be best to try to compute it, both by mathematics and with a computer. If he would ask for six people, the best thing to do would be to destroy him before he destroys us, because we couldn't do it for six people. Now, if we could be so clever that we would have a mathematical proof, we could just tell the evil spirit to go to hell.* [She98, s. 86]

For den øvre grænse af Ramsey-tallet $R(5)$ vil ideen bag beviset kun blive omtalt kort, idet beviset for $R(5) \leq 49$ ligesom beviset for $R(4,5) \leq 25$ er baseret på tunge beregninger og involverer omfattende algoritmer. Til slut i afsnittet vil formodningen $R(5) = 43$ blive omtalt.

Nedre grænse for $R(5,5)$

I beviset for den følgende sætning konstrueres en to-kantfarvet graf på 42 punkter uden en monokromatisk delgraf K^5. At grafen netop har denne egenskab, kan være svært at eftervise i hånden, så man vil oftest bruge en computer.

Sætning 2.22
$R(5) \geq 43$. [Exo89, s. 97-98]

Bevis. Målet er at konstruere en to-kantfarvning af grafen K^{42} uden en blå K^5 eller rød K^5. Beviset foregår i 3 trin.
Trin 1: Der ses på en graf $G = K^{43}$ med punktmængde $\{1, \ldots, 43\}$. Brug en cyklisk farvning på G, så grafen får en to-kantfarvning givet ved kordelængderne på følgende måde:

Rød 1 2 7 10 12 13 14 16 18 20 21

Blå 3 4 5 6 8 9 11 15 17 19

Se på punktmængden $\{1, 2, 3, 23, 24\}$. Disse 5 punkter vil danne en rød K^5 i G:

- Kordelængde 1 giver kanterne 1-2, 2-3 og 23-24
- Kordelængde 2 giver 1-3
- Kordelængde 20 giver 3-23 og 24-1
- Kordelængde 21 giver 2-23, 3-24, 23-1 og 24-2.

I alt vil der være 43 røde K^5'er i G givet i form af punktmængderne $\{1+i, 2+i, 3+i, 23+i, 24+i\}$ for $i = 0, \ldots, 42$ og hvert punkt vil høre til 5 af disse K^5'er.
Trin 2: Slet punkt 1 i G, hvilket giver en ikke cyklisk farvning af grafen $H = K^{42}$. Her vil der være 38 røde K^5'er og ingen blå K^5'er.

Trin 3: Ved at ændre farverne fra rød til blå for følgende kanter i grafen,

5-6	14-15	24-25	40-41
6-7	15-16	25-26	41-42
7-8	16-17	31-32	42-43
8-9	17-18	34-35	12-33,

Tabel 2.6: Rød til blå kanter.

opnås en farvning af $I = K^{42}$ uden en monokromatisk K^5. □

Øvre grænse for $R(5,5)$

Med beviset for Ramsey-tallet $R(4,5) = 25$ fandt McKay og Radziszowski samtidig en ny øvre grænse for Ramsey-tallet $R(5,5)$, idet der for en graf G på 50 punkter, og et $v \in G$ altid gælder, at enten $d_G(v) \geq 25$ eller $d_{\overline{G}}(v) \geq 25$ og Ramsey-tallet $R(4,5) = 25$ vil kunne anvendes til at vise $R(5,5) \leq 50$. Denne grænse holdt dog ikke længe, da de allerede samme år fandt en ny øvre grænse givet ved $R(5,5) \leq 49$. Beviset gik ud på vha. computer at finde antallet af

$(5,5,49)$-grafer. For at spare beregninger kan det ses, at de mulige grafer, der ligger i $\mathcal{R}(5,5,49)$, skal være 24-regulære. Det viste sig, at ingen af disse grafer fandtes.

Formodning: $R(5) = 43$

Formodningen $R(5) = 43$ fremsat af McKay, Radziszowski og Exoo i 1997 ([MR97]) bygger på formodningen om, at der findes præcist 656 forskellige $(5,5,42)$-grafer. Disse kan inddeles i 328 grafer samt deres komplementær grafer. Der er blevet foretaget 3 konstruktionsmetoder til at finde forskellige $(5,5,42)$-grafer:

I den første konstruktionsmetode tog McKay og Radziszowski udgangspunkt i nogle få $(5,5,42)$-grafer fundet af Exoo. Fra hver af disse grafer fjernede man en mængde af 3 punkter på alle tænkelige måder og der blev taget udgangspunkt i den tilbageværende $(5,5,39)$-graf. Ved at benytte en variation af algoritmen fra [MR95] kan denne graf udvides med et punkt. Ved at benytte denne algoritme 3 gange og derefter gentage processen for en ny $(5,5,39)$-graf blev der i alt fundet 656 forskellige $(5,5,42)$-grafer. Det blev kontrolleret, at ingen af disse $(5,5,42)$-grafer kunne udvides til en $(5,5,43)$-graf.

I en anden metode tog Exoo udgangspunkt i en stokastisk graf på 30 punkter, hvorfra en $(5,5,30)$-graf kunne konstrueres ved at slette og tilføje kanter i henhold til metoden, der kaldes "simulated annealing rules". Til denne graf tilføjes et punkt samt kanter stokastisk og ved at benytte den omtalte metode, giver dette en $(5,5,31)$-graf. Fortsættes proceduren kan der opnås en $(5,5,42)$-graf. Metoden er meget tidskrævende og man stoppede algoritmen, da der var fundet 5812 $(5,5,42)$-grafer. Blandt alle disse grafer var samtlige 656 grafer fra første metode repræsenteret mindst én gang, mens der ikke blev fundet nogle nye $(5,5,42)$-grafer.

I en tredje metode, der benyttede lignende trinvise struktur som i Exoos metode, men tabu-søgning, som omtales i næste afsnit, istedet for "simulated annealing", blev der konstrueret flere hundrede $(5,5,42)$-grafer. Alle grafer, der blev fundet ved denne metode, var også isomorfe til de kendte 656 $(5,5,42)$-grafer.

Som et eksempel på, at det ville være usandsynligt, at der findes flere forskellige $(5,5,42)$-grafer, antag, at der findes yderligere én

$(5,5,42)$-graf samt dens komplementær graf iblandt $\mathcal{R}(5,5,42)$. Hvis det antages, at der i Exoos metode konstrueres 5812 uniformt stokastiske $(5,5,42)$-grafer, ville sandsynligheden for, at denne nye $(5,5,42)$-graf eller dens komplement ikke bliver fundet være lig

$$\left(\frac{656}{658}\right)^{5812} \approx 2.07 \cdot 10^{-8}.$$

Det er dog ikke sikkert, at Exoo's metode kan finde alle $(5,5,42)$-grafer med præcist samme sandsynlighed og udregningen, der illustrerer, at antallet af $(5,5,42)$-grafer med stor sandsynlighed kunne være 656, og dermed $R(5) = 43$, skal tages med forbehold.

2.4 Søgning efter (s,t,m)-grafer

I bestemmelsen af grænser for Ramsey-tal $R(s,t) = n$ kan en nedre grænse gives ved at finde en (s,t,m)-graf, hvor $m \leq n-1$. Tabusøgning er en metode, der kan benyttes til at finde cykliske (s,t,m)-grafer. En ulempe ved tabu-søgning er, at den kun kan finde cykliske grafer og at dette ikke altid er tilstrækkeligt, hvis man søger efter nogle høje nedre grænser for et Ramsey-tal, hvor s,t er forholdsvis høje. Et eksempel herpå kunne være søgningen efter modeksempler til $43 \leq R(5)$, hvor der efter vores bedste viden ikke findes nogen cykliske $(5,5,42)$-grafer. Fordelen ved metoden er dog, at søgningen efter cykliske (s,t,m)-grafer ofte er en mere effektiv måde at finde modeksempler på, end at kontrollere alle $2^{\binom{m}{2}}$ grafer på denne punktmængde for, om de indeholder en K^s i G eller en K^t i $\overline{G}$.

Notationen, der benyttes for de cykliske grafer, i dette afsnit har været omtalt i afsnit 2.2.

2.4.1 Tabu-søgning

I tabu-søgning (efter [Piw96]) ønskes følgende generelle problem løst: en given funktion f ønskes minimeret over tilstande s i et tilstandsrum S. En funktion $Nb : S \to \mathcal{P}(S)$ defineres så hvis $s' \in Nb(s)$, da siges s og s' at være naboer i tilstandsrummet og søgningen foregår nu som følger:

1. Vælg en starttilstand $s \in S$

2. Lad en mængde $T = \emptyset$ være den såkaldte tabu-liste
3. Mens s ikke opfylder accept-kriteriet:
   (a) Lad $T := T \cup \{s\}$
   (b) Lad $s := \underset{u \in Nb(s) \setminus T}{\operatorname{argmin}} f(u)$ og stop, hvis en sådan ikke findes.

Det kan bemærkes, at der i 3b ikke tages minimum over elementer i tabu-listen.

I konteksten af Ramsey-teori, hvor man ønsker at finde en graf G på n punkter uden en K^k i G eller en K^l i $\overline{G}$ for $k \geq l$, foreslår [Piw96], at man finder en kantopdeling af K^n i $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ kantdisjunkte grafer $G_1, G_2, \ldots, G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, sådan at $V(G_i) = V(K^n)$ for $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ og $E(K^n) = \cup_{i=1}^{r} E(G_i)$. Da defineres

$$S = \left\{ G_I = \bigcup_{i \in I} G_i \middle| I \subseteq \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \text{ og } K^l \not\subseteq \overline{G_I} \right\}.$$

Nabo-funktionen kan nu defineres som

$$Nb(G_I) = \{G_J \in S || (I \cup J) \setminus (I \cap J)| = 1\}.$$

Det er klart, at definitionen af funktionen $f(H)$ for $H \in S$ er antallet af kliker af størrelse k i H og at søgningen skal stoppe, hvis der for en tilstand H gælder, at $f(H) = 0$, da man så har fundet en graf H på n punkter uden K^k i H eller en K^l i $\overline{H}$, altså en (k, l, n)-graf. Hvis flere naboer minimerer f, vælges heriblandt en tilfældig. Starttilstanden vælges til at være K^n, som også er et element i S.

Tabu-søgningen garanterer ikke, at man finder en tilstand, der ikke indeholder en klike af størrelse k, selv hvis en sådan findes. Søgningen finder en tilstand, der giver lokalt minimum af f.

Hvis man ønskede at vise, at $R(4) > 17$, ville man vælge $n = 17$ og $l = k = 4$. Lad nu $G_1, G_2, \ldots, G_8$ være grafer på $\{1, 2, \ldots, n\}$ så $xy \in E(G_i)$ hvis og kun hvis $\min\{|x - y|, n - |x - y|\} = i$. Hvis man ud fra starttilstanden K^{17}, ramte $G_1 \cup G_2 \cup G_4 \cup G_8$ ville man vide, at $R(4) > 17$.

[Piw96] fremlægger i sin artikel de nedre grænser $R(4, 10) \geq 80$, $R(4, 11) \geq 96$, $R(4, 12) \geq 106$, $R(4, 13) \geq 118$, $R(4, 14) \geq 129$ og

$R(5,8) \geq 95$ og $R(3,13) \geq 59$, der alle er fundet vha. tabu-søgning, hvoraf kun sidstnævnte stadig er den bedste grænse blandt disse Ramsey-tal.

KAPITEL 3

Generaliserede Ramsey-tal

I dette kapitel ses på Ramsey-tal $R(G, H)$, hvor mindst én af G og H ikke er komplette grafer. Disse Ramsey-tal kaldes generaliserede Ramsey-tal.

Afsnittet indeholder en bred vifte af forskellige resultater, der gør brug af flere former for grafteori: sætning 3.34 gør brug af Szemerédi's regularitetslemma og sætning 3.19 gør brug af Paley-grafer.

3.1 Ramsey-tal der involverer træer og veje

Sætning 3.1
Lad $s, t \in \mathbb{N}$ og T være et træ af orden t. Så er $R(T, K^s) = (s-1)(t-1)+1$. [Die05, s. 255]

Bevis. Lad G_1 være en graf bestående af $s-1$ disjunkte K^{t-1} delgrafer. Denne graf indeholder ikke nogen kopi af T, da de komplette delgrafer har færre end t punkter og da delgraferne ikke er forbundne. Komplementærmængden til G_1 er en $(s-1)$-delt komplet graf med $t-1$ punkter i hver opdeling, dvs. en K^{s-1}_{t-1}. Grafen $\overline{G_1}$ indeholder ingen K^s og derfor er $R(T, K^s) > (s-1)(t-1)$.

Lad G_2 være en graf med orden $n = (s-1)(t-1)+1$, for hvilken $\overline{G_2}$ ikke indeholder nogen K^s. For $s = 1$ haves $n = 1$ og dermed fåes $K^1 \subseteq G_2 = \overline{G_2}$, hvilket giver en modstrid, så lad $s > 1$. I enhver punktfarvning af G_2 kan der højst være $s-1$ punkter, der har samme farve, fordi der højst er $s-1$ uafhængige punkter i G_2. Da er $\chi(G_2) \geq \left\lceil \frac{n}{s-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{(s-1)(t-1)+1}{s-1} \right\rceil = \left\lceil t-1+\frac{1}{s-1} \right\rceil = t$. Der benyttes nu to korollarer fra [Die05, s. 15 og 115]:

- Enhver graf G har en delgraf H der opfylder $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$
- Hvis T er et træ og H en hvilken som helst graf med $\delta(H) \geq |T| - 1$, så er $T \subseteq H$

Ved det første korollar har G_2 en delgraf H, hvor $\delta(H) \geq \chi(G_2) - 1 \geq t-1$. Fra det andet korollar indeholder H og dermed G_2 et træ T. Da er $R(T, K^s) = (s-1)(t-1)+1$. □

En vej P_n, er en vej af længde n, dvs. $|P_n| = n+1$. Ramsey-tallet $R(P_n, P_m)$ kendes eksakt for alle $n, m \in \mathbb{N}$ og er givet ved den lineære form $R(P_n, P_m) = n + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ for $n \geq m \geq 1$. Det diagonale tilfælde vises i det følgende.

Sætning 3.2
Lad $n \in \mathbb{N}$. Så er $R(P_n) = n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. [LZ05, s. 29-30]

Bevis. For $n = 1$ og $n = 2$ er sætningen opfyldt, så antag at $n \geq 3$ og at sætningen holder for $n-1$.

$\underline{R(P_n) \geq n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor:}$

Lad $l := \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Grafen $G := K^n \cup K^l$ indeholder ingen vej af længde n. I komplementærgrafen $\overline{G} = \overline{K^n} + \overline{K^l}$ vil den længste vej være alternerende mellem $\overline{K^n}$-delen og $\overline{K^l}$-delen og have endepunkter i $\overline{K^n}$-delen. Dermed benytter den $2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = n$ punkter og indeholder dermed ingen P_n. Dette viser $R(P_n) \geq n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

$\underline{R(P_n) \leq n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor:}$

Lad $N = n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Det vises, at der altid er en monokromatisk P_n i en to-kantfarvning af $H := K^N$. Antag, at der ikke er en monokromatisk P_n i H. Ved induktionsantagelsen er der en monokromatisk P_{n-1} i H. Lad denne vej være rød og betegn den $P := P_{n-1}$. Betragt to mængder $V(P)$ og $V(H) \backslash V(P)$ og to disjunkte blå veje

Q_1 og Q_2 bestående af kanter mellem $V(P)$ og $V(H)\backslash V(P)$, sådan at endepunkterne er i $V(H)\backslash V(P)$ og de samtidig ikke indeholder endepunkter fra P. Lad yderligere $|Q_1|, |Q_2| \geq 1$ og $|Q_1| + |Q_2|$ være maksimal. Det vises, at de tre veje overdækker hele K^N, dvs. $V(P) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2) = V(K^N)$:

Det gælder, at $|(V(Q_1) \cup V(Q_2))\backslash V(P)| \geq 2$, idet der ellers ville være højst et punkt uden for $V(P)$ og $|V(P)| \geq N - 1 \geq n + 1$, hvilket er i modstrid med at P er en vej af længde $n - 1$. Da der er n punkter i P og mindst 2 punkter i $(V(Q_1) \cup V(Q_2))\backslash V(P)$ er

$$|V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup V(P)| \geq n + 2. \tag{3.1.1}$$

Antag nu $V(P) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2) \neq V(K^N)$, dvs. der findes et punkt $x \in V(K^N)$ med $x \notin V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup V(P)$.

Da Q_1 og Q_2 er veje der alternerer mellem $V(P)$ og $V(H)\backslash V(P)$ og med endepunkter i $V(H)\backslash V(P)$ vil

$$|V(P) \cap V(Q_i)| = \frac{1}{2}(|V(Q_i)| - 1) = |V(Q_i)\backslash V(P)| - 1.$$

for $i = 1, 2$. Fra (3.1.1) er

$$\begin{aligned}
|V(P)\backslash(V(Q_1) \cup V(Q_2))| &\geq n + 2 - |(V(Q_1) \cup V(Q_2))\backslash V(P)| \\
&> n + 2 - |V(K^N)\backslash V(P)| \\
&= n + 2 - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2.
\end{aligned}$$

Det vil sige, at der er mindst $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$ punkter i P, og dermed mindst $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ indre punkter af P, der ikke er overdækket af $Q_1 \cup Q_2$. Da $n \geq 3$ er der en indre kant uv af P, hvor $u, v \notin V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Kanterne xu og xv kan ikke begge være røde, da de i så fald ville kunne erstatte uv i den røde P og give en længere vej af længde n, altså en modstrid. Antag at xu er blå. Betegn nu endepunkterne for P, Q_1 og Q_2 med hhv. punkterne u_0, v_0, u_1, v_1 og u_2, v_2. En af kanterne u_1u og u_1v vil være blå med samme argument og det samme gælder for u_2u og u_2v, så antag, at u_1v og u_2v er blå. Ved at definere to nye veje: $Q_1' = Q_1 + u_1v + vu_2 + Q_2$ og $Q_2' = \{x\}$ er der blevet lavet to veje der opfylder ovenstående betingelser, men med $|Q_1' \cup Q_2'| > |Q_1 \cup Q_2|$, altså en modstrid med valget af Q_1 og Q_2. Dermed er $V(P) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2) = V(K^N)$.

Kanterne u_0u_1, u_0u_2, v_0v_1, v_0v_2 er alle blå på grund af maksimaliteten af den røde P. Kredsen givet ved

$$C = Q_1 + u_1u_0 + u_0u_2 + Q_2 + v_2v_0 + v_0v_1 \tag{3.1.2}$$

er dermed monokromatisk blå. Kredsen C alternerer mellem mængderne $V(P)$ og $V(K^N)\backslash V(P)$ og da $|V(K^N)\backslash V(P)| = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ vil C have længde $2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Hvis n er ulige har C længde $n+1$, men da indeholder H en blå P_n, altså en modstrid. Lad derfor n være lige og længden af C er dermed n. Kanterne mellem C og $V(H)\backslash V(C)$ er alle røde, idet en blå kant ville give en blå P_n i H. Der er dermed en rød vej, der alternerer mellem C og $V(H)\backslash V(C)$ med begge endepunkter i $V(C)$ og som dermed indeholder $2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 = n+1$ punkter. Dette er i modstrid med, at H ikke indeholder en monokromatisk P_n og $R(P_n) \leq n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. □

Næste sætning giver Rasmsey-tallet for en vej P_{k-1} af længde $k-1$ og en to-delt graf $K_{m,n}$.

Sætning 3.3
For alle $n, m \in \mathbb{N}$ og $k \geq 2$ gælder $R(P_{k-1}, K_{n,m}) \leq n + m + k - 2$. [H8̈9, s. 243-244]

Bevis. Antag modsætningsvist, at $R(P_{k-1}, K_{n,m}) > n+m+k-2$. Da eksisterer en graf på $n+m+k-2$ punkter, som ikke indeholder en vej P_{k-1} eller en $K_{n,m}$ i komplementet. Lad G være en sådan graf med n, m og k valgt sådan, at $|V(G)|$ er minimal.

Påstand 1. *G er sammenhængende.*

Antag modsætningsvist, at G består af to disjunkte delgrafer G_1 og G_2. Da indeholder $\overline{G}$ en K_{n_1,n_2}, hvor $n_1 = |G_1|$ og $n_2 = |G_2|$. Hvis $n_1 \geq n$ og $n_2 \geq m$ ville $\overline{G}$ indeholde en $K_{n,m}$, så $n_1 < n$ eller $n_2 < m$; vi antager det sidste. Da G var minimal vil G_2 indeholde P_{k-1} eller $\overline{K_{n-n_1,m}}$ da G_2 har færre punkter end G. Kun sidstnævnte kan være indeholdt i G_2, da P_{k-1} ikke er i G. De n_1 punkter i G_1 er alle forbundne til alle punkter i G_2 i $\overline{G}$, så $\overline{G}$ har en $K_{n,m}$ som delgraf, hvilket er en modstrid. Dermed er G sammenhængende.

Da G er minimal, er $n+m+k-3 \geq R(P_{k-2}, K_{n,m})$ og G indeholder da en P_{k-2}, da den ikke indeholder en $K_{n,m}$. Lad $P = v_1v_2\cdots v_{k-1}$,

$H = G - \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ og $C_1, C_2, \ldots, C_p$ være komponenter i H. Indeksene på $C_1, C_2, \ldots, C_p$ vælges så $|V(C_i)| \geq |V(C_{i+1})|$ for $i = 1, 2, \ldots, p-1$.

Lad

$$s := \min \left\{ t \;\middle|\; \sum_{i=1}^{t} |V(C_i)| \geq n \right\}$$

og

$$q := \min \{ t | v_t \text{ eller } v_{k-t} \text{ har nabo i } C_i \text{ for } i \leq s \}.$$

Antag uden tab af generalitet, at $v_q \in P$ har nabo i C_r for $r \leq s$. Der gælder, at $q > 1$, for ellers findes en kant mellem ét af P's endepunkter og et punkt $c_i \in C_i$, så $P \cup c_i$ vil give en længere vej end P, hvilket strider mod P's maksimalitet.

Lad

$$\begin{aligned} Q &= \{v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}\} \\ R &= \{v_{k-q+1}, v_{k-q+2}, \ldots, v_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Pr. valg af q, vil ingen punkter i Q og R have naboer i $N := \bigcup_{i=1}^{s} C_i$ og da $C_1, C_2, \ldots, C_s$ er komponenter, vil ingen punkt i N være forbundet med et punkt i $M := \bigcup_{i=s+1}^{p} C_i$. Hvis $|Q| + |R| + |M| \geq m$ vil grafen udspændt af Q, R, M og N indeholde en $K_{n,m}$ i komplementærmængden, da $|N| \geq n$, hvilket giver en modstrid, så $|Q| + |R| + |M| = 2q - 2 + |M| < m$.

Lad

$$\begin{aligned} n' &:= n - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{s} |C_i| = n - (|N| - |C_r|) \\ m' &:= m - 2q + 2 - |M|. \end{aligned}$$

Det ses, at $n' > 0$, da man pr. valg af s har, at $n > |N| - |C_s| \geq |N| - |C_r|$, hvor sidste ulighed er pr. valg af komponenternes indeks. Det er klart, at $|N| + |M| = |G| - |P| = n + m + k - 2 - (k-1) = n + m - 1$, hvorfra det fåes at

$$|C_r| = n + m - 1 - |N| - |M| + |C_r| = n' + m' + 2q - 3.$$

Igen pr. valg af G, kan man se, at $R(P_{2q-2}, K_{n_1,m_1}) \leq |C_r|$. Afslutningsvist skal det nu vises, at modstrid opnåes, hvis C_r indeholder en P_{2q-2} eller hvis $\overline{C_r}$ indeholder en K_{n_1,m_1}.

Mht. det første tilfælde, lad da $S = x_1x_2 \cdots x_{2q-1}$ være en P_{2q-2}. Der findes en vej $T = v_q u_1 u_2 \cdots u_t x_u$ i G, hvor $u_1, u_2, \ldots, u_t \in C_r - V(S)$: v_q har en nabo u_1 i C_r pr. valg af v_q og da C_r er en sammenhængende delgraf, eksisterer der en vej fra u_1 til et punkt u_t som er nabo til et punkt x_u i S. Enten er $|\{x_1, x_2, \ldots, x_u\}| \geq q$ eller også er $|\{x_{u+1}, \ldots, x_{2q-1}\}| \geq q$, da $|S| = 2q - 1$. Antag det første tilfælde. Vejen $x_1x_2 \cdots x_u u_t u_{t-1} \cdots u_1 v_q v_{q+1} \cdots v_{k-1}$ vil have længde mindst $k-1$, da der er mindst q x'er og $k-q$ v'er. Dette giver delgrafen P_{k-1} i G.

Mht. det andet tilfælde, hvis $\overline{C_r}$ indeholder en K_{n_1,m_1}, findes mængder $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}\}$ og $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}\}$, så ingen to punkter i disse mængder er naboer i C_r. Fra tidligere observationer og pr. egenskaber for X og Y ses det nu, at $|X \cup (N - V(C_r))| = n$ og $|R \cup Q \cup Y \cup M| = m$ og ingen to punkter i hver af disse mængder er naboer. Derfor eksisterer en $K_{n,m}$ i $\overline{G}$. □

For alle k og m haves pr. [Par74] en eksakt værdi for $R(P_{k-1}, K_{1,m})$. Disse findes vha. af en større mængde sætninger og lemmaer, f.eks. er $R(P_{k-1}, K_{1,m}) = k + m - 1$ hvis $m \equiv 1 \pmod{k-2}$.

3.2 Ramsey-tal for vifte-grafer

I dette afsnit vil vi se på Ramsey-teori angående vifte-grafer. Før de vigtigste resultater præsenteres, bringes først definitionen på en vifte-graf, samt et resultat af Burr.

Definition 3.4 (Vifte-graf F_l)
En vifte-graf F_l består af l punktdisjunkte K^2, hvori alle punkter er forbundet til ét punkt dvs. $F_l = K^1 + lK^2$. Dette ene punkt kaldes viftens centrum.

Det ses at $F_1 = K^3$ og for $l > 1$, består F_l af l K^3 med præcist ét punkt tilfælles.

Definition 3.5 (Kromatisk minimum $t(G)$)
For en graf G, defineres det kromatiske minimum $t(G)$ som det mindste

antal punkter i enhver farve for alle $\chi(G)$-punktfarvninger af G.

Sætning 3.6
Lad G være en graf. Lad H være en sammenhængende graf af orden n med $n \geq t(G)$. Så gælder $R(G,H) \geq (\chi(G)-1)(n-1)+t(G)$. [Bur81, s. 1]

Bevis. Lad $r := (\chi(G)-1)(n-1)+t(G)$ og betragt en K^{r-1}. Denne graf har en delgraf $B := (\chi(G)-1)K^{n-1} \cup K^{t(G)-1}$; farv dennes kanter blå og alle andre kanter røde og kald den røde delgraf R.

Der er ingen blå H i K^{r-1}, da både K^{n-1} og $K^{t(G)-1}$ har færre end n punkter.

Hvis $t(G) > 1$, udgør de $r-1$ punkter og de røde kanter en $\chi(G)$-delt graf R og $\chi(R) = \chi(G)$ og $t(R) = t(G)-1$, hvorved K^{r-1} ikke kan indeholde en rød G. Hvis $t(G) = 1$, udgør de $r-1$ punkter og de røde kanter en $(\chi(G)-1)$-delt graf R og $\chi(R) = \chi(G)-1$, hvorved K^{r-1} ikke kan indeholde en rød G. Dermed er $R(G,H) \geq r$. $\square$

Det er nu muligt at bevise følgende resultater for vifte-grafer:

Sætning 3.7
Der haves

$$R(F_1, F_n) = \begin{cases} 6, & n = 1 \\ 4n+1, & n \geq 2. \end{cases}$$

[LR96, s. 414]

Bevis. Fra sætning 2.14 vides det at $R(F_1, F_1) = R(3) = 6$, hvilket beviser ovenstående resultat for $n = 1$.

Øvre grænse:

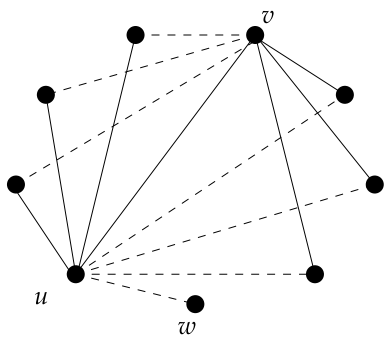
Lad $n \geq 2$. Betragt en vilkårlig kantfarvning af K^{4n+1} og lad R og B være graferne udspændt af hhv. de røde og blå kanter og antag, at R ikke indeholder en F_1 og at B ikke indeholder en F_n. Betragt et vilkårligt punkt u i K^{4n+1} og lad $N_R(u)$ og $N_B(u)$ være naboer til u forbundet med hhv. røde og blå kanter.

Hvis 2 punkter i $N_R(u)$ var forbundet med en rød kant, ville dette give en rød F_1, så $N_R(u)$ indeholder en blå komplet graf og da det er antaget, at der ingen blå F_n findes, er $|N_R(u)| \leq 2n$. Antag, at u har $2n+1$ blå naboer. I alle to-kantfarvninger af den K^{2n+1} der udspændes af u's blå naboer, vil der enten være en rød F_1 eller en blå parring af størrelse n, pr. sætning 3.12. Sidstnævnte giver en F_n med u som viftens centrum så, $|N_B(u)| \leq 2n$.

Da både $|N_R(u)| \leq 2n$ og $|N_B(u)| \leq 2n$ og da u har tilsammen $4n$ røde og blå naboer, vil $|N_R(u)| = |N_B(u)| = 2n$. Desuden ses det, at R og B er $2n$-regulære.

Lad u og v være naboer i R. Da K^{4n+1} ikke indeholder en rød F_1, må $N_R(u)$ og $N_R(v)$ være disjunkte, da en fælles rød nabo vil danne en rød F_1 med u og v.

Man kan desuden udlede, at $N_B(u) \cap N_B(v)$ indeholder et punkt w: v's $2n-1$ røde naboer (antal naboer udover u) skal vælges som $2n-1$ af de punkter, som u er blå nabo med og iblandt v's blå naboer må der derfor være præcist et punkt, som u også er blå nabo med. På figur 3.1 ses et udsnit af K^{4n+1} for $n = 2$. Punktet v's sidste blå nabo kan kun sættes på én måde.



Figur 3.1: Kun én mulighed for v's sidste blå nabo (stiplede kanter er blå)

Hvis w er blå nabo til et punkt n_u i $N_R(v)$, udspænder w, u og n_u en blå trekant. Da $N_R(v)$ udspænder en blå komplet graf, vil der i $N_R(v)$ kunne findes $n-1$ blå trekanter med kun n_u tilfælles. w's blå naboskab med et punkt i $N_R(v)$ skaber derfor en blå F_n, hvilket giver en modstrid. Tilsvarende kan w ikke være blå nabo til et punkt i $N_R(u)$. Dermed har w valens 2 i B, hvilket medfører, at $n = 1$, da B er $2n$-regulær. Dette er i modstrid med, at $n > 1$. Da må $R(F_1, F_n) \leq 4n + 1$.

Nedre grænse:

Da $\chi(F_1) = 3$, $|V(F_n)| = 2n + 1$ og $t(F_1) = 1$ fås pr. sætning 3.6, at

$R(F_1, F_n) \geq (3-1)(2n+1-1)+1 = 4n+1.$ □

Følgende lemma, som giver Ramsey-tal for stjerner, benyttes i næste sætning for vifte-grafer.

Lemma 3.8
Der gælder $R(K_{1,k_1}, K_{1,k_2}) = k_1 + k_2 - \varepsilon$, hvor $\varepsilon = 1$ hvis k_1 og k_2 er lige og $\varepsilon = 0$ ellers.

Bevis. Der ses på de to tilfælde for ε.
Højst et af tallene k_1 og k_2 er lige og $\varepsilon = 0$:
Der ønskes konstrueret en to-kantfarvning af $G = K^{k_1+k_2-1}$ sådan, at hvert punkt $v \in G$ er (k_1-1)-regulær i farven rød og (k_2-1)-regulær i farven blå. Hvis denne graf kan konstrueres, vil den ikke indeholde en rød K_{1,k_1} eller blå K_{1,k_2} og $R(K_{1,k_1}, K_{1,k_2}) \geq k_1 + k_2$. Konstruktionen, der benytter notation for cykliske grafer fra side 22, er som følger:

Hvis k_1 og k_2 begge er ulige kan en rød og blå delgraf være cykliske grafer givet ved

- rød: $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_{\frac{k_1-1}{2}}$
- blå: $G_{\frac{k_1+1}{2}} \cup G_{\frac{k_1+3}{2}} \cup \cdots \cup G_{\frac{k_1+k_2}{2}-1}$.

Hvis k_1 er lige, men k_2 ulige, lad delgraferne være de cykliske grafer givet ved

- rød: $G_{\frac{k_1+k_2-1}{2}} \cup G_{\frac{k_1-2}{2}} \cup G_{\frac{k_1-4}{2}} \cup \cdots \cup G_1$
- blå: $G_{\frac{k_1+k_2-3}{2}} \cup G_{\frac{k_1+k_2-5}{2}} \cup \cdots \cup G_{\frac{k_1}{2}}$.

Disse grafer opfylder ovenstående betingelser.
Lad nu G være en to-kantfarvet graf på $k_1 + k_2$ punkter. Se på et vilkårligt punkt $v \in G$. Dette punkt vil have valens $k_1 + k_2 - 1$, så enten vil v have k_1 røde nabokanter eller k_2 blå nabokanter. Men da indeholder grafen en rød K_{1,k_1} eller en blå K_{1,k_2}, hvilket viser $R(K_{1,k_1}, K_{1,k_2}) \leq k_1 + k_2$.
Både k_1 og k_2 er lige og $\varepsilon = 1$:
Giv $G = K^{k_1+k_2-2}$ en to-kantfarvning, så den er $k_1 - 2$ regulær i farven rød og $k_2 - 1$ regulær i farven blå, ved at anvende den anden konstruktionsmetode i første del af beviset. Denne graf viser

$R(K_{1,k_1}, K_{1,k_2}) \geq k_1 + k_2 - 1$. For at vise $R(K_{1,k_1}, K_{1,k_2}) \leq k_1 + k_2 - 1$, lad G være en to-kantfarvet graf på $k_1 + k_2 - 1$ punkter og antag, at den hverken indeholder en rød K_{1,k_1} eller en blå K_{1,k_2}. Det kan antages, at alle punkter $v \in G$ har præcist $k_1 - 1$ røde naboer og $k_2 - 1$ blå naboer, da uligheden ellers er opfyldt. Da vil antallet af røde kanter være $(k_1 + k_2 - 1)\frac{k_1 - 1}{2}$, som er et ikke-heltal, da både k_1 og k_2 er lige, og der opnås en modstrid. □

Følgende sætning er hovedresultatet for vifte-grafer.

Sætning 3.9
For alle $l \geq 1$, $n \geq 2$ haves

$$4n + 1 \leq R(F_l, F_n) \leq 4n + 4l - 2.$$

[LR96, s. 414]

Bevis. Den nedre grænse for $l = 1$ haves pr. lemma 3.7. For $l > 1$ vil denne grænse også holde, da $R(F_1, F_n) \leq R(F_l, F_n)$. Fra lemma 3.8 haves $R(K_{1,2l+2n-1}) = 2(2l + 2n - 1) =: p$. Da maksimumvalensen i en komplet to-delt graf $K_{1,m}$ er lig m, vil maksimumvalensen i en to-kantfarvet K^p være mindst $2l + 2n - 1$ i enten den røde eller den blå delgraf. Antag, at maksimumvalensen i røde delgraf er mindst $2l + 2n - 1$ og lad v være et punkt heri med valens mindst $2l + 2n - 1$.

Hvis v er centrum i en rød F_l er sætningen bevist. Antag at v ikke er centrum i en rød F_l. Da vil størrelsen af den største røde parring af v's røde naboer være højst $l - 1$, hvilket involverer $2l - 2$ punkter. Dvs. at mindst $(2l + 2n - 1) - (2l - 2) = 2n + 1$ af v's røde naboer udspænder en komplet blå graf K^{2n+1}, hvori en blå F_n findes. □

3.2.1 Ramsey-tal for komplette grafer og parringer

Følgende afsnit er inspireret af argumentet i beviset for sætning 3.7, hvor det skal argumenteres for, at enhver to-kantfarvning af en K^{2n+1} altid vil indeholde en rød K^3 eller en blå n-parring, men at en K^{2n} ikke altid vil opfylde dette, dvs. $R(K^3, nK^2) = 2n + 1$. Vi har i det følgende generaliseret resultatet, ved at studere $R(K^m, nK^2)$ for $m \geq 2$ og $n \geq 1$. I stedet for at samle resultaterne i sætninger har vi valgt at se på flere tilfælde for at vise, hvordan vi har tænkt undervejs. Vi har ladet os inspirere af [BES75] i beviserne for nedre grænser.

For $m = 2$, fås det, at $R(K^2, nK^2) = 2n$: En K^{2n-1} kan farves udelukkende blå, men har for få punkter til en blå n-parring og indeholder ikke en rød K^2. En K^{2n} indeholder en blå n-parring eller en rød K^2.

Lemma 3.10
For $m \geq 2$ og $n \geq 1$ er $R(K^m, nK^2) \leq 2n + m - 2$.

Bevis. Betragt en K^{2n+m-2}. Hvis denne ikke har en blå n-parring, vil den største blå parring have størrelse højst $n - 1$. Parringen involverer da højst $2n - 2$ punkter, så der er mindst m punkter, der ikke har hosliggende kanter, der er med i parringen. Hvis der iblandt disse mindst m punkter er en blå kant, vil parringen kunne gøres større, så de mindst m punkter er alle gensidigt forbundne med røde kanter, så der vil derfor være en rød K^m i K^{2n+m-2}. $\square$

Uligheden i lemma 3.10 synes at være en lighed for nogle værdier af m. For $m = 3$ haves det, at $R(K^3, nK^2) = 2n + 1$: Betragt en K^{2n}. Tag et vilkårligt punkt v og farv alle $2n - 1$ hosliggende kanter røde. Farv alle kanter mellem v's naboer blå. Den røde delgraf er en $K_{1,2n-1}$, så der findes ingen rød K^3 heri og den blå delgraf K^{2n-1} kan ikke indeholde en blå n-parring, da denne skal bruge $2n$ punkter. Dermed er $R(K^3, nK^2) \geq 2n + 1$ og den modsatte ulighed fås fra ovenstående lemma, hvorved lighed opnås. Strategien i den nedre grænse virker umiddelbart kun for $m \leq 3$, da for $m = 4$ vil v have $2n$ naboer, hvorved ovenstående argument ikke holder.

Tilsvarende haves, som nævnt, at $R(K^2, nK^2) = 2n + 2 - 2 = 2n$. Vi vil nedenfor arbejde videre med et bevis for, at en K^{2n+m-3} altid kan to-kantfarves uden monokromatisk rød K^m eller blå nK^2.

Lemma 3.11
$R(K^m, nK^2) \geq 2n + m - 2$

Bevis. Vi beskriver en to-kantfarvning af en K^{2n+m-3}, sådan at denne ikke indeholder en monokromatisk rød K^m eller blå nK^2. Antag at $m \geq 4$, da $m = 2, 3$ er behandlet ovenfor.

Lad G_1 være en komplet rød graf på $m - 2$ punkter og lad G_2 være en komplet blå graf på $2n - 1$ punkter. Lad $G = G_1 + G_2$ og lav forbindelsen med røde kanter.

Der er ingen blå nK^2 i G, da den i så fald skal ligge i G_2, som har for få punkter til dette. Der er ingen rød K^m i G, da en rød K^m skal bruge 2 punkter fra G_2, men disse er forbundet med en blå kant. □

Dermed haves:

Sætning 3.12
$R(K^m, nK^2) = 2n + m - 2$

Pr. [BES75] fås, at $R(kK^m, nK^2) \geq km + n - 1$, men den modsatte ulighed kan ikke opnås. En mere generel grænse er, at $R(kK^m, nK^l) \leq R(m,l) + (k-1)m + (n-1)l$ (pr. [BES75, Lemma 1, s. 88]) for l, m, k, $n \geq 1$. Man kunne fristes til at tro, at $R(kK^m, nK^l) = R(m,l) + (k-1)m + (n-1)l$ for l, m, k, $n \geq 1$, men dette gælder ikke for $m = l = 3$; pr. [BES75, sætning 7, s. 96] er $R(kK^3, nK^3) = 3k + 2n$ og $3k + 2n \neq R(3,3) + (k-1)3 + (n-1)3 = 3k + 3n$.

3.3 Paley-grafer

Paley-grafer hører til i det område, man kalder algebraisk grafteori.

Definition 3.13 (Paley-graf G_q)
Lad q være en primtalspotens, der opfylder at $q \equiv 1 \pmod 4$. En Paley-graf $G(q)$ er en graf på $\mathbb{F}_q$, hvor $xy \in E(G(q))$ hvis og kun hvis $x - y$ er et kvadrat i $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Vi vil i det følgende omtale $a \in \mathbb{F}_q$ som en kvadratisk rest, hvis der findes $b \in \mathbb{F}_q$ så $a = b^2$.

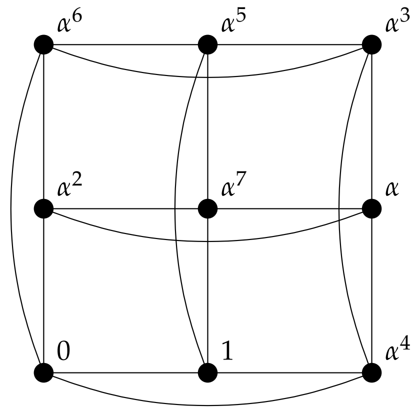
For at konstruere $\mathbb{F}_9$ vælges det irreducible polynomium $f(x) = x^2 + 2x + 2$ over $\mathbb{F}_3[x]$. Det ses for en rod α i f at $\alpha^2 = -2\alpha - 2 = \alpha + 1$. Dermed fås elementerne i tabel 3.1.

Da fås det, at $K = \{1, \alpha + 1, 2, 2\alpha + 2\}$ er mængden af kvadrater i $\mathbb{F}_9 \setminus \{0\}$. Paley-grafen $G(9)$ konstrueres nu ved at forbinde $a, b \in \{0, 1, \alpha, \ldots, \alpha^7\}$, hvis $a - b \in K$. Resultatet ses i figur 3.2.

Det ses, at grafen i figur 2.5 i beviset, for at $R(3) = 6$ er Paley-grafen $G(5)$. Desuden viser det sig, at grafen på 17 punkter med kanter for punkter med afstand 1, 2, 4 og 8, der viser, at $R(4) \geq 17$, er en $G(17)$. Grafen er vist i figur 3.3. I artiklen *A uniqueness theorem for edge-chromatic graphs* af J. G. Kalbfleisch ([Kal67]) bevises følgende resultat: *The edges of the complete graph on 17 vertices may be coloured in*

0
1
α
$\alpha^2 = \alpha + 1$
$\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1$
$\alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 = 2\alpha + 1 + \alpha + 1 = 2$
$\alpha^5 = 2\alpha$
$\alpha^6 = 2\alpha^2 = 2\alpha + 2$
$\alpha^7 = 2\alpha^3 = \alpha + 2$

Tabel 3.1: Elementer i $\mathbb{F}_9$

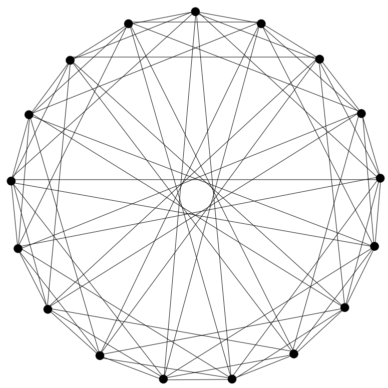


Figur 3.2: Grafen $G(9)$

two colours in such a way that no complete subgraph on 4 vertices has all its edges one colour. In this paper it is proved that this colouring is unique. Det vil sige, at $G(17)$ er den største entydige graf (op til isomorfi) uden en K^4 som delgraf eller en $\overline{K^4}$ som induceret delgraf.

For en ulige primtalspotens q kan det vises, at for afbildningen $\chi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q,\ \chi(x) = x^{(q-1)/2}$, gælder det, at $\chi(x) = 1$ hvis og kun hvis x er en kvadratisk rest.

Sætning 3.14
Lad q være en ulige primtalspotens. For $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ gælder, $\chi(a) = 1$ hvis og kun hvis a er en kvadratisk rest. Desuden er $\chi(a) = -1$ hvis og kun hvis a ikke er en kvadratisk rest. I $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ er $(q-1)/2$ elementer kvadratiske rester og $(q-1)/2$ elementer er ikke kvadratiske rester. [LZ05, sætning 2.4, s. 21]



Figur 3.3: Grafen $G(17)$

Bevis. Første udsagn: Antag, at der findes $b \in \mathbb{F}_q$ så $a = b^2$. Da haves

$$\chi(a) = a^{(q-1)/2} = b^{q-1} = 1,$$

pr. egenskab for legemer og dermed er $\chi(a) = 1$.

Antag, at $\chi(a) = 1$. Lad $q = 2k + 1$ for passende k og lad

$$g(x) = x^{2k-2} + ax^{2k-4} + \ldots + a^{k-2}x^2 + a^{k-1}.$$

Det ses, at $x^{2k} - a^k = (x^2 - a)g(x)$ og dermed

$$\begin{aligned} x^q - x &= (x^{q-1} - a^{(q-1)/2})x + (a^{(q-1)/2} - 1)x \\ &= (x^2 - a)xg(x) + (a^{(q-1)/2} - 1)x. \end{aligned}$$

Hvis $a^{(q-1)/2} = 1$, vil $(x^2 - a)|(x^q - x)$. Polynomiet $x^q - x$ har q rødder i $\mathbb{F}_q$. Polynomierne $x^2 - a$ og $g(x)$ har hhv. højst 2 og $2k - 2$ rødder, og har derfor præcist 2 og $2k - 2$ rødder. Derfor er a en kvadratisk rest.

Andet udsagn: Fra en egenskab for legemer fås det, at

$$(a^{(q-1)/2} + 1)(a^{(q-1)/2} - 1) = 0. \tag{3.3.1}$$

Hvis $a^{(q-1)/2} \neq 1$ vil $a^{(q-1)/2} = -1$, og dermed er a ikke en kvadratisk rest (pr. første udsagn).

Tredje udsagn: Som det er vist opfylder alle elementer i $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ formel (3.3.1). Hver af funktionerne $a^{(q-1)/2} + 1$ og $a^{(q-1)/2} - 1$ har højst $(q-1)/2$ rødder, så de har derfor begge præcist $(q-1)/2$. $\square$

De to nedenstående definitioner beskriver egenskaber for Paley-grafer, som i sætning 3.18 vil blive bevist.

Definition 3.15 (Selvkomplementær graf)
En graf G kaldes selvkomplementær, hvis $G \cong \overline{G}$.

Definition 3.16 (Stærkt regulær graf)
En graf G er en $srg(n, k, \lambda, \mu)$, hvis

1. $|G| = n$
2. *G er k-regulær*
3. *For alle par $u, v \in V(G)$ af punkter,*

$$|N(u) \cap N(v)| = \begin{cases} \lambda, & uv \in E(G), \\ \mu, & uv \notin E(G). \end{cases}$$

Det siges at G er en stærkt regulær graf med parametrene n, k, λ og μ.

Komplementærgrafen til en srg(n, k, λ, μ) er også en stærkt regulær graf:

Sætning 3.17
Hvis G er en $srg(n, k, \lambda, \mu)$, så er $\overline{G}$ en $srg(n, n-k-1, n-2k-2+\mu, n-2k+\lambda)$.

Bevis. Lad $\overline{n}, \overline{k}, \overline{\lambda}$ og $\overline{\mu}$ være parametrene for $\overline{G}$. Det er klart, at $\overline{n} = n$ og $\overline{k} = n - k - 1$.

Lad u og v være naboer i G. Dermed har de λ fælles naboer og der er derfor $k - \lambda - 1$ naboer til u, som ikke er nabo til v. Samme situation gælder for u, og derfor er der $n - 2(k - \lambda - 1) - 2 - \lambda = n - 2k + \lambda = \overline{\mu}$ punkter, som ikke er nabo til hverken u eller v.

Lad u og v være ikke-naboer i G. Dermed har de μ fælles naboer, hvorfor u har $k - \mu$ naboer, som ikke er nabo til v og tilsvarende for v. Dermed er $n - 2(k - \mu) - 2 - \mu = n - 2k - 2 + \mu = \overline{\lambda}$ punkter ikke nabo til hverken u eller v. □

De ovenstående egenskaber for $G(q)$ vil nu blive vist.

Sætning 3.18
Lad q være en primtalspotens, der opfylder at $q \equiv 1 \pmod 4$. Da er $G(q)$ selvkomplementær og $srg(q, (q-1)/2, (q-5)/4, (q-1)/4)$.

Bevis. Først bevises det, at $G(q)$ er selvkomplementær: Definér den bijektive afbildning $\phi : V(G(q)) \to V(G(q))$ ved $\phi(a) = az$ for $z \in \mathbb{F}_q$, som ikke er en kvadratisk rest. Resultatet er vist, hvis det gælder at $xy \in E(G(q))$ hvis og kun hvis $\phi(x)\phi(y) \in [V]^2 \setminus E(G(q)) = E(\overline{G(q)})$. Lad x, y være punkter, som er naboer i $G(q)$. Da haves

$$\chi(\phi(x) - \phi(y)) = \chi(x - y)\chi(z) = -1.$$

Hvis det antages, at $\phi(x) - \phi(y) \notin E(G(q))$, haves at $x - y$ er en kvadratisk rest.

Det bevises nu, at $G(q)$ er srg$(q, (q-1)/2, (q-5)/4, (q-1)/4)$: Fasthold $a \in \mathbb{F}_q$ og betragt $a - b$ for alle $b \in \mathbb{F}_q$, $a \neq b$. Pr. det tredje udsagn i sætning 3.14 vil præcis $(q-1)/2$ af differenserne $a - b$ være kvadratiske rester og valensen af a er derfor $(q-1)/2$.

Lad $uv \in E(G(q))$ og definér automorfien $\psi : V(G(q)) \to V(G(q))$ ved $\psi(x) = (x - u)/(v - u)$. Der gælder, at $\psi(u) = 0$ og $\psi(v) = 1$. Dermed er antallet af fælles naboer for u og v det samme som for 0 og 1 og tilsvarende for fælles naboer for par af punkter, som ikke er naboer.

Vi skal nu finde værdien af λ og μ. Pr. sætning 3.17 vil de tilsvarende parametre i $\overline{G(q)}$ være

$$\overline{\lambda} = q - 2\frac{q-1}{2} - 2 + \mu = \mu - 1,$$
$$\overline{\mu} = q - 2\frac{q-1}{2} + \lambda = \lambda + 1.$$

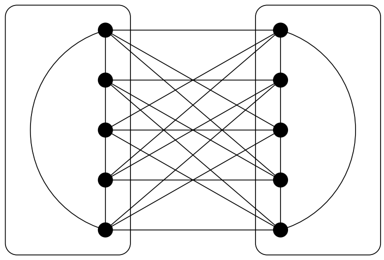
Da $G(q)$ er selvkomplementær, er $\mu = \lambda + 1$. Ifølge [LZ05, Proposition 2.2, side 24] gælder der for (n', k', λ', μ')-grafer at $k'(k' - \lambda' - 1) = \mu'(n' - k' - 1)$, hvorved man i denne situation får $\lambda = (q-5)/4$ og $\mu = (q-1)/4$. □

3.3.1 Ramsey-tal for komplette grafer minus én kant

Hovedresultatet i dette afsnit kan nu bevises.

Sætning 3.19
Lad p være et primtal, der opfylder at $p \equiv 1 \pmod 4$. Hvis $G(p)$ ikke indeholder en $K^n - e$, så er $R(K^{n+1} - e) \geq 2p + 1$. [LS08, s. 89-92]

Bevis. Konstruér grafen $G(p) \cup G(p)$ og lad $V := \{0, 1, \ldots, p-1\}$ og $V' := \{0', 1', \ldots, (p-1)'\}$ hver være punktmængder for én af de to $G(p)$. Grafen $H(p)$ konstrueres ved at tilføje følgende kanter til $G(p) \cup G(p)$: $xx' \in E(H(p))$ for $x \in V$ og $xy', x'y \in E(H(p))$, hvis $xy \notin E(G(p))$. Et eksempel kan ses på figur 3.4.



Figur 3.4: Grafen $H(5)$

Påstand 1. $\overline{H(p)} \subseteq H(p)$

Lad $z \in \mathbb{F}_p$ med $\chi(z) = -1$ og definér den bijektive afbildning $\phi : V \cup V' \to V \cup V'$ ved $\phi(x) = zx$ for $x \in V$ og $\phi(x') = (zx)'$ for $x' \in V'$. Det vises, at hvis uv ikke er en kant i $H(p)$, så vil $\phi(u)\phi(v)$ være kant i $H(p)$. Dermed haves det, at $\overline{H(p)}$ er delgraf i $H(p)$.

Lad $u, v \in V$ og antag, at uv ikke er en kant i $H(p)$. Dermed haves det pr. udregning, at $\chi(\phi(u) - \phi(v)) = 1$ og $\phi(u)\phi(v)$ er en kant i $H(p)$. Pr. symmetri dække dette også tilfældet for $u', v' \in V'$.

Lad nu $u \in V$ og $v' \in V'$ og antag, at uv' ikke er en kant i $H(p)$. Da er uv pr. konstruktion en kant i $G(p)$. Da er $(zu)(zv)$ ikke en kant i $G(p)$, hvorved $(zu)(zv)'$ pr. konstruktion er en kant i $H(p)$. Dermed er $\phi(u)\phi(v')$ en kant i $H(p)$.

Påstand 2. *Hvis $H(p)$ indeholder $K^s - e$, indeholder $G(p)$ en $K^{s-1} - e$.*

Lad punktmængden for $K^s - e$ være $S = \{\overline{u}, \overline{v}, x_1, \ldots, x_m, y'_1, \ldots, y'_n\}$, $s := |S|$, hvor $\overline{u}$ og $\overline{v}$ repræsenterer to forskellige punkter i $K^s - e$, som ikke er naboer og $x_i, y_j \in V$ for $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$. Punktet $\overline{u}$ skrives som u eller u' og tilsvarende for $\overline{v}$. Hvis $\overline{u}, \overline{v} \in V$ eller $\overline{u}, \overline{v} \in V'$ ses det, at $u \neq v$. Hvis $\overline{u} = u \in V$ og $\overline{v} = v' \in V'$ (eller omvendt) er $u \neq v$, da $u = v$ kun hvis v' er valgt som kopien af u i

V'. Dette er umuligt, da $\overline{u}$ og $\overline{v}$ i så fald vil være forbundet med en kant. Tilsvarende ses det, at $x_i \neq y_j$ for alle i og j.

Det kan antages at $x_1 = 0$; punktmængden givet ved $\{\overline{u} - a, \overline{v} - a, x_1 - a, \ldots, x_m - a, y'_1 - a, \ldots, y'_n - a\}$ inducerer også en $K^s - e$.

Lad $X = \{x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $X^- = \{x_2^{-1}, \ldots, x_m^{-1}\}$ og $Y^- = \{y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1}\}$. Vi ser nu på tre tilfælde for $\overline{u}$ og $\overline{v}$ og viser, at $G(p)$ i alle tilfælde indeholder en $K^{s-1} - e$:

1. $\overline{u} = u$ og $\overline{v} = v$ for $u, v \in V$
2. $\overline{u} = u$ og $\overline{v} = v'$ for $u \in V$ og $v' \in V'$
3. $\overline{u} = u'$ og $\overline{v} = v'$ for $u', v' \in V'$

I alle tilfælde betragter man delgrafen induceret af $\{u, v\} \cup X \cup Y$. [LS08] betragter en *proces* i hvert tilfælde. Man omdanner delgrafen induceret af $\{u, v\} \cup X \cup Y$ til delgrafen induceret af $\{u^{-1}, v^{-1}\} \cup X^- \cup Y^-$. For forskellige $a, b \in \mathbb{F}_p$ betragtes følgende ligning:

$$\chi(a^{-1} - b^{-1}) = \chi(b - a)\chi(a^{-1})\chi(b^{-1}) = \chi(a - b)\chi(a)\chi(b). \quad (3.3.2)$$

Kun hvis et ulige antal af faktorerne i det sidste produkt giver 1, vil a^{-1} og b^{-1} være naboer.

For det første tilfælde kan følgende udledes: Punkterne u og v er begge forbundne til alle punkter i $\{y'_1, \ldots, y'_m\}$, så u og v er ikke naboer til nogen punkter i Y; hvis uy_i er en kant i grafen, vil uy'_i ikke eksistere ifølge konstruktionen. Da $x_i y'_j$ er kanter i $E(G(p))$ må $x'_i y_j$ også være kanter heri, og dermed er intet par af punkter fra X og Y forbundne.

Tabel 3.2 viser, for alle relevante kombinationer af punkter, hvilke faktorer i det sidste produkt i (3.3.2), som er negative i det første tilfælde. Tilsvarende tabeller findes til de to resterende tilfælde.

Som det ses er der altid et ulige antal positive faktorer, så dermed inducerer $\{u^{-1}, v^{-1}\} \cup X^- \cup Y^-$ en $K^{s-1} - e$ og påstand 2 er bevist.

Pr. påstand 2 vil $H(p)$ ikke indeholde en $K^{n+1} - e$, da $G(p)$ ikke indeholder en $K^n - e$. Pr. påstand 1 indeholder $\overline{H(p)}$ så heller ikke en $K^{n+1} - e$. Dermed er $R(K^{n+1} - e) \geq 2p + 1$. □

Et lignende resultat, der omhandler forbindelsen af en $\overline{K^2}$ og en generel graf G, præsenteres her.

Punkter	Negative faktorer
x_i^{-1}, x_j^{-1}	–
x_i^{-1}, y_j^{-1}	$\chi(y_j)$, $\chi(x_i - y_j)$
x_i^{-1}, u^{-1}	–
x_i^{-1}, v^{-1}	–
y_i^{-1}, y_j^{-1}	$\chi(y_i)$, $\chi(y_j)$
y_i^{-1}, u^{-1}	$\chi(y_i)$, $\chi(u - y_i)$
y_i^{-1}, v^{-1}	$\chi(y_i)$, $\chi(v - y_i)$

Tabel 3.2: Negative faktorer i (3.3.2) for første tilfælde

Sætning 3.20
Lad G være en graf og lad $|G| \geq 2$. Så er $R(\overline{K^2} + G) \leq 4R(G, \overline{K^2} + G) - 2$. [LS08, s. 93-94]

Bevis. Lad $r = R(G, \overline{K^2} + G)$ og $N := 4r - 2$. Antag at $R(\overline{K^2} + G) > N$, hvilket vil sige, at der eksisterer en to-kantfarvning af grafen $M = K^N$ uden en monokromatisk $\overline{K^2} + G$. Lad $v \in V := V(M)$. Antallet af røde kanter mellem $N_R(v)$ og $N_B(v)$ er givet ved funktionen:

$$f(v) = \sum_{x \in N_R(v)} |N_R(x) \cap N_B(v)|.$$

For et vilkårligt $x \in N_R(v)$, vil dette punkt være forbundet til hvert punkt i $N_B(v)$ med en rød eller blå kant. Derfor vil den blå valens af v være

$$d_B(v) = |N_R(x) \cap N_B(v)| + |N_B(x) \cap N_B(v)|. \tag{3.3.3}$$

Yderligere er $|N_B(x) \cap N_B(v)| \leq r - 1$: Antag modsætningsvis at $|N_B(x) \cap N_B(v)| \geq r$. Pr. definition af r vil der være enten en blå G eller en rød $\overline{K^2} + G$ i grafen $M[N_B(x) \cap N_B(v)]$ og dermed i M, hvoraf sidstnævnte straks giver en modstrid. Så antag, at der er en blå G i blandt $N_B(x) \cap N_B(v)$. Denne blå G vil sammen med x og v danne en blå $\overline{K^2} + G$ i M, hvilket giver en modstrid. Indsættes uligheden i (3.3.3) fås

$$|N_R(x) \cap N_B(v)| = d_B(v) - |N_B(x) \cap N_B(v)| \geq d_B(v) - r + 1.$$

Heraf er

$$f(v) \geq \sum_{x \in N_R(v)} d_B(v) - r + 1 = d_R(v)(d_B(v) - r + 1).$$

Funktionen $f(v)$ er også givet ved summen

$$f(v) = \sum_{y \in N_B(v)} |N_R(y) \cap N_R(v)|.$$

Der vil gælde, at $|N_R(y) \cap N_R(v)| \leq r - 1$: Antag modsætningsvist, at $|N_R(y) \cap N_R(v)| \geq r$. Da vil der være en rød G eller en blå $G + \overline{K^2}$ i M. Idet den røde G sammen med y og v danner en rød $G + \overline{K^2}$ i M haves en modstrid med, at M ikke indholder en monokromatisk $G + \overline{K^2}$. Indsættes uligheden i ovenstående fås

$$f(v) = \sum_{y \in N_B(v)} |N_R(y) \cap N_R(v)| \leq d_B(v)(r-1).$$

Sammenlignes de to ligninger for $f(v)$ ses det, at $d_R(v)(d_B(v) - r + 1) \leq d_B(v)(r-1)$, der sammen med $d_R(v) + d_B(v) = 4r - 3$ giver

$$d_R(v) d_B(v) \leq (4r-3)(r-1). \tag{3.3.4}$$

For $U \subseteq V(M)$, se på summen $\sum_{x,y \in U, x \neq y} |N_B(x) \cap N_B(y)|$, hvori hvert punkt $z \in V(M)$ er talt med $\binom{|N_B(z) \cap U|}{2}$ gange. Da haves

$$\sum_{z \in V} \binom{|N_B(z) \cap U|}{2} \leq \binom{|U|}{2}(r-1). \tag{3.3.5}$$

Med $N = 4r - 2$ vil enten $d_R(v) \geq 2r - 1$ eller $d_B(v) \geq 2r - 1$. Antag derfor uden tab af generalitet, at $d_R(v) \geq 2r - 1$ og se på to tilfælde.
Tilfælde 1: Hvis $d_R(v) = 2r - 1$ er $d_B(v) = 2r - 2$, hvilket medfører

$$d_R(v) d_B(v) = (4r-2)(r-1),$$

der er i modstrid med (3.3.4).
Tilfælde 2: Lad $d_R(v) \geq 2r$. Tag en delmængde $U \subseteq N_R(v)$ med $|U| = 2r$. For et punkt $z \in U$ vil $|N_B(z) \cap U| \geq r$: Antag modsætningsvist, at $|N_R(z) \cap U| \geq r$. Der vil enten være en rød G i $U \setminus \{z\}$, der sammen med z og v danner en $\overline{K^2} + G$ i M, eller der vil være en blå $\overline{K^2} + G$ i M, altså en modstrid. For hvert $z \in V \backslash U$ vil der gælde, at $|N_B(z) \cap U| \geq r + 1$, med samme argument. Venstresiden af

(3.3.5) giver nu

$$\begin{aligned}\sum_{z\in V}\binom{|N_B(z)\cap U|}{2} &= \sum_{z\in U}\binom{|N_B(z)\cap U|}{2} + \sum_{z\in V\setminus U}\binom{|N_B(z)\cap U|}{2}\\ &\geq \sum_{z\in U}\binom{r}{2} + \sum_{z\in V\setminus U}\binom{r+1}{2}\\ &= 2r\frac{r(r-1)}{2} + (2r-2)\frac{(r+1)r}{2}\\ &= r(r-1)(2r+1).\end{aligned}$$

Højresiden af (3.3.5) giver derimod

$$\begin{aligned}\binom{|U|}{2}(r-1) &= \binom{2r}{2}(r-1)\\ &= \frac{2r(2r-1)}{2}(r-1)\\ &= r(2r-1)(r-1),\end{aligned}$$

altså en modstrid. □

Som anvendelse af sætningen ses det at, hvis $G = K^{n-2}$ for $n \geq 4$ fåes $R(K^n - e) \leq 4R(K^{n-2}, K^n - e) - 2$.

3.4 Ramsey-tal for bog-grafer

En bog-graf med n sider, B_n, er grafen bestående af n trekanter der deler præcis én fælles kant. Den fælles kant kaldes basisen og den matematiske betegnelse for bog-grafen er $B_n = K_1 + K_{1,n} = K_2 + nK_1$.

I dette afsnit vil de eksakte Ramsey-tal for $R(B_1, B_n)$ blive udledt og for det mere generelle tilfælde $R(B_m, B_n)$ vil der blive udledt en øvre grænse. Denne grænse kan for små Ramsey-tal for bog-grafer benyttes til at finde de eksakte Ramsey-tal, idet man kan konstruere stærkt regulære grafer, der giver høje nedre grænser.

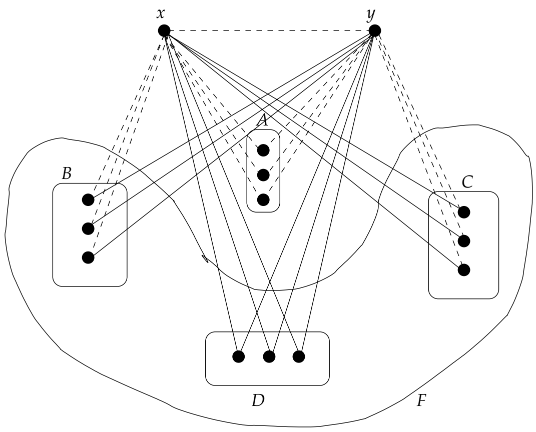
I det følgende bevis benyttes notationen $|A_B(u)|$, der indføres som antallet af blå nabokanter fra punktet u til mængden A, dvs. $A_B(u) = N_B(u) \cap A$.

Sætning 3.21
For alle $n > 1$ er $R(B_1, B_n) = 2n + 3$. [RS78, s. 81-82]

Bevis. $\underline{R(B_1, B_n) \geq 2n+3}$:
Lad $G = K^{2n+2}$ være opdelt i en rød og en blå delgraf. Den røde delgraf givet ved $G_1 = K_{n+1,n+1}$, indeholder ingen rød $B_1 = K^3$, da den er to-delt. Den blå delgraf af G vil da være $G_2 = 2K^{n+1}$, som ikke indeholder nogen B_n, da B_n er en sammenhængende graf på $n+2$ punkter.
$\underline{R(B_1, B_n) \leq 2n+3}$:
Lad G være en vilkårlig to-kantfarvet graf på $2n+3$ punkter og lad $n > 1$. Det antages, at G hverken indeholder en rød B_1 eller en blå B_n og det vises, at denne antagelse fører til en modstrid.

For et vilkårligt punkt $x \in G$ er $|N_B(x)| \geq n+1$: Antag modsætningsvist, at $|N_R(x)| \geq n+2$. Idet der ikke findes en rød B_1 i G, giver dette en blå K^{n+2} i G blandt $N_R(x)$. Men $B_n \subseteq K^{n+2}$, altså en modstrid.

Lad $x \in G$ og lad $xy \in E(G)$ være en blå kant i farvningen af G. For punkterne x, y defineres mængderne $A = N_B(x) \cap N_B(y)$, $B = N_B(x) \cap N_R(y)$, $C = N_R(x) \cap N_B(y)$ og $D = N_R(x) \cap N_R(y)$. Definer yderligere $F = B \cup C \cup D$. Da xy er en blå kant, er $|A| \leq n-1$, idet G ikke indeholder en blå B_n og dermed er $|F| \geq n+2$. Der kan ikke være røde kanter i delgraferne B, C og D, idet G ikke indeholder en rød B_1, se figur 3.5.



Figur 3.5: En skitse af grafen G, bestående af punkterne x, y og mængderne A, B, C og D. Stiplede kanter er blå.

Yderligere kan der ikke gå røde kanter mellem B og D, da det sammen med farvningen fra y vil give en rød B_1 i G. Med samme argument er der ingen røde kanter mellem C og D i farvningen af G, men der kan dog godt findes røde kanter mellem B og C. Der ses nu på 3 tilfælde for størrelsen af D og det vises, at det i hvert tilfælde vil føre til en modstrid med antagelserne.

Tilfælde 1: $|D| \geq 2$. Lad $u, v \in D$. Kanten uv er blå og begge punkter er forbundet med blå kanter til alle punkterne i både B, C og D selv. Da $|F| \geq n+2$, vil uv danne basisen for en blå B_n i G, altså en modstrid.

Tilfælde 2: $|D| = 0$. Ingen af mængderne A, B og C er tomme: Hvis enten B eller C er tom, vil F indeholde en blå K^{n+2}, altså en modstrid. Hvis A er tom, vil der være præcist $2n+1$ elementer i F og dermed mindst $n+1$ elementer i enten B eller C. Antag uden tab af generalitet, at der er mindst $n+1$ elementer B. Da B inducerer en komplet blå delgraf, giver den sammen med x en blå K^{n+2} i G, altså en modstrid.

Lad nu $u \in B$. Ved antagelsen om, at G ikke indeholder en blå B_n må $|N_B(x) \cap N_B(u)| \leq n-1$ og dermed er

$$|B| - 1 + |A_B(u)| \leq n - 1. \tag{3.4.1}$$

På lignende vis for $v \in C$ kan det konkluderes, at $|N_B(y) \cap N_B(v)| \leq n-1$ og dermed

$$|C| - 1 + |A_B(v)| \leq n - 1. \tag{3.4.2}$$

Idet $|A| + |B| + |C| = 2n+1$ fås ved addition af ulighederne i (3.4.1) og (3.4.2) at

$$|A_B(u)| + |A_B(v)| \leq |A| - 1. \tag{3.4.3}$$

Dermed er $A_R(u) \cap A_R(v) \neq \emptyset$ og da G ikke indeholder en rød B_1, vil uv-kanten nødvendigvis være blå i en farvning af G. Da $u \in B$ og $v \in C$ er valgt vilkårligt giver dette, at B og C er forbundet med blå uv-kanter for alle $u \in B$ og $v \in C$ og dermed er der en blå K^{n+2} i G, altså en modstrid.

Tilfælde 3: $|D| = 1$. Lad $D = \{z\}$. Ingen af mængderne A, B og C er tomme: Hvis B er tom, vil C sammen med D danne F, som er en komplet blå graf på mindst $n+2$ punkter, som dermed indeholder en blå B_n. Med samme argument kan C ikke være tom. Hvis A er tom vil F bestå af præcist $2n+1$ punkter. Dvs. der er mindst n punkter i enten B eller C. Antag uden tab af generalitet, at der er mindst n punkter i B. Med en basis som ikke er xz, vil $B \cup \{x\} \cup \{z\}$ indeholde en blå B_n, altså en modstrid.

Da xy er en vilkårlig blå kant i $E(G)$, kan det fra de foregående tilfælde antages, at for alle blå kanter $st \in E(G)$ er $|N_R(s) \cap N_R(t)| = 1$. Lad $u \in B$ og $v \in C$. Ved antagelsen må $|N_R(x) \cap N_R(u)| = 1$ og $|N_R(y) \cap N_R(v)| = 1$ og det følger heraf, at de røde kanter i G, der går mellem B og C, danner en parring, hvilket medfører $|B| = |C|$. Punktet u vil have præcist én rød nabokant til mængden C og resten blå. Da er $|N_B(u) \cap N_B(z)| = |B| + |C| - 2$. Da $|F| \geq n + 2$ er $|N_B(u) \cap N_B(z)| \geq n - 1$.

Da G ikke indeholder en blå B_n, er $|B| = |C| = (n+1)/2$ og $|A| = n - 1$. Hvis n er lige fås en modstrid, så antag n er ulige. Da x er valgt vilkårligt, vil den røde delgraf i G være $((n+1)/2 + 1)$-regulær. Da $|F_B(u) \cap F_B(z)| = |B| + |C| - 2 = n - 1$, vil $A_B(u) \subseteq A_R(z)$: I modsat fald ville $|A_B(u) \cap A_B(z)| \neq \emptyset$ og der vil være en blå B_n i G, altså en modstrid. Med samme argument for $v \in C$ er $A_B(v) \subseteq A_R(z)$.

Lad uv være en rød kant i G. Da G ikke indeholder en rød B_1 er $A_R(u) \cap A_R(v) = \emptyset$ og dermed $A_B(u) \cup A_B(v) = A$. Hermed vil z være forbundet med røde kanter til hele A. Dette giver $|N_R(z)| = |A| + 2 = n + 1$. På grund af regulariteten af den røde delgraf i G haves $n + 1 = (n+1)/2 + 1$ og da må $n = 1$, altså en modstrid.

Dermed er $R(B_1, B_n) \leq 2n + 3$.

□

Den følgende sætning giver en øvre grænse for Ramsey-tallet for bog-grafer, $R(B_m, B_n)$. Der vil i beviset blive brugt resultater om antallet af monokromatiske trekanter i en to-kantfarvning af den givne graf. Lad en komplet graf G have punktmængde $\{1, \ldots, p\}$ og lad den røde valens for punkterne være givet ved $d_{1,R}, \ldots, d_{p,R}$. Det viser sig, at antallet af ikke-monokromatiske trekanter i denne to-kantfarvede graf G er $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} d_{i,R} d_{i,B}$. For hvert punkt $v \in G$, der har m røde og n blå nabokanter, vil dette punkt give anledning til mn ikke-monokromatiske trekanter. At hver af disse ikke-monokromatiske trekanter bliver talt med præcist to gange i summen, indses ved at se på en rød nabo v_R og en blå nabo v_B til v. Kanten $v_R v_B$ er enten rød eller blå. Antag uden tab af generalitet, at kanten er rød. Når der i summen betragtes punktet v_R vil trekanten ikke blive talt med her, da den er incident til v_R med to røde kanter. Derimod vil trekanten blive talt med når v_B betragtes, da den er incident til v_B med en rød og en blå kant. Hermed bliver hver ikke-monokromatiske trekant i G talt med præcis to gange, hvorfor faktoren $1/2$ ganges på.

Da $d_{i,B} = p - 1 - d_{i,R}$, er det totale antal monokromatiske trekanter dermed givet ved,

$$M = \binom{p}{3} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_{i,R}(p - 1 - d_{i,R}). \tag{3.4.4}$$

Sætning 3.22
Hvis $2(m+n)+1 > \frac{(n-m)^2}{3}$, *så er* $R(B_m, B_n) \leq 2(m+n+1)$.

[RS78, s. 82-83]

[LZ05, sætning 1.5, s. 9-11]

Bevis. Lad $G = K^p$, hvor $p = 2(m+n+1)$, være en to-kantfarvet graf og antag, at G ikke indeholder en rød B_m eller en blå B_n. Lad yderligere G_R og G_B være hhv. den røde og blå delgraf af G med kantmængder E_R og E_B. Det totale antal af monokromatiske trekanter er givet ved ligningen

$$M_{\text{total}} = \frac{1}{3}\sum_{uv\in E_R} |N_R(u) \cap N_R(v)| + \frac{1}{3}\sum_{uv\in E_B} |N_B(u) \cap N_B(v)|, \tag{3.4.5}$$

hvor faktoren $\frac{1}{3}$ kommer fra, at der summeres over hver trekant 3 gange. Ved antagelsen om, at G ikke indeholder en rød B_m eller en blå B_n er $|N_R(u) \cap N_R(v)| \leq m-1$ for alle $uv \in E_R$ og $|N_B(u) \cap N_B(v)| \leq n-1$ for alle $uv \in E_B$. Dermed er (3.4.5) maksimalt

$$M_{\max} = \frac{1}{3}|E_R|(m-1) + \frac{1}{3}|E_B|(n-1). \tag{3.4.6}$$

Siden det totale antal kanter i en K^p er $\binom{p}{2}$ kan antal røde og blå kanter sættes til $|E_R| = \frac{1}{2}\binom{p}{2} - x$ og $|E_B| = \frac{1}{2}\binom{p}{2} + x$, hvor $-\frac{1}{2}\binom{p}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\binom{p}{2}$. Dette indsat i (3.4.6) giver

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{1}{3}(m-1)\left(\frac{p(p-1)}{4} - x\right) + \frac{1}{3}(n-1)\left(\frac{p(p-1)}{4} + x\right) \\ &= \frac{1}{12}p(p-1)(m+n-2) + \frac{(n-m)x}{3}. \end{aligned}$$

Der ses nu på det minimale antal monokromatiske trekanter. Lad $s := \sum_{i=1}^{p} d_{i,R}$. Cauchy's ulighed

$$\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{p} x_i y_i\right)^2$$

med $x_i = d_{i,R}$ og $y_i = 1$ giver

$$p\sum_{i=1}^{p} d_{i,R}^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{p} d_{i,R}\right)^2 = s^2. \tag{3.4.7}$$

Ved at benytte (3.4.7) på summen i udtryk (3.4.4) fås

$$\sum_{i=1}^{p} d_{i,R}(p-1-d_{i,R}) = s(p-1) - \sum_{i=1}^{p} d_{i,R}^2 \leq s(p-1) - \frac{s^2}{p}.$$

Idet $s = \sum_{i=1}^{p} d_{i,R} = 2|E_R|$ fås en nedre grænse for antallet af monokromatiske trekanter fra (3.4.4)

$$\begin{aligned}
M_{\min} &\geq \binom{p}{3} - \frac{1}{2}s(p-1) + \frac{1}{2}\frac{s^2}{p} \\
&= \binom{p}{3} - |E_R|(p-1) + \frac{1}{2}\frac{(2|E_R|)^2}{p} \\
&= \frac{p(p-1)(p-5)}{24} + \frac{2}{p}\left(|E_R| - \frac{1}{2}\binom{p}{2}\right)^2 \\
&= \frac{p(p-1)(p-5)}{24} + \frac{2x^2}{p}.
\end{aligned}$$

Da $M_{\max} \geq M_{\min}$ giver dette, at

$$\frac{p(p-1)(p-5)}{24} + \frac{2x^2}{p} \leq \frac{1}{12}p(p-1)(m+n-2) + \frac{(n-m)x}{3}, \tag{3.4.8}$$

som er ækvivalent med

$$\frac{p(p-1)(p-(2m+2n+1))}{24} \leq \frac{(n-m)x}{3} - \frac{2x^2}{p}. \tag{3.4.9}$$

Maksimeres højresiden mht. x uden betingelser for intervallet for x fås en maksimal værdi for x i $x = \frac{(n-m)p}{12}$. Indsættes dette, fås

$$\begin{aligned}
\frac{p(p-1)(p-(2m+2n+1))}{24} &\leq \frac{p(n-m)^2}{36} - \frac{2(n-m)^2p^2}{144p} \\
&= \frac{p(n-m)^2}{72}.
\end{aligned}$$

Ligningen kan yderligere reduceres til

$$(p-1)(p-(2m+2n+1)) \leq \frac{(n-m)^2}{3},$$

og indsættes $p = 2m+2n+2$ i ligningen, fås

$$2(m+n)+1 \leq \frac{(n-m)^2}{3}.$$

Så hvis $2(m+n)+1 > \frac{(n-m)^2}{3}$, vil antagelsen om, at G ikke indeholder en rød B_m eller en blå B_n ikke være opfyldt og $R(B_m, B_n) \leq 2(m+n+1)$. $\square$

Sætning 3.22 kan benyttes til at finde eksakte Ramsey-tal, der involverer små bog-grafer. Den nedre grænse fås ved en to-kantfarvning af K^n, hvor farvningen ofte vil bestå af en stærkt regulær graf med parametre (v, k, λ, μ).

Der findes flere typer stærkt regulære grafer, men i det følgende benyttes kun triangulære grafer og gitter-grafer:
Triangulær graf: Med grafen $T(n)$ betegnes kantgrafen af en K^n, $n \geq 4$, som er en stærkt regulær graf med parametre $(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4)$.
Gitter-graf: Kantgrafen af en $K_{n,n}$, $n \geq 2$ er en stærkt regulær graf. Grafen betegnes $L_2(n)$ og har parametre $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$.

Sætning 3.23
Der gælder $R(B_2, B_5) = 16$ *og* $R(B_4, B_6) = 22$

Bevis. $R(B_2, B_5) = 16$: Fra sætning 3.22 haves $R(B_2, B_5) \leq 2(2+5+1) = 16$. En to-kantfarvning af K^{15} med en blå delgraf givet ved den triangulære graf $T(6)$ er en stærkt regulær graf med parametre $(15, 8, 4, 4)$. Tag en vilkårlig kant blå kant uv i denne $T(6)$. Denne kant kan ikke danne basis for en blå B_5, da u og v højst har 4 fælles blå naboer. Komplementærgrafen er ifølge sætning 3.17, en stærkt regulær graf med parametre $(15, 6, 1, 3)$. Her vil en vilkårlig rød kant uv ikke kunne danne basis for en rød B_2, da u og v højst har en fælles rød nabo og dermed $R(B_2, B_5) \geq 16$.

$R(B_4, B_6) = 22$: Fra sætning 3.22 haves $R(B_4, B_6) \leq 2(4+6+1) = 22$. En to-kantfarvning af K^{21} med en blå delgraf givet ved den triangulære graf $T(7)$ har parametre $(21, 10, 5, 4)$ og den røde delgraf har parametre $(21, 10, 3, 6)$. Denne graf indeholder altså ingen rød

B_4 eller blå B_6 og dermed $R(B_4, B_6) \geq 22$.

□

Med ovenstående observation om at, en srg(n, k, λ, μ) ikke indeholder en $B_{\lambda+1}$ er vi nu i stand til at udregne nogle diagonale Ramsey-tal for bog-grafer eksakt.

Sætning 3.24
Hvis $4n + 1$ er en primtalspotens, $n \in \mathbb{N}$, så er $R(B_n) = 4n + 2$.

Bevis. Fra sætning 3.22 med $n = m$ ses det, at for $n \geq 0$ er $R(B_n) \leq 4n + 2$. Den nedre grænse fås ved at betragte en Paley-graf $G(4n + 1)$, som er en selvkomplementær srg$(4n + 1, 2n, n - 1, n)$ pr. sætning 3.18. Det vil sige, at denne graf hverken indeholder en rød eller en blå B_n og $R(B_n) \geq 4n + 2$. □

En øvre grænse for Ramsey-tal for bog-grafer, der er næsten diagonale, opfylder en bedre øvre grænse end den fra sætning 3.22. Uden bevis er resultaterne:

- $R(B_{n-1}, B_n) \leq 4n - 1$
- Hvis $n \equiv 2 \pmod 3$ er $R(B_{n-2}, B_n) \leq 4n - 3$.

Det sidste resultat i ovenstående benyttes i følgende sætning.

Sætning 3.25
$R(B_3, B_5) = 17$

Bevis. $\underline{R(B_3, B_5) \leq 17}$: Da $5 \equiv 2 \pmod 3$ er $R(B_3, B_5) \leq 4 \cdot 5 - 3 = 17$.

$\underline{R(B_3, B_5) \geq 17}$: En to-kantfarvning af K^{16} med en rød delgraf givet ved gitter-grafen $L_2(4)$ er en srg$(16, 6, 2, 2)$. Komplementet til denne er en srg$(16, 9, 4, 6)$ og grafen indeholder hverken en rød B_3 eller en blå B_5, hvilket viser at $R(B_3, B_5) \geq 17$. □

3.5 Szemerédi's regularitetslemma

Szemerédi's regularitetslemma skal bistå os i et bevis i Ramsey-teorien. Til lemmaet (som er præsenteret som en sætning) er der en mængde definitioner og lemmaer, hvoraf de vigtigste er præsenteret her i (overvejende) samme form som i [Die05, s. 175-183].

Definition 3.26 (Densitet af par)
For en graf $G = (V, E)$ og disjunkte delmængder $X, Y \subseteq V(G)$ defineres densiteten for parret (X, Y), som

$$d_G(X, Y) = \frac{\|X, Y\|_G}{|X||Y|},$$

hvor $\|X, Y\|_G = |\{xy \in E(G) | x \in X \text{ og } y \in Y\}|$.

Da antallet af X-Y-kanter maksimalt kan være $|X||Y|$ vil $d_G(X, Y) \in [0, 1]$. Bemærk endvidere, at hvis man er givet densiteten for (X, Y) i G, da vil densitetet for dette par i $\overline{G}$, kunne skrives som:

$$d_{\overline{G}}(X, Y) = \frac{|X||Y| - \|X, Y\|_G}{|X||Y|} = 1 - d_G(X, Y). \tag{3.5.1}$$

Definition 3.27 (ε-regulært par)
Lad en graf G være givet. For $\varepsilon > 0$, siges parret (A, B) af disjunkte $A, B \subseteq V(G)$ at være ε-regulært, hvis der for alle $X \subseteq A$ og $Y \subseteq B$, der overholder

$$|X| \geq \varepsilon|A| \ \text{ og } \ |Y| \geq \varepsilon|B|, \tag{3.5.2}$$

gælder, at

$$|d_G(X, Y) - d_G(A, B)| < \varepsilon. \tag{3.5.3}$$

Hvis et par (A, B) er ε-regulært i en graf G er parret også ε-regulært i $\overline{G}$: (3.5.2) er en betingelse for punktmængden og er derfor også opfyldt i $\overline{G}$ og (3.5.3) er opfyldt i $\overline{G}$, hvilket kan opnås ved hjælp af (3.5.1):

$$\begin{aligned} |d_{\overline{G}}(X, Y) - d_{\overline{G}}(A, B)| &= |1 - d_G(X, Y) - 1 + d_G(A, B)| \\ &= |d_G(A, B) - d_G(X, Y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Definition 3.28 (ε-regulær opdeling)
Lad en graf G være givet. For $\varepsilon > 0$, kaldes en opdeling $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ med exceptionel mængde V_0 for en ε-regulær opdeling af G, hvis den opfylder de følgende 3 betingelser:

1. $|V_0| \leq \varepsilon|G|$
2. $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k|$

3. *Højst εk^2 af parrene (V_i, V_j) for $1 \leq i < j \leq k$ er ikke ε-regulære.*

Mængden V_0 har til formål at sikre, at $V_1, V_2, \ldots, V_k$ kan have samme størrelse, hvorfor V_0 tillades at have størrelse 0, når k deler $|G|$. Betingelse 1 i definition 3.28 giver, at størrelsen af V_0 skal begrænses. Bemærk endvidere, at V_0 ikke betragtes i betingelse 3.

Definition 3.29 (q_G)
Lad en graf G være givet. For disjunkte delmængder $A, B \subseteq V(G)$ defineres

$$q_G(A,B) = \frac{|A||B|}{|G|^2} d_G^2(A,B) = \frac{\|A,B\|_G^2}{|A||B||G|^2}. \tag{3.5.4}$$

Lad $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ og $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ være opdelinger af hhv. A og B. Da defineres

$$q_G(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sum_{1\leq i\leq k} \sum_{1\leq j\leq l} q_G(A_i, B_j). \tag{3.5.5}$$

For en opdeling $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ af $V(G)$, defineres

$$q_G(\mathcal{A}) = \sum_{1\leq i<j\leq k} q_G(A_i, A_j).$$

For en opdeling $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, \ldots, C_k\}$ af $V(G)$ med exceptionel mængde C_0, defineres

$$q_G(\mathcal{C}) = q\left(\{C_1, C_2, \ldots, C_k\} \cup \{\{c\} | c \in C_0\}\right).$$

For en opdeling $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ses det, at

$$\begin{aligned} q_G(\mathcal{A}) &= \sum_{1\leq i<j\leq k} q_G(A_i, A_j) \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq k} \frac{|A_i||A_j|}{|G|^2} d_G^2(A_i, A_j) \\ &\leq \frac{1}{|G|^2} \sum_{1\leq i<j\leq k} |A_i||A_j| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Lemma 3.30
Lad $0 < \varepsilon \leq 1/4$ og lad $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ være en opdeling af V med exceptionel mængde A_0, der opfylder følgende betingelser:

1. $|A_0| \leq \varepsilon |A|$
2. $|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_k|$

Hvis opdelingen ikke er ε-regulær, så eksisterer der en opdeling $\mathcal{A}' = \{A_0', A_1', \ldots, A_l'\}$ *af* V *med exceptionel mængde* A_0' *og* $k \leq l \leq k4^k$*, så*

1. $|A_0'| \leq |A_0| + \frac{|G|}{2^k}$
2. $|A_1'| = |A_2'| = \ldots = |A_l'|$
3. $q(\mathcal{A}') \geq q(\mathcal{A}) + \frac{\varepsilon^5}{2}$

[Die05, lemma 7.4.4, s. 180]

Bevisidéen for lemma 3.30 er at "forfine" $\mathcal{A}$ ved yderligere at opdele mængderne heri. Man kan vise, at denne forfinede opdeling $\mathcal{C}$ opfylder, at $k \leq |\mathcal{C}| \leq k2^k$ og $q(\mathcal{C}) \geq q(\mathcal{A}) + \varepsilon^5/2$. $\mathcal{C}$'s elementer kan opdeles, så man opnår endnu en forfinet opdeling $\mathcal{A}'$, som opfylder at $q(\mathcal{A}') \geq q(\mathcal{A})$ og de resterende betingelser.

Sætning 3.31 (Szemerédi's regularitetslemma)
For alle $\varepsilon > 0$ *og ethvert* $m \in \mathbb{N}$*, eksisterer der* $M \in \mathbb{N}$ *så enhver graf af orden mindst* m *har en ε-regulær opdeling* $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ *med* $m \leq k \leq M$*.* [Die05, lemma 7.4.1, s. 176]

Bevis for sætning 3.31. Lad uden tab af generalitet $0 < \varepsilon \leq 1/4$ og lad $m \in \mathbb{N}$ og $s = 2/\varepsilon^5$. Lad $k \geq m$ være så stor, at $2^{k-1} \geq s/\varepsilon$. Dermed ses det, at

$$\begin{aligned} \frac{s}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{n} + \frac{s}{2^k} &\leq \varepsilon \text{ hvis } \frac{k}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \Leftrightarrow k + \frac{sn}{2^k} &\leq \varepsilon n. \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

I lemma 3.30 ses det, at den nye opdeling, der nåes, maksimalt kan få størrelse $k4^k$, hvor den gamle størrelse var k. Lemma 3.30 skal bruges højst s gange, så $M = \max\left\{f^s(k), \frac{2k}{\varepsilon}\right\}$, hvor $f(x) = x4^x$. At M kan antage værdien $\frac{2k}{\varepsilon}$ skyldes, at formel (3.5.6) kun er sand for $n \geq 2k/\varepsilon$. Uligheden skal senere bruges i et tilfælde, hvor $n > M$.

Lad G være en graf af orden n. Hvis $n \leq M$ vælges $V_0 = \emptyset$ og for $k := n$, $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k| = 1$. Dette er en ε-regulær opdeling.

Hvis $n > M$, vælges V_0 minimal, så k deler $|V \setminus V_0|$ og lad $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k| = |V \setminus V_0|/k$. I så fald haves $|V_0| < k \leq \varepsilon n$. Ideen er nu at bruge lemma 3.30 på opdelingen $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$, indtil denne er ε-regulær. Pr. (3.5.6) vil størrelsen af den fremkomne exceptionelle mængde efter s anvendelser af lemma 3.30 holde sig under εn. $\square$

Definition 3.32 (Regularitetsgraf)
Lad en graf G være givet. Lad $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ være en ε-regulær opdeling af $V(G)$ med exceptionel mængde V_0. For $d \in [0,1]$, kaldes grafen på $\{V_1, \ldots, V_k\}$ med kant mellem V_i og V_j, $j \neq i$, hvis (V_i, V_j) er et ε-regulært par med densitet mindst d, for regularitetsgrafen R af G med parametre ε, $l := |V_1|$ og d.

Udskift $V_1, \ldots, V_k$ med mængder af s punkter V_i^s. For en regularitetsgraf R defineres R_s som grafen på $\{V_1^s, \ldots, V_k^s\}$, hvor $E(V_i^s, V_j^s) = V_i^s \times V_j^s$ hvis og kun hvis $V_iV_j \in E(R)$ for $i \neq j$.

3.5.1 Ramsey-tal vha. regularitetslemmaet

Ovenstående afsnit har nu gjort det muligt at bevise sætning 3.34. Før sætningen bevises, præsenteres et resultat omkring regularitetsgrafer, dog uden bevis:

Lemma 3.33
For alle $d \in (0,1]$ og $\Delta \geq 1$, eksisterer der et $\varepsilon_0 > 0$ med følgende egenskaber:

Hvis G er en vilkårlig graf, H en graf med $\Delta(H) \leq \Delta$, $s \in \mathbb{N}$ og R regularitetsgrafen for G med parametre $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $l \geq 2s/d^\Delta$ og d, så

$$H \subseteq R_s \Rightarrow H \subseteq G.$$

[Die05, lemma 7.5.2, s. 184]

Sætning 3.34 (Chvátal, Rödl, Szemerédi og Trotter 1983)
For alle $\Delta \in \mathbb{N}$, eksisterer der en konstant c, så gælder

$$R(H) \leq c|H|, \tag{3.5.7}$$

for alle grafer H med $\Delta(H) \leq \Delta$. [Die05, sætning 9.2.2, s. 256]

Bevis. Lad $\Delta \in \mathbb{N}$, $d := 1/2$ og lad ε_0 som givet fra lemma 3.33. Vælg et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ sådan, at for alle $k \geq m$, hvor $m = R(\Delta + 1)$ gælder:

$$2\varepsilon < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{k}. \tag{3.5.8}$$

Da må $\varepsilon < 1$.

Vha. Szemerédi's regularitets-lemma fås nu for ε og m, et M. Lad H være en graf med $\Delta(H) \leq \Delta$ og lad G være en graf af orden mindst $c|H|$ hvor $c := \frac{2^{\Delta+1}M}{1-\varepsilon}$. Det skal vises, at $H \subseteq G$ eller $H \subseteq \overline{G}$, da man i så fald vil have, at $R(H) \leq c|H|$.

Fra regularitetslemmaet findes et k, så G har en ε-regulær opdeling $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ med exceptionel mængde V_0. Lad $l := |V_1|$:

$$\begin{aligned} l = \frac{|G| - |V_0|}{k} &\geq \frac{|G| - \varepsilon|G|}{M} = |G|\frac{1-\varepsilon}{M} \\ &\geq c|H|\frac{1-\varepsilon}{M} = 2^{\Delta+1}|H| = \frac{|H|}{(1/2)^{\Delta+1}} \\ &= \frac{2|H|}{d^{\Delta}}. \end{aligned}$$

Lad R være regularitetsgrafen med parametre $\varepsilon, l, 0$ for $\{V_1, \ldots, V_k\}$. Da denne består af kanter mellem regulære par med densitet mindst 0, vil grafen have mindst lige så mange kanter som en komplet graf på k punkter, fratrukket højst εk^2, da højst εk^2 par kan være ikke-ε-regulære:

$$\|R\| \geq \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 = \frac{1}{2}k^2\left(1 - \frac{1}{k} - 2\varepsilon\right)$$

Pr. (3.5.8) haves

$$\begin{aligned} \|R\| &> \frac{1}{2}k^2\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}k^2\frac{m-2}{m-1} \\ &\geq t_{m-1}(k). \end{aligned}$$

Dermed har R en K^m.

Farv nu kanterne i R sådan, at alle kanter, der svarer til densitet $\geq 1/2$, bliver røde, og lad alle andre kanter være blå. Lad nu R' være grafen på $\{V_1, \ldots, V_k\}$ udspændt af de røde kanter og lad R'' være grafen på $\{V_1, \ldots, V_k\}$ udspændt af de blå kanter i R, samt kanterne svarende til densitet $1/2$. Både R' og R'' opfylder definitionen for at være regularitetsgrafer med parametre ε, l og $1/2$ i hhv. G og $\overline{G}$, da et ε-regulært par i G, som nævnt tidligere, også er ε-regulært i $\overline{G}$.

Da $m = R(\Delta+1)$ vil K^m-delgrafen i R indeholde en rød eller en blå $K^{\Delta+1}$. Enhver graf G opfylder, at $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, så lad $r := \chi(H)$ og derfor vil $r \leq \Delta(H)+1 \leq \Delta+1$. Derfor indeholder K^m-delgrafen i R en rød eller en blå K^r, hvorfor denne K^r vil indgå i en af R' og R''. For $R'_{|H|}$ og $R''_{|H|}$ gælder det, at der findes en $K^r_{|H|}$ i en af disse, alt efter om K^r indgår i R' eller R''.

H er delgraf i en $K^r_{|H|}$, så da $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ og $l \geq 2s/d^\Delta$ vil $H \subseteq G$ eller $H \subseteq \overline{G}$ pr. lemma 3.33, hvorved resultatet sluttes. □

KAPITEL 4

Udvidet Ramsey-teori

I dette kapitel ses på diverse begreber og et resultat, som kan fortolkes som en udvidelse af den Ramsey-teori, der er blevet betragtet i de forrige kapitler. Forskellen består hovedsageligt i, at man istedet for at kræve én bestemt delgraf i en given graf, nu kan kræve flere af disse delgrafer, men hvor det tillades, at delgrafen er blandt en given mængde af grafer. I kapitlet benyttes store-O-notation, som er defineret i bilag B.

4.1 Isomorfe punktdisjunkte delgrafer

I dette afsnit ses på en graf G af orden $(2k-1-1/k)n + O(1)$. Det vises, at denne graf indeholder n disjunkte punktdelmængder, hvor hver punktdelmængde inducerer isomorfe delgrafer H af orden k af én af følgende typer: en klike K^k, en uafhængig mængde $\overline{K^k}$, en stjerne $K_{1,k-1}$ eller komplementærgrafen til en stjerne $\overline{K_{1,k-1}}$.

Definition 4.1 ((n, H)-dekomposition)
Lad G og H være grafer og n et positivt heltal. En opdeling $\{V_0, V_1, \ldots, V_n\}$ af $V(G)$ så $G[V_i] \simeq H$ for $i = 1, \ldots, n$, siges at være en (n, H)-dekomposition af G.

Bemærk, at V_0 ikke behøver at overholde isomorfi-betingelsen. Der indføres yderligere definitioner:

Definition 4.2 ($N(G, H)$, $N(G, \mathcal{H})$ og $f(n, \mathcal{H})$)
$N(G, H)$ defineres som det største heltal n, så G har en (n, H)-dekomposi-

tion. For en samling af grafer $\mathcal{H}$ *betegnes* $\max\{N(G,H) : H \in \mathcal{H}\}$ *med* $N(G,\mathcal{H})$. *For et positivt heltal* n *er* $f(n,\mathcal{H})$ *lig det mindste heltal* s, *så* $N(G,\mathcal{H}) \geq n$ *for alle grafer* G *af orden* s. *Dvs.*

$$s = f(n,\mathcal{H}) = \min\{s' : N(G,\mathcal{H}) \geq n \text{ for alle grafer } G \text{ med } |G| = s'\}.$$

$f(n,\mathcal{H})$ giver med andre ord den mindste orden af en graf G så det er muligt at opdele G i mindst n punktdisjunkte inducerede H-delgrafer for mindst én $H \in \mathcal{H}$.

Som nævnt er $f(n,\mathcal{H})$ nært beslægtet med Ramsey-tal, idet der for $n = 1$ og $\mathcal{H} = \{K^k, \overline{K^l}\}$ gælder, at

$$f(1, \{K^k, \overline{K^l}\}) = R(k,l).$$

I det følgende lad $\mathcal{H}$ fra definition 4.2 være mængden af grafer $\mathcal{D}_k = \{K^k, \overline{K^k}, K_{1,k-1}, \overline{K_{1,k-1}}\}$.

Sætning 4.3
Lad $k \geq 3$ *og* $n > k-2$. *Så er* $f(n,\mathcal{D}_k) = (2k-1-\frac{1}{k})n + O(1)$.

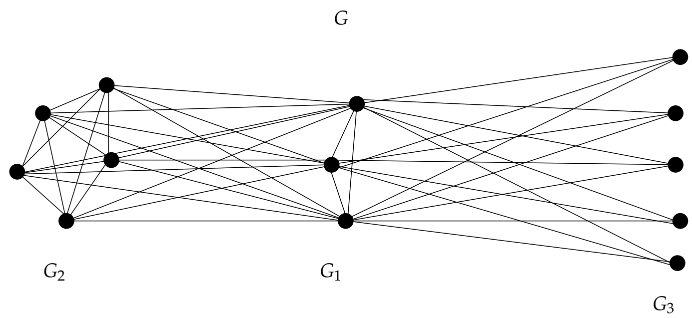
Det sidste led på højresiden af udtrykket for $f(n,\mathcal{D}_k)$ afhænger af n. Ifølge regler for store-O-notation giver udtrykket, at der eksisterer en konstant C, afhængende af n, så $|f(n,\mathcal{D}_k) - (2k-1-\frac{1}{k})n| \leq C$ for tilstrækkeligt store n.

Bevis. Nedre grænse:
Lad $\alpha = \lfloor((k-1)n+k-2)/k\rfloor$, $\beta = (k-1)n - 1$ og $G_1 \simeq K^\alpha, G_2 \simeq K^\beta$ og $G_3 \simeq \overline{K^\beta}$. For grafen $G = G_1 + (G_2 \cup G_3)$, se figur 4.1, vises det at $N(G,\mathcal{D}_k) < n$ og da vil $f(n,\mathcal{D}_k) > |G|$. Mere præcist vil der ved brug af resultatet $\lfloor\frac{n}{x}\rfloor \geq \frac{n}{x} - \frac{x-1}{x}$ gælde

$$\begin{aligned}
f(n,\mathcal{D}_k) &\geq |G| + 1 \\
&= \alpha + 2\beta + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{(k-1)n+k-2}{k} \right\rfloor + 2(k-1)n - 1 \\
&\geq \frac{(k-1)n+k-2}{k} - \frac{(k-1)}{k} + 2(k-1)n - 1 \\
&= n - \frac{n}{k} + 1 - \frac{2}{k} - 1 + \frac{1}{k} + 2kn - 2n - 1 \\
&= \left(2k-1-\frac{1}{k}\right)n - 1 - \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

for $k \geq 3$. Benyttes store-O-notation giver dette at

$$f(n, \mathcal{D}_k) \geq (2k - 1 - \frac{1}{k})n + O(1).$$



Figur 4.1: $G = G_1 + (G_2 \cup G_3)$, hvor $G_1 \simeq K^\alpha$, $G_2 \simeq K^\beta$ og $G_3 \simeq \overline{K^\beta}$.

For hver graf H i $\mathcal{D}_k$ vises, at den opfylder $N(G, H) < n$.
$\underline{N(G, \overline{K^k}) < n}$:
For at lave én $\overline{K^k}$ skal der bruges mindst $k - 1$ punkter fra G_3, da G_1 og G_2 er komplette. Det maksimale antal af disjunkte $\overline{K^k}$ der kan laves, fås da ved at se på antallet af punkter i G_3:

$$|G_3| = \beta < (k-1)n.$$

Dermed er der være færre end n disjunkte $\overline{K^k}$ i G og $N(G, \overline{K^k}) < n$.
$\underline{N(G, \overline{K_{1,k-1}}) < n}$:
Idet $k \geq 3$, skal der i konstruktionen af $\overline{K_{1,k-1}}$ tages ét punkt fra G_3 og de $k-1$ øvrige punkter fra G_2, se figur 4.1. Da $|G_2| = \beta < (k-1)n$ er der færre end n disjunkte $\overline{K_{1,k-1}}$ og $N(G, \overline{K_{1,k-1}}) < n$.
$\underline{N(G, K_{1,k-1}) < n}$:
For at kontruere flest mulige disjunkte $K_{1,k-1}$ skal centrum af stjernen ligge i G_1. Antallet af disjunkte $K_{1,k-1}$ kan da højst være antallet af punkter i G_1. Med $k - 2 < n$ haves

$$\begin{aligned} |G_1| &= \alpha \\ &< \left\lfloor \frac{(n+1)n + n}{n+2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n^2 + 2n}{n+2} \right\rfloor \\ &= n, \end{aligned}$$

og dermed er $N(G, K_{1,k-1}) < n$.
$\underline{N(G, K^k) < n}$:
I konstruktionen af det maksimale antal K^k vil mængden G_3 højst kunne bidrage med ét punkt til hver K^k, se figur 4.1. Da der ikke er nogen kanter mellem G_2 og G_3, vil de øvrige $k-1$ punkter i en sådan K^k stamme fra G_1. Derved er der maksimalt $|G_1|/(k-1)$ K^k, der benytter punkter fra G_3. De øvrige K^k, der kan dannes, kommer fra G_2 og i G kan der maksimalt være

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{k-1} + \frac{\beta}{k} &= \frac{1}{k-1}\left\lfloor\frac{(k-1)n+k-2}{k}\right\rfloor + \frac{1}{k}((k-1)n-1)\\ &\leq \frac{n}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{2}{(k-1)k} + n - \frac{n}{k} - \frac{1}{k}\\ &= n - \frac{1}{k(k-1)}\\ &< n.\end{aligned}$$

Hermed er den nedre grænse for $f(N, \mathcal{D}_k)$ vist. □

Definition 4.4
For $n, k \in \mathbb{N}$, kaldes en graf G (n,k)-god, hvis den opfylder mindst én af de følgende betingelser:

$$N(G, K^k) \geq n \tag{4.1.1}$$
$$N(G, \overline{K^k}) \geq n \tag{4.1.2}$$
$$kN(G, K^k) + kN(G, \overline{K^k}) + N(G, K_{1,k-1}) \geq (2k+1)n \tag{4.1.3}$$
$$kN(G, K^k) + kN(G, \overline{K^k}) + N(G, \overline{K_{1,k-1}}) \geq (2k+1)n. \tag{4.1.4}$$

Hvis en graf opfylder alle betingelser, kaldes den (n,k)-perfekt.

Definition 4.5
Lad $\mathcal{H}(k)$ være mængden af grafer H, der opfylder:

- *Der eksisterer disjunkte $A, B, C \subseteq V(H)$ så $V(H) = A \cup B \cup C$ og $H[A] \simeq H[B] \simeq K^{k(k^2-1)}$ og $H[C] \simeq \overline{K^{2k^2(k-1)}}$.*
- *$E_H(A, C) = A \times C$ og $E_H(B, C) = \emptyset$.*

Ydermere defineres $\mathcal{H}^*(k) = \mathcal{H}(k) \cup \{H | \overline{H} \in \mathcal{H}(k)\}$.

Det ses, at for $H \in \mathcal{H}(k)$,

$$\begin{aligned} |H| &= 2k(k^2-1) + 2k^2(k-1) \\ &= 2k^2\left(2k - \frac{1}{k} - 1\right). \end{aligned}$$

Lemma 4.6
Lad $n_0 = 2k^2$. Enhver $H \in \mathcal{H}^*(k)$ er (n_0, k)-perfekt.

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise lemmaet for $H \in \mathcal{H}(k)$, da $N(G_1, G_2) = N(\overline{G_1}, \overline{G_2})$ for par G_1, G_2 af grafer.

Angående (4.1.1), så vil det maksimale antal af punktdisjunkte K^k være mindst det antal af K^k, som udspændes i B, adderet med det antal af K^k, som findes i A, hvor et enkelt punkt i C er brugt:

$$\begin{aligned} N(H, K^k) \geq N(H[A \cup C], K^k) + N(H[B], K^k) &= \frac{k(k^2-1)}{k-1} + \frac{k(k^2-1)}{k} \\ &= (2k-1)(k+1) \geq n_0. \end{aligned}$$

Tilsvarende for de andre betingelser. □

De følgende to lemmaer vil blive brugt i beviset for den øvre grænse i sætning 4.3.

Lemma 4.7
Lad $m, n \in \mathbb{N}$. Så eksisterer et $s \in \mathbb{N}$ sådan, at for alle to-delte grafer G med opdeling A_0 og B_0 med $|A_0| = 2m-1$ og $|B_0| = s$ findes der $A \subseteq A_0$ og $B \subseteq B_0$ med $|A| = m$ og $|B| = n$ og $E_G(A, B) = A \times B$ eller $E(A, B) = \emptyset$.

Bevis. Lad $A_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}\}$ og $B_0 = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ med $s = (n-1)2^{2m-1} + 1$. Definér nu funktionen $f : [1, s] \to \{0, 1\}^{2m-1}$ ved $f(j) = (f_{1,j}, f_{2,j}, \ldots, f_{2m-1,j})$, hvor $f_{i,j} = 1$, hvis $x_i y_j \in E(G)$ og 0 ellers. Pr. dueslagsprincippet vil der eksistere en mængde $J \subset [1, s]$ med $|J| = n$, sådan at $f(j)$ er en konstant $(c_1, c_2, \ldots, c_{2m-1})$ for $j \in J$. Hver af $c_1, c_2, \ldots, c_{2m-1}$ kan være enten 0 eller 1, så der eksisterer, igen pr. dueslagsprincippet, en mængde $I \subset [1, 2m-1]$ med $|I| = m$, så c_i har samme værdi for alle $i \in I$.

Lad nu $A = \{x_i | i \in I\}$ og $B = \{y_j | j \in J\}$, hvorved det haves, at $|A| = m$, $|B| = n$ og $f_{i,j} = 0$ for $i \in I$ og $j \in J$ giver $E(A, B) = \emptyset$ mens $f_{i,j} = 1$ for $i \in I$ og $j \in J$ giver $E(A, B) = A \times B$. □

Lemma 4.8
Lad $n \in \mathbb{N}$. Så eksisterer der et positivt $s \in \mathbb{N}$ sådan, at for alle to-delte grafer G med opdeling A_0 og B_0 med $|A_0| = |B_0| = s$ findes der $A \subseteq A_0$ og $B \subseteq B_0$ med $|A| = |B| = n$ og $E_G(A, B) = A \times B$ eller $E(A, B) = \emptyset$.

Bevis. Lad $m = n$ og brug lemma 4.7: for et givent n, fås et positivt heltal s' så alle to-delte grafer med opdeling $\{A_0, B_0\}$, $|A_0| = 2n - 1$ og $|B_0| = s'$, findes $A \subseteq A_0$ og $B \subseteq B_0$ så $|A| = |B| = n$. Vælg nu $s := \max\{s', 2n - 1\}$. □

Det mindste s i lemma 4.7 og 4.8 benævnes med hhv. $r_2(m, n)$ og $r_3(n)$. Vi lader desuden $r_1(n) = R(n, n)$.

Følgende proposition vil dække den øvre grænse.

Proposition 4.9
Der eksisterer $c \in \mathbb{N}$, afhængende af k, så at enhver graf G med $|V(G)| \geq \left(2k - 1 - \frac{1}{k}\right) n + c$ er (n, k)-god.

En graf G, som i proposition 4.9, som er (n, k)-god, vil opfylde, at $N(G, \mathcal{D}_k) \geq n$. Den mindste orden $f(n, \mathcal{D}_k)$ af en graf G, der måtte opfylde dette, opfylder derfor, at $f(n, \mathcal{D}_k) \leq \left(2k - 1 - \frac{1}{k}\right) n + c$. Derfor medfører proposition 4.9 den øvre grænse i sætning 4.3.

Bevis. Lad $a, b, c \in \mathbb{N}$ opfylde følgende betingelser:

- $k(k-1)|a$ og $k|b$
- $r_2(a, 2a) \leq b$, $r_3(2a) \leq b$ og $r_3(2k^2(k-1)) \leq a$
- $r_1(b) + b \leq c$ og $r_1(kn_0) \leq c$ med $n_0 := 2k^2$.

Lad n være det mindste modeksempel til proposition 4.9, lad G være en graf af orden $s \geq \left(2k - 1 - \frac{1}{k}\right) n + c$ og lad G være ikke-(n, k)-god.

Da $s \geq c$, har G en K^{kn_0} eller en $\overline{K^{kn_0}}$ som induceret delgraf, da $r_1(kn_0) \leq c$. Hvis $n \leq n_0$, og dermed $kn \leq kn_0$, vil K^{kn_0} eller en $\overline{K^{kn_0}}$ kunne opdeles i mindst n punktdisjunkte K^k eller $\overline{K^k}$. I så fald bliver G (n, k)-god, hvilket er en modstrid. Så $n > n_0$.

Påstand 1. *For $H \in \mathcal{H}^*(k)$ gælder, at $H \not\subseteq G$ som induceret delgraf.*

Antag, at G indeholder en $H \in \mathcal{H}^*(k)$ som induceret delgraf. Lad $V_1 = V(H)$, $V_2 = V(G) - V_1$ og lad $G' = G[V_2]$. Pr. egenskaber for $\mathcal{H}^*(k)$ ses det, at $|V(H)| = \left(2k - 1 - \frac{1}{k}\right) n_0$, hvorved $|V(G')| \geq \left(2k - 1 - \frac{1}{k}\right)(n - n_0) + c$. Da n var et minimalt modeksempel og da $n - n_0 < n$, vil G' være $(n - n_0, k)$-god. H er (n, k)-perfekt pr. egenskaber for $\mathcal{H}^*(k)$, så G er (n, k)-god, hvilket er en modstrid.

Påstand 2. *G indeholder ikke både $K^a + \overline{K^a}$ og $K^a \cup \overline{K^a}$ som punktuafhængige inducerede delgrafer.*

Antag, at der eksisterer disjunkte $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq V(G)$, sådan, at $G[X_i] \simeq K^a$ og $G[Y_i] \simeq \overline{K^a}$ for $i = 1, 2$. Antag også, at $E_G(X_1, Y_1) = X_1 \times Y_1$ og $E_G(X_2, Y_2) = \emptyset$. Betragt grafen G' på $X_2 \cup Y_1$ med kanter $E(X_2, Y_1)$. Pr. lemma 4.8 findes $U_1 \subseteq Y_1$ og $U_2 \subseteq X_2$, med $|U_1| = |U_2| = 2k^2(k-1)$ (da $a \geq r_3(2k^2(k-1)))$ og $E(U_1, U_2) = U_1 \times U_2$ eller $\emptyset$. Hvis $E(U_1, U_2) = \emptyset$, vil $G[X_1 \cup U_2 \cup U_1]$ indeholde en $H \in \mathcal{H}(k)$, da $K^{k(k^2-1)} \subseteq G[X_1], G[U_2]$ og $\overline{K^{2k^2(k-1)}} \subseteq G[U_1]$. Hvis $E(U_1, U_2) = U_1 \times U_2$, indeholder $G[Y_2 \cup U_2 \cup U_1]$ en H med $\overline{H} \in \mathcal{H}(k)$. Begge tilfælde er i modstrid med påstand 1.

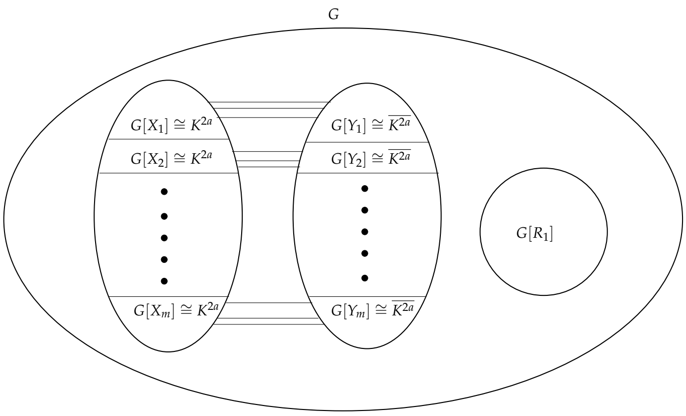
Antag, at der kun er delgrafer $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$ i G. Bemærk, at hvis der eksisterer både $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$ og $K^{2a} \cup \overline{K^{2a}}$ i G, vil der eksistere både $K^a + \overline{K^a}$ og $K^a \cup \overline{K^a}$, da de to sidstnævnte er delgrafer i de to førstnævnte. Hvis der kun er delgrafer $K^{2a} \cup \overline{K^{2a}}$ i G, betragtes i stedet $\overline{G}$ da $\overline{K^{2a} \cup \overline{K^{2a}}} = K^{2a} + \overline{K^{2a}}$. Lad m være maksimal, så $V(G) = \cup_{i=1}^{m}(X_i \cup Y_i) \cup R_1$ så $G[X_i] \simeq K^{2a}$, $G[Y_i] \simeq \overline{K^{2a}}$ og $E_G(X_i, Y_i) = X_i \times Y_i$ for $1 \leq i \leq m$ og at R_1 ikke indeholder $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$. Dette kan ses på figur 4.2.

Påstand 3. *R_1 indeholder mindst en $\overline{K^b}$.*

Antag, at $G[R_1]$ ikke indeholder en $\overline{K^b}$ og tag så mange punktdisjunkte K^b fra $G[R_1]$ som muligt. Lad R_1' være R_1 fratrukket de punkter, der indgår i de udvalgte K^b. R_1' må være af størrelse mindre end $r_1(b)$: der er ingen $\overline{K^b}$ i R_1', så hvis $|R_1'| \geq r_1(b)$, vil $G[R_1']$ indeholde endnu en K^b, hvilket strider mod, at vi har taget så mange K^b i R_1 som mulig.

Da $|R_1'| < r_1(b)$, vil antallet af punkter, der er opdelt i K^b eller $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$ være mindst $s - c$.

Da $k(k-1)|2a$ vil enhver $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$ kunne opdeles i et antal $K^{k-1} +$



Figur 4.2: På figuren ses en skitse af grafen G med mængderne $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_m$ og R_1, hvor $G[X_i] \simeq K^{2a}$, $G[Y_i] \simeq \overline{K^{2a}}$ for $1 \leq i \leq m$. Der gælder, at $E_G(X_i, Y_i) = X_i \times Y_i$ og R_1 indeholder ingen $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$.

$\overline{K^{k-1}}$ og enhver af disse grafer har en K^k som induceret delgraf. Tilsvarende vil enhver K^b have en K^k som induceret delgraf da $k|b$. Lad $X = R_1 \setminus R_1'$. Der gælder

$$\begin{aligned} N(G, K^k) &\geq \frac{s - c - |X|}{2(k-1)} + \frac{|X|}{k} \\ &\geq \frac{s - c}{2(k-1)} \\ &\geq n, \end{aligned}$$

hvilket er i modstrid med, at G er ikke-(n, k)-god.

Påstand 4. *Lad $R_2 = R_1 - U$, hvor $G[U] = \overline{K^b}$. $G[R_2]$ indeholder ingen K^b.*

Antag, at $G[R_2]$ indeholder en K^b. $G[R_1]$ indeholder en $\overline{K^b}$, så $G[R_1]$ indeholder punktdisjunkte K^b og $\overline{K^b}$. Da $b \geq r_3(2a)$ giver lemma 4.8 (med $n = 2a$ og $s = b$), at der eksisterer delmængder V_1 og V_2, af størrelse $2a$, af hhv. K^b og $\overline{K^b}$, så $E_G(V_1, V_2) = V_1 \times V_2$ eller $E_G(V_1, V_2) = \emptyset$. Disse vil svare til enten $K^{2a} + \overline{K^{2a}}$ eller $K^{2a} \cup \overline{K^{2a}}$. Dette er i modstrid med, at m var maksimal, sådan at ingen af disse typer af grafer ikke var i $G[R_1]$.

Resten af beviset forløber ved at vise, at den følgende sekvens af mængder, hverken kan eller ikke kan findes. Lad $R_{2,0} = R_2$. Lad for $1 \leq i \leq m$, $X'_i \subseteq X_i$ og lad $Y'_i \subseteq R_{2,i-1}$ så at $|X'_i| = a$, $G[Y'_i] = \overline{K^{2a}}$ og $E_G(X'_i, Y'_i) = X'_i \times Y'_i$. Sæt $R_{2,i} = R_{2,i-1} - Y'_i$.

Antag først, at følgen $R_{2,0}, R_{2,1}, \ldots, R_{2,m}$ kan genereres. Lad l være det maksimale antal af punktdisjunkte $\overline{K^b}$ i $R_{2,m}$ og lad $V_1, V_2, \ldots, V_l$ være disses punktmængder. Pr. maksimalitet af l, haves

$$|R_{2,m}| - \left|\cup_{i=1}^{l} V_i\right| < r_1(b).$$

Da må der om mængden $V = \cup_{i=1}^{m}(X_i \cup Y_i \cup Y'_i) \cup \left(\cup_{i=1}^{l} V_i\right)$ gælde, at $|V| \geq s - c$. Enhver $G[X_i \cup Y_i \cup Y'_i]$ kan opdeles i et antal $K^k + \overline{K^{2k}}$, hvorefter disse kan opdeles i 2 $\overline{K^k}$:

$$\begin{aligned} N(G, \overline{K^k}) &\geq \frac{2}{3k}(s - c) \\ &\geq n, \end{aligned}$$

hvilket er i modstrid med, at G er ikke-(n, k)-god.

Antag nu, at følgen ikke kan genereres, dvs. der eksisterer et $1 \leq v \leq m$, så at udvælgelsen af X'_v og Y'_v fejler. Lad $R_3 = R_{2,v-1}$.

Påstand 5. *$G[R_3]$ indeholder ingen $\overline{K^b}$.*

Antag, at der eksisterer $Z \subseteq R_3$ så $G[Z] \simeq \overline{K^b}$. Pr. lemma 4.7 vil der, da $b \geq r_2(a, 2a)$, findes $X' \subseteq X_{v+1}$ og $Z' \subseteq Z$ så $|X'| = a$, $|Z'| = 2a$ og $E_G(X', Z') = X' \times Z'$ eller $E_G(X', Z') = \emptyset$.

Hvis $E_G(X', Z') = X' \times Z'$, overholder X' og Z' kravene for X'_{v+1} og Y'_{v+1}, hvilket er i modstrid med, at de ikke kunne vælges. Hvis $E_G(X', Z') = \emptyset$, så vil $X'_{v+1} \subseteq X_{v+1}$ og $Y'_{v+1} \subseteq Y_{v+1}$ med $|X'_{v+1}| = |Y'_{v+1}| = a$ og $X'_{v+1} \cap X' = \emptyset$ inducere en $K^a + \overline{K^a}$ og X' og Z' vil inducere en $K^a \cup \overline{K^a}$, hvilket er i modstrid med påstand 2.

Afslutningsvis defineres nu $X = \cup_{i=1}^{m} X_i$ og $Y = \cup_{i=1}^{m} Y_i \cup \left(\cup_{i=1}^{v} Y'_i\right)$. Pr. påstand 4 og 5 inducerer R_3 ingen K^b eller $\overline{K^b}$ som delgraf, så $|R_3| < r_1(b) \leq c$. Dermed vil $|X| + |Y| \geq s - c$. Dermed

$$\begin{aligned} kN(G,K^k)+kN(G,\overline{K^k})+N(G,K^{1,k-1}) &\geq k\frac{|X|}{k-1}+k\frac{|Y|}{k}+\frac{|Y|}{k-1} \\ &= \frac{k}{k-1}(|X|+|Y|) \geq \frac{k}{k-1}(s-c) \\ &\geq (2k+1)n. \end{aligned}$$

Dette er en modstrid. Dette afslutter beviset for den øvre grænse. □

KAPITEL 5

Afrunding

Igennem dette speciale er der blevet givet en teoretisk beskrivelse for Ramsey-teori for grafer. Flere grænser for klassiske Ramsey-tal blev udledt, heriblandt Ramseys sætning, der viste eksistensen af alle klassiske Ramsey-tal. Flere klassiske Ramsey-tal blev bestemt eksakt, heriblandt de 5 fundet af Gleason og Greenwood i 1955. Beviser i Ramsey-teori er ofte kendetegnet ved små og snedige konstruktioner, og i visse tilfælde, som f.eks. i beviset for at $R(4,4) = 18$, ses det at der ud af $2^{\binom{17}{2}}$ to-kantfarvede komplette grafer på 17 punkter kun eksisterer en entydig graf uden en monokromatisk K^4. I netop dette tilfælde blev der benyttet en Paley-graf, men også cykliske grafer er blevet brugt i andre beviser.

Bevisteknikkerne, der fører til grænser for Ramsey-tallene $R(4,5)$ og $R(5)$ blev omtalt. Den nedre grænse $43 \leq R(5)$ blev vist udfra en to-kantfarvning af en K^{42} uden en monokromatisk K^5. Grænserne $R(4,5) \leq 25$ og $R(5) \leq 49$ var baseret på omfattende beregninger, der ikke blev diskuteret i detaljer i dette speciale.

De generelle Ramsey-tal blev introduceret i den anden del af rapporten. Vi har forsøgt at dække området med en bred samling af resultater for mange typer af grafer. For Ramsey-tallet $R(P_m, P_n)$ kendes tallet eksakt for alle værdier af m og n. Dette er ikke sandt i mange tilfælde, som vi har set det for f.eks. $R(B_m, B_n)$ og $R(F_m, F_n)$.

Som sidste kapitel i specialet studerede vi antallet af punktdisjunkte inducerede delgrafer i en graf af en given orden. Som nævnt har dette forbindelse til Ramsey-teori. Hovedresultatet i kapitlet har dog ikke nogen tilknytning til den Ramsey-teori, der er omtalt i specialet.

BILAG A

Uløste problemer indenfor Ramsey-teori

I dette afsnit ses der på et par uløste problemer indenfor Ramsey-teori.

A.1 En formodning af Erdös

Erdös udlovede i 1947 100$ ([Chu97]) for at at bevise en formodning om, at følgen $\{R(m,m)^{1/m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergerede og udlovede yderligere 250$ for at bestemme den eventuelle grænseværdi. Problemet er, efter vores bedste vidende, ikke løst endnu og vi vil her diskutere forskellige muligheder for at vise, at følgen er konvergent.

Givet, at $R(m,m) > 2^{m/2}$ pr. sætning 2.13 for $m \geq 3$ og $R(m,m) \leq 2^{2m-3}$ pr. sætning 2.7, kan det ses, at

$$\sqrt{2} \leq R(m,m)^{1/m} \leq 4,$$

for alle $m \geq 2$, hvor den nedre lighed fåes for $m = 2$.

Der er to oplagte måder, som muligvis kan bruges til at vise, at følgen konvergerer:

Da følgen er begrænset med øvre og nedre grænse vil følgen, pr. [Coh03, sætning 1.7.10, s. 39], være konvergent, hvis den er enten monotont voksende eller monotont aftagende.

Undersøger man $R(m,m)^{1/m}$ for små værdier af m, ses det, at disse vokser i værdi, så eneste mulighed er at vise, at følgen er monotont voksende. En måde at vise, at $R(m,m)^{1/m} \leq R(m+1,m+1)^{1/(m+1)}$ for alle m er at finde en øvre grænse for $R(m,m)^{1/m}$ og en nedre grænse for $R(m+1,m+1)^{1/(m+1)}$ og vise, at den øvre grænse altid er mindre end eller lig den nedre grænse.

En anden idé er at finde to følger $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ og $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ som begge konvergerer med samme grænse og vise, at $a_m \leq R(m,m)^{1/m} \leq b_m$ for alle m, hvorved $\{R(m,m)^{1/m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ også vil konvergere mod denne grænse.

Ingen af fremgangsmåderne har båret frugt i dette speciale.

A.2 Øvre grænse $R(3,7) = 23$

I et andet uløst problem tilbyder David Cariolaro 500£[1] til den person, der inden d. 1/6-2009, har det mest elegante bevis for at Ramsey-tallet $R(3,7) \leq 23$, uden brug af computer. Vi giver her en idé til, hvordan et sådant bevis kunne gribes an. Lad i resten af afsnittet G være en graf uden en K^3 i G eller en K^7 i $\overline{G}$.

Idet vi fra Ramseys sætning har, at $R(3,7) \leq R(2,7) + R(3,6) = 7 + 18 = 25$, er det nok at betragte grafer med 23, 24 eller 25 punkter. Et vilkårligt punkt $v \in V(G)$ opfylder $d(v) < 7$: antag modsætningsvist, at der eksisterer et $v \in V(G)$ med $d(v) \geq 7$. Siden der ikke er en K^3 i G, vil ingen af v's naboer være indbyrdes forbundet. Dette giver dog en uafhængig mængde på mindst 7 punkter, hvilket er i modstrid med, at G ikke indeholder en induceret $\overline{K^7}$. Istedet for at benytte den traditionelle bevismetode og tage udgangspunkt i en graf på 23 punkter og vise, at denne altid indeholder en K^3 eller en induceret $\overline{K^7}$ er bevisideen nu at vise, at ovenstående antagelser og observationen om, at $d(v) \leq 6$ for alle $v \in V(G)$, umuliggør, at grafen G kan have 24 eller 25 punkter og dermed må $R(3,7) \leq 23$. Med andre ord vises det, at der ikke findes nogen $(3,7,24)$- og $(3,7,25)$-grafer.

Der tages udgangspunkt i en graf på 25 punkter med $d(v) \leq 6$ for alle $v \in V(G)$. Lad $v \in V(G)$. Dermed har v mindst 18 naboer i $\overline{G}$. Ved at benytte $R(3,6) = 18$ på $N_{\overline{G}}(v)$ er der enten en K^3 i blandt

[1] `http://www.math.sinica.edu.tw/post-doctor/cariolaro/`

$N_{\overline{G}}(v)$ eller en induceret $\overline{K^6}$ blandt $N_{\overline{G}}(v)$, der sammen med v giver en induceret $\overline{K^7}$ i G, altså en modstrid. Dermed findes der ingen $(3,7,25)$-grafer.

Der tages nu udgangspunkt i en graf på 24 punkter med $d(v) \leq 6$. Med samme argument som ovenfor kan det konkluderes, at $d(v) \geq 6$ og dermed er G 6-regulær. Så hvis det kan vises, uden brug af computer, at der ikke eksisterer nogen 6-regulære grafer på 24 punkter uden en K^3 og uden en induceret $\overline{K^7}$, er vi færdige.

BILAG B

O-notation

Definition B.1
Lad $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Funktionen* $f(n)$ *siges at være* $O(g(n))$*, skrevet* $f(n) = O(g(n))$*, hvis der eksisterer* $c, n_0 \in \mathbb{R}$ *så* $|f(n)| \leq c|g(n)|$ *for alle* $n \geq n_0$*.*

Litteratur

[BEFS89] S. A. Burr, P. Erdös, R. J. Faudree og R. H. Schelp. On the Difference between Consecutive Ramsey Numbers. *Utilitas Mathematica*, 35:115-118, 1989.

[BES75] S. A. Burr, P. Erdös og J.H. Spencer. Ramsey Theorems for Multiple Copies of Graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 209:87-99, 1975.

[Bur81] S. A. Burr. Ramsey Numbers Involving Graphs with Long Suspended Paths. *J. London Math. Soc.*, s2-24(3):405-413, 1981.

[Chu97] Fan R. K. Chung. Open problems of Paul Erdös in graph theory. *Journal of Graph Theory*, 25(1):3-36, 1997.

[Coh03] Graeme Cohen. *A Course in Modern Analysis and its Applications*. Cambridge University Press, 2003.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (elektronisk udgave)*. Springer-Verlag, Heidelberg, Tredje udgave, 2005.

[Exo89] Geoffrey Exoo. A lower bound for $r(5,5)$. *Journal of Graph Theory*, 13:97-98, 1989.

[GG55] R. E. Greenwood og A. M. Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, 7:1-7, 1955.

[Ḧ89] R. Häggkvist. On the Path-complete Bipartite Ramsey Number. *Discrete Math.*, 75(1-3):243-245, 1989.

[Kal67] J. G. Kalbfleisch. A uniqueness theorem for edge-chromatic graphs. *Pacific J. Math.*, 21:503-509, 1967.

[LR96] Yusheng Li og Cecil C. Rousseau. Fan-complete Graph Ramsey Numbers. *J. Graph Theory*, 23(4):413-420, 1996.

[LS08] Y. Li og J. Shen. Bounds for Ramsey Numbers of Complete Graphs dropping an edge. *European Journal of Combinatorics*, 29:88-94, 2008.

[LZ05] Yusheng Li og Wenan Zang. Introduction to Graph Ramsey Theory, 2005.

[MR95] B. D. McKay og S. P. Radziszowski. $r(4;5) = 25$. *Journal of Graph Theory*, 19:309-322, 1995.

[MR97] B. D. McKay og S. P. Radziszowski. Subgraph Counting Identities and Ramsey Numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 69(2):193-209, 1997.

[Par74] T. D. Parsons. Path-star Ramsey Numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, 17(1):51-58, 1974.

[Piw96] Konrad Piwakowski. Applying Tabu Search to Determine New Ramsey Graphs. *Electr. J. Comb.*, 3(1), 1996.

[Rad06] Stanislaw P. Radziskowski. Small Ramsey Numbers. `http:/www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf`, 2006.

[RS78] C. C. Rousseau og J. Sheehan. On Ramsey Numbers for Books. *Journal of Graph Theory*, 2(1):77-87, 1978.

[She98] Bruce Shechter. *My brain is open: The Mathematical Journeys of Paul Erdös*. Touchstone, 1998.