

Algoritmo para la adaptación paramétrica de un sistema borroso mediante el filtro de Kalman extendido

A. J. Barragán*, J. M. Andújar*, M. J. Aznar* y A. Jiménez**

*E.T.S. de Ingeniería, Ctra. Huelva-La Rábida s/n, 21071 Palos de la Ftra. (Huelva), España, (e-mail: {antonio.barragan, andujar} @diesia.uhu.es, marianojose.aznar@alu.uhu.es)

**E.T.S. de Ingenieros Industriales, J. Gutiérrez Abascal, 2, 28006 Madrid, España (e-mail: agustin.jimenez@upm.es)

Resumen: La fase de modelado es fundamental tanto en el proceso de análisis de un sistema dinámico como en el de diseño de un sistema de control. Esta fase es aún más crítica si se realiza en línea y la única información que se posee del sistema proviene de datos de entrada-salida del mismo. En este trabajo se presenta un algoritmo para la adaptación paramétrica de un sistema borroso basado en el filtro de Kalman extendido, el cual permite obtener modelos precisos sin renunciar a la eficiencia computacional que caracteriza al filtro de Kalman, y que permite su aplicación en línea con el proceso.

Palabras Clave: Filtro de Kalman, estimación, modelado.

1. INTRODUCCIÓN

El filtro de Kalman se ha utilizado junto con la lógica borrosa en diversas aplicaciones, como en la extracción de reglas a partir de una base de reglas dada (Wang and Yen, 1999), en optimización de los parámetros de mecanismos de desborrosificación (Jiang and Li, 1996), o en la optimización de modelos Takagi-Sugeno (Ramaswamy *et al.*, 1993; Simon, 2002). Sin embargo, esta propuesta no ha sido generalizada hasta el momento a la adaptación tanto de antecedentes como de consecuentes de modelos Takagi-Sugeno generales.

En este trabajo se presenta un algoritmo general para la estimación de los parámetros adaptables de un modelo borroso mediante el uso del filtro de Kalman extendido (EKF, *Extended Kalman Filter*). Este algoritmo es general porque no se limita ni en el tamaño de los vectores de entrada o salida, ni en el tipo o la distribución de las funciones de pertenencia utilizadas en la definición de los conjuntos borrosos del modelo. De esta forma, los autores pretenden emplear las excelentes características del filtro de Kalman para la obtención de modelos borrosos de sistemas en principio desconocidos a partir de datos de entrada/salida de los mismos, permitiendo además su aplicación en tiempo real (Jiménez *et al.*, 2008; Barragán *et al.*, 2010).

El presente artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se presenta el problema del modelado borroso de forma completamente general con la notación que se utilizará a lo largo del artículo. La sección 3 está dedicada a la presentación formal del filtro de Kalman extendido y su utilización para el modelado de sistemas. Posteriormente, en la sección 4, se resuelve el cálculo de las derivadas para la aplicación del filtro de Kalman extendido al problema del modelado borroso, manteniendo la generalidad del problema y teniendo en cuenta que se incluirán en el proceso de modelado tanto los parámetros adaptables de los antecedentes como de los consecuentes de las reglas. Finalmente en la sección 5 se presentan algunas conclusiones y líneas futuras de trabajo.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado que la consecución de un modelo adecuado es un paso fundamental para la aplicación posterior de distintas técnicas tanto de análisis (Andújar *et al.*, 2004; Andújar *et al.*, 2009b) como de diseño (Andújar *et al.*, 2009a), se ha optado por realizar un modelo borroso de tipo Takagi-Sugeno, completamente general, con objeto de poder afrontar el problema sin restricciones previas.

Sea n el número de variables de entrada y m el de salidas del sistema a modelar. Un modelo borroso discreto MIMO puede representarse mediante el conjunto de reglas siguiente (Babůska, 1995; Nguyen *et al.*, 1995; Takagi and Sugeno, 1985):

$$R^{(l,i)} : \text{Si } x_1(k) \text{ es } A_{i1}^l \text{ y } \dots \text{ y } x_n(k) \text{ es } A_{in}^l \\ \text{Entonces } y_i^l(k) = a_{0i}^l + \sum_{j=1}^n a_{ji}^l x_j(k), \quad (1)$$

donde $l=1..M_i$ es el índice de la regla y M_i el número de reglas que modelan la evolución de la i -ésima salida del sistema en el instante k , $y_i(k)$. $A_{i1}^l, \dots, A_{in}^l$ son los conjuntos borrosos definidos en los universos de discurso de cada una de las variables de estado. Los elementos a_{ji}^l , $j=0..n$, representan el conjunto de parámetros adaptables de los consecuentes de las reglas.

Nótese que en la representación anterior, la dinámica de cada salida se puede modelar mediante un número distinto de reglas, lo que facilita la reducción del número total de reglas necesarias para modelar correctamente un sistema complejo.

Si el vector de entradas se extiende en una coordenada (Andújar and Barragán, 2005; Andújar *et al.*, 2009a), mediante $\tilde{x}_0 = 1$, el vector extendido, $\tilde{\mathbf{x}}$ adopta la forma:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T = (1, x_1, \dots, x_n)^T \quad (2)$$

Utilizando el promedio ponderado como método de agregación y la extensión del vector de estado dada en (2), la salida y_i generada por el conjunto de reglas $R^{(l,i)}$, puede calcularse mediante (Wang, 1994; Wang, 1997):

$$y_i(k) = h_i(\mathbf{x}(k)) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x}) a_{ji}^l}{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x})} \tilde{x}_j(k) \right), \quad (3)$$

donde $w_i^l(\mathbf{x})$ representa el grado de activación de las reglas del modelo borroso:

$$w_i^l(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \mu_{ji}^l(x_j(k), \sigma_{ji}^l) \quad (4)$$

$\mu_{ji}^l(x_j(k), \sigma_{ji}^l)$ representa la j -ésima función de pertenencia de la regla l para la i -ésima salida del modelo, la cual determina el conjunto borroso A_{ji}^l . Los elementos σ_{ji}^l representan el conjunto de parámetros adaptables de dicha función de pertenencia, por lo que el tamaño y significado de cada uno de los elementos de este vector dependerá del tipo de función de pertenencia escogida para cada uno de los antecedentes del modelo borroso. Dichos valores, junto con los parámetros adaptables de los consecuentes de las reglas, a_{ji}^l , deberán ser determinados según el algoritmo de estimación para la consecución de un modelo adecuado del sistema.

3. FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

El filtro de Kalman fue desarrollado por Rudolph E. Kalman en 1960 (Kalman, 1960), y permite construir un observador óptimo para sistemas lineales en presencia de ruido blanco tanto en el modelo como en las medidas. Posteriormente, el filtro de Kalman fue adaptado para su utilización en sistemas no lineales a través del filtro de Kalman extendido (Maybeck, 1979), siempre que el sistema admita modelos linealizados en torno a cualquier punto de trabajo. Aunque el filtro de Kalman extendido no resulta óptimo, ya que se basa en una aproximación lineal del modelo y su precisión depende estrechamente de la bondad de dichas aproximación, es una herramienta poderosa para la estimación en entornos con presencia de ruido.

Sea un sistema discreto no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{e}(k), \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{e}(k)$ son ruidos blancos que representan la incertidumbre en el modelo de la ecuación de estado y salida, respectivamente, y sean las matrices jacobianas del sistema:

$$\Phi(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)} \quad (6)$$

$$\Gamma(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)} \quad (7)$$

y

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)}. \quad (8)$$

El filtro de Kalman extendido puede resolverse mediante la aplicación iterativa del siguiente conjunto de ecuaciones (Grewal and Andrews, 2001):

$$\mathbf{P}(k|k) = \Phi(k)\mathbf{P}(k|k-1)\Phi^T(k) + \mathbf{R}_v \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= (\Phi(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_{ve}) \\ &(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_e)^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) \\ &+ \mathbf{K}(k)(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k) &= \Phi(k)\mathbf{P}(k|k)\Phi^T(k) + \mathbf{R}_v \\ &- \mathbf{K}(k)(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k)\Phi^T(k) + \mathbf{R}_{ve}^T), \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}(\cdot)$ es la estimación del vector de estado, $\hat{\mathbf{y}}(k)$ la estimación de la salida, $\mathbf{P}(k|k)$ y $\mathbf{P}(k+1|k)$ son las matrices de covarianza estimadas a priori y a posteriori, respectivamente, \mathbf{K} es la ganancia del filtro de Kalman, y \mathbf{R}_v , \mathbf{R}_{ve} y \mathbf{R}_e son las matrices de covarianza del ruido, calculadas a partir del operador esperanza, $E(\cdot)$:

$$\mathbf{R}_v = E(\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)) \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_{ve} = E(\mathbf{v}(k)\mathbf{e}^T(k)) \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_e = E(\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)) \quad (15)$$

El proceso iterativo se inicia con una estimación inicial del vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{m}_0 = E(\mathbf{x}(0))$ y la matriz de covarianza $\mathbf{P}(0) = E((\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0)(\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0)^T)$, siendo conocidas $\mathbf{x}(0|-1)$, $\mathbf{u}(0)$ e $\mathbf{y}(0)$. Una vez inicializado el filtro, evoluciona en línea con el sistema, obteniendo una solución que minimiza tanto el error de estimación como la matriz de covarianza del mismo para la linealización obtenida en cada instante. Si el sistema es completamente desconocido y no se posee una estimación inicial de $\hat{\mathbf{x}}(0)$, éste puede inicializarse indistintamente con cualquier valor. En este caso, la matriz de covarianza inicial, $\mathbf{P}(0)$, debe inicializarse como la matriz identidad multiplicada por un factor positivo elevado, el cual indica la poca certeza que se posee sobre el valor inicial de $\hat{\mathbf{x}}(0)$.

4. APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO AL MODELADO BORROSO

El esquema de la figura 1, donde $\mathbf{p}(k)$ representa el conjunto de parámetros adaptables del modelo e $\mathbf{y}(k)$ el conjunto de salidas del mismo, permite la utilización del filtro de Kalman extendido en la determinación en línea de un modelo borroso.

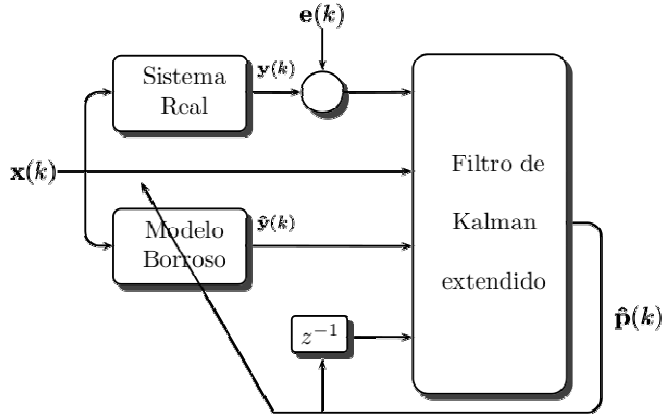


Figura 1: Esquema de modelado borroso mediante el filtro de Kalman extendido.

En primer lugar se debe construir un sistema cuyos estados se correspondan con los parámetros que se desean estimar, para posteriormente aplicar recursivamente (9), (10), (11) y (12).

El sistema representado en (16) permite la obtención de dichos parámetros a partir de la aplicación del filtro de Kalman extendido (Barragán *et al.*, 2010).

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k+1) &= \mathbf{p}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{p}(k)) + \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (16)$$

La señal $\mathbf{e}(k)$ es la incertidumbre de la medida de la salida del sistema, y viene representada por un ruido blanco cuya covarianza viene determinada por (15).

Para aplicar el filtro de Kalman extendido es necesario calcular las matrices jacobianas del sistema haciendo uso de (6), (7) y (8). Al aplicar dichas expresiones sobre (16) se obtiene:

$$\Phi(\mathbf{p}(k)) = \mathbf{I} \quad (17)$$

$$\Gamma(\mathbf{p}(k)) = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}(k)}, \quad (19)$$

siendo $\hat{\mathbf{p}}(k)$ la estimación actual del vector de parámetros del modelo borroso.

Dada la formulación planteada en la sección 2, el problema de estimación consiste en determinar los valores de los parámetros adaptables tanto de los antecedentes, σ_{ji}^l , como de los consecuentes de las reglas, a_{ji}^l . Por lo tanto, para un modelo

borroso TS, la expresión $\mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{p}(k))$ se corresponde con (3), y (19) debe obtenerse a partir de la derivada de dicha expresión con respecto a cada uno de los parámetros adaptables del modelo borroso. El cálculo de la matriz \mathbf{C} ha sido resuelto por los autores en (Barragán *et al.*, 2010), obteniéndose las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial h_i}{\partial a_{ji}^l} = \begin{cases} \frac{w_i^l \tilde{x}_j}{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l} & \text{si } i = I \\ 0 & \text{si } i \neq I \end{cases} \quad (20)$$

Sólo la salida I -ésima dependerá del parámetro σ_{ji}^l , por lo tanto, si $i \neq I$,

$$\frac{\partial h_i}{\partial \sigma_{ji}^l} = 0; \quad (21)$$

en caso contrario:

$$\frac{\partial h_i}{\partial \sigma_{ji}^l} = \frac{\partial w_i^l}{\partial \sigma_{ji}^l} \sum_{j=0}^n \left(\frac{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l (a_{ji}^l - a_{ji}^l)}{\left(\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} \right) \tilde{x}_j \quad (22)$$

Para concluir el cálculo de (22) es necesario determinar la derivada del grado de activación de las reglas del modelo borroso, w_i^l , con respecto a cada uno de los parámetros de los antecedentes.

$$\frac{\partial w_i^l}{\partial \sigma_{ji}^l} = \frac{\partial \mu_{ji}^l(x_j(k), \sigma_{ji}^l)}{\partial \sigma_{ji}^l} \prod_{q=1, q \neq j}^n \mu_{qi}^l(x_q(k), \sigma_{qi}^l) \quad (23)$$

Evidentemente este cálculo es dependiente del tipo de función de pertenencia que se utilice para cada antecedente. Nótese que $\frac{\partial \mu_{ji}^l(x_j(k), \sigma_{ji}^l)}{\partial \sigma_{ji}^l}$ representa la derivada de la función de

pertenencia definida mediante el conjunto de parámetros σ_{ji}^l . El cálculo de esta derivada depende del tipo de función de pertenencia utilizada y podrá realizarse a partir de la expresión que la define.

4.1 Algoritmos para la adaptación paramétrica de un sistema borroso basado en el filtro de Kalman extendido

A continuación se presentan tres algoritmos que permiten la aplicación del filtro de Kalman extendido al modelado de un sistema borroso. El algoritmo 1, EKF(c), ajusta únicamente los consecuentes del modelo borroso, manteniendo los antecedentes en su valor inicial. Al necesitar realizar menos cálculos es el algoritmo más rápido, pero el hecho de no ajustar los antecedentes limita su capacidad de modelado de sistemas complejos. El algoritmo 2 y el algoritmo 3 ajustan tanto los antecedentes como los consecuentes del modelo borroso, pero afrontando el proceso de modelado mediante dos estrategias distintas. El algoritmo 2, EKF(ac), realiza el ajuste simultáneo de

los antecedentes y los consecuentes; mientras que el algoritmo 3, EKF(a+c), realiza en primer lugar el ajuste de los consecuentes y a continuación el de los antecedentes. Este algoritmo es el que requiere más cálculos, ya que realmente supone la ejecución secuencial de dos filtros, aunque, como se verá posteriormente, es el que genera mejores resultados.

```

 $\hat{\mathbf{p}}(0|-1) = \mathbf{0}$ 
 $\mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{I}\alpha$ 
for  $k = 0..k_{final}$ 
    Calcular  $\mathbf{P}(k|k)$  mediante (9)
    Estimar  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  mediante (3)
    Calcular  $\mathbf{C}(k)$  mediante (20)
    Obtener  $\mathbf{K}(k)$  mediante (10)
    Actualizar  $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k)$  mediante (11)
    Actualizar  $\mathbf{P}(k+1|k)$  mediante (12)
end for  $k$ 

```

Algoritmo 1. EKF(c). Ajuste de los consecuentes del modelo borroso.

```

 $\mathbf{p}_a$  = parámetros antecedentes iniciales
 $\mathbf{p}_c = \mathbf{0}$ 
 $\hat{\mathbf{p}}(0|-1) = [\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_c]$ 
 $\mathbf{P}(0|-1) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}\beta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\alpha \end{pmatrix}$ 
for  $k = 0..k_{final}$ 
    Calcular  $\mathbf{P}(k|k)$  mediante (9)
    Estimar  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  mediante (3)
    Calcular  $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \sigma}$  mediante (23)
    Calcular  $\mathbf{C}_a(k)$  mediante (22)
    Calcular  $\mathbf{C}_c(k)$  mediante (20)
     $\mathbf{C}(k) = [\mathbf{C}_a(k), \mathbf{C}_c(k)]$ 
    Obtener  $\mathbf{K}(k)$  mediante (10)
    Actualizar  $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k)$  mediante (11)
    Actualizar  $\mathbf{P}(k+1|k)$  mediante (12)
end for  $k$ 

```

Algoritmo 2. EKF(ac). Ajuste simultáneo de los antecedentes y los consecuentes del modelo borroso.

```

 $\hat{\mathbf{p}}_c(0|-1) = \mathbf{0}$ 
 $\hat{\mathbf{p}}_a(0|-1)$  = parámetros antecedentes iniciales
 $\mathbf{P}_c(0|-1) = \mathbf{I}\alpha$ 
 $\mathbf{P}_a(0|-1) = \mathbf{I}\beta$ 
for  $k = 0..k_{final}$ 
    Calcular  $\mathbf{P}_c(k|k)$  mediante (9)
    Estimar  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  mediante (3)
    Calcular  $\mathbf{C}_c(k)$  mediante (20)
    Obtener  $\mathbf{K}_c(k)$  mediante (10)
    Actualizar  $\hat{\mathbf{p}}_c(k+1|k)$  mediante (11)

```

Actualizar $\mathbf{P}_a(k+1|k)$ mediante (12)

.....

Calcular $\mathbf{P}_a(k|k)$ mediante (9)

Estimar $\hat{\mathbf{y}}(k)$ mediante (3)

Calcular $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \sigma}$ mediante (23)

Calcular $\mathbf{C}_a(k)$ mediante (22)

Obtener $\mathbf{K}_a(k)$ mediante (10)

Actualizar $\hat{\mathbf{p}}_a(k+1|k)$ mediante (11)

Actualizar $\mathbf{P}_a(k+1|k)$ mediante (12)

end for k

Algoritmo 3. EKF(a+c). Ajuste por separado de los consecuentes y los antecedentes del modelo borroso.

5. EJEMPLOS

A continuación se demuestra la aplicación del filtro de Kalman extendido al modelado mediante varios ejemplos ilustrativos. Para cada caso se ejecutarán los 3 algoritmos presentados en la sección anterior con objeto de evaluar su desempeño: EKF(c), que realiza el ajuste únicamente de los consecuentes del modelo borroso; EKF(ac), que realiza el ajuste simultáneo tanto de los antecedentes como de los consecuentes del modelo borroso; y EKF(a+c) que realiza el ajuste de los consecuentes y los antecedentes en 2 fases.

Dado el sistema:

$$y(x) = e^{-0.03x} \sin(0,1x), \quad (24)$$

afectado por un ruido blanco de covarianza $R_e = 0.5$, se va a realizar el modelado del mismo partiendo de dos configuraciones iniciales distintas. En el primer caso se utilizará un modelo inicial compuesto únicamente por funciones de pertenencia gaussianas uniformemente distribuidas; mientras que en el segundo caso, se partirá de un modelo inicial más complejo compuesto por varias funciones de pertenencia mezcladas de distinto tipo.

Con objeto de poder comprobar el desempeño de los algoritmos, se utilizarán los mismos parámetros para ambos casos. Se aplicará una entrada de pendiente unitaria, que evoluciona desde $x = -150$ hasta $x = 150$. La matriz de covarianza inicial para cada uno de los algoritmos se inicializará con el valor que permite obtener el mejor desempeño en cada caso, esto es, $\alpha = 10^{10}$ para el algoritmo EKF(c), $\alpha = \beta = 10^3$ para el algoritmo EKF(ac), y $\alpha = 10^{10}$ y $\beta = 10^6$ para EKF(a+c).

5.1 Caso A. Funciones de pertenencia gaussianas

Partiendo de un modelo inicial cuyos antecedentes se muestran en la figura 2, y con todos los consecuentes iniciales a cero, se han ejecutado los 3 algoritmos de ajuste. El algoritmo EKF(ac) ha modificado los antecedentes muy levemente, mientras que los antecedentes resultantes del algoritmo EKF(a+c) se muestran en la figura 3.

El error medio final del algoritmo EKF(c) es 5,38954; éste baja hasta 5,27118 para el algoritmo EKF(ac) y hasta 2,04654 para el algoritmo EKF(a+c).

Como puede observarse en las figuras 4, 5, 6 y 7, el mejor resultado tanto durante el modelado en línea como durante la validación del modelo final, es el algoritmo EKF(a+c).

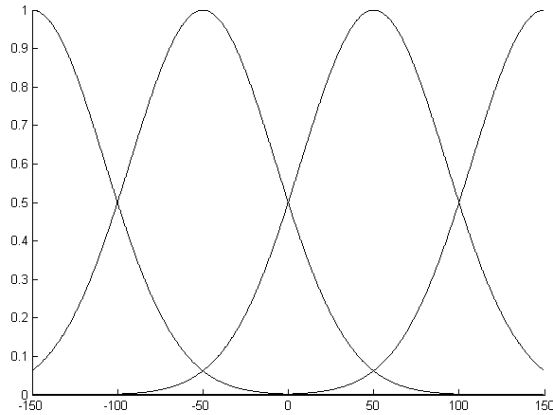


Figura 2. Funciones de pertenencia iniciales.

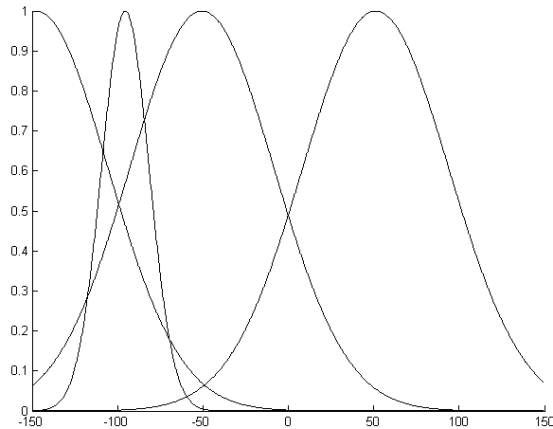


Figura 3. Funciones de pertenencia resultantes del algoritmo EKF(a+c).

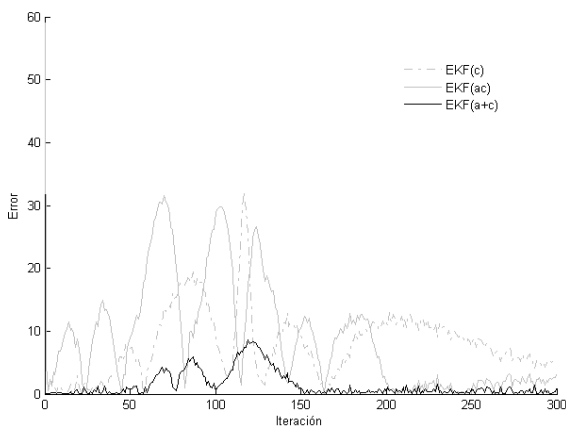


Figura 4. Errores de modelado durante la ejecución.

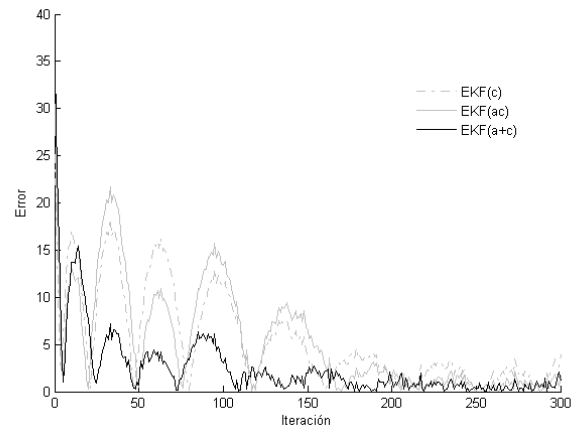


Figura 5. Errores absolutos de los modelos finales.

El modelo borroso obtenido por el algoritmo FKF(a+c) es:

$$R^{(1,1)}: \text{Si } x \text{ es GAUSSMF}(-147.595;59.556) \\ \text{entonces } y = 372.997 + 3.053x$$

$$R^{(2,1)}: \text{Si } x \text{ es GAUSSMF}(-50.564;59.800) \\ \text{entonces } y = 2.741 + 0.310x$$

$$R^{(3,1)}: \text{Si } x \text{ es GAUSSMF}(51.209;60.556) \\ \text{entonces } y = -2.796 + 0.0241x$$

$$R^{(4,1)}: \text{Si } x \text{ es GAUSSMF}(-95.445;19.741) \\ \text{entonces } y = -386.089 - 3.805x$$

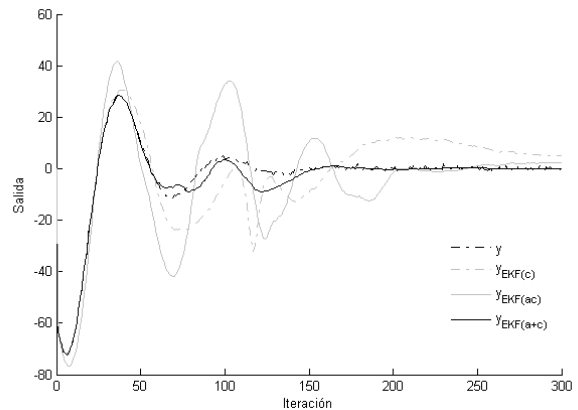


Figura 6. Respuestas de los modelos durante la ejecución.

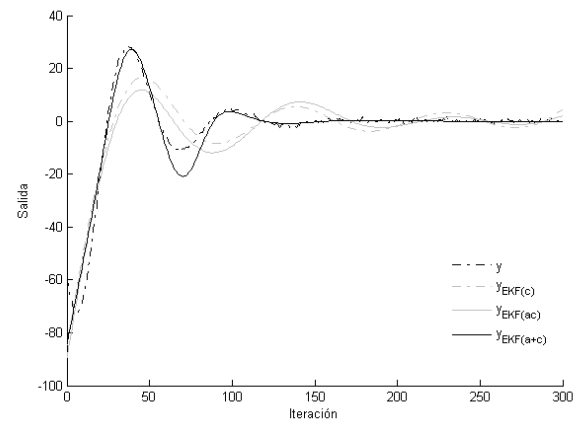


Figura 7. Respuestas de los modelos finales.

5.2 Caso B. Funciones de pertenencia de distinto tipo mezcladas

Partiendo en este caso de un modelo inicial cuyos antecedentes están constituidos por una función S, una función Z, una trapezoidal y una campana, distribuidas tal como se muestran en la figura 8, y con todos los consecuentes iniciales a cero, se han ejecutado los 3 algoritmos de ajuste. Nuevamente los mejores resultados han sido obtenidos por el algoritmo EKF(a+c), siendo los antecedentes resultantes los mostrados en la figura 9.

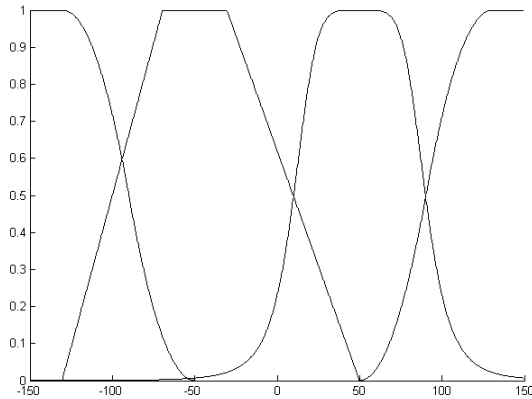


Figura 8. Funciones de pertenencia iniciales.

El error medio final del algoritmo EKF(c) es 6,1019, empeorando un poco con respecto al caso anterior. El algoritmo EKF(ac) no obtiene un buen modelo en este caso, con un error de 12,9774, mientras que el error medio final del algoritmo EKF(a+c) sigue siendo el mejor, con un error medio de 2,44907.

El modelo borroso ajustado mediante el algoritmo EKF(a+c) es:

R(1,1): Si x es ZMF(-131.355;-82.465)
entonces $y = 444.153 + 3.555x$

R(2,1): Si x es TRAPMF(-132.627;-88.399;-29.802;-18.580)
entonces $y = 8.480 + 0.196x$

R(3,1): Si x es GBELLMF(31.150;2.355;46.338)
entonces $y = -0.233 + 0.007x$

R(4,1): Si x es SMF(51.002;93.523)
entonces $y = 0.067 - 0.001x$,

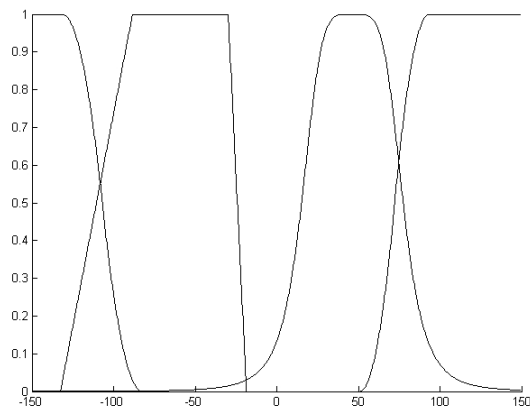


Figura 9. Funciones de pertenencia resultantes del algoritmo EKF(a+c).

Como puede observarse gráficamente en las figuras 10, 11, 12 y 13, el mejor resultado tanto durante el modelado en línea como durante la validación del modelo final, vuelve a ser el del algoritmo EKF(a+c).

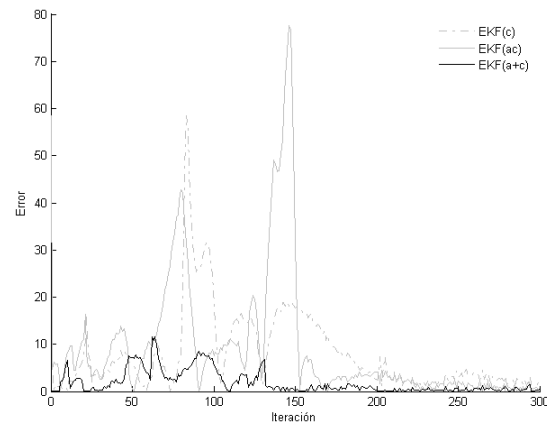


Figura 10. Errores de modelado durante la ejecución.

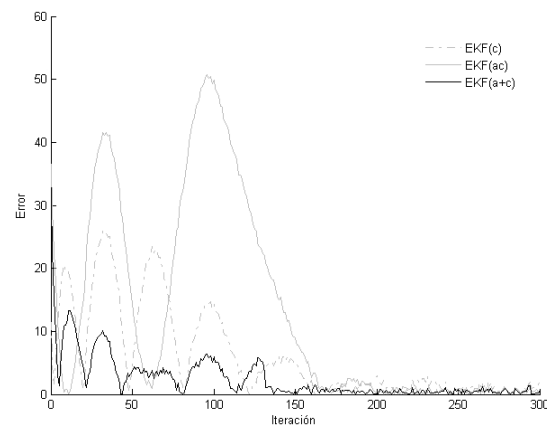


Figura 11. Errores absolutos finales.

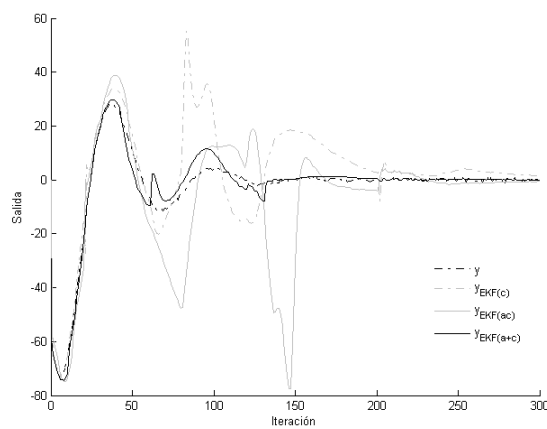


Figura 12. Respuestas de los modelos durante la ejecución.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un algoritmo basado en el filtro de Kalman extendido para la adaptación paramétrica de un sistema borroso completamente general, esto es, sin restricciones ni en el tamaño de los vectores de entrada o salida, ni en el tipo o

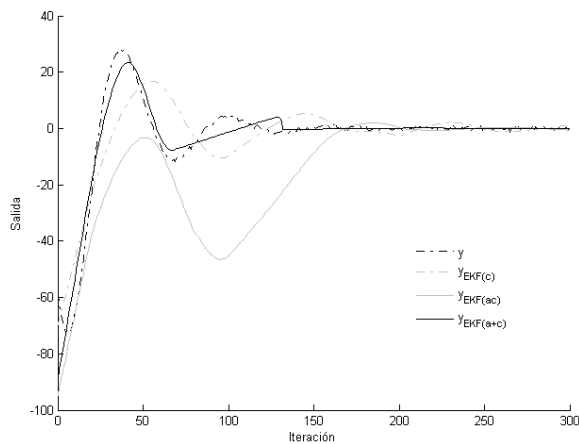


Figura 13. Respuestas de los modelos finales.

distribución de las funciones de pertenencia utilizadas en la definición de los conjuntos borrosos del modelo. Con objeto de mostrar la generalidad de la metodología, se han presentado varias alternativas posibles para el ajuste tanto de los antecedentes como de los consecuentes del modelo borroso, obteniéndose distintas comparativas de precisión y eficiencia realizadas sobre un ejemplo de sistema no lineal. A la vista de los resultados obtenidos parece evidente que el algoritmo de ajuste en dos fases obtiene en general mejores resultados, tanto en la evolución del error instantáneo durante la ejecución en línea del filtro, como en los modelos finales obtenidos. No obstante, durante las pruebas realizadas se ha observado que estos algoritmos esporádicamente pueden divergir perdiendo toda capacidad de modelado. Este comportamiento errático es mucho más frecuente en el algoritmo de ajuste conjunto. También se ha observado en todos los casos una alta dependencia de los valores asignados a los parámetros α y β .

En trabajos futuros se pretende mejorar la respuesta general de los algoritmos mediante un estudio en línea de la evolución del proceso de modelado, de forma que se obtenga un comportamiento más robusto del filtro. Además, con respecto a la inicialización de las matrices de covarianza, los autores están trabajando en distintas alternativas para limitar la dependencia actual de los parámetros α y β .

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es una contribución del proyecto DPI2007-62336/ financiado por el Ministerio de Educación.

REFERENCIAS

Andújar J.M., Barragán A.J., Gegúndez M.E., del Toro F.J. (2004). Aplicación de la matriz jacobiana de un sistema de control borroso a la obtención de sus estados de equilibrio. In: *XXV Jornadas de Automática* p. 1-10. CEA-IFAC. Ciudad Real, España.

Andújar J.M., Barragán A.J. (2005). A methodology to design stable non-linear fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, **154(2)**, p. 157-181.

Andújar J.M., Barragán A.J., Gegúndez M.E. (2009a). A general and formal methodology for designing stable non-linear fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **17(5)**, p. 1081-1091.

Andújar J.M., Barragán A.J., Graiño J. (2009b). Una metodología de análisis de sistemas dinámicos mediante lógica borrosa. In: *XXX Jornadas de Automática*. CEA-IFAC. Valladolid, España.

Babůska R. (1995). Fuzzy modelling – a control engineering perspective. In: *Proceedings of FUZZ-IEEE/IFES'95*, **volume 4**, p. 1897–1902. Yokohama, Japan.

Barragán A.J., Andújar J.M., Jiménez A., Al-Hadithi B. (2010). Adaptación paramétrica de un sistema borroso mediante el filtro de Kalman extendido. In: *XXXI Jornadas de Automática*. CEA-IFAC. Jaen, España.

Grewal M.S., Andrews A.P. (2001). *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition.

Jiang T., Li Y.T. (1996). Generalized defuzzification strategies and their parameter learning procedures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **4(1)**, p. 64–71.

Jiménez A., Al-Hadithi B.M., Matía F. (2008). An optimal T-S model for the estimation and identification of nonlinear functions. *WSEAS Trans. Sys. Ctrl.*, **3(10)**, p. 897–906.

Kalman R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions on ASME-Journal of Basic Engineering*, **82(series D)**, p. 35–45.

Maybeck P.S. (1979). Stochastic models, estimation, and control. *Mathematics in Science and Engineering*, **volume 41**. Academyc Press.

Nguyen H.T., Sugeno M., Tong R.M., Yager R.R. (1995). *Theoretical aspects of fuzzy control*. John Wiley Sons.

Ramaswamy P., Riese M., Edwards R.M., Lee K.Y. (1993). Two approaches for automating the tuning process of fuzzy logic controllers. In: *32nd IEEE Conference on Decision and Control*. Part 2 (of 4). San Antonio, TX, USA.

Simon D.J. (2002). Training fuzzy systems with the extended Kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems*, **132(2)**, p. 189–199.

Takagi T., Sugeno M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **15(1)**, p. 116–132.

Wang L.X. (1994). *Adaptive fuzzy systems and control*. Prentice Hall. New Jersey.

Wang L. (1997). *A course in fuzzy systems and control*. Prentice Hall. New Jersey, USA.

Wang L., Yen J. (1999). Extracting fuzzy rules for system modelling using a hybrid of genetic algorithms and Kalman filter. In: *Fuzzy Sets and Systems*, **101(3)**, p. 353–362.