Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años : un estudio de casos

Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:

Diana Zakaryan

Fecha de lectura: 22 de diciembre de 2011

Bajo la dirección de los doctores:

Luis Carlos Contreras González
José Carrillo Yáñez

Huelva, 2012

ISBN: 978-84-15633-89-1
D.L.: H 254-2012

Universidad de Huelva

Dpto. de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE Y COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE 15 AÑOS UN ESTUDIO DE CASOS

Tesis Doctoral

Diana Zakaryan

Huelva, 2011

Dpto. de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE Y COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE 15 AÑOS UN ESTUDIO DE CASOS

Tesis doctoral

Realizada por:
Diana Zakaryan

Dirigida por:
Dr. Luís Carlos Contreras González
Dr. José Carrillo Yáñez

Huelva, 2011

AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos van, en primer lugar, para este país, por su literatura y su arte, tan misteriosos, expresivos y profundos, que me han apasionado y guiado hacía estas tierras andaluzas, por su gente, por su cálida acogida y por la experiencia tan enriquecedora e inolvidable que he vivido aquí. En esta aventura personal y académica, doy las gracias a todas y a cada una de las personas que me he encontrado en mi camino. Creo que los encuentros, por muy insignificantes que parezcan, nos aportan algo y nunca son casuales.

No me voy a parar a nombrar a mis seres queridos y a todos mis amigos, sino tan solo a decirles que me llenan de gratitud por haberme hecho sentir acompañada, comprendida y apoyada a una distancia de kilómetros y años, y simplemente por saber que ahí están. Además, no sabría expresarlo con la misma intensidad que lo siento; nunca ha sido mi fuerte.

Sin embargo, creo que sí es este un buen lugar para nombrar y agradecer a las personas que me han ayudado y aportado a nivel profesional.

Especialmente agradezco a los dos profesores y a todos los estudiantes que han formado parte de esta investigación, por su interés, entusiasmo y colaboración.

Quiero expresar mi profunda gratitud a Pepe (José Carrillo), por facilitar y hacer posible mi formación en esta Universidad, por apoyar y orientarme en todo momento y por la ilusión de haber conocido a una persona tan entrañable e íntegra.

A Luís Carlos Contreras, por su disposición para dirigir a una extraña que apenas hablaba español, por su paciencia y buena voluntad para ayudar en todo lo que pudiera.

A Nuria Climent, por sus profundos análisis y críticas constructivas, y a todos los compañeros de SIDM, por sus debates y sugerencias para la mejora de esta Tesis.

A Luís Rico Romero, durante mi estancia en la Universidad de Granada, por sus aportaciones que contribuyeron a la fundamentación teórica de la investigación, y a José Luís Lupiáñez, por sus sugerencias y consejos respecto a la ampliación de la bibliografía académica.

A João Pedro Da Ponte, Tomás Ortega, Nuria Gorgorió y Lourdes Figueiras, durante las entrevistas personales en la Universidad de Huelva, por sus comentarios para mejorar el trabajo y sus ánimos para seguir con éste.

A Gerardo Prieto, de la Universidad de Salamanca, por sus valiosas consultas y recomendaciones respecto a los aspectos estadísticos de la investigación.

A la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID), por su apoyo económico durante tres años, que ha hecho posible la realización de esta Tesis.

¡Y a mi Destino, por haberme dado esta oportunidad!

Es bueno ponerle un final al viaje,

pero es el viaje el que importa al final.

Ursula Le Guin

ÍNDICE

ANEXOS **(Se adjunta en un CD)**

CAPÍTULO I:

INTRODUCCIÓN

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

INTRODUCCIÓN

I.1. Planteamiento del problema de la investigación

El problema que planteamos en nuestra investigación parte de una problemática más amplia y profunda relativa al fracaso de los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas, particularmente, la incapacidad de la mayoría de los estudiantes de aplicar y de utilizar matemáticas a la hora de resolver problemas de la vida cotidiana.

La problemática en sí no es nada novedosa, ha sido la fuente de la preocupación y reflexión de pedagogos, filósofos y científicos desde hace siglos. Desde las antiguas escuelas griegas se ha ido perdiendo la unión entre la escuela y la vida cotidiana, de modo que quedan lejos tiempos en los que lo que aprendían los jóvenes en la escuela estaba estrechamente ligado a lo que ejercitaban en su vida cotidiana: aritmética en el comercio[1], geometría en la guerra, astronomía en la navegación, música para glorificar a los héroes (Davis y Hersh, 1989; Cañon, 1993). En aquel entonces la escuela no estaba separada de la vida, los jóvenes prácticamente llevaban en miniatura aquella vida política la que les esperaba fuera de las paredes de la escuela. Sin embargo, más adelante, las reformas educativas ya no alcanzan a ir al paso con las reformas del entorno, en general prevalece el conocimiento teórico y formal sobre el práctico y funcional y existe un desajuste entre lo que enseñamos en la escuela y lo que usan los estudiantes en su vida cotidiana (Blanco y Blanco, 2009). De ahí que el pedagogo suizo Pestalozzi, por ejemplo, en su obra "*Cómo Gertrudis enseña a sus hijos*" (1801), hace notar que los conocimientos sin la habilidad hayan sido, quizás, el don más terrible de su época (Mrochek y Filippowich, 1910). En cuanto al conocimiento matemático, dos siglos más tarde, el problema sigue siendo actual, y la comunidad educativa sigue

[1] Aun así, el carácter práctico de la Matemática se complementaba con su papel formativo para el mundo de las ideas, como sugiere el siguiente discurso.

> "*Demos por lo tanto una ley, […] para que se consagren a la ciencia del cálculo, para que la estudien, no superficialmente, sino hasta que por medio de la pura inteligencia hayan llegado a conocer la esencia de los números, no para servirse de esta ciencia en las compras y las ventas […], sino para […] facilitar al alma el camino que debe conducirla desde la contemplación de la verdad y el ser*" (Platón, 525c).

De este modo, Platón parece distinguir dos aplicaciones de la Matemática de diferente grado de excelencia (Cañón, 1993).

reflexionando e indagando acerca del por qué la mayoría de las personas no tienen éxito en poner a la práctica sus conocimientos teóricos (Freudenthal, 1968; Schoenfeld, 1988) y cómo llegar a desarrollar y mejorar sus capacidades para aplicarlos.

Durante las últimas décadas han sido notables los esfuerzos por desarrollar indicadores de los resultados del aprendizaje, como elemento importante de cualquier sistema educativo, que reflejen una visión amplia de las metas de la educación. De este modo, estos indicadores surgen a partir de los estudios empíricos, así como de las reflexiones teóricas del proyecto DeSeCo[2] acerca de "*qué competencias necesitan los individuos para tener una vida exitosa y responsable y la sociedad para enfrentar los retos del presente y del futuro*" (Salganik, 2004, p.48-49). Dentro de estos estudios empíricos se encuentra el proyecto PISA, que ha surgido de la necesidad de contar con datos regulares comparables, y que se ha ocupado de evaluar las competencias de los estudiantes de 15 años en lectura, matemáticas y cienci, y ha elaborado y propuesto un amplio marco para tratar las competencias, entendidas como la capacidad de un individuo de utilizar lo que ha aprendido en las situaciones usuales de su vida diaria.

Según los informes PISA (Pajares, 2005; OCDE, 2005a; OCDE, 2007; OCDE, 2010), los resultados obtenidos por los estudiantes españoles en matemáticas en las pruebas internacionales PISA 2000, 2003, 2006, 2009 reflejan que la mayoría de los estudiantes son capaces de hacer problemas matemáticos que requieren unos cálculos rutinarios en situaciones estándares, próximos a las tareas del libro de texto y demuestran debilidad a la hora de resolver problemas más complejos, donde han de manifestar razonamiento, compresión más profunda y reconocimiento de los conceptos matemáticos fuera del contexto escolar. La amplia repercusión provocada por estos resultados ha hecho repensar, analizar e investigar al respecto, atendiendo a diferentes factores involucrados en el proceso de la enseñanza y aprendizaje[3].

[2] Por su nombre en ingles: Definition and Selection of Competencies: Theorical and Conceptual Foundations (OCDE, 2005b).

[3] Entre ellos, podemos citar a Rico (2004; 2007), que aborda el análisis de los resultados de los estudiantes en matemáticas y las competencias matemáticas en el estudio PISA; a Recio y Rico (2005), que consideran que los resultados obtenidos no evalúan tanto a los estudiantes, como el rendimiento del sistema, ya que ponen de manifiesto la debilidad en el logro de sus objetivos prioritarios; a Blanco (2005), que compara los instrumentos de la evaluación PISA y de la evaluación en las aulas en España; a Hernández (2006), que reflexiona sobre las consecuencias que pueden derivarse de una exploración de la

Nuestro punto de partida no es que nuestros estudiantes estén peor preparados y menos motivados que los de otros países (Osborn, et al., 2003); la cuestión es que no parece que se les enseñe para que aprendan a "*utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana*" (Rico, 2005 en Hernández, 2006, p.358). De ahí la pregunta que da origen a este trabajo: ¿qué oportunidades para aprender damos a nuestros estudiantes?

Para tratar de dar respuesta a este planteamiento surgen cuestiones sobre *qué y cómo* enseñamos.

El *qué* enseñamos tiene referencia directa, en primer lugar, al currículo. Respecto a esta cuestión cabe destacar la orientación hacia las competencias del currículo vigente en España:

> *En este currículo se incorporan por primera vez las competencias básicas que permiten identificar aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos, que el alumnado deberá desarrollar en la Educación Primaria y alcanzar en la Educación Secundaria Obligatoria* (MEC, 2007, p. 31680).

Reconocemos que, debido a la complejidad de funcionamiento del sistema educativo, los cambios en los procesos son lentos y, por ello, no es esperable una traslación inmediata de los nuevos fines del currículo a las aulas, traslación que implica cambios o reorientaciones de todos los agentes involucrados en el sistema educativo.

---

idea de aprendizaje presente en el informe PISA para repensar la tarea que se lleva a cabo en los centros de educación secundaria; a Melgarejo (2006), que reflexiona sobre la selección de aspirantes y la formación del profesorado; a González y Lupiáñez (2005), que ven la necesidad de aumentar la consideración social del profesorado y mejorar su formación, tanto inicial como permanente, como las medidas más urgentes a tener en cuenta, a Marín y Guerrero (2005), que destacan la importancia de los procesos institucionales de evaluación, la diversidad de lenguajes y representaciones en matemáticas, la función del libro de texto y el papel del profesor de matemáticas, o a Calleja et al. (2007), que relacionan el perfil emocional matemático con el rendimiento, hacen un análisis sobre la docencia de aula y observan que no se sigue el modelo curricular basado en competencias.

Además del currículo, el conocimiento que los profesores poseen del contenido a enseñar también influye en el *qué* enseñamos[4] (Ball, 1988). Son problemas que quedan fuera del interés de este trabajo y requieren otro enfoque distinto.

La cuestión de *cómo* enseñamos[5] constituye el objeto de estudio y creemos que tiene importancia ante los nuevos desafíos que implica la consideración de las competencias en el currículo.

De acuerdo con Hiebert y Grouws (2007), consideramos que la naturaleza de la enseñanza en el aula afecta significativamente a la naturaleza y al nivel del aprendizaje de los estudiantes. Cuestiones como: ¿Qué métodos de enseñanza influyen favorablemente en el aprendizaje de los estudiantes? o ¿cómo están relacionados la enseñanza y el aprendizaje? no son fáciles de contestar. Cuando hablamos de los métodos de enseñanza que podrían ser eficaces en el aula surgen varias preguntas: ¿para qué objetivos son eficaces?, ¿qué es lo que queremos que aprendan los estudiantes?, ¿qué fines perseguimos?

Ahora bien, dicen Bowden y Marton (1998), que como no somos capaces de imaginar con qué situaciones pudieran enfrentarse nuestros alumnos en el futuro, hemos de enseñarles lo que podrían aplicar en cualquier situación, es decir, que sean competentes. Asumimos que no es un asunto trivial establecer el tipo de vínculo entre cómo enseñamos y las competencias matemáticas de los estudiantes, y en las siguientes líneas concretamos nuestro acercamiento al respecto.

I.1.1. Delimitación de la investigación

Nuestra aproximación al problema planteado se hará desde una doble perspectiva. Por una parte, desde la práctica docente, centrando nuestra mirada en dos profesores de secundaria y las actividades que desarrollan cuando enseñan matemáticas. Abordamos

[4] En cuanto al libro de texto que también tiene que ver con el *qué* enseñamos, nos interesa en la medida en que el profesor elige tareas que éste contiene y su uso como material didáctico.

[5] La pregunta genérica *cómo* enseñamos abarca aspectos muy variados e interrelacionados entre sí, tales como "*momentos del proceso; tipo y naturaleza de las actividades que hay que seleccionar; su secuenciación; tareas por realizar; tipo de materiales y recursos que se utilizan; cómo organizar la clase; qué protagonismo dar a los estudiantes; cómo usar didácticamente sus ideas; cuál debe ser el papel del profesor; cómo atender a la diversidad, etc.*" (Azcárate, 1999, p.72).

esta perspectiva en relación con el concepto de Oportunidades de Aprendizaje (OTL)[6] que explicamos en detalle en el capítulo II. Aquí cabe mencionar que reconociendo la importancia de varias dimensiones que abarcan las OTL, en nuestra investigación nos centraremos en el papel del profesor a la hora de determinar oportunidades de aprendizaje (Stevens y Grymes, 1993), particularmente, en las actividades del profesor en el aula, que condicionan la naturaleza de la enseñanza que lleva. Consideramos nuestra investigación, en parte, como la continuidad de los trabajos (Andrews, Carrillo y Climent, 2005; Carrillo y Climent, 2005; Szederi y Török, 2005; Depaepe y otros, 2005) que se han centrado en las tradiciones de la enseñanza de matemáticas, analizando las actividades del profesor en el aula.

Por otra parte, nos interesa estudiar las competencias matemáticas (CM) de los estudiantes. La segunda línea de investigación tiene que ver con la noción de la competencia, concretamente, nos situaremos dentro del marco de la competencia matemática del proyecto PISA 2003 (OCDE, 2004b). Se trata de realizar una réplica de la prueba PISA 2003 en cuanto a la evaluación de las competencias matemáticas de los estudiantes de 15 años.

Por último, trataremos de entender y encontrar posibles relaciones entre las oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas.

De este modo, nuestra investigación es un estudio de dos casos, que trata de comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje en dos aulas concretas. Se estudiarán las actividades de dos profesores de secundaria concretos desde la perspectiva de las oportunidades de aprendizaje puestas en juego y las competencias matemáticas de los estudiantes a quienes enseñan (jóvenes de 15 años), buscando y describiendo relaciones entre esas oportunidades de aprendizaje y las competencias matemáticas adquiridas.

I.1.2. Preguntas y objetivos de la investigación

A la luz de lo planteado, **la pregunta principal** que abordaremos en nuestra investigación intenta encontrar y describir posibles relaciones entre las OTL y las CM:

- **¿Cómo se relacionan las oportunidades de aprendizaje y las competencias matemáticas de los estudiantes?**

[6] Del original ingles “Opportunity-to-learn”

Las dos preguntas que siguen, se derivan de la pregunta principal. Una de ellas se refiere a las OTL determinadas por dos profesores estudiados:

- ¿Qué oportunidades de aprendizaje de matemáticas proporcionan los profesores estudiados?

Y la otra pregunta, a su vez, trata de conocer las competencias matemáticas de los estudiantes:

- ¿Qué competencias matemáticas poseen los estudiantes estudiados?

Acorde con las tres preguntas planteadas, **el objetivo principal** que perseguimos en nuestra Tesis es:

- **Encontrar y describir relaciones entre oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas.**

Los objetivos específicos relacionados con el objetivo principal son:

- Identificar y describir las oportunidades de aprendizaje dadas por los dos profesores estudiados.
- Identificar y describir las competencias matemáticas de los estudiantes.

I.2. Motivación

Al emprender cualquier trabajo de investigación el investigador se siente motivado por varios factores: la relevancia del tema, el proceso de investigación, los resultados esperados, la aportación que espera hacer, su propio interés.

La motivación para emprender esta Tesis Doctoral, en enero de 2007, también aglutina los factores arriba mencionados. Así, la resonancia en aquel entonces acerca de los resultados en matemáticas de los estudiantes españoles en las pruebas internacionales PISA 2003 y nuestro interés por las razones de esa incapacidad de los estudiantes de aplicar sus conocimientos matemáticos en situaciones de la vida real, ha resultado un punto de partida para el trabajo de investigación que realizamos a lo largo del 2005-2006 en el marco del programa de doctorado, como trabajo de investigación para la obtención del DEA, bajo el título "*Informe PISA 2003: Una aproximación en la búsqueda de factores relevantes*" (Zakaryan, 2006). Dicho trabajo fue un intento de encontrar algunos de los factores que influirían en el rendimiento de los estudiantes.

Resultaba evidente que se trataba de un sistema complejo y que la búsqueda de las causas del bajo rendimiento había de tener un enfoque sistémico. No obstante, y con objeto de realizar una primera aproximación, nos pareció razonable enfocar el análisis desde la estructura y el contenido de la formación del profesorado, desde un análisis curricular y la óptica de qué se enseña y cómo se enseña, y desde la valoración social del docente en los cuatro países: Finlandia, Bélgica, Hungría y España[7]. El trabajo de investigación nos ha permitido formar algunas ideas sobre dichos factores: particularmente, que hay diferencias en las tradiciones de enseñanza de las matemáticas; que hay diferencias en el proceso de selección de los aspirantes a docente y en los programas de formación pedagógica; que las tareas presentadas en los libros de texto difieren de un país a otro; que la valoración de la profesión de docente por parte de la sociedad también es distinta en estos países.

Dado que dicho trabajo fue realizado en el marco del programa de doctorado (periodo de investigación) no disponíamos de demasiado tiempo y aquello fue una aproximación al problema. De ahí surgió la idea de emprender otra investigación, la Tesis Doctoral, ya que la relevancia de la búsqueda y de la exploración de los factores que influyan en el rendimiento de los estudiantes nos ha motivado profundizar el trabajo en un estudio de casos, y sin rebajar la importancia de otros factores, particularmente analizar aquellos que nos interesan más como investigadores en el área de la Didáctica de la Matemática.

Más concretamente se trata de un estudio de dos casos, ya que hemos planteado realizarlo en dos países, en España y Armenia. España, en primer lugar, dado que ya poseíamos los análisis de algunos de los factores relacionados con el rendimiento de los estudiantes españoles y ahora nos interesaba realizar el estudio de caso; en segundo lugar, he tenido la oportunidad de estar en España y realizar el trabajo aquí; y Armenia por la razón de que es país de mi residencia y me interesaba hacer estos estudios, sobre todo dado que Armenia no participó en ninguna de las pruebas PISA, me gustaría tener una aproximación hasta cierto grado acerca del nivel de los estudiantes armenios y las oportunidades de aprendizaje que les proporcionan sus profesores de matemáticas, máxime en un momento de cambios que suceden actualmente en el sistema educativo de mi país.

[7] Dichos cuatro países fueron elegidos por la razón de que dos de ellos, Finlandia y Bélgica, han obtenido resultados altos en la prueba PISA 2003 y otros dos, Hungría y España, similares bajos.

La intención no es exactamente comparar estos dos casos, aunque eso no se puede evitar completamente e incluso en algunos aspectos resultaría interesante hacerlo, sino estudiar y entender cuáles son las oportunidades proporcionadas a nuestros estudiantes para aprender matemáticas, el rol del profesor en este proceso como el agente principal de la educación.

Otra motivación es la propia curiosidad y el interés por el sistema educativo español, como un ejemplo del sistema europeo, por los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por la formación de los profesores en España. Dado que soy graduada de la escuela soviética que tuvo la tradición en la educación bastante diferente, resulta interesante conocer las tradiciones de otros países.

Por último, con este trabajo no hemos pretendido dar recetas, ni solucionar problemas existentes en nuestra área, sino ha sido un humilde intento de aprender y de arrojar alguna luz sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula.

I.3. Organización del documento

En el presente trabajo hemos considerado seis capítulos. A lo largo de este Capítulo I hemos planteado el problema de la investigación, delimitado el objeto de interés, las perspectivas desde las cuales vamos a abordar el problema, hemos formulado preguntas a contestar y los objetivos que perseguimos con este fin, asimismo, hemos explicado nuestra motivación para emprender esta investigación y ahora describiremos la organización del presente trabajo.

Dedicamos el Capítulo II a los fundamentos teóricos en que nos apoyamos. Este capítulo incluye tres apartados. En el primer apartado exponemos ideas relacionadas con el concepto de Oportunidades de Aprendizaje (OTL): seguimos la evolución del concepto, mencionamos sus diferentes dimensiones y delimitamos las mismas para el estudio en nuestra investigación. El segundo apartado es dedicado a la Competencia Matemática (CM). En él damos una visión global de la noción de la competencia y su uso en diferentes ámbitos; centrándonos en el ámbito educativo, diferenciamos tipos y características de la competencia, exponemos pros y contras del enfoque por competencias y sus fundamentos teóricos. A continuación revisamos la noción de competencia matemática, enfocando nuestro interés en la noción de la misma determinada en el proyecto OCDE/PISA, y presentamos brevemente el marco teórico y metodológico del dicho proyecto. Concluimos este capítulo con la exposición del

Modelo OTL-CM, elaborado en nuestro estudio, a la luz del cual interpretamos los resultados de la presente investigación.

El Capítulo III recoge el marco metodológico de nuestra investigación. En este capítulo explicamos las características principales de la investigación y su ubicación en el espacio metodológico, concretamos el diseño de la investigación que abarca el método que seguimos (estudio de dos casos), selección y definición de casos, describimos el contexto de los dos casos y a sus participantes. Asimismo, exponemos el proceso y los instrumentos de obtención de la información y de análisis de datos, concluyendo este capítulo con nuestras consideraciones respecto a los criterios de rigor de la investigación.

En el Capitulo IV presentamos el análisis de la información obtenida. Este capitulo está dividido en dos apartados. En el primer apartado analizamos las sesiones grabadas en video desde la perspectiva de las OTL proporcionadas por los dos profesores estudiados. El segundo apartado es dedicado al análisis de las actuaciones de los estudiantes de las dos aulas. En él presentamos los resultados de la prueba por cada estudiante y cada ítem, mencionando las competencias matemáticas puestas en marcha, asimismo, exponemos una visión global de los resultados, atendiendo a las tres variables consideradas para los ítems de la prueba y concluimos con el análisis cuantitativo de los datos (según los niveles de dominio).

El Capítulo V abarca los resultados de la investigación y su discusión. En este capítulo, para cada caso, evidenciamos las relaciones entre OTL proporcionadas y las CM de los estudiantes, partiendo de los aciertos, las dificultades y carencias presentadas por éstos durante sus actuaciones. Asimismo, comprobamos el modelo OTL-CM y discutimos su ajuste en cuanto a las relaciones descritas en el mismo.

Por último, en el Capítulo VI exponemos las conclusiones respecto a las relaciones OTL-CM, a la luz de los resultados de la presente investigación. Continuamos presentando nuestras aportaciones, y concluimos destacando las limitaciones que encontramos a lo largo de su proceder, las preguntas que han quedado por contestar y futuras líneas de investigación.

CAPÍTULO II:

MARCO TEÓRICO

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MARCO TEÓRICO

I.1. OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

II.1.1. Revisión del concepto de Oportunidades de Aprendizaje

El concepto de Oportunidades *de Aprendizaje* (OTL) es uno de los conceptos generativos que durante varios años ha desempeñando diferentes papeles: como concepto investigativo (*research concept*), como indicador de la educación (*education indicator*) y como instrumento político (*policy instrument*) (McDonnell, 1995). Describimos brevemente el uso del concepto OTL en diferentes momentos de su evolución.

Según Floden (2002), la definición más citada de las OTL viene desde el informe de Husen sobre los estudios FIMS[8]: "*si los estudiantes habían tenido o no la oportunidad de aprender un tópico determinado o habían estudiado cómo resolver un tipo particular de problema presentado en el test*" (Husen, 1967a, pp. 162-163, citado en Burstein, 1993). La convicción de que las OTL son un determinante importante del aprendizaje había sido reflejada todavía antes en el modelo sobre aprendizaje escolar de Carroll (1963), que además extendió la idea de OTL de la simple dicotomía "si o no" al continuo expresado como la cantidad del tiempo proporcionada al aprendizaje. El modelo de Carroll sugería que la relación con el logro de los estudiantes podría ser más estrecha si las OTL fueran medidas más cerca del estudiante; para los políticos, sin embargo, la mayor probabilidad de tener el control sobre las oportunidades es cuando más distantes estamos del estudiante.

El concepto de las OTL, como concepto investigativo, fue introducido por primera vez en los años sesenta del siglo XX como medio para asegurar la validez de las comparaciones internacionales en el estudio de logro matemático de los estudiantes FIMS (1963-1967). Se ha partido del hecho de que para comparar el logro de los estudiantes habría que tener en cuenta diferentes sistemas educativos, diferentes currículos. Sin embargo, el concepto sustancialmente se ha refinado en los estudios SIMS[9] (1976-1982). El objetivo del estudio SIMS consistía en conceptualizar el currículo de matemáticas en función de tres niveles: *currículum pretendido*, articulado

[8] First International Mathematics Survey

[9] Second International Mathematics Study.

oficialmente a nivel nacional; *currículum aplicado*, interpretado por profesores en sus clases; y *currículum obtenido*, evidenciado por los logros de estudiantes en los test estandarizados (Travers, 1993, citado en McDonnell, 1995). El principal medio para estimar el currículum aplicado fue el cuestionario de las OTL dirigido a los profesores de los estudiantes examinados. Los profesores contestaron preguntas sobre si habían enseñado o no a sus estudiantes los contenidos matemáticos necesarios para resolver problemas de test. En caso que no fuese así, se les preguntaba si la razón era que el contenido se había impartido en los cursos anteriores o iba a impartirse más adelante, o simplemente no formaba parte del currículo. También contestaron preguntas de carácter general sobre objetivos instruccionales, actitudes y creencias sobre matemáticas, estrategias docentes y la formación profesional.

A partir de mediados de la década de los ochenta del siglo pasado es cuando las OTL se consideran como indicador educativo necesario para orientar las tendencias educativas y comparar condiciones escolares en diferentes localidades geográficas. Se hace constar entonces que las OTL han de ser definidas no solo por el contenido curricular proporcionado a los estudiantes, sino también por cómo ese contenido se presenta y quién lo presenta. Por tanto, se añaden dimensiones de las OTL tales como la formación inicial y práctica del profesor, la organización escolar, el contenido del currículo, la disponibilidad y uso de los recursos educativos o las estrategias instruccionales (McDonnell, 1995; Schmidt y McKnight, 1995). Estas variables han sido consideradas en el modelo de oportunidades educativas en el proyecto TIMSS[10] para recoger datos sobre las OTL proporcionadas a los estudiantes (Schmidt y McKnight, 1995; Collie-Patterson, 2000). Como respuesta a las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los estudiantes de distintos países evaluados en este proyecto, desde la perspectiva de la formación de profesores, surge el estudio comparativo internacional TEDS-M[11] sobre la formación inicial de los profesores de matemáticas en educación primaria y en secundaria obligatoria, que también ha considerado las OTL como indicador educativo clave y se ha centrado en estudiar las diferencias a las aproximaciones en la formación inicial del profesorado de matemáticas en los países participantes (Tatto et al., 2008; Rico et al., 2009).

[10] Trends in Mathematics and Science Study.

[11] Teacher Education and Development Study in Mathematics.

Por último, el concepto OTL como instrumento político se introduce en la agenda política con la ayuda de algunos académicos miembros del National Council on Education Standards and Testing (NCEST), en la publicación del informe *Raising Standards for American Education* (1992), donde el concepto de OTL es cambiado por el nombre *school delivery standards*. En los Goals 2000 se vuelve a la terminología anterior y los estándares de las OTL se definen más ampliamente como el criterio para y la base de la evaluación de la equidad de recursos, prácticas y condiciones necesarias en cada nivel del sistema educativo (McDonnell, 1995). Desde esta perspectiva, el desarrollo y el uso de los estándares de las OTL, proporciona información acerca de las cuestiones políticas respecto a la igualdad de las oportunidades educativas (Guiton y Oakes, 1995). Desde luego, desde la perspectiva de la investigación sociológica se pronuncian críticas en cuanto a la unilateralidad de los factores asociados a las OTL, mencionando que son completamente intra-escolares, y no tienen en cuenta los factores extra-escolares, como por ejemplo, relacionados con el ambiente familiar de los estudiantes (Dougherty, 1996).

Hiebert y Grouws (2007) recuerdan que actualmente las OTL se consideran como uno de los pocos indicadores que conectan la enseñanza y el aprendizaje, y pretenden explicar las diferencias en el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes a través de varios contextos. De ahí que, para evidenciar y determinar estas conexiones, se han estudiado diferentes aspectos del proceso educativo. A continuación revisamos las diferentes dimensiones concretadas para las OTL.

II.1.2. Dimensiones de las Oportunidades de Aprendizaje

Es reconocido que las OTL son un problema crítico que frecuentemente es difícil de medir, en parte debido a la complejidad del proceso de la enseñanza y a los numerosos factores involucrados en este proceso. Como ya hemos mencionado, siendo originalmente asociadas las OTL con el contenido curricular, la extensión de su definición ha supuesto la inclusión de las dimensiones relacionadas principalmente con *recursos, condiciones del centro, currículo e instrucción* (Banicky, 2000).

En la literatura de investigación encontramos varios modelos considerados para el estudio de las OTL, que atienden distintos factores relativos a las dimensiones mencionadas. Entre ellos, los que tratan los recursos, destacan la importancia de *recursos educativos* (Herman et al., 2000), *recursos y materiales*, *recursos fiscales*

(Porter, 1991); en cuanto a las condiciones del centro, encontramos: *condiciones del trabajo* (Oakes, 1989), *normas de la comunidad* (Porter, 1991), *características de la escuela* (Collie-Patterson, 2000). En lo relativo al currículo, se hace referencia a la *cobertura de contenidos* (Porter, 1991; Stevens, 1993; Snow-Renner, 2001), *contenidos curriculares* (Herman et al., 2000) y *foco curricular* (Snow-Renner, 2001). Por último, los factores relativos a la instrucción abarcan *cualificación del profesorado y procesos de instrucción* (Oakes, 1989), *estrategias de enseñanza* (Saxe et al., 1999; Herman et al., 2000), *características de los profesores* (Schmidt y McKnight, 1995; Collie-Patterson, 2000), *exposición de contenidos* y *énfasis en contenidos* (Stevens, 1993), *actividades instruccionales* (Schmidt y McKnight, 1995) o *duración de la instrucción y estrategias instruccionales* (Snow-Renner, 2001).

Por otra parte, estas dimensiones se organizan acerca de cuatro preguntas: ¿Qué es lo que se espera que aprendan los estudiantes? ¿Quién proporciona la instrucción? ¿Cómo se organiza la instrucción? y ¿Qué han aprendido los estudiantes?[12] (Schmidt y McKnight, 1995).

Los autores describen en detalle las tres primeras preguntas a nivel del sistema educativo, a nivel de la escuela y a nivel del aula y las interrelaciones entre ellos. A nivel del sistema educativo se atienden a dimensiones como currículo nacional/regional y objetivos; cualificación (título) oficial del profesorado; características del sistema educativo. Asimismo, estas preguntas, a nivel de la escuela, incluyen: objetivos del centro; organización social y entorno de los profesores; ofertas del curso escolar y los recursos del centro.

Si bien, estas interrogantes a nivel del sistema educativo y de la escuela no presentan el foco de interés de nuestra investigación, por lo que tan solo nos limitamos a mencionarlos, nos detendremos en las dimensiones descritas para el nivel del aula. La

[12] Los autores destacan la importancia de estudiar las características de los estudiantes como factor importante para la mejor comprensión de qué y cómo aprenden los estudiantes. Las características de estudiantes, como su historia académica, nivel social cultural y económico de sus familias, autoconcepto, motivación, creencias, tiempo dedicado, influyen en cómo aprovechan las oportunidades de aprender que se les ofrece (Schmidt y McKnight ,1995). Compartimos esta interconexión entre los factores, y en nuestro estudio, a la hora de contextualizar los dos casos, caracterizamos a los estudiantes según su historia académica, el nivel social cultural y económico de sus familias y la motivación.

siguiente figura, extraída del modelo de Schmidt y McKnight (1995, p.349), resume los indicadores determinados para este nivel.

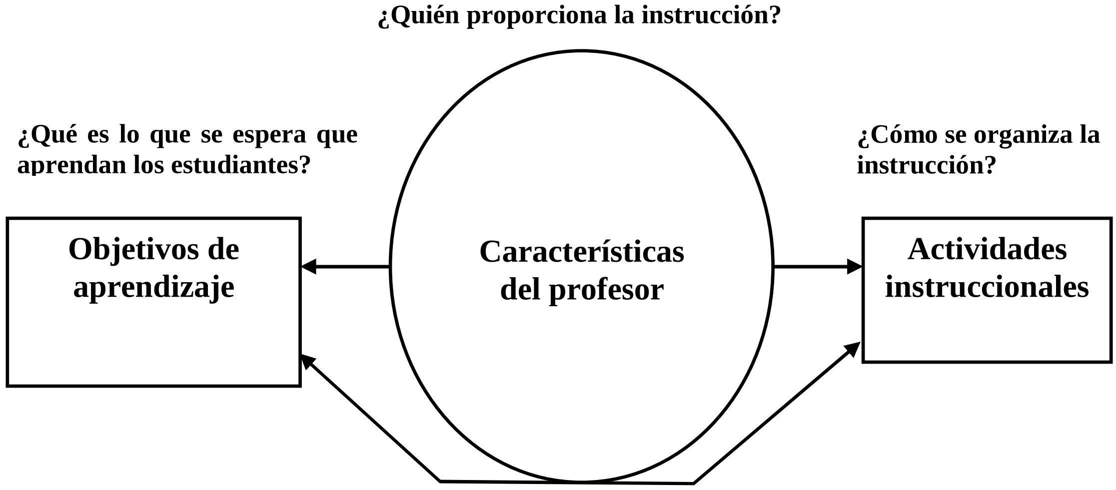


Figura 1: Concreción de las OTL a nivel de aula.

Como se puede observar, la concreción de las OTL a nivel de aula se refiere a diferentes indicadores interrelacionados entre sí y relacionados con el profesor; es decir, las características del profesor, sus objetivos y sus modos de enseñar y gestionar la instrucción tienen un papel clave a la hora de determinar las oportunidades de aprendizaje.

Las características del profesor que, a su vez, están condicionadas por su formación inicial, por la cantidad del tiempo profesional que dedica a la docencia actual y a la planificación, número de grupos y grados que mantiene, incluyen su perfil (edad, genero, formación, materia que imparte y experiencia), creencias acerca de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y la motivación. Estas características están relacionadas con los objetivos de aprendizaje y las actividades instruccionales (*instructional activities*) del profesor.

En el marco de nuestra investigación, caracterizamos a los dos profesores estudiados según su perfil y la motivación.

Los objetivos de aprendizaje, por su parte, vienen determinados por el currículo nacional/regional y los objetivos del centro e influyen en las actividades que el profesor desempeña en el aula. De los objetivos de aprendizaje del profesor depende el énfasis que pone en diferentes habilidades: así, puede dedicar más tiempo a los conceptos, a la ejercitación de habilidades de cálculo o a la resolución de problemas no rutinarios; en cada caso los estudiantes tendrán diferentes oportunidades de aprendizaje (Kilpatrick et al., 2001).

En nuestro estudio, uno de los aspectos principales en el análisis de las OTL, son los objetivos subyacentes a las acciones y a la toma de decisión del profesor, según el énfasis que hace en diferentes habilidades y procesos matemáticos, denominado **foco matemático** (Andrews, Carrillo y Climent, 2005).

Por último, las actividades instruccionales, incluyen el uso del libro de texto, estructura de la lección, materiales didácticos, gestión de aula, evaluación de los estudiantes, participación, deberes, tipo de agrupamiento (Schmidt y McKnight, 1995; Boscardin et al., 2005).

En cuanto a las actividades instruccionales, en nuestra investigación atendemos las estrategias de la enseñanza que los profesores emplean para facilitar las capacidades de sus estudiantes de entender y usar matemáticas, o sea, **estrategias didácticas**, es otro aspecto central en el análisis de las OTL. Asimismo, consideramos los diferentes materiales didácticos y el tipo de agrupamiento utilizados en el aula (Andrews, Carrillo y Climent, 2005).

Dentro de los indicadores asociados a la actividad del profesor, que determinan las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, es destacable la relevancia que varios autores atribuyen al **tipo de tareas**[13] que éste selecciona y propone, es también objeto de interés en el marco de análisis de las OTL. Así, las tareas se consideran “*el principal vehículo para suministrar a los escolares oportunidades de aprendizaje*” (Lupiáñez, 2009, p.113) y una cuidadosa selección de éstas por parte del profesor le permite planificar actividades que potencian la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje (Lo y Wheatly, 1994; Ponte, 2004). En la misma línea, Kilpatrick et al. (2001), Watson y Sullivan (2008), Sullivan et al. (2010), consideran que el tipo de tareas que emplean los profesores en las clases de matemáticas está relacionado con sus percepciones de las matemáticas e influye directamente en las oportunidades de

[13] En nuestra investigación, cuando nos referimos a las *tareas*, entendemos que son demandas que el profesor plantea a los estudiantes, que activan sus conocimientos acerca de un tema matemático concreto, e implican una determinada actividad matemática por parte de los estudiantes (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Una tarea potencialmente puede poseer la cualidad de problema; aquellas que no la posean, siguiendo a Polya, la denominamos “rutinarias” (Cruz, 2006).

aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, señala Polya (1989) que "*…un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos y ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello*" (p. 5).

De este modo, el énfasis que los profesores ponen en diferentes procesos de la enseñanza y diferentes temas, las expectativas que tienen del aprendizaje, el tiempo que dedican a un tema particular, el tipo de tareas propuestas, el tipo de cuestiones que hacen y respuestas que aceptan, la naturaleza de las discusiones que llevan o los recursos que usan, son partes de la enseñanza y todo ello influye en las oportunidades que los estudiantes tienen para el aprendizaje (Hiebert y Grouws, 2007).

En términos generales, la concreción de las OTL a nivel de aula, se refiere a la naturaleza, modo o estilo de la enseñanza y, de acuerdo con algunos autores (Banicky, 2000; Herman et al., 2000; Boscardin et al., 2005), hablando de las OTL referidas a esta dimensión, se considera la calidad de la enseñanza, es decir, si los estudiantes han tenido o no la oportunidad de experimentar modos de enseñanza que les prepararan para alcanzar logros.

Por último cabe destacar, como nos hacen notar Hiebert y Grouws (2007), que es importante distinguir entre "oportunidades de aprendizaje" y "ser enseñado" ya que por ejemplo, si los estudiantes no tienen el conocimiento previo suficiente para abordar un determinado tema, pueden estar atentos y escuchar lo que les explica el profesor sin entenderlo, por lo tanto se consideran tanto las circunstancias vinculadas a los estudiantes (conocimientos previos, compromiso) como a los profesores (naturaleza y finalidad de las tareas propuestas, probabilidad de la negociación).

Asumiendo y reconociendo la importancia de todas las dimensiones que engloban las OTL, nos centramos en las dimensiones que hemos ido destacando a lo largo de este apartado, y que delimitamos en las siguientes líneas.

II.1.3. Delimitación de las Oportunidades de Aprendizaje en nuestro estudio

Tal como hemos visto en el apartado anterior, las oportunidades de aprendizaje no están totalmente en función de la enseñanza ni están totalmente controladas por el profesor (Hiebert y Grouws, 2007). Por ejemplo, el currículo que se requiere que el profesor use, sin duda influye en las OTL de los estudiantes (Kilpatrick et al., 2001; Stein et al, 2007). Sin embargo, al mismo tiempo, la enseñanza representa el papel principal a la hora de proporcionar oportunidades de aprendizaje a los estudiantes, por lo que, se considera que la naturaleza de la enseñanza en el aula afecta significativamente a la naturaleza y al nivel del aprendizaje de los estudiantes (Saxe et al., 1999; Hiebert y Grouws, 2007).

De este modo, en nuestra investigación nos proponemos estudiar las dimensiones de las OTL relativas a los objetivos del profesor que relacionamos con el énfasis que hace en diferentes habilidades y procesos matemáticos (foco matemático) y a las actividades instruccionales que recogen estrategias didácticas, material didáctico, tipo de agrupamiento y tipo de tareas propuestas.

Cabe destacar que para tratar estos aspectos, excepto el tipo de tareas, adoptamos las denominaciones y categorizaciones determinadas y analizadas en el proyecto METE[14] (Andrews, 2005; Andrews, Carrillo y Climent, 2005). Este proyecto ha observado un amplio abanico de las actividades socio / pedagógicas de profesores de Matemáticas en el aula desde la perspectiva de las OTL que se ponen en juego. Particularmente, las que presentan interés para nuestro estudio son *el foco matemático, las estrategias didácticas, los materiales didácticos y el tipo de agrupamiento*. Decidimos referirnos a las categorizaciones del proyecto METE, dado que creemos que es una buena lente a través de la cual podemos identificar e interpretar las actividades de un profesor en el aula. Como mencionan los autores del proyecto, se adopta para la comparación de los

[14] Mathematics Education Traditions of Europe (METE) es un estudio comparativo sobre las tradiciones de enseñanza de las matemáticas en Bélgica (Flandes), España, Finlandia, Hungría e Inglaterra. Se trata de un estudio a pequeña escala en el que se han empleado métodos cuantitativos y cualitativos, y que, en lugar de pretender obtener generalizaciones, ha tenido por objetivo arrojar alguna luz que posibilite la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Andrews, 2005; Andrews, Carrillo, Climent, 2005; Carrillo y Climent, 2005; Szederi y Török, 2005; Depaepe y otros, 2005).

procesos de su investigación la metáfora *iluminación* que describe estos procesos en el siguiente modo:

> *"Si consideramos el aula como un pedazo de la tela, entonces la luz que necesitamos no debe ser enfocada demasiado bruscamente o la iluminación destacará sólo hilos individuales y no mostrará nada del dibujo de la tela. Si la iluminación es demasiado alejada, entonces todo lo que hace es advertir al observador de la existencia de una tela indistinguible de la otra, similar tela. Nuestra intención fue encontrar una luz que ofreciera la iluminación suficiente para distinguir entre los detalles, los dibujos y los colores de una tela de la otra"* (Andrews, 2005, p.7).

Aunque la intención en nuestro estudio no es exactamente comparar *dos telas*, sin embargo, sigue siendo importante distinguir *la tela*, es decir, ver lo que sucede en el aula desde la perspectiva de la misma iluminación. Debido a que diferentes actividades del profesor representan diferentes oportunidades de aprendizaje, creemos que esta iluminación nos permitirá captar y comprender lo esencial, lo especifico de lo sucedido en el aula. Por otra parte, ya que en el proyecto METE las actividades del profesor han sido determinadas y analizadas según la propia categorización desarrollada a lo largo del proyecto, nos proporcionan un instrumento que permite identificar las actividades del profesor directamente a través de la observación de sus acciones sin hacer inferencias, la que se considera una de las estrategias apropiadas para la recopilación de los datos sobre las OTL (Banicky, 2000). De este modo, adoptamos en nuestro estudio las siguientes categorías desarrolladas en el proyecto, que presentamos a continuación, manteniendo una postura abierta en cuanto al surgimiento de nuevas categorías durante las observaciones.

Foco matemático

El foco matemático de un episodio se relaciona con los objetivos subyacentes a las acciones y a la toma de decisión del profesor. Puede haber más de un foco en un episodio, o incluso no haber ningún foco en un episodio. La Tabla 1 recoge cada uno de los focos y su descripción.

Conceptual	El profesor enfatiza o promueve el desarrollo conceptual de sus estudiantes
Procedural	El profesor enfatiza o promueve la adquisición de destrezas, procedimientos, técnicas o algoritmos
Structural	El profesor enfatiza o promueve los lazos o conexiones entre entes matemáticos diferentes: conceptos, propiedades, etc.
Derivational	El profesor enfatiza o promueve el proceso de desarrollo de nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente
Efficiency	El profesor enfatiza o promueve la comprensión o adquisición por parte del alumno de procesos o técnicas que desarrollan flexibilidad, elegancia o comparación crítica del trabajo
Problem solving	El profesor enfatiza o promueve la implicación de los estudiantes en la solución de tareas no triviales o no rutinarias
Reasoning	El profesor enfatiza o promueve el desarrollo y la articulación de justificaciones y argumentos por parte de los estudiantes

Tabla 1: Foco matemático

Estrategias didácticas

Las estrategias didácticas se refieren a las estrategias de la enseñanza que los profesores usan para facilitar las capacidades de sus estudiantes de entender y usar matemáticas. Con la excepción de "participación", que es un acto público explícito, todas las estrategias podrían ser vistas en contextos públicos (grupo clase) e individual. La Tabla 2 recoge la descripción de cada una de las estrategias.

Activación de conocimiento previo	El profesor centra explícitamente la atención de los estudiantes en contenidos matemáticos tratados anteriormente, en forma del período de revisión, como preparación para las siguientes actividades.
Ejercitación de conocimiento previo	El profesor centra explícitamente la atención de los estudiantes en contenidos matemáticos tratados anteriormente, en forma del período de revisión, que no estén relacionados con las actividades que siguen.
Explicación	El profesor explica explícitamente una idea o solución. Esto puede incluir la demostración,

	narración explicita o modelos pedagógicos de alto nivel de pensamiento. En estos casos, el profesor es el informante con poca o ninguna entrada de los estudiantes.
Participación	El profesor compromete explícitamente a los estudiantes en un proceso de intercambio público de ideas, soluciones o respuestas. Esto puede incluir debates de grupo clase en los que el papel del profesor es de gerente en vez de explícito informante.
Exploración	El profesor compromete explícitamente a los estudiantes en una actividad, que no está dirigida por él, de la que una nueva idea matemática sobrentiende aparecerse. Normalmente, esta actividad podría ser una investigación o una secuencia de los problemas estructurados, pero en todos casos se espera que los estudiantes articulen sus conclusiones.
Entrenamiento	El profesor explícitamente ofrece consejos, indicaciones o información para facilitar la comprensión de sus habilidades o para realizar tareas o para corregir errores o malentendidos.
Evaluación	El profesor evalúa explícitamente o evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase.
Motivación	El profesor, a través de las acciones, más allá de la mera personalidad, reacciona explícitamente a las actitudes, creencias o respuestas emocionales de los estudiantes hacia las matemáticas.
Cuestionamiento	El profesor explícitamente utiliza una secuencia de preguntas, tal vez socráticas, que conducen a los estudiantes a crear nuevas ideas matemáticas o aclarar o definir mejor las existentes.
Diferenciación	El profesor explícitamente intenta tratar a los estudiantes en modo diferente en términos del tipo de tareas o actividades, el tipo de materiales suministrados, y / o el tipo de resultado esperado, con el fin de que la instrucción sea adoptada óptimamente a las características y necesidades de los estudiantes.

Tabla 2: Estrategias didácticas

Materiales didácticos

Se refiere a los diferentes materiales didácticos utilizados en el aula: libro de texto, modelos, juegos, diapositivas, programas educativos, Internet, etc.

Tipo de agrupamiento

Es el tipo de agrupamiento empleado en el aula**:** individual, en pareja, en grupo y toda-clase.

De este modo, las categorías mencionadas junto con *el tipo de tareas* (contexto y complejidad), que describimos en detalle en el apartado dedicado a los instrumentos de análisis de la información (III.2.4.1), los consideramos aspectos centrales en el análisis de las OTL.

Concluyendo este apartado, según Hiebert y Grouws (2007), las OTL pueden ser un concepto muy potente que, si seguimos cuidadosamente sus implicaciones, podrían explicar los efectos de un tipo particular de la enseñanza a un tipo particular del aprendizaje y mejorar la regularización de los métodos de enseñanza y objetivos de aprendizaje. Asimismo, de acuerdo con Noonan (2000), las OTL proporcionan respuestas a la pregunta: ¿Qué combinación de variables y factores, directa o indirectamente, afecta al aprendizaje de los estudiantes?

En el apartado II.3., intentamos dar nuestra respuesta a esta pregunta, mediante la construcción de un modelo que describe relaciones entre las OTL consideradas y las competencias matemáticas de los estudiantes.

II.2. COMPETENCIA MATEMÁTICA

II.2.1. La noción de competencia y su uso en diferentes ámbitos

En este apartado trataremos de realizar una revisión de la noción de *competencia*, que en la actualidad tiene un uso cada día más amplio y, sin embargo, al mismo tiempo es un término sobre el que no existe un consenso entre los expertos y que pocas veces somos capaces de definirlo con precisión a pesar de conocer su significado.

Cuando hablamos de competencia, normalmente nos referimos a la excelencia, a la maestría que reconocemos en otra persona. Pero más allá de ser observada y detectada tal o cual competencia operamos *"sobre la totalización de los actos percibidos, lo que los sobrepasa;* [suponemos] *en ellos un poder que los engendra, una regla que los rige y los vuelve eficaces y adecuados a la situación"* (Rey, 1999, p.18).

Así, cuando observamos tocar a un virtuoso del piano, enseguida nos damos cuenta de que "sabe tocar", o sea, que es competente. Operamos sobre la totalización de los actos percibidos: así, supongamos que la sucesión de sus movimientos, la técnica y la interpretación, no es una serie eventual, sino la reunión articulada en virtud de un principio que la unísona, que situamos en el sujeto y que es su competencia. Al atribuir ese poder al pianista, asumimos la idea de que sus futuros actos son previsibles, pero no en los detalles, sino en su adecuación y eficacia. Al mismo tiempo, lo que prevemos se nos presenta en una continuidad natural, sin ninguna incoherencia, todo parece espontáneo e inmediato, desprovisto de misterio. Sin embargo, si intentamos hacer un ensayo, la competencia se nos revela diferente: lo que parecía tan fácil se nos hace imposible, fuera del alcance; lo que nos parecía tan natural ahora revela una magia (Rey, 1999).

De este modo, según este autor, la competencia es al mismo tiempo *"visibilidad total e inaccesible secreto, escondido en las profundidades del individuo"* (p.18). Sin embargo, esta cualidad íntima del sujeto, según el autor, posee suficiente objetividad para provocar un reconocimiento social. En otras palabras, la competencia tiene que ver a la vez con *"lo visible y lo escondido, lo exterior y lo interior, lo que una acción está más estandarizado y al contrario, lo que parece más ligado a una persona y por consiguiente, lo más singular e indescriptible"* (Ibid.).

Estos dos polos opuestos de la competencia más bien la complementan y la hacen íntegra, sin embargo, en dos contextos teóricos, que presentamos a continuación, son vistos y tratados como aspectos separados de la competencia.

De este modo, el concepto de *competencia* empleado por Noam Chomsky en su obra de lingüística (Chomsky, 1983) se relaciona con la habilidad humana universal, innata para aprender una lengua materna. Esa habilidad de producir infinidad de frases provistas de sentido en su lengua, y viceversa, reconocer espontáneamente que una frase escuchada pertenece a la misma lengua, incluso si no es capaz de explicar el porqué, es evidentemente inaccesible ni para la observación exterior, ni para la introspección. Chomsky hace distinción entre la competencia (*competence*) y el desempeño (*performance*), considerando el último como la habilidad de crear, entender y usar una variedad infinita de enunciados únicos gramaticalmente correctos. Por tanto, la competencia chomskiana es concebida como una potencialidad invisible, interior, personal, sometida a generar una infinidad de desempeños. La competencia chomskiana no es un comportamiento, sino un conjunto de reglas que rigen comportamientos lingüísticos (*performance*), sin que sean observables ni accesibles a la conciencia del sujeto y tiene su aportación en mostrar, contra la concepción conductista del aprendizaje de la lengua, que ésa no puede ser adquirida por condicionamientos, argumentándolo, fundamentalmente, por el hecho de que en el caso contrario el sujeto poseería un número finito de enunciados y además cada uno de éstos sería una respuesta a un estímulo y no se produciría sin la presencia de éste, lo que contradice al uso habitual del lenguaje (Rey, 1999; Weinert, 2004).

La teoría que se opone a la teorización chomskiana de la competencia, la define como comportamientos específicos y perfectamente observables. No obstante, si lo propio de un comportamiento es ser observado, éste puede hacerse según diferentes criterios. El conductismo reconoce como comportamiento toda reacción muscular y glandular del organismo estudiado sin otorgarle sentido, lo que importa es observar una serie de comportamientos acabados como respuestas motoras (competencia-comportamiento). Sin embargo, vistos los comportamientos como una organización de movimientos a los que reconocemos la función y unidad, éstos adquieren sentido, lo que les hace que sean inherentes al ser humano. Ya no son competencias comportamentales por sí mismas, sino que se identifican con la capacidad de organizar los comportamientos en función de los fines que se quieren alcanzar, poniendo en juego la intención del sujeto (competencia-función).

A diferencia de estas dos concepciones de competencia, la competencia de Chomsky se adapta a toda situación, mientras la competencia-comportamiento depende del condicionamiento de un estimulo y la competencia-función es específica de una situación o familia de situaciones. Por otra parte, al ser desarrollados los trabajos de Chomsky dentro de las teorías cognitivistas, se asocia la competencia con la habilidad intelectual, por lo que se le otorga un aspecto creador (Rey, 1999).

El enfoque teórico de Chomsky ha sido criticado debido a que su marco conceptual es difícil de traducir en la adquisición de otros fenómenos psicológicos (adquisición del conocimiento, desarrollo de la memoria, etc.), a que el concepto de competencia propuesto no es adecuado para otros fines que no sean lingüísticos (Weinert, 2004); y por otra parte, debido a que la idea de competencias innatas puede tener poca relevancia en cuanto a la búsqueda de diferencias individuales y sociales, ya que excluye específicamente la relevancia de consideraciones culturales ("una conducta aprendida") (Goody, 2004).

A pesar de las críticas, cuando se trata de un modelo de competencias de base cognitiva o se buscan enfoques más integrales en función de construir competencias desde perspectiva constructivista se tiende a fundamentarse en la propuesta del modelo competencia-desempeño de Chomsky (Ruíz Iglesias, 2008).

De acuerdo con Ruíz Iglesias (2008), como habíamos mencionado, consideramos que no se trata de dos polos opuestos sino de la visión dialéctica que se requiere para sustentar lo referido a la competencia. Si la competencia es invisible, inherente a la persona, se manifiesta, se hace visible mediante el desempeño *"como expresión concreta de los recursos que pone en juego un individuo para actuar"* (p. 5).

De este modo, dependiendo de qué consideramos "recursos" y qué consideramos "actuaciones" encontramos diferentes usos del modelo competencia-desempeño.

El término *competencia* en terrenos como filosofía, lingüística, sociología, psicología y pedagogía cuenta con una amplia variedad de definiciones. Como señala Weinert (2004):

> *"Durante los últimos años, competencia se ha convertido en un término de moda con un significado vago no sólo en el uso público, sino también en*

> *diversas ciencias sociales. Incluso se puede hacer referencia a una "inflación" conceptual en la que la carencia de una definición precisa se acompaña de una sobrecarga considerable de significados*" (p.95).

Citaremos algunas definiciones aceptadas en diferentes ámbitos y nos centraremos en el uso del término *competencia* en la educación.

Desde la perspectiva de la filosofía, se trata de las habilidades y competencias para que los individuos lleven una vida exitosa y responsable, y entre los problemas que se plantean en el terreno, se pretende entender qué es una buena vida o el bien, yendo más allá del estado mental subjetivo de satisfacción por tener una buena vida o una vida con significado, se reflexiona sobre la necesidad de encontrar un equilibrio entre nuestro estado mental subjetivo de satisfacción y las condiciones objetivas cuya presencia hace posible nuestra satisfacción; se analizan los hechos que hacen de la vida una buena vida y que tienen importancia humana (Canto-Sperber y Dupuy, 2004). Así, en la *Ética a Nicómaco* de Aristóteles, la felicidad o vida buena es relacionada con la actividad, es decir, no es un estado habitual sino ejercicio activo.

> "*Y así como en las fiestas del Olimpo no los más hermosos ni los más valientes ganan la corona, sino los que pelean (pues algunos de estos vencen), de esta misma manera aquellos que se ejercitan bien, alcanzan las cosas buenas y honestas de la vida*" (pp. 55-56).

A lo largo del Libro I de la obra de este filósofo seguimos la idea de que no es suficiente poseer cualidades para ser feliz, sino hay que ejercerlas, o sea, la idea que va acorde con el modelo competencia-desempeño.

Desde del punto de vista sociológico las competencias hacen referencia a las habilidades y estrategias socio-cognitivas con las que el sujeto cuenta en la interacción social. Dentro de las competencias sociales se incluyen las habilidades sociales, el autocontrol, la autorregulación emocional, el reforzamiento social y las habilidades de resolución de problemas, puesto que permiten al individuo hacer frente con éxito a las demandas de la vida diaria. Para Rojas (1999) la competencia social es *"un constructo hipotético y teórico global, multidimensional y amplio, mientras que las habilidades sociales pueden verse como parte del constructo de competencia social. Las habilidades sociales son comportamientos sociales específicos que, en conjunto, forman las bases del comportamiento socialmente competente. El término competencia se refiere a una* *generalización evaluativa y el término habilidades se refiere a conductas específicas"* (p.28). Por otra parte, Pelechano (1995) destaca que cabría hacer una diferencia entre competencia social (éxito social, reconocimiento social de los méritos personales) y competencia interpersonal (reconocimiento individual de personas más que de instituciones). Se trata, en este último caso, según el autor, del logro de una confianza personal, de ayuda hacia los demás y de un referente personal más que social.

La psicología tiene un papel importante en el estudio de competencias, debido a que éstas son cualidades inherentes al hombre que se expresan en su actuación. Dentro el enfoque histórico-cultural se destaca la obra de Lev Vigotsky quien identificó como “herramientas psicológicas” aquellos instrumentos, signos, operaciones, que nos permiten conocer y trabajar intelectualmente y cómo estas “herramientas” tienen un origen cultural.

> *“Así, las diferencias en la cognición están más situadas en las herramientas psicológicas que usa el hombre, formadas en el escenario de la experiencia sociocultural, lo que destaca la importancia del aprendizaje y de la apropiación de la experiencia acumuladas por otros en el desarrollo de todo nuestro arsenal de habilidades y capacidades”* (Fernández González, 2006).

En la psicología cognitiva la concepción tradicional de la inteligencia, concebida como capacidad-disposición, se va transformando por una concepción de procesamiento de información. Desde este enfoque se entiende a la inteligencia (competencia) como un sistema de habilidades y aptitudes más o menos libres de contenido y contexto. Se entiende que no se trata tanto de qué poseemos como capacidad, sino de cómo procedemos con nuestros recursos intelectuales (Weinert, 2004).

II. 2.2. Competencia en el ámbito educativo

En el ámbito educativo el concepto de *competencia* ha producido muchas polémicas y no es unívocamente aceptado tanto el uso del término competencia (Short, 1985) como su aplicación en las perspectivas curriculares (Abrantes, 2001) y propuestas educativas, o sea la llamada “educación orientada hacia las competencias” o “enfoque por competencias” (Coll, 2007; Denyer, et al., 2007; Sacristán, 2008; Zabala y Arnau, 2007).

Tras la revisión del concepto de competencia en educación con la intención de sintetizar las ideas esenciales inherentes a todos ellos, hacemos una descripción del panorama educativo en la que parece que la introducción de la noción de competencia y el enfoque pedagógico por competencias no es un hecho eventual, sino que ha sido una necesidad naturalmente surgida.

Las definiciones de competencia que presentamos se inspiran en el modelo chomskiano de competencia-desempeño en cuanto a asociarla con la habilidad intelectual de la persona, estando ausente la consideración innata de la competencia, ésa se adquiere y se desarrolla.

En la literatura de investigación encontramos numerosos intentos de definir el concepto de competencia. Tal como hemos mencionado, la competencia se hace visible en actuación, por lo que la consideración de un problema o una situación desconocida es imprescindible para que una competencia se manifieste. Por tanto, se la identifica con la cualidad o capacidad que precisa una persona para enfrentarse con éxito ante situaciones-problema poniendo en juego un conjunto de recursos de manera integrada e interrelacionada.

Una definición de competencia aceptada y empleada con frecuencia es la enunciada por Perrenoud (2008). Para este autor:

> *"La competencia es una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones"* (p.11).

Según Perrenoud, esta definición insiste en cuatro aspectos:

1. Las competencias no son en sí mismas conocimientos, habilidades o actitudes, aunque movilizan, integran y orquestan tales *recursos*.

Este aspecto subraya la integridad de la competencia, pues sus componentes (conocimiento, habilidades, actitudes) estudiados por separado hacen perder esa visión de la totalidad de la competencia. La competencia no es un conocimiento, una habilidad o una actitud, sino los moviliza de manera integrada, manifestándose en la capacidad de enfrentarse con situaciones desconocidas.

2. Esta movilización sólo resulta pertinente en *situación*, y cada situación es única.

Con esta consideración se hace referencia a la especificidad de la competencia, es decir, la competencia se expresa en contextos particulares y específicos.

3. El ejercicio de la competencia pasa por operaciones mentales complejas que permiten determinar y realizar una acción relativamente adaptada a la situación.

La movilización de los recursos pertinentes ante una situación es un proceso mental complejo ya que se trata de poner en marcha y orquestar diferentes componentes de manera creativa, adecuada y eficaz a la situación dada.

4. Las competencias se crean en formación, pero también a través de la experiencia (Le Boterf, 1997).

Esta característica de la competencia se refiere a que las competencias se adquieren a través del proceso de aprendizaje, mediante la formación de la persona y además, lo experimentado y lo vivido enriquece y favorece al desarrollo de la competencia.

Algunos autores, en las definiciones pronunciadas, explicitan los recursos que han de movilizarse, destacando entre ellos conocimientos, habilidades, actitudes; otros se extienden incluyendo motivación, valores, emociones y otros componentes sociales. Así, para Zabala y Arnau (2007, p.42):

> *"La competencia ha de identificar aquello que necesita cualquier persona para dar respuesta a los problemas a los que se enfrentará a lo largo de su vida. Por tanto, competencia consistirá en la intervención eficaz en los diferentes ámbitos de la vida mediante acciones en las que se movilizan, al mismo tiempo y de manera interrelacionada, componentes actitudinales, procedimentales y conceptuales".*

De acuerdo con el proyecto DeSeCo de la OCDE (2002, p. 8):

> *"Una competencia es la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales o para realizar una actividad o una tarea [...] Cada competencia reposa sobre una combinación de habilidades prácticas y cognitivas interrelacionadas, conocimientos (incluyendo el conocimiento tácito), motivación, valores, actitudes, emociones y otros elementos sociales y de comportamiento que pueden ser movilizados conjuntamente para actuar de manera eficaz".*

Asimismo, encontramos definiciones de competencia, en las que se especifica la finalidad que se le asigna, como por ejemplo, la definición empleada en el proyecto OCDE/ PISA. Para este proyecto, la competencia es:

> *La capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicarse efectivamente, conforme se presentan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de áreas* (OCDE 2005a, p.2.).

Se destaca, en este caso, que se trata de aquellas competencias que permiten a los jóvenes participar en los procesos democráticos como ciudadanos activos.

La polisemia del concepto de competencia, ha llevado a algunos autores (por ejemplo, Rico y Lupiáñez, 2008; Zabala y Arnau, 2007) a construir tablas comparativas de distintas definiciones dadas por diferentes investigadores y organismos. Así, a pesar de la existencia de una gran variedad de definiciones de competencia, éstas no cambian esencialmente el concepto. En efecto, según Rico y Lupiáñez (2008, p.139) todas ellas comparten tres claves o ideas centrales:

- *Componentes* cognitivos, cognoscitivos o afectivos que entran en la caracterización que cada autor hace de competencia,
- *Finalidad* o finalidades que le asignan, y
- *Contexto* en que se sitúa o desempeña la competencia.

Zabala y Arnau (2007, p.42) a su vez, en las definiciones dadas por diferentes autores e instituciones, destacan dimensiones semánticas y estructurales de la noción competencia. De acuerdo con estos autores todas estas definiciones parten de las siguientes ideas principales: *¿qué es?, ¿para qué es?, ¿de qué manera?, ¿dónde?* (dimensiones semánticas) y *por medio de* (dimensión estructural).

El análisis de varias definiciones manifiesta las siguientes consideraciones relativas al concepto de la competencia. Se puede resumir que la competencia:

- **ES la capacidad, intervención, dominio, posibilidad o aptitud**

El primer descriptor hace referencia a "*la existencia en las estructuras cognoscitivas de la persona de las condiciones y recursos para actuar*" (Zabala y Arnau, 2007, p.43).

- **PARA afrontar, hacer frente, responder, interpretar y resolver problemas**

La finalidad de la competencia es realizar determinadas acciones de forma exitosa, ejecutar tareas o enfrentarse a diversas situaciones. Rico y Lupiáñez (2008, p.140) además de la *acción*, como manifestación y expresión del ser competente, destacan otra funcionalidad de la competencia - el *desarrollo personal y social* - que el sujeto alcanza por medio de la competencia.

- **EN una determinada situación, situaciones nuevas y complejas, personales o sociales, situaciones- problema**

La noción de competencia está estrechamente unida a un contexto definido o a las situaciones concretas o determinadas, es decir, su manifestación siempre tiene lugar en un marco concreto, de manera contextualizada.

> *"El nivel de habilidad es una característica no sólo de una persona, sino también de un contexto. La gente no tiene competencia independientemente del contexto…"* (Fischer et al., 1993, p. 113).

- **POR MEDIO DE movilización de varios saber-hacer; varios recursos cognitivos; conocimientos, habilidades y actitudes; conjunto integrado de recursos; componentes actitudinales, procedimentales y conceptuales**.

Entre los recursos que se ponen en juego, que se movilizan, se encuentran conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, aptitudes, valores y comprensión.

II.2.2.1. Tipo y características de las competencias

En la revisión de la literatura nos encontramos con la existencia de diferentes tipos de competencias: *competencias clave o básicas, transversales, específicas o disciplinarias,* entre otros. *C*ada uno de estos tipos de competencias abarca diferentes capacidades o habilidades aunque no siempre con suficiente precisión.

La definición de *las competencias clave* ha surgido de la necesidad por parte de los organismos internacionales (OCDE, Parlamento Europeo, Comisión Europea, entre otros) de ampliar la cobertura de las competencias con base curricular, y relacionadas con áreas específicas, ya que éstas últimas no abarcan todo el rango de los resultados educativos. Aunque no hay una acepción universal del concepto de las competencias clave, sin embargo, parece que los expertos coinciden en que "*para que una competencia merezca el atributo de "clave", "fundamental", "esencial" o "básica" debe ser necesaria y beneficiosa para cualquier individuo y para la sociedad en su conjunto*" (Unidad Europea de Eurydice, 2002, p.14).

En el documento de recomendaciones del Parlamento y del Consejo Europeo (2006, p. L394/13) las *competencias clave* se definen como aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personales, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo, y se establecen ocho competencias clave siguientes:

1. Comunicación en la lengua materna;

2. Comunicación en lenguas extranjeras;

3. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología;

4. Competencia digital;

5. Aprender a aprender;

6. Competencias sociales y cívicas;

7. Sentido de la iniciativa y espíritu de empresa[15], y

8. Conciencia y expresión culturales.

Se ha partido del consenso de que el dominio de las nociones de lectura, escritura y cálculo es indispensable para el aprendizaje de calidad, sin embargo, no es suficiente para llevar una vida adulta con éxito. Hoy día, con la introducción de las tecnologías en los modos de la comunicación, en administración pública, educación u hogar, los ciudadanos han de contar con el uso de las TIC; dentro de una Europa multicultural y plurilingüe es indispensable el dominio de lenguas extranjeras. Al elaborar la lista de las competencias clave se ha tenido en cuenta tanto las competencias *genéricas o transversales* que se caracterizan por su transferibilidad y flexibilidad (aprender a aprender, resolución de problemas, la creatividad) como las competencias *personales* (motivación, autoestima, confianza, curiosidad, responsabilidad, perseverancia), *interpersonales y sociales* (trabajo en equipo, comunicación lingüística, la toma de conciencia y el respeto hacia otras culturas y tradiciones, conocimiento de sus derechos y obligaciones).

El término competencias *transversales* se refiere a las competencias que se activan en situaciones problemáticas a partir de las diversas prácticas sociales y tienen características universales de la acción humana: leer, escribir, contar, calcular, decidir,

[15] En este contexto, el espíritu empresarial se entiende como el desarrollo de una capacidad para la creatividad, la innovación, la flexibilidad, el trabajo en equipo y la curiosidad intelectual (Unidad Europea de Eurydice, 2002).

planificar, comunicar, argumentar, analizar, evaluar… En un cierto nivel de abstracción, las *competencias transversales* se pueden definir independiente de su contenido y de su contexto (Perrenoud, 2006). Así por ejemplo, se puede argumentar un hecho histórico, una proposición matemática, un texto literario, una experimentación química o fuera del ámbito de las materias escolares, argumentar un juicio, disculparse, etc. En todos estos casos se emplean argumentos, se razona con el propósito de aprobar o refutar una proposición. Para Rey (1999, p.43) la transversabilidad *"no es algo común a varias disciplinas, sino lo que sobrepasa a cada una de ellas y que podría servir más allá de los muros de la escuela"*.

Desde punto de vista de la educación básica, no es una tarea fácil la identificación de las competencias transversales, precisamente debido a esa abstracción y generalización, ya que como nos recuerda Perrenoud, sacándolas del contenido y del contexto éstas presentan problemas éticos o ideológicos difíciles. "*Inscribir "saber argumentar" en un referencial de competencias en una escuela básica* -dice el autor- *sólo molesta a aquellos que piensan que es mejor no formar mayor número de alumnos en la argumentación (sin duda una minoría hoy) […] Por el contrario, si se especifican las situaciones y las prácticas argumentativas de referencia, se está ante innumerables dilemas políticos y éticos*" (p.7). De todas formas, si las competencias se forman a través de la práctica, concluye Perrenoud, debe ser necesariamente en situaciones concretas, con contenidos, contextos y desafíos identificados.

En este caso se trata de las *competencias específicas o especializadas*, aquellas que se refieren a un conjunto de prerrequisitos cognitivos necesarios para que una persona actúe adecuadamente en un campo de actividades o en un área de contenido particular (p.ej. solucionar problemas matemáticos, tocar piano, nadar, etc.). Estas competencias pueden ser definidas en un campo bastante preciso (p.ej. la competencia de tocar piano) o mas amplio (p.ej. resolución de problemas matemáticos). Son frutos de un aprendizaje a largo plazo, requieren experiencia, profundo conocimiento del tema y rutinas de acción automática que se controlan en un nivel de conciencia alto (Weinert, 2004).

Hay que destacar que la *continuidad* o la *adquisición a largo plazo*[16] es una de las características principales de la competencia, fuese cual fuera su tipo. Debido a que una

[16] Es sabido que muchas de las competencias (en el sentido de saber-hacer) se adquieren a corto plazo (calcular el área de un triángulo, realizar operaciones con fracciones, etc.) y son imprescindibles para la actuación competente ante una situación compleja que es fruto de la formación a largo plazo.

competencia siempre puede mejorar, perfeccionarse y presentar diferentes niveles de realización, *en ningún momento se puede afirmar [que] "esta competencia ya se logró"* (Barriga, 2006, p.22), sino que se reconoce por el grado de logro alcanzado. "*Ser competente*, afirman Zabala y Arnau (2007), *no es una cuestión de todo o nada. […] Dentro de un continuo entre la actuación menos competente y la más competente (entendida como la que consigue la óptima eficacia ante la situación problema), las diferentes actuaciones que realicen las personas se situarán en esta línea, dentro de esta gama de opciones competenciales"* (pp.48-49).

Debido a estas consideraciones, la competencia se entiende además como *grado o nivel de capacidad* que se evalúa en el desempeño de una actividad o realización de una tarea por una persona. En este caso se ve la necesidad de realizar una valoración de la competencia mediante algún indicador de excelencia o maestría y se establece ese nivel para todos y cada uno de los ámbitos de actividad en los que se requiere un criterio sobre la competencia. Esta noción ha sido ampliamente difundida con los estudios y evaluaciones internacionales recientes (Rico y Lupiáñez, 2008).

II.2.2.2. ¿Por qué el enfoque por competencias?

Tal como hemos mencionado, consideramos preciso describir brevemente el panorama educativo en el que ha surgido la noción competencia e intenta introducirse en los sistemas educativos de varios países, particularmente, desde las perspectivas curriculares y pedagógicas.

Que la educación no está en su mejor momento o que estamos viviendo una crisis de la educación ya son frases banales propias de nuestra época. En opinión del pedagogo francés Philippe Meirieu, tenemos que alegrarnos de la crisis de la educación, ya que, en cierto sentido, esta realidad se debe al surgimiento de la democracia, porque en sociedades totalitarias nunca hay crisis de la educación.

> *"La crisis de la educación es el precio que pagan las democracias por la incertidumbre que asumen, en términos de poder político, moral y social. Cuando una democracia afirma que no hay poderes en sí y que son los hombres quienes asumen el poder, no puede entonces imponer a la educación una dirección única, una trayectoria que sea la misma para todos"* (Meirieu, 2006).

En su discurso, Meirieu menciona que la educación en estas circunstancias se convierte en aprendizaje para renunciar a ser el centro del mundo, lo que a la vez es la condición para aprender una lengua extranjera, historia, matemática, pero también para vivir en la sociedad democrática. El aprendizaje de saberes, por tanto, es condición para la ciudadanía, no son dos cosas diferentes, es lo mismo.

Por otra parte, somos testigos de las trasformaciones económicas, tecnológicas, sociales y culturales que están afrontando las sociedades actuales, y que inevitablemente implican cuestionamientos acerca de la educación como un tema crucial. Aunque no haya una verdad absoluta para la educación, estos cambios intervienen indiscutiblemente sobre los procesos de la educación e insisten en otorgar a la escuela el papel de orientar la preparación de los jóvenes hacia el cumplimiento de los requisitos de las nuevas demandas de las sociedades industrializadas. Las incorporaciones aceleradas de las nuevas tecnologías en todos los ámbitos de la vida cotidiana y sobre todo en el mundo laboral que requieren especialistas cada vez más cualificados; los procesos de la globalización económica y cultural que posibilitan el libre desplazamiento de los jóvenes y profesionales por el mundo, y requieren el desarrollo de competencias anteriormente no requeridas, entre otros factores, modifican sustantivamente los desafíos que debe asumir el sistema educativo para formar a los ciudadanos y profesionales necesarios para participar activamente en estos nuevos procesos.

> *"El acceso al conocimiento y a determinadas competencias (y no sólo el acceso a la escuela) es visto ahora como el elemento decisivo para participar activamente en los nuevos procesos productivos. Qué tipo de conocimiento o de competencia desarrolla la educación pasa a ser el problema central"* (Filmus, 1994, p.86).

Se trata del problema y de las cuestiones que obviamente, en primer lugar, preocupan a los especialistas en el campo de la educación, el hecho que les lleva a la elaboración de propuestas de mejora e innovación, por una parte, como consecuencia del desarrollo de diversos enfoques de investigación en el ámbito de la pedagogía, la didáctica, la psicología, entre otras disciplinas, y por otra, como respuesta a las exigencias de varios organismos internacionales que ponen en evidencia las deficiencias de los sistemas educativos de diferentes países a través de los estudios longitudinales a gran escala (por ejemplo, PISA). El concepto de competencia y de educación por competencias es una de esas propuestas innovadoras que ha penetrado últimamente en todo el sistema educativo de varios países. En los últimos quince años, en nuestro ámbito, se puede encontrar una variedad de formulaciones y expresiones en torno al tema de las competencias, entre ellas Barriga (2006) destaca: formación por competencias, planes de estudio por competencias y propuestas educativas por competencias.

En la actualidad existe una diversidad de opiniones y posiciones acerca de la utilidad y la oportunidad del concepto de competencia en la educación. Asimismo, son diferentes las aproximaciones a la pregunta a *qué mundo nos lleva esta forma de educar por competencias* (Sacristán, 2008). En sus reflexiones al respecto, el autor lo explica de la siguiente manera:

> *"Para unos nos conduce a una sociedad de individuos eficientes respecto de la gran maquinaria del sistema productivo, la cual requiere una adaptación a las exigencias de la competitividad de las economías en un mercado global. Otros consideran que es un movimiento que enfoca la educación como un adiestramiento, un planteamiento en el que la competencia resume el abanico de las amplias funciones y los grandes objetivos individuales o colectivos, intelectuales, afectivos…de la educación. Para otros, estamos ante la oportunidad de reestructurar los sistemas educativos por dentro, superando la instrucción ocupada en contenidos obsoletos poco funcionales, para lograr una sociedad, no sólo eficiente, sino también justa, democrática e incluyente*" (p.10).

El mismo autor, al plantear la pregunta, pone en duda la realización de estas esperanzas y mantiene una posición crítica respecto a esa tendencia, esencialmente, debido a la debilidad de planteamiento teórico que impide llevar a práctica una pedagogía basada en competencias.

> *"Por prometedor que sea este enfoque, es evidente que poco más allá de enunciarlas, no poseemos el capital - no lo posee el profesorado - de saberes prácticos necesarios para conocer cómo se provoca el desarrollo de las competencias"* (p.48).

Profundizaremos un poco en las razones que originan diferentes visiones respecto a este enfoque.

Respecto a la primera visión, según la cual esa tendencia nos lleva hacia una sociedad de individuos eficientes, creemos que no es ocasional la elección del término competencia, si tomamos como referencia cualquiera de sus acepciones, se trata tanto de la necesidad de ser competentes, en el sentido de ser aptos, estar facultados o capacitados para un desempeño de éxito, como de la necesidad de ser competitivos, o sea, estar preparados para salir adelante, prevalecer sobre otros, emular con otros, ganar y aventajar (Fernández González, 2006).

Hace varios años que los principales economistas señalan que dado que se reduce la necesidad de materias primas, trabajo, tiempo, espacio y capital, el conocimiento pasa a ser el recurso central de la economía desarrollada (Toffler, 1992), el conocimiento se está convirtiendo en un factor crítico de producción (Drucker, 1994), las personas especializadas serán la única ventaja competitiva perdurable (Thurow, 1992) o según Reich (1993) los bienes fundamentales de una nación serán la capacidad y destrezas de sus ciudadanos (citado en Filmus, 1994).

En la Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo (2006) se puede apreciar la conclusión de que:

> *"Un marco de referencia europeo debía definir las nuevas cualificaciones básicas que debe proporcionar el aprendizaje permanente como medida esencial de la respuesta de Europa ante la globalización y el desplazamiento hacia las economías basadas en el conocimiento, y subrayó que la principal baza de Europa son las personas"* (p. L394/10).

A estas alturas la problemática de qué conocimientos y competencias han de desarrollarse desde la escuela para preparar a los jóvenes tanto para la incorporación al mercado laboral como para seguir estudios superiores se ha convertido en el eje central del debate educativo a nivel mundial. Como resultado de estos debates se establecen varios tipos de competencias que el sistema educativo debe desarrollar en sus escolares. Las nuevas competencias demandadas se vinculan tanto con las áreas específicas (matemáticas, lengua, etc.) como con la capacidad y actitud positiva hacia el aprendizaje y autoaprendizaje continuo; capacidad de resolver problemas; posibilidad de pensar estratégicamente y planificar y responder creativamente a demandas cambiantes; capacidad de observar, interpretar y tomar decisiones en situaciones imprevistas, entre otros. Se considera que estas competencias son imprescindibles para potenciar las posibilidades de participación social y laboral de aquellos que quedan marginados del acceso a los puestos de trabajo generados por las transformaciones; permiten una mayor igualdad de posibilidades para todos en el acceso a los restringidos puestos de trabajo de alta capacitación y que las competencias de analizar, pensar estratégicamente, planificar, cooperar y responder creativamente a situaciones nuevas también son necesarias, para que desocupados y subocupados puedan encontrar "vías alternativas" de integración laboral en condiciones dignas (Filmus, 1994, p.89).

Entre los que comparten otras dos posiciones, la educación por competencias la ven como resultado de la evolución de la sociedad. A partir del análisis de la historia de la enseñanza se puede observar una evolución global hacia la pedagogía que tiene en cuenta al alumno como persona y sus motivaciones (Denyer, et al., 2007). Según recuerdan los autores, desde 1580, Montaigne deseaba que el maestro-y probablemente el alumno- tuvieran una mente bien orientada más que llena de datos. Y entre reformadores más celebres mencionan a Jean-Jacques Rousseau, a Ovide Decroly, a Célestin Freinet entre muchos otros, que participaron en la elaboración de los principios de la "nueva educación", tomando en cuenta la *socialización*, la *experimentación,* la *motivación,* la organización de actividades que tengan *sentido* para el alumno.

Denyer, et al. (2007) creen que el origen de las cuestiones *por qué* y *para qué* una educación basada en competencias se halla en las necesidades de la escuela actual y en la historia antigua de la pedagogía. Y esta misma historia, según los autores, muestra que "*el triunfo dista mucho de estar asegurado, pues en el combate entre las mentes competentes y las mentes llenas, estas últimas son las que, tradicionalmente, han vencido*" (p.30). La educación basada en competencias, aseguran los autores, es una oportunidad para que el aprendizaje adquiera sentido y para que los estudiantes construyan conocimientos acorde con sus necesidades e intereses.

> *"Al optar por esta vía pedagógica, la escuela responde a la necesidad de dar un sentido a los aprendizajes, a la constatación de que el alumno no es un recipiente que el maestro tiene la misión de llenar, sino una persona que construye esos conocimientos en función de lo que él es (los conocimientos ya adquiridos, sus representaciones, sus intereses, etc.). Todos hemos podido comprobarlo: no basta la transmisión del saber"* (pp.30-31).

Desde el punto de vista de estos autores, al adoptar una pedagogía para la construcción del saber y adquisición de competencias, la escuela tiene la esperanza de reducir el volumen de "conocimientos muertos" a favor de "conocimientos vivos", esos conocimientos tan bien integrados que se les sigue utilizando y enriqueciendo a lo largo de la vida.

Zabala y Arnau (2007), en la misma línea, consideran que el término *competencia* nace como respuesta a las limitaciones de la enseñanza tradicional. Según estos autores, una simple revisión de los programas oficiales, el tipo de pruebas o las propuestas curriculares nos permite ver que el enfoque se pone en el aprendizaje de los conocimientos, por encima de las habilidades, que la educación se ha priorizado los conocimientos sobre su capacidad para ser aplicados en la práctica.

> *"El valor de saber por sí mismo ha determinado y determina las características de los sistemas educativos y la preeminencia de la teoría sobre la práctica, especialmente en los países de tradición católica (…), están condicionados por un fuerte componente filosófico de raíz platónica, al considerar la preexistencia de las ideas sobre la realidad, y promueve con ello un pensamiento generalizando a favor del "saber por el saber". En contraposición, (…) en los países de la tradición calvinista, que con una base filosófica de raíz aristotélica (materia y forma son cosas reales) han valorado y valoran la capacidad aplicativa del conocimiento"* (p.22).

Compartimos con Coll (2007, p.34) sus razonamientos acerca de que "*los enfoques basados en competencias suponen un progreso respecto a enfoques y planteamientos precedentes, pero siguen presentando, como no puede ser de otra manera, limitaciones importantes…*".

Según este autor, más allá de la componente de otra "moda educativa" que se otorga a este enfoque, su interés principal reside en "*los matices que aporta a la manera de entender los aprendizajes que se aspira a promover mediante la educación escolar*" (p.35). Ser competente desde este enfoque significa ser capaz de movilizar y aplicar los conocimientos relevantes para afrontar determinadas situaciones y problemas. Sin embargo, recuerda el autor, esta dimensión no es totalmente novedosa, dado que la importancia de la funcionalidad del aprendizaje como una de las características principales del aprendizaje significativo está presente en los enfoques constructivistas (Ausubel, 2002). Por tanto, "*la novedad y la originalidad de este enfoque no reside tanto en la toma en consideración de la funcionalidad como una dimensión importante del aprendizaje, como en el hecho de situarla en el primer plano del tipo de aprendizaje que se desea promover mediante la educación escolar, lo que ciertamente no es un aspecto menor*" (p.36). El énfasis que se pone desde la entrada en la movilización articulada e interrelacionada de distintos tipos de saberes (habilidades prácticas y cognitivas, conocimientos factuales y conceptuales, valores, etc.) es otro aspecto esencial de los enfoques basados en competencias. Como un tercer aspecto del concepto de competencia Coll (2007) destaca la importancia del contexto en el que se adquieren las competencias y en el que se aplicarán posteriormente.

Cabe destacar la existencia de dos entendimientos extremadamente diferentes de la noción de competencia y, respectivamente, como consecuencia del primero, la pedagogía basada en competencias cambia significativamente su sentido.

La competencia entendida en el muy estrecho sentido de "saber ejecutar" como un procedimiento (hacer una suma, etc.) tiene su origen en el enfoque conductista (Rey, 1999; Short, 1985) en el que la competencia se identifica con *conducta* o *actuación*, con *ejecución* de una regla. En el plano pedagógico, esa noción de competencia alude a la inspiración de la "pedagogía por objetivos", cuya finalidad ha consistido en precisar lo que los alumnos serán *capaces de hacer* al terminar tal curso o una serie de cursos.

> *"Los objetivos del profesor, incluso si son identificados con precisión, no toman sentido y cuerpo sino cuando éste tiene los medios de asegurarse que serán alcanzados, lo que obliga a hacerlos observables, es decir, una vez más a reducirlos a comportamientos"* (Rey, 1999, p. 21).

Aunque, nos recuerda el autor, algunos teóricos de la "pedagogía por objetivos" rechazan la relación que se establecen entre sus investigaciones y esa teoría psicológica (conductivismo), lo que es cierto en cuanto a que la pedagogía por objetivos no implica la tecnología del aprendizaje mediante esfuerzo, sin embargo, no se puede negar que haya afinidad entre éstas ya que para ambas teorías la noción de comportamiento ocupa un lugar central y es reconocida como la única fuente de validación.

Para los que entienden la competencia como un saber puramente técnico, con toda la razón oponen el saber a la competencia y ven amenazados los contenidos conceptuales en favor de lo procedimental y práctico.

La noción de competencia entendida como la capacidad de afrontar situaciones nuevas y complejas, movilizando varios procesos cognitivos (conocimientos, habilidades o actitudes), va más allá de una conducta o ejecución, supone que al elegir algo que hacer se sabe el porqué se hace. En este caso está presente el componente comprensivo o reflexivo de la competencia. Para quienes la comprenden en este sentido es obvio que los conocimientos se encuentran en el meollo de la competencia; cuando hablamos de una persona competente suponemos que posee conocimientos, nunca es ignorante y aún más, sabe qué conocimiento usar, cómo y comprende por qué lo usa.

Justamente este segundo entendimiento de la competencia lleva a los defensores de la educación por competencias a considerar que éstas pueden resultar instrumentos para superar las falsas dicotomías entre teoría y práctica, lo conceptual y lo procedimental, lo memorístico y comprensivo (Zabala y Arnau, 2007).

> *"La competencia nos ofrece un fiel baremo para poder ver el grado de comprensión que deben tener las acciones humanas, al situar el valor del conocimiento, habilidad y actitud en función de las necesidades a la que una persona debe dar respuesta"* (p. 59).

Nuestra visión de la competencia es la que acabamos de comentar y a lo largo del documento vamos a referirnos a la competencia en este segundo sentido.

II.2.2.3 Fundamentos teóricos del enfoque por competencias

Llegados a este punto nos parece oportuno presentar las reflexiones y aportaciones de algunos expertos sobre en qué se basa la adquisición de las competencias y cómo se desarrollan las competencias.

Con el objetivo de determinar los métodos y las estrategias de la enseñanza de las competencias es necesario recurrir a los conocimientos sobre el aprendizaje de las mismas. Zabala y Arnau (2007) mencionan que actualmente no disponemos de un conocimiento suficientemente elaborado que permita dar una respuesta específica acerca de cómo las personas conseguimos ser competentes. Sin embargo, destacan los autores, tenemos datos suficientes sobre las condiciones generales acerca de cómo aprendemos.

En la lectura del apartado anterior se transparentan ideas de que el enfoque por competencias pretende dar sentido a los aprendizajes, se trata de un aprendizaje significativo y funcional, se admite que es el alumno quien construye los conocimientos a través de sus propias experiencias. Son ideas que reposan sobre los principios *constructivistas* los cuales enfatizan *el papel activo del sujeto en la construcción del conocimiento* y la importancia de *la interacción del sujeto con el medio*.

Como hemos podido apreciar según la propia definición de las competencias, estas implican la movilización de diversos recursos necesarios ante varias situaciones y problemas. Se trata, por tanto, de aplicar aquellos recursos que han sido adquiridos con mayor grado de significatividad posible. No se puede aplicar eficazmente aquello que no se ha entendido o no se ha dominado con suficiente profundidad (Zabala y Arnau, 2007).

> *"O lo aprendido se comprende y domina profundamente, o difícilmente podrá ser utilizado de forma competente ante una situación precisa de la realidad. No es posible ser competente si el aprendizaje de los componentes ha sido sólo de carácter mecánico*" (p.107).

Esta afirmación es acorde con la cita de Denyer et. al., (2007), cuando dice que "*un conocimiento verdaderamente movilizable o transferible es un conocimiento que, inicialmente ligado a "varios contextos", ha adquirido tal grado de generalidad que "ya" no está ligado a "ningún" contexto"* (p.119). Este grado de generalidad se alcanza gracias a la comprensión profunda de lo aprendido.

Según la teoría de Ausubel (2002), el aprendizaje significativo y el memorístico pueden presentarse más bien como polos de un continuo que como clases claramente dicotómicas, que implica considerar distintos grados de significatividad. Debido a la estrecha relación entre la significatividad del aprendizaje y las competencias, éstas también son entendidas con distintos grados de dominio y eficacia. Uno no es enteramente competente o completamente incompetente. Estos distintos grados, como ya se ha dicho, tienen que ver con las condiciones que influyen en el propio proceso de aprendizaje (Zabala y Arnau, 2007).

Entre los factores desarrollados dentro del marco de las teorías constructivistas y socioconstructivistas que condicionan el aprendizaje significativo, se encuentran: (a) nivel de desarrollo; (b) construcción de significados a partir de los conocimientos previos; (c) zona de desarrollo próximo; (d) metacognición e (e) implicación personal y motivación.

Como nos recuerdan Denyer et al. (2007), en relación con la enseñanza en términos de competencia, una cosa es elaborar referenciales de competencias y otra es hacer que a ellos correspondan las prácticas. Si la competencia es una capacidad para realizar tareas, siguen los autores, no hay que buscarle tres pies al gato: necesariamente debe adquirirse enfrentando al alumno a las tareas, y no mediante la transmisión de conocimientos o la automatización de procedimientos.

> *“Por tanto, no hay más que: a) imaginar tales tareas; b) enseñar a los alumnos a resolverlas y para ello, a adquirir y a movilizar los recursos indispensables, y c) hacer surgir en el alumno una reflexión metacognitiva sobre las condiciones del éxito de la acción”* (p.85).

El objetivo principal asignado ahora a los alumnos, según los autores, ya no es restituir la materia o resolver los ejercicios de aplicación relativos a los conocimientos previamente enseñados, sino enfrentarse a tareas *desde la escuela*.

La pedagogía de las competencias implica que el conocimiento, si se quiere que un día pueda ser movilizado, se perciba menos como producto que se entrega bien construido y aislado, y más como un proceso, como una construcción personal progresiva (Denyer et.al, 2007).

Adquirir una competencia, en palabras de Meirieu que a su vez parafrasea a Platón y a San Agustín, es sencillamente *“aprender a hacer lo que se sabe, haciéndolo”* (Ibid., pp.30-31). De esta manera, ya que es el alumno quién adquiere la competencia, se precisa la implicación del alumno y el papel del profesor ha de consistir más bien en proporcionarle oportunidades para adquirir, administrar y aplicar sus conocimientos y destrezas a situaciones nuevas. Como nos hace notar Legendre, citado en Denyer et.al, (2007), desarrollar una competencia puede consistir en administrar mejor el uso de los recursos existentes y no necesariamente adquirir nuevos recursos, es decir, descubrir nuevas maneras de emplear lo que ya se sabe.

II.2.3. Revisión del concepto de competencia matemática

Revisemos ahora las consideraciones que hacen algunas instituciones, proyectos internacionales e investigadores respecto a la competencia matemática.

En primer lugar, queremos aclarar el uso del término *competencia* a largo de este apartado. El término *competencia* en francés y español pueden pasar al ingles en dos palabras: *competence* y *competency*. En la versión inglesa se usa *competence* para referirse al concepto (es decir, al modelo de competencia-desempeño) y a su teorización, así como al nivel de cierta habilidad o competencia (esto es, la competencia de una persona para leer o para las matemáticas); se usa *competency* (plural *competencies*) para referirse a una competencia particular que una persona puede o no tener. Asimismo, en la traducción castellana de los informes del proyecto PISA, se usa indistintamente la palabra *competencia* refiriéndose a *mathematical literacy*, *competencies*, *performance o proficiency* (OCDE, 2004b), aunque se describen detalladamente los distintos significados que se le otorga a la noción de competencia para todos los casos (véase Rico, 2007).

En nuestro estudio usaremos el término *competencia* cuando nos refiramos a *competence* y *competency*, *alfabetización matemática* para el término *mathematical literacy*, *actuaciones* para *performances y dominio o maestría* para *proficiency* con el propósito de no acumular significados de este término.

La competencia matemática es vista como una competencia clave o básica en varios documentos institucionales y ocupa un lugar importante en los informes, estudios y propuestas curriculares nacionales e internacionales.

En el documento de *Competencias clave* del Proyecto Eurydice (2002) se menciona que el dominio de las nociones matemáticas, entre otras competencias básicas como lectura y escritura, se considera como el punto de partida para todo aprendizaje futuro de calidad. De mismo modo, en la Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo entre las ocho competencias clave se encuentra la competencia matemática. Para este organismo:

> *"La competencia matemática es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña — en distintos grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas)"* (2006, p. L394/14).

En esta definición, cabe destacar el énfasis que se hace en el desarrollo y aplicación del razonamiento y pensamiento matemáticos, aunque también se considera el conocimiento, sin embargo, no es el eje central de la noción. En efecto, como menciona Keitel (2004) la competencia matemática no puede definirse tan solo en términos de conocimiento matemático, ya que "*la comprensión de los contextos matematizados o de las aplicaciones matemáticas y el uso competente de matemáticas en contextos va más allá del conocimiento matemático*" (p.21).

En la *ORDEN ECI/2220/2007*, de 12 de julio de 2007, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria, la competencia matemática considerada como la segunda competencia básica consiste en:

> *"La habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral"* (p.31689).

Se menciona que tales habilidades aumentan la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

Llama la atención el hincapié que se hace sobre el conocimiento funcional de las matemáticas, la habilidad de identificar situaciones donde se precisan los elementos y razonamientos matemáticos, aplicar varias estrategias de resolución de problemas, seleccionar las técnicas adecuadas y representar e interpretar la realidad a partir de los datos disponibles. Se concluye que el desarrollo de las competencias matemáticas en la educación obligatoria se alcanzará en cuanto *"los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana"* (Ibid.).

El concepto de la competencia matemática ha dado lugar a reflexiones y a diversos trabajos e investigaciones. Las preguntas, ¿qué es una competencia matemática? o ¿qué significa que una persona es matemáticamente competente? ha sido planteada por diversos investigadores. A continuación presentamos las aportaciones de algunos de ellos para precisar este concepto y para su mejor entendimiento.

Así, Kilpatrick et al., (2001) eligen la noción *mathematical proficiency* (pericia o competencia matemática) que abarca experiencias, conocimientos, competencias y facilidad en las matemáticas para describir lo que a su parecer es necesario para que cada individuo se desenvuelva con las matemáticas con éxito. De este modo, determinan cinco componentes (*strands*)[17] de *mathematical proficiency* (p.116):

- *Comprensión conceptual* (*conceptual understanding*) – *comprensión de los conceptos, operaciones y relaciones.*
- *Fluidez de procedimientos (procedural fluency) – destreza en el cumplimiento de los procedimientos con fluidez, eficacia y apropiadamente.*
- *Competencias estratégicas (strategic competence) – habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.*
- *Razonamiento flexible (adaptive reasoning) – capacidad para razonamiento lógico, reflexión, explicación y justificación.*
- *Disposición productiva (productive disposition) – inclinación habitual de ver las matemáticas como algo con sentido, útil y valioso, junto con la creencia en la eficacia y la predisposición propia.*

Según estos autores, las cinco componentes mencionadas no son independientes sino constituyen diferentes aspectos de un todo complejo. Los autores visualizan la interrelación e interdependencia de estas cinco componentes en el desarrollo de *mathematical proficiency* mediante una cuerda trenzada por éstos para subrayar esas características.

La determinación de estas componentes se basa sobre todo en las aportaciones de las teorías cognitivas que postulan que la competencia en el área de investigación depende no del conocimiento meramente almacenado, sino del conocimiento mentalmente representado y organizado (conectado y estructurado), de manera que facilite apropiadamente su activación y aplicación. Además, los estudios en resolución de

[17] El marco que proporcionan estas cinco componentes para discutir los conocimientos, destrezas, habilidades y creencias que constituyen *mathematical proficiency*, tiene similitudes con el que ha sido empleado en la evaluación organizada por National Assessment of Education Progress (NAEP). En esta evaluación, que anteriormente había considerado tres habilidades matemáticas (comprensión conceptual, procedimental y resolución de problemas), han añadido especificaciones adicionales respecto al razonamiento, conexiones y comunicación. Se ha prestado la mayor atención al papel de las representaciones mentales, se decir, a cómo los estudiantes representan y conectan unidades de conocimiento, vistos como un factor clave en cuanto a su comprensión profunda y la capacidad de usar tal conocimiento en la resolución de problemas (Kilpatrick et al., 2001).

problemas han documentado la importancia de la experiencia de adaptación (*adaptive expertise*) y de la metocognición: conocimiento acerca de su propio pensamiento y la habilidad de administrar su propia comprensión y la actividad de la resolución de problemas (Kilpatrick et al., 2001). En la misma línea, según Schoenfeld (1992), el éxito de un resolutor al resolver problemas matemáticos se debe a la presencia de los siguientes cuatro componentes: recursos (conocimiento matemático), estrategias heurísticas, control y sistemas de creencias. Cabe destacar el paralelismo entre un resolutor eficiente y una persona competente en matemáticas. Aunque la actividad matemática no se limita a la resolución de problemas, sin embargo, es aquella en la cual la competencia se manifiesta con más evidencia. Es decir, en general, nos formamos juicio sobre la competencia matemática de alguien según cómo se enfrenta con la resolución de problemas complejos. Por tanto, una persona competente en matemáticas sería un buen resolutor y seguramente viceversa.

Es evidente el consenso entre diferentes autores y organismos respecto a los aspectos esenciales de la competencia matemática: se trata de un sólido dominio de conocimientos y destrezas matemáticas; de la capacidad de plantear y resolver problemas en situaciones nuevas empleando diferentes estrategias; de saber argumentar, justificar y razonar matemáticamente. También se tiene en cuenta la disposición o actitud positiva hacia las matemáticas. En las dos primeras definiciones explícitamente se da importancia a la capacidad de resolver problemas planteados en contextos de la vida cotidiana o laboral, es decir, al carácter funcional del conocimiento matemático y a la capacidad de aplicar, cuando sea preciso, todo el bagaje de recursos disponibles al enfrentarse con las situaciones de vida real.

La definición de *mathematical literacy* (competencia o alfabetización matemática[18]) en los trabajos de autores como Niss (1999), De Lange[19] (1999), OCDE (2003), OCDE

[18] Abrantes (2001), haciendo referencia a (Kirsch y Mosenthal, 1993), recuerda que inicialmente "alfabetización" se identificaba con la asistencia a la escuela, más adelante con la adquisición del conocimiento durante los estudios en la escuela. Finalmente, el foco de la alfabetización ha pasado desde la adquisición a la aplicación del conocimiento en situaciones concretas.

Por su parte, De Lange (1999) enfatiza que el término "alfabetización" no se limita a identificar el nivel básico o mínimo del funcionamiento, sino al contrario, entienden alfabetización como un espectro continuo y multidimensional entre aspectos del funcionamiento básico y de la maestría de alto nivel.

(2004b) es acorde con la teoría sobre la estructura y el uso del lenguaje, tratada en los recientes estudios sobre la competencia sociocultural[20]. La definición sociocultural de competencia considera la capacidad de leer, escribir y construir significados (*meaning-making*) como elemento inherente de la práctica social. Esta definición proviene de Gee (1996) quien ha definido la competencia en relación a los Discursos. Los Discursos, según este autor, son modos socialmente reconocidos de usar la lengua (lectura, escritura, habla, escucha), gestos y otras semióticas (imágenes, sonidos, gráficas, signos, códigos), así como modos de pensar, creer, sentir, valorar, actuar/hacer y interactuar en relación con la gente y las cosas, de tal manera que podemos ser identificados y reconocidos como miembros de un grupo socialmente significativo (Lankshear, 1999).

De manera análoga, el considerar las matemáticas como un lenguaje supone que los estudiantes deben aprender los elementos característicos del discurso matemático (tanto términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y destrezas, como la estructura de tales ideas de cada sub-área matemática específica) y también que deben aprender a utilizar tales ideas para resolver problemas no rutinarios en una variedad de situaciones definidas en términos de funciones sociales (Niss, 1999, De Lange, 1999; OCDE, 2003; OCDE, 2004b).

Concretamente, Mogens Niss, en su trabajo acerca de las competencias matemáticas (*mathematical competencies*) (Niss, 1999; 2003), parte de la analogía entre éstas y el uso competente de un idioma, destacando que uno puede considerarse que domina un idioma cuando es capaz de entenderlo y usarlo en una amplia variedad de contextos y situaciones, que a su vez, supone disponer un vocabulario bastante amplio, saber la ortografía y la gramática como componentes necesarias para su uso. Al transferir esta analogía a la competencia matemática, según Niss:

---

[19] Niss y De Lange han sido los miembros del grupo de expertos en matemáticas del proyecto OCDE/PISA, de hecho, las ocho competencias matemáticas determinadas en el proyecto se basan en el trabajo de Niss (1999).

[20] No debería entenderse "sociocultural" vinculado a la perspectiva sociocultural del constructivismo, que nos habla de un conocimiento del grupo, construido en dicho grupo a partir de las interacciones, donde representa un papel importante la intersubjetividad. Como el enfoque de competencias es más bien de corte individual, la perspectiva más vinculada sería el constructivismo social, que nos habla de la construcción de conocimiento por parte del individuo (como en el constructivismo radical o piagetiano) en un contexto social.

> "*La competencia matemática significa la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticos en las cuales la matemática desempeña o podría desempeñar un papel. Los requisitos previos necesarios, pero ciertamente no suficientes, para la competencia matemática son un amplio abanico de conocimientos factuales y habilidades técnicas, en el mismo modo como el vocabulario, la ortografía y la gramática son condiciones necesarias pero no suficientes para la alfabetización*" (p.6-7).

Respecto a la analogía entre el dominio de un lenguaje y el de lenguaje matemático, ha de notarse que a pesar de que esta analogía es muy poderosa, sin embargo, hay que tener presente siempre que el lenguaje matemático "*no se creó con el fin de comunicar "todo" tipo de pensamiento del ser humano; el lenguaje de la Matemática se creó para comunicar ciertas propiedades específicas de "objetos" particulares y sus relaciones con el mundo empírico"* (Fandiño Pinilla, 2008, p.42), hecho que provoca gran dificultad para muchas personas para su dominio y uso.

Ahora bien, Niss (2003) determina una lista de ocho competencias (*competencies*) que constituyen la competencia matemática, que en ningún momento considera exhaustiva, sin embargo, cree que ésta abarca los aspectos esenciales del dominio matemático. Los ocho componentes, según el autor, forman dos grupos. El primer grupo tiene que ver con la capacidad de *preguntar y responder a preguntas en y con matemáticas* y incluye: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas, modelizar y razonar matemáticamente. El segundo grupo entiende *la capacidad de tratar y manejar el lenguaje matemático y herramientas* y está constituido por otras cuatro competencias: representar, utilizar símbolos matemáticos y formalismos, comunicar, utilizar soportes y herramientas (incluyendo TIC).

Asimismo, Niss (2003) destaca la naturaleza dual de las competencias matemáticas, otorgándoles aspectos analítico y productivo. El aspecto analítico de una competencia se relaciona con la comprensión, interpretación, validación de los procesos y fenómenos matemáticos, como, por ejemplo, comprender el enunciado de un problema, reconocer los conceptos matemáticos subyacentes en ello o buscar estrategias de resolución, mientras el productivo se centra en la construcción activa o en la realización de los procesos, tales como resolver el problema y comunicar sus resultados.

Esta característica de las competencias va en la misma línea con el concepto de competencia entendido en nuestro trabajo ya que, como habíamos mencionado anteriormente, el concepto de competencia, en este caso competencia matemática, es entendido no en el sentido restringido como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas ("saber hacer"), sino que se complementa con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego ("saber qué hacer y por qué") (Godino, 2002; 2008).

El siguiente apartado lo dedicamos al concepto de competencia matemática adaptado en el proyecto PISA, el concepto de la alfabetización, que, según Salganik (2004), es uno de las contribuciones de gran relevancia para la construcción de un amplio marco de trabajo de competencias.

II.2.4. La competencia matemática en el proyecto PISA[21]

El concepto *competencia matemática*, tan frecuentemente utilizado en los últimos años, se ha popularizado todavía más a partir de los estudios internacionales PISA y, de forma particular, ha sido descrito en detalle en el informe PISA 2003 (OCDE, 2003; OCDE, 2004a; 2004b) que se ha centrado específicamente en la evaluación en matemáticas. A partir de ahí, a través de debates, publicaciones y estudios se intenta reflexionar, encontrar vías y sacar conclusiones acerca de cómo aproximarse a estas competencias.

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (*Programme for International Students Assessment*, PISA) se sitúa dentro de los "Estudios de la segunda generación"[22] de la OCDE y ha surgido de la necesidad de contar con datos regulares comparables para indicadores de educación. Este estudio se realiza cada tres años a partir del 2000 y evalúa las competencias en lectura, matemáticas y ciencias al término de la educación obligatoria. La principal finalidad de la evaluación PISA consiste en establecer indicadores que muestren el modo en que los sistemas educativos de los países preparan

[21] Las ideas que exponemos en este apartado provienen de varios documentos relacionados con el proyecto PISA.

[22] Además de los estudios PISA, entre otros estudios que se han desarrollado bajo "Estudios de segunda generación" se destacan: La Investigación del Alfabetismo Adulto y de las Habilidades de Vida (ALL, Adult Literacy and Lifeskills Survey) y Estudio de Educación Cívica (Cived), en Salganik (2004).

a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel activo como ciudadanos, dato relevante para expresar el desarrollo de una sociedad (OCDE, 2005a).

Así, en el estudio PISA *mathematical literacy* (OCDE, 2003) o alfabetización matemática (OCDE, 2004b) se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, resuelven e interpretan problemas matemáticos en una variedad de situaciones y dominios. Para el proyecto internacional OCDE/PISA, la alfabetización matemática:

> *"es la capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, hacer razonamientos bien fundados y usar y implicarse con las matemáticas y satisfacer necesidades de su vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo"* (OCDE, 2003, p. 24).

Alfabetización matemática se refiere al dominio de cierta cultura matemática, propia de los individuos cultos en matemáticas (Puig, 2008) que no se limita al conocimiento de los términos, hechos, procedimientos o operaciones matemáticas, sino incluyéndolos implica el uso creativo de estos elementos frente a las demandas que impongan situaciones externas (OCDE, 2003).

Debido al uso universal de las matemáticas y a la existencia de numerosas situaciones donde nos encontramos con conceptos matemáticos de diferentes tipos, sean los medios de comunicación (Internet, revistas, periódicos, televisión), informes, gráficos o diagramas sobre cuestiones del tiempo, la economía, la medicina, el deporte, la política, etc., horarios de autobuses y trenes; operaciones bancarias, compras, etc., se requiere de los ciudadanos cada vez más la aplicación de los conocimientos y destrezas matemáticos para enfrentarse con diversas situaciones cotidianas.

Destacando el papel funcional de las matemáticas, alfabetización matemática del proyecto OCDE/PISA se centra en la capacidad de los estudiantes para utilizar su conocimiento y comprensión matemáticos para afrontar estas cuestiones y llevar a cabo las acciones pertinentes. El foco de atención de la evaluación PISA 2003, por tanto, está en "*cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido*". El énfasis se pone sobre "*el conocimiento matemático* *puesto en funcionamiento en multitud de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal"* (Rico, 2007, p. 4).

Esto implica que además de *saber o conocer* los recursos matemáticos (términos, conceptos básicos, hechos, signos, símbolos, procedimientos), los estudiantes deben *saber aplicarlos* y *argumentar* sobre el uso de tales recursos e ideas para resolver problemas no rutinarios en una variedad de situaciones. Resulta habitual que una persona pueda conocer muy bien estos elementos característicos de las matemáticas y no entender su estructura ni saber cómo y por qué utilizarlos para resolver problemas. Como se cita en "Marcos teóricos de PISA 2003":

> *"El no saber utilizar las nociones matemáticas puede llevar a adoptar decisiones confusas en la vida personal, a creer más fácilmente en las pseudociencias y a tomar decisiones poco informadas en la vida profesional y social"* (OCDE, 2004b, p.28*)*.

Según estas consideraciones, la postura del estudio respecto a la finalidad de las matemáticas en la enseñanza formal es explícita y converge con la opinión de Niss (1998), para quien *"la enseñanza de las matemáticas tiene que contribuir a fomentar la ciudadanía inteligente e inquieta para todos los miembros de la sociedad. […] debería darse a todo el mundo para ayudar a crear la perspectiva de "lo general", es decir de los rasgos constitutivos y las fuerzas directrices esenciales que hay detrás del desarrollo de la naturaleza, de la sociedad y de la vida de los seres humanos…"* (p.15).

En cierto modo, esas consideraciones, analíticamente reconstruidas de la función de las matemáticas en el mundo según la época y el lugar en que vivimos, constituyen *razones "verdaderas" para enseñar matemáticas* (Niss, 1998) y aunque tomamos, con la sensación de confianza y seguridad, la presencia de las matemáticas en el currículo y damos por sentado su importancia como asignatura, ello puede verse como la justificación actualizada de la presencia de las matemáticas en la escuela.

En el marco conceptual del proyecto OCDE/PISA las *competencias* (*competencies*) que los estudiantes deben movilizar para resolver problemas se tratan bajo el título genérico de procesos matemáticos. Para plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones los estudiantes necesitan poseer un abanico de destrezas y conocimientos que les permitan identificar y aplicar los conceptos matemáticos, encontrar conexiones entre conceptos y estrategias, saber interpretar y generalizar los resultados. En el proyecto OCDE/PISA el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real se denomina matematización.

La idea de la matematización viene inspirada por los trabajos de Freudenthal (1968) que postulaba sobre la necesidad en la educación matemática de poner el foco de atención en la actividad, en el proceso de la matematización. Posteriormente, la idea de dos tipos de matematización en el contexto educativo ha sido formulada explícitamente por Treffers (1987) que distinguió entre la matematización *horizontal* y la *vertical*. En términos generales, la matematización horizontal implica pasar del mundo de la vida al mundo de los símbolos, en tanto que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos.

En el estudio PISA el proceso de matematización considera cinco pasos:

1. Se inicia con un problema situado en la realidad.

2. Se organiza de acuerdo con conceptos matemáticos.

3. Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización.

4. Se resuelve el problema matemático.

5. Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

La Figura 2 refleja cómo estos cinco pasos se tratan en tres fases.

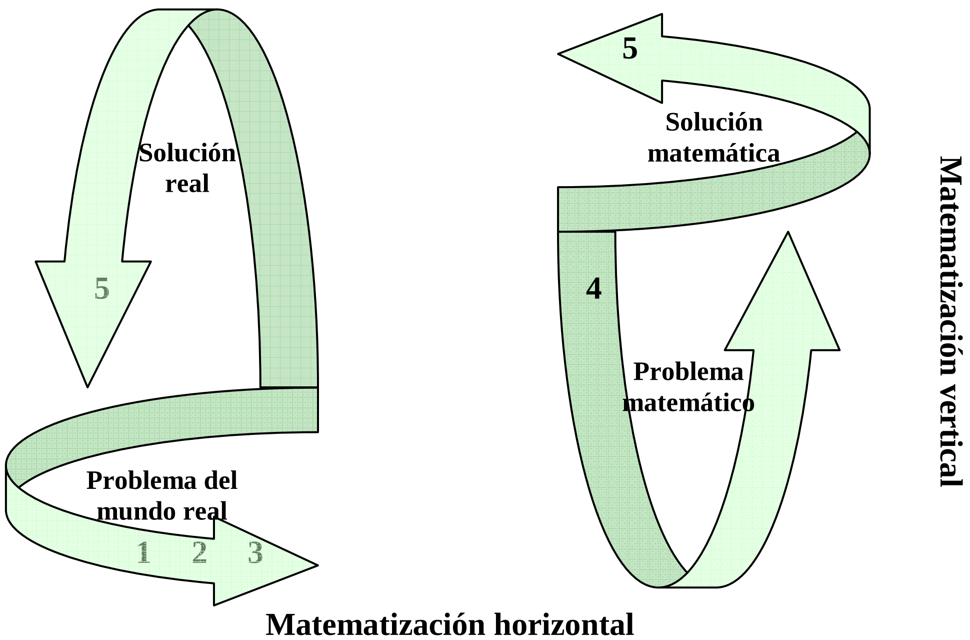


Figura 2: El ciclo de la matematización

La primera fase incluye los primeros tres pasos (1, 2, 3) de la matematización horizontal que implica traducir el problema de la "realidad" a las matemáticas[23].

Al tener traducido el problema a una forma matemática, se empieza el proceso de matemazación vertical[24] (segunda fase) que es el paso 4.

En todas las fases del proceso de matematización se supone una reflexión sobre el proceso de la resolución y los resultados obtenidos, sin embargo, en la fase final los estudiantes deben interpretar los resultados (paso 5) con una actitud crítica y validar todo el proceso[25].

Cada uno de estos procesos asociados a la matematización puede obtenerse a diferentes niveles de dominio.

> "*Un individuo que deba participar con éxito en la matematización en una gran variedad de situaciones, contextos intra y extramatemáticos e ideas principales necesita poseer un número suficiente de competencias matemáticas que, juntas, puedan ser consideradas como una competencia matemática comprensiva*" (OCDE, 2004b, p. 41).

Las distintas partes de la matematización se sirven de manera diferente de estas competencias, tanto en lo que se refiere a las competencias individuales, como en relación con el nivel de dominio necesario. Con el fin de identificar y examinar estas

---

[23] Este proceso incluye:

- Identificar los elementos matemáticos relacionados con el problema.
- Representar el problema de un modo diferente, organizándolo de acuerdo a los conceptos matemáticos.
- Entender las relaciones entre el lenguaje en que se describe el problema y el lenguaje simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y recurrencias.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema en términos de un modelo matemático.

[24] Este proceso implica las siguientes actividades:

- Utilizar diferentes representaciones
- Utilizar operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico.
- Pulir y adaptar los modelos matemáticos, combinando e integrándolos.
- Argumentar
- Generalizar

[25] Se trata de:

- Comprender la extensión y los límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos, explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites.

competencias, el proyecto OCDE/PISA ha centrado en ocho competencias matemáticas características que se basan en su forma actual, como habíamos mencionado, en el trabajo de Niss (1999):

1. Pensar y razonar
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelizar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
8. Emplear soportes y herramientas tecnológicos[26]

Cabe destacar que las tres primeras, la quinta y la octava son competencias cognitivas instrumentales, de carácter básico y transversal, mientras que la cuarta, sexta y séptima son competencias matemáticas específicas, que tienen relación con actividades de carácter conceptual y procedimental (Rico y Lupiáñez, 2008).

A continuación presentamos brevemente las características de estas siete competencias.

1. PENSAR Y RAZONAR

Recuerda Gutiérrez (1995) que frecuentemente se puede encontrar en la literatura especializada y en el uso habitual la identificación de razonamiento y pensamiento, particularmente, se ha dado un gran solapamiento en el campo de "solución de problemas", sin embargo, menciona, que un aspecto central y característico en las definiciones de razonamiento es el concepto de inferir.

De acuerdo con Kilpatrick et al. (2001), razonar se refiere a la capacidad para pensar lógicamente acerca de las relaciones entre los conceptos y situaciones. Esta competencia va más allá de saber demostraciones formales o explicaciones y justificaciones

[26] Esta última competencia ha sido descartada finalmente en el análisis de los resultados de PISA2003, debido a la imposibilidad de establecer comparaciones internacionales entre países que usan diferentes herramientas en el aula (Rico y Lupiáñez, 2008). Por tanto, a continuación tratamos solo las siete competencias matemáticas.

informales, e incluye razonamiento intuitivo e inductivo basado en patrones, analogías y metáforas.

Para Salmón (1991) “*razonar incluye formular problemas y descubrir soluciones, derivar conclusiones de las premisas, diseñar experimentos mentales o reales para probar aseveraciones, formular y usar principios para evaluar argumentos, apreciar la fuerza de los contraejemplos, juzgar la relevancia de la información*” (citado en Gutiérrez, 1995, p.24). Por su parte, para Alsina (2008) razonar matemáticamente implica poner en marcha una fuerte componente creativa.

A su vez, el proceso del pensar, de acuerdo con Rubinstein (2002), que empieza a partir de una situación problemática y siempre está orientado hacía la solución de algún problema concreto, se expresa a través de subprocesos como comparación, análisis, síntesis, abstracción y generalización, que se interrelacionan y se combinan de forma compleja. O sea, empezamos a pensar cuando tenemos la necesidad de entender algo, cuando encontramos con un problema, con algo que nos asombra, confunde o contradice.

De ahí, pensar matemáticamente significa ver el mundo desde un punto de vista matemático – preferiblemente mediante procesos de la matematización: modelizar, simbolizar, abstraer y aplicar ideas matemáticas a una amplia gama de situaciones Schoenfeld (1996). Según Alsina (2008), pensar matemáticamente implica comprender y relacionar conceptos, abstraer, generalizar, intuir y criticar.

En los trabajos de Niss (1999), De Lange (1999), OCDE (2003), OCDE (2004b), Rico y Lupiáñez (2008) esta competencia se relaciona con el ser capaz de:

- formular preguntas propias a las matemáticas (¿Cuánto es? ¿Cómo hallar? ¿Por qué se puede aplicar?, etc.), y conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas preguntas;
- entender y tratar la amplitud y limitaciones de los conceptos matemáticos;
- ampliar la extensión de un concepto mediante abstracción de algunas de sus propiedades; generalizar los resultados a grandes grupos de objetos;
- diferenciar entre diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, casos especiales) y reflexionar sobre estas distinciones.

2. ARGUMENTAR

La argumentación para Grieze, citado en Duval (1999a), es un razonamiento que no se sujeta a vínculos de validez, sino a vínculos de pertinencia, es decir, una argumentación busca lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo; en diferencia, una demostración es un razonamiento válido que tiene por objetivo la verdad.

Argumentar es proponer un argumento que es todo lo que se utiliza (enunciado de un hecho, un resultado de la experiencia, un ejemplo, una definición, una regla, una creencia comúnmente compartida, entre otros) para justificar o para refutar una proposición. Asimismo, una argumentación implica evaluar un argumento y oponerlo a otros argumentos. En el caso de la argumentación en matemáticas, Duval (1999b) hace referencia a la argumentación heurística[27] que se ocupa de las razones relativas a las restricciones de la solución o del problema.

Para Niss (1999), De Lange (1999), OCDE (2003), OCDE (2004b), Rico y Lupiáñez (2008) la competencia argumentar tiene que ver con:

- saber lo que son las demostraciones matemáticas y en qué se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático;
- seguir y evaluar encadenamientos de los argumentos matemáticos de diferentes tipos;
- emplear la heurística (¿Qué puede o no puede pasar y por qué? ¿Qué sabemos y qué queremos obtener? ¿Cómo están relacionados los diferentes objetos?, etc.);
- crear y formular argumentos matemáticos.

3. COMUNICAR

Existe una gran variedad de modelos de comunicación desde el más simple unidireccional (emisor →mensaje→receptor) hasta los modelos complejos que analizan otros submodelos, entre ellos el modelo interpersonal de Schramm (1963-1972), que entiende la comunicación como un proceso bidireccional, es decir, determinado por establecer relaciones entre personas que tengan en común tres componentes como mínimo: la fuente (puede ser una persona, una cadena de televisión, un medio

[27] Duval (1999b) hace distinción entre argumentación heurística y argumentación retórica la que tiene por objetivo la convección, y atiende razones relativas al interlocutor.

impreso,...), el mensaje (verbal o no verbal; diferentes formas de expresión) y el destino (la persona que escucha o recibe el mensaje). Ahora bien, todos estos modelos implican codificación, descodificación e interpretación de los mensajes. En el contexto de las Matemáticas, para que el proceso de la comunicación se lleve acabo, o sea, para que los mensajes sean codificados, descodificados e interpretados adecuadamente, es preciso dominar los términos, nociones, símbolos, propiedades de los objetos matemáticos, es decir, reglas básicas de códigos matemáticos. De ahí, la competencia comunicar implica:

- comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre temas de contenido matemático (reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos o explicar cálculos, resultados y relaciones);
- entender las afirmaciones orales o escritas de terceras personas sobre estos temas (Niss, 1999; De Lange, 1999; OCDE, 2003; OCDE, 2004b; Rico y Lupiáñez, 2008).

4. MODELIZAR

La modelización matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático que interpreta matemáticamente situación. Un modelo matemático de una situación consiste en un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, describe o explica el fenómeno en cuestión (Lesh y Lehrer, 2003; Biembengut y Hein, 2004).

Hitt y Cortés (2009) nos recuerdan que para los estudiantes la modelización matemática es uno de los temas más difíciles de adquirir en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que se requieren de diferentes tipos de habilidades y conocimientos para poder llegar a la modelización de una situación dada desde el punto de vista de las matemáticas.

De acuerdo con Niss (1999), De Lange (1999), OCDE (2003), OCDE (2004b), Rico y Lupiáñez (2008) la competencia modelizar se relaciona con la capacidad de:

- estructurar el campo o situación que se requiere modelizar;
- traducir la realidad a estructuras matemáticas;
- interpretar los modelos matemáticos en términos de “realidad”;
- trabajar con el modelo matemático; validarlo; reflexionar, analizar y criticar el modelo y sus resultados;

- comunicar sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados);
- supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos.

5. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS

Desde hace varias décadas en la educación matemática se insiste en el desarrollo de las capacidades de "orden superior", es decir, las que están ligadas a la identificación y resolución de problemas, al pensamiento crítico, y al uso de estrategias de naturaleza metacognitiva. Asimismo, es aceptado por numerosos autores que aprender matemáticas es esencialmente "hacer matemáticas", y uno de los aspectos fundamentales de ello es resolver problemas (Abrantes, 2005).

Según Niss (1999), De Lange (1999), OCDE (2003), OCDE (2004b), Rico y Lupiáñez (2008) la competencia plantear y resolver problemas consiste en la capacidad de:

- plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, abiertos, cerrados);
- resolver tales problemas mediante procedimientos diferentes, empleando diversas estrategias;
- reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

6. REPRESENTAR

Una representación es la captación de un concepto o relación en una forma determinada y también la forma en sí misma (NCTM, 2003). Las representaciones pueden tener variedad de formas: esquemas, imágenes, tablas, diagramas, símbolos, materiales didácticos, etc., así como que una representación puede ser concreta, pictórica o simbólica (Burgués, 2008). Saber diseñar y manejar sistemas de representaciones como lenguaje para expresar ideas, relaciones y estructuras matemáticas (Castro, Rico, Romero, 1997) implica un profundo conocimiento de sus características sintácticas y semánticas (en Gairín, 2001). Así, la competencia representar se refiere a la capacidad de:

- descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos (esquemas, tablas, gráficos, palabras, símbolos e ilustraciones) y las interrelaciones entre las varias representaciones;

- elegir y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el objetivo (Niss, 1999; De Lange, 1999; OCDE, 2003; OCDE, 2004b; Rico y Lupiáñez, 2008).

7. UTILIZAR EL LENGUAJE SIMBÓLICO, FORMAL Y TÉCNICO Y LAS OPERACONES

Cuando hacemos matemáticas utilizamos los símbolos propios para pensar y comunicar. El lenguaje matemático está formado por símbolos escritos y hablados (términos y expresiones propios) y se les asigna un significado preciso y peculiar (Alcalá, 2002). Para que la actividad matemática sea posible es necesario conocer el significado de estos símbolos, saber interpretarlos y usarlos adecuadamente.

Kilpatrick et al. (2001) recuerdan que el uso con fluidez y con entendimiento de procedimientos, técnicas y operaciones favorece y desarrolla la comprensión profunda de los conceptos e ideas matemáticas, así como la resolución de problemas. Esta competencia está relacionada con la capacidad de:

- descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico y comprender su relación con el lenguaje natural;
- traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal;
- manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y formulas;
- utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos (Niss, 1999; De Lange, 1999; OCDE, 2003; OCDE, 2004b; Rico y Lupiáñez, 2008).

El siguiente apartado dedicamos a la evaluación de las competencias matemáticas.

II.2.5. Evaluación de las competencias matemáticas

Siendo coherentes con el modelo competencia-desempeño, en el proyecto PISA se evalúan las competencias matemáticas de los estudiantes a través de sus actuaciones *(performances)* mientras resuelven problemas matemáticos y se establecen niveles en estas. Antes de tratar los datos empíricos, revisamos las dimensiones consideradas para la evaluación de las competencias matemáticas.

De acuerdo con Niss (2003) una evaluación válida de las competencias matemáticas de un individuo ha de estar basada en la identificación de la presencia y el alcance de sus competencias en relación con las actividades matemáticas en las que está involucrada. Toda actividad matemática requiere el ejercicio de una o varias competencias, por lo que es preciso identificar tanto a priori como a posteriori las competencias necesarias y suficientes para llevar a cabo diferentes actividades matemáticas.

Para Niss (2003, p.10), un individuo tiene una competencia matemática dada según tres dimensiones:

El grado de cobertura[28], que es el grado en el que la persona domina los aspectos característicos de la competencia tratada.

El radio de acción[29], que indica el espectro de contextos y situaciones en las que la persona puede activar dicha competencia.

El nivel técnico[30], que indica cómo son conceptual y técnicamente avanzadas las entidades y herramientas con las cuales la persona puede activar la competencia.

Por tanto, la competencia que posee un individuo puede considerase (metafóricamente) como una caja tridimensional.

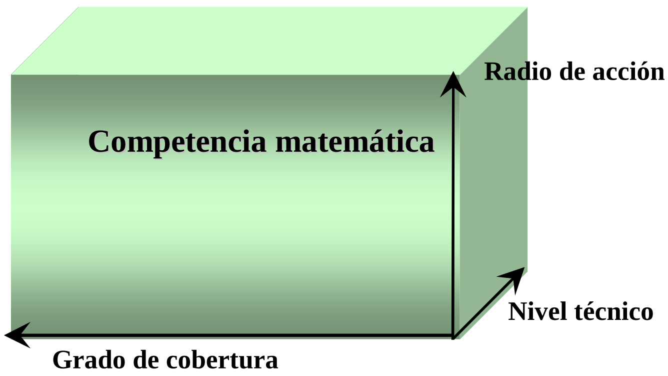


Figura 3: Volumen (metafórico) de la competencia

El volumen (metafórico) de la competencia, entonces, es el "producto" de grado de cobertura, de radio de acción, y de nivel técnico. Podemos deducir, por tanto, que si una de las dimensiones tiene medida cero, igualmente es cero el volumen de la competencia.

[28] *Degree of coverage*

[29] *Radius of action*

[30] *Technical level*

Asimismo, se puede concluir que el "mismo" volumen se puede obtener mediante un número infinito de combinaciones diferentes de las tres medidas (Niss, 2003).

De manera similar, en el proyecto PISA para evaluar en qué medida los estudiantes de 15 años son capaces de manejar las matemáticas de una manera bien fundada al hacer frente a problemas del mundo real, consideran tres dimensiones (OCDE, 2004b):

- las *situaciones o contextos* en que se sitúan los problemas;
- el *contenido matemático* del que hay que valerse para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas principales*;
- las *competencias o procesos cognitivos* que deben activarse para vincular el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas, y, por tanto, para resolver los problemas.

La visualización de estos componentes se presenta en la Figura 4.

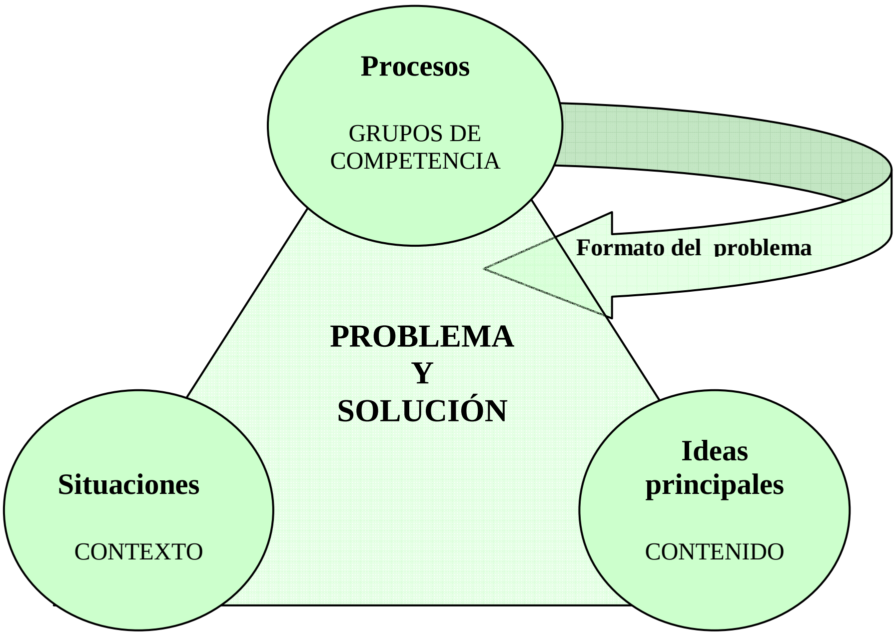


Figura 4: Los elementos del área de conocimiento matemático

El proyecto OCDE/PISA considera que el grado de competencia matemática de una persona se observa en la manera en que utiliza sus destrezas y conocimientos matemáticos al resolver problemas y a continuación explica la elección de estos elementos.

<u>Los problemas (y su solución)</u> pueden presentarse en una gran variedad de <u>situaciones y contextos</u> en la experiencia de una persona. Los problemas planteados en el proyecto

OCDE/PISA surgen del mundo real de dos maneras. En primer lugar, los problemas se presentan en situaciones genéricas que son importantes en la vida del estudiante y, en segundo lugar, dentro de dicha situación, los problemas presentan un contexto específico.

El siguiente elemento del mundo real que hay que tener en cuenta al considerar la competencia matemática es el contenido matemático al que una persona recurre a la hora de resolver problemas. Dentro de la evaluación PISA se les llaman "ideas principales": cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre. A pesar de que este enfoque resulta poco familiar desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas y las tendencias curriculares típicas de las escuelas, estas ideas principales engloban ampliamente toda la gama de temas matemáticos que se espera que hayan aprendido los estudiantes.

Los procesos matemáticos que los estudiantes aplican para resolver problemas se conocen como competencias matemáticas. Tres grupos de competencia (reproducción, conexión y reflexión) condensan los diferentes procesos cognitivos necesarios para resolver los diferentes tipos de problemas. Las competencias específicas necesarias para resolver un problema irán en función de la naturaleza del problema y se verán reflejadas en la solución hallada.

Por último, las competencias utilizadas para resolver un problema están relacionadas con la forma del problema y con lo que el problema exige (formato del problema).

A continuación se presenta la descripción detallada de los elementos mencionados.

Situaciones o contextos

Un elemento importante en la competencia matemática para el proyecto OCDE/PISA se considera la capacidad de ejercitar y usar matemáticas en una variedad de situaciones. Efectivamente, al resolver una persona problemas que requieren tratamiento matemático, las representaciones y los métodos que elige para abordarlos a menudo dependen de las situaciones en las que se presentan los problemas.

La *situación*, para el proyecto, es la parte del mundo del estudiante en la que se presenta la tarea que se le plantea y se sitúa a distancia diversa del mismo estudiante. La situación más cercana es la vida personal del estudiante. Después sigue la vida escolar, la vida laboral y el ocio, la vida en la comunidad local y la sociedad tal y como se presentan en la vida diaria. A mucha distancia de todas ellas están las situaciones de tipo científico. Los problemas que se presentan en el proyecto consideran cuatro tipos de situaciones: *personal, educativa/profesional, pública y científica*[31].

El *contexto* de una tarea constituye el modo concreto en que ésta se presenta dentro de una situación. Un contexto *auténtico* de utilización de las matemáticas dirige directamente a la resolución del problema, aunque las preguntas de matemáticas no sean necesariamente verdaderas y reales, en contraposición a que el problema sea únicamente un pretexto para hacer prácticas de operaciones matemáticas como es el caso de tareas presentadas en contextos *hipotéticos* o *inventados* con algunos elementos reales. Esta autenticidad en la utilización de las matemáticas resulta un aspecto relevante del diseño y el análisis de las preguntas del proyecto OCDE/PISA y está estrechamente relacionada con la definición de la competencia matemática[32].

Por lo general, el proyecto OCDE/PISA hace hincapié en las tareas que pueden encontrarse en una situación real y que poseen un contexto auténtico para el uso de las matemáticas de un modo que influya en la solución y en su interpretación.

---

[31] *Situaciones personales* son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema.

Situaciones educativas, ocupacionales o laborales son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen al alumno una tarea que le impone una actividad matemática para encontrar su respuesta.

Situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno. Requieren que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública.

Situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático (OCDE, 2004b; Rico, 2007).

[32] Un importante aporte hacia la resolución de problemas que tengan sentido para los estudiantes se debe a la corriente didáctica holandesa de la escuela de Hans Freudenthal (1905-1990), conocida en el mundo anglosajón como RME (R*ealistic Mathematics Education*) que da suma importancia a la utilización de situaciones realistas, entendidas como razonables, imaginables o realizables. Esta perspectiva, en vez de ver las matemáticas como una asignatura para trasmitir, insiste en la idea de las matemáticas como actividad humana. Se opta a la *re-invención* por parte del estudiante de objetos, modelos y herramientas de la matemática, a partir de contextos y situaciones susceptibles de ser organizados matemáticamente o *matematizados*, o sea aprender matemáticas haciéndolas (Freudenthal 1973, 1991; Gravemeijer 1994).

Contenido

Dado que el objetivo del proyecto OCDE/PISA es evaluar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas reales, la estrategia ha consistido en definir el ámbito de los *contenidos* que se iban a evaluar utilizando un enfoque fenomenológico para describir los conceptos, estructuras e ideas matemáticas. Ello significa que se ha tratado de describir los contenidos en relación a los fenómenos y los tipos de problemas para los que se han creado y no atender a su estructura lógica tal como suele organizarse en el currículo de matemáticas. Con este objetivo, el proyecto ha tenido en cuenta, por un lado, el conjunto de problemáticas surgidas de la evolución histórica de las matemáticas que abarca una variedad y profundidad suficiente para identificar los elementos esenciales de las matemáticas, y por otro, los contenidos curriculares convencionales de las matemáticas. En el marco del proyecto OCDE/PISA para describir los contenidos seleccionados desde el enfoque fenomenológico se utiliza la etiqueta *ideas principales*[33]. Las ideas principales elegidas son las siguientes: *cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, e incertidumbre*[34].

[33] Como señala De Lange (1999), el concepto de ideas principales no es nuevo. Aun en el 1990, the Mathematical Sciences Education Board ha publicado *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990), un libro dirigido a los educadores con la llamada de ayudar a los estudiantes investigar para encontrar conceptos que subrayan toda la matemática y de esta manera entiendan mejor los significados de estos conceptos en el mundo.

[34] *Cantidad: Esta* idea principal subraya la necesidad de cuantificar para organizar el mundo. Ello implica la comprensión de tamaños relativos, el reconocimiento de las regularidades numéricas, la utilización de los números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real. Además, para tratar con la cantidad se hace uso del razonamiento cuantitativo, los componentes esenciales del cual son el sentido de los números, la representación de los números de diferentes maneras, la comprensión del significado de las operaciones, la percepción de la magnitud de los números, los cálculos matemáticamente elegantes, la estimación y el cálculo mental.

Espacio y forma: Esta idea principal precisa comprender y reconocer las regularidades geométricas en diferentes formas y diferentes dimensiones. Eso significa entender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas, la relación entre formas e imágenes o representaciones visuales. También presupone entender la representación en dos dimensiones de los objetos tridimensionales, la formación de las sombras y cómo interpretarlas, qué es la perspectiva y cómo funciona.

Cambio y relaciones: Esta idea principal se centra en los procesos de cambio de los diferentes fenómenos naturales que encontramos en nuestro alrededor y en la gran cantidad de relaciones temporales y permanentes entre ellos. Se destaca la importancia de reconocer las funciones matemáticas que describen

Procesos cognitivos

Como habíamos mencionado en el apartado anterior, el proyecto PISA establece ocho competencias matemáticas necesarias para abordar problemas del mundo real, que están estrechamente ligadas con el proceso de la matemátización. Es preciso destacar que la intención del proyecto PISA no ha consistido en evaluar las competencias mencionadas por separado. Estas competencias se entremezclan y frecuentemente es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a varias competencias, de manera que el intentar evaluarlas por separado resultaría una tarea artificial e innecesaria (De Lange, 1999; OCDE, 2004b). Se admite que las diferentes competencias que presenten los estudiantes variarán considerablemente de una persona a otra, en parte debido a que todo el aprendizaje y la elaboración del conocimiento propio tienen lugar a través de los procesos de interacción, negociación y colaboración, así como de la propia experiencia. El proyecto PISA parte del hecho de que la gran parte de las matemáticas que saben los estudiantes la aprenden gradualmente en la escuela. También adquieren la competencia matemática a través de sus experiencias en diferentes situaciones y contextos sociales (OCDE, 2004b).

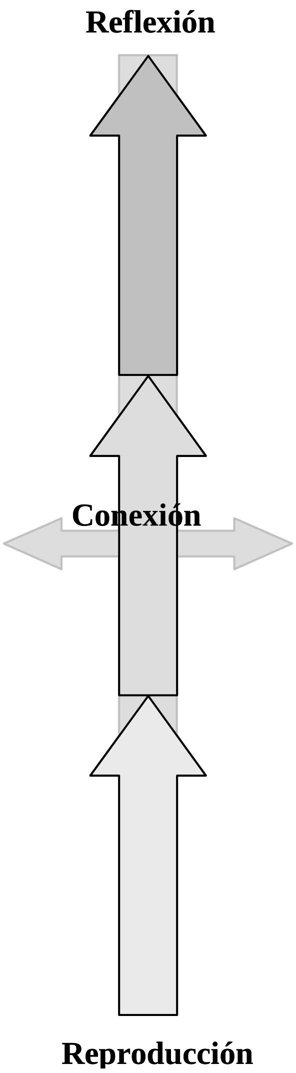
Para describir y transmitir de manera eficaz las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, el proyecto PISA define tres grupos de competencias a partir de los tipos de demandas cognitivas necesarias para resolver diferentes problemas matemáticos y describe las maneras en que se interpretan cada una de las siete competencias dentro de cada grupo (OCDE, 2004b; Rico y Lupiáñez, 2008).

A continuación describimos los elementos esenciales de cada uno de los tres grupos de competencias *(reproducción, conexión y reflexión)*, y visualizamos, mediante la figura que sigue, el carácter continuo de éstos.

---

estos procesos de cambio y relaciones, que pueden darse en una gran variedad de representaciones diferentes, entre ellas la simbólica, la algebraica, la tabular y la geométrica. También, conocer las propiedades de diferentes representaciones y saber interpretarlas.

Incertidumbre: La incertidumbre hace referencia a dos temas relacionados: los datos y el azar. Actividades y conceptos matemáticos importantes de esta área son la recogida de datos, el análisis y la presentación /visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción (OCDE, 2004b; Rico, 2007).



Las competencias de grupo de *reflexión* incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del grupo de *conexión*.

Las competencias del grupo de *conexión* se apoyan sobre las del grupo de *reproducción*, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.

Las competencias del grupo de *reproducción* incluyen conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.

Figura 5: Caracterización de los tres grupos de competencias matemáticas

Asimismo, mediante la Tabla 3, que elaboramos a partir de los indicadores establecidos en el proyecto (OCDE, 2004b), resumimos los descriptores de las siete competencias matemáticas mencionadas según el grupo al que pertenecen.

REPRODUCCIÓN	CONEXIÓN	REFLEXIÓN
	1. Pensar y razonar	
Formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»);	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.);	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?, ¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.);
Distinguir entre definiciones y afirmaciones;	Distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas;	Distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones;
Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos familiares.	Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos menos familiares.	Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; Comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.
	2. Argumentar	
	Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento;	Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento;
Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.	Seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; Tener sentido de la heurística (p. ej., ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?).	Seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; Emplear la heurística (p. ej., ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?, ¿cuáles son las propiedades esenciales?, ¿cómo están relacionados los diferentes objetos?).

3. Comunicar		
Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones; Entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas; Entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.
4. Modelizar		
Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; Pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; Comunicar de manera elemental los resultados del modelo.	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; Traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos menos familiares y saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad); Comunicar los resultados del modelo.	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; Traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad; Comunicar los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante; Reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.
5. Plantear y resolver problemas		
Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; Resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.	Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; Resolver tales problemas mediante procedimientos y aplicaciones estándar pero también más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).	Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; Resolver tales problemas mediante procedimientos y aplicaciones estándar pero también más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones); Reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

6. Representar		
Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado.	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas; Combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones		
Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario en situaciones y contextos sobradamente conocidos; Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos; Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos; Manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos; Saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural.

Tabla 3: Descriptores de las siete competencias matemáticas según los grupos de reproducción, conexión y reflexión

Los ítems de la prueba

Partiendo de las consideraciones arriba expuestas, los ítems de la prueba se han desarrollado de tal modo que se encontraran dentro de una de las cuatro *situaciones*: personal, educacional/profesional, pública y científica, y prioritariamente en contextos *auténticos*, o sea, se ha otorgado la mayor importancia a aquellas preguntas que podrían encontrarse en situaciones reales y que poseen un contexto en el que el uso de las matemáticas para resolver el problema podría considerarse auténtico. En segundo lugar, los ítems elaborados tienen relación con una de las *ideas principales*: cantidad, cambio y relaciones, espacio y forma e incertidumbre. Por último, la tercera variable, relacionada con los *procesos cognitivos* que ponen en juego los estudiantes al resolver problemas, considera tres niveles de complejidad de las tareas propuestas: reproducción, conexión y reflexión.

Respecto a esta última variable, cabe destacar que no es una tarea fácil establecer *a priori* qué procesos cognitivos va a activar un estudiante al resolver problemas planteados o qué competencias va a movilizar, debido a que las competencias matemáticas no son variables de tarea sino del sujeto y, por otra parte, por lo general, al abordar un problema se puede recurrir a varios procesos cognitivos (Rico y Lupiáñez, 2008). Una manera de clasificar las tareas según los descriptores arriba mencionados y asignarlas así a uno de los grupos de competencia en el proyecto PISA ha consistido en analizar los requisitos de cada pregunta y luego considerar cada una de las competencias para la pregunta en cuestión. Se ha considerado tres clases de complejidad de las tareas que afectan al modo en que deben ejecutarse los correspondientes procesos:

- Primera clase: Reproducción y procedimientos rutinarios.
- Segunda clase: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- Tercera clase: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

La Tabla 4 (Lupiáñez, 2005) resume los indicadores que caracterizan las tareas que se incluyen en cada una de las tres clases según su grado de complejidad:

Reproducción	Conexión	Reflexión
- Contextos familiares - Conocimientos ya practicados - Aplicación de algoritmos estándar - Uso de fórmulas elementales	- Contextos menos familiares - Interpretar y explicar - Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación - Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	- Tareas que requieren comprensión y reflexión - Creatividad - Ejemplificación y uso de conceptos - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos - Generalizar y justificar resultados obtenidos

Tabla 4: Indicadores según el tipo de complejidad de las tareas

El proyecto PISA 2003 ha evaluado las competencias de los estudiantes mediante una combinación de preguntas de respuesta abierta, de respuesta cerrada y de selección múltiple. La experiencia en la elaboración de preguntas en la prueba anterior (PISA 2000) indica que el tipo de elección múltiple es generalmente el más apropiado para evaluar las preguntas asociadas a los grupos de competencia de *reproducción* y *conexión*. Las preguntas de respuesta cerrada formulan tareas o ejercicios parecidos a las preguntas de elección múltiple, pero en ellas los estudiantes han de producir una respuesta que pueda ser valorada fácilmente como correcta o incorrecta. Las preguntas de respuesta abierta requieren una contestación más amplia por parte del estudiante y el proceso de elaboración de dicha respuesta normalmente comporta actividades cognitivas de orden más elevado. Además, requieren que el estudiante muestre los pasos seguidos o explique cómo llegó a tal respuesta. Este tipo de ítems se ha elaborado para evaluar generalmente las preguntas del grupo de *reflexión*.

La hipótesis establecida a partir de la clasificación de las tareas por su complejidad, anuncia que los estudiantes que alcancen a dar respuesta a tareas de alta complejidad muestran el mayor nivel de dominio, mientras que los estudiantes que sólo alcancen a responder a las tareas de menor complejidad son los que tienen menor nivel de dominio. Esta hipótesis se confirma con los resultados empíricos ya que estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior. Los resultados de análisis de las respuestas de los estudiantes a distintas tareas con grado de complejidad diversos han permitido establecer empíricamente seis niveles distintos de dominio *(proficiency)* en las actuaciones *(performance*) de los estudiantes (OCDE, 2003).

Los niveles establecidos se caracterizan empíricamente del siguiente modo:

6	Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos de este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
5	Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos de este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	Los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	Los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo

	aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. También son capaces de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único sistema de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	Los alumnos saben responder a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Son capaces de identificar la información y llevan a cabo procedimientos rutinarios al seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Figura 6: La descripción de los 6 niveles de dominio *(proficiency)* en matemáticas

Así, la agrupación de las actuaciones *(performances)* de los estudiantes en niveles de dominio o maestría *(proficiency)* ha sido realizada sobre la base de las competencias empleadas y por el grado de complejidad con que los estudiantes las ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente. De este modo es posible entender cada nivel de en relación con la maestría con que el estudiante lleva a cabo las tareas matemáticas propuestas, es decir, muestra su competencia matemática (OCDE, 2004a; 2005a).

Como se puede observar a lo largo de este apartado la noción de competencia es central en el estudio PISA y atiende diferentes funciones:

- especifica la finalidad prioritaria en la enseñanza de las matemáticas (*mathematical literacy*)
- expresa un conjunto de procesos cognitivos generales que caracterizan un esquema pragmático de entender el hacer matemáticas (*competencies*)

- establece variables de tarea para los ítems en la evaluación, destacándolos por los grados de complejidad
- marca niveles de dominio en las actuaciones de los estudiantes al hacer matemáticas (*mathematical proficiency*) (Rico, 2007).

Como hemos podido apreciar a lo largo de este apartado, la noción de competencia no es unánimemente aceptada, concretamente, en nuestro ámbito educativo es fuente y objeto de discusiones y estudios. Hemos subrayado nuestra visión dialéctica del concepto de competencia, la entendemos como cualidad íntima de la persona que se expresa mediante su actuación. Así, la competencia implica la capacidad de afrontar situaciones nuevas y complejas, movilizando varios procesos cognitivos (conocimientos, habilidades o actitudes) y va más allá de una conducta o ejecución, entiende un componente comprensivo, ya que se supone que al elegir algo que hacer se sabe el porqué se hace. Asimismo, el concepto de competencia matemática que adoptamos en nuestra investigación, es la capacidad de los estudiantes para utilizar su conocimiento, destrezas y comprensión matemáticos para afrontar situaciones de la vida real. Hemos visto los fundamentos teóricos del enfoque por competencias que permiten conjeturar e indagar acerca de las cuestiones relativas al desarrollo y perfección de las competencias (competencias matemáticas) a lo largo de la escolarización. Finalmente, un amplio marco del trabajo con las competencias matemáticas, elaborado en el proyecto OCDE/PISA, hace posible la evaluación de este complejo constructo.

En nuestro estudio nos proponemos identificar y describir los procesos cognitivos que movilizan los estudiantes y conocer los niveles de dominio en sus actuaciones a la hora de resolver problemas matemáticos planteados en una variedad de situaciones, es decir, nos interesa estudiar empíricamente las competencias matemáticas de los estudiantes. Asimismo, en la elaboración del modelo de relaciones entre OTL y CM recurrimos a diferentes funciones de la noción de competencia. Particularmente, el eje principal del modelo lo constituyen las siete competencias matemáticas o procesos cognitivos (y sus clasificaciones según los tres grupos) que activan los estudiantes al abordar problemas matemáticos. A partir de los fundamentos teóricos del enfoque por competencias, intentamos sustentar teórica y empíricamente las relaciones entre unas determinadas actividades del profesor y los procesos cognitivos mencionados. Además, atendemos las variables de las tareas, establecidas en el proyecto tanto en el modelo como a la hora de analizar tareas propuestas por el profesor en el aula.

II.3. MODELO OTL-CM

II.3.1. Introducción

Desde hace más de un siglo se intenta establecer conexiones entre la enseñanza y el aprendizaje. Algunos autores (Brophy y Good, 1986; Rosenshine y Stevens, 1986; Brophy, 1999) indican conexiones positivas entre enseñanza y aprendizaje, otros mencionan la separación entre la investigación sobre enseñanza y la investigación sobre aprendizaje en educación matemática (Romberg y Carpinter, 1986) o concluyen que hay pocos resultados que relacionen las características de la enseñanza con el aprendizaje (en Hiebert y Grouws, 2007). El carácter interactivo de la enseñanza y la influencia de otros factores intermedios - como, por ejemplo, las condiciones contextuales (Berliner, 1976; Dunkin y Biddle, 1974) o el pensamiento de los estudiantes (Wittrock, 1986)- dificultan la generación de teorías que conecten enseñanza y aprendizaje.

No obstante, los avances en las investigaciones en la psicología educativa tales como el desarrollo de la estructuras cognitivas de Piaget, aportaciones de los psicólogos de la Gestalt sobre el proceso de pensamiento productivo, trabajos sobre el aprendizaje significativo de Ausubel y hallazgos de muchos otros investigadores dentro de la corriente constructivismo o socioconstructivismo, entre otros, ponen en evidencia vías alternativas a las tradicionales en la construcción del conocimiento, que permiten discutir relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Los estudios en esta línea observan los procesos de enseñanza-aprendizaje principalmente a través de dos lentes: empleando el método de proceso-producto o de proceso de mediación (*mediating process*) (Corno, 1988). El método de proceso-producto, siguiendo los supuestos de la psicología conductivista, considera como variables del proceso el comportamiento del profesor relacionado con la gestión, instrucción o tareas, y como variable del producto los resultados de test académicos estandarizados. Las relaciones en estos modelos son lineales y afirman que el comportamiento del profesor influye en el comportamiento del estudiante en el aula, que a su vez se manifiesta como el aprendizaje. El segundo método más amplio, se deriva de las teorías cognitivas de la enseñanza y el aprendizaje que ven a los estudiantes como intérpretes y transformadores activos de los significados, capaces de negociarlos con el profesor. Las interpretaciones cognitivas y sociales de los estudiantes se consideran como influencias clave en las competencias matemáticas. Se asume que las competencias matemáticas se adquieren a través de las actividades activas del aprendizaje. Desde esta perspectiva se hacen supuestos menos fuertes y las relaciones son vistas más bien como curvilíneas. Según Corno (1988), la característica clave de estas investigaciones es "*buscar explicaciones para resultados observados en los estudios de proceso-producto*" (p.189). Es desde esta perspectiva desde la que abordamos los procesos de enseñanza y aprendizaje en nuestra investigación y nos apoyamos en los resultados de los estudios que examinaron cómo la enseñanza se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes y establecieron que "la enseñanza no influye *directamente* en el aprendizaje de los estudiantes, sino más bien en los procesos cognitivos o el pensamiento de los estudiantes, que a su vez, influyen en el aprendizaje" (Carpenter y Fennema, 1988; Wittrock, 1986, citado en Stein et al., 1996, p.457).

Sin pretensión de generar teorías, sino con el fin de contestar la pregunta planteada en nuestra investigación, en este apartado nos proponemos elaborar un modelo de relaciones entre Oportunidades de Aprendizaje (OTL) y Competencia Matemática (CM). Este modelo tiene un doble objetivo: nos orienta tanto en el diseño de la investigación como en la organización e interpretación de sus resultados. Se trata de un modelo que nos permite establecer lentes para observar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas en el contexto de un aula concreta y sólo pretende explicar los fenómenos observados.

II.3.2. Adaptación de los Modelos Teóricos Locales en nuestro estudio

Con el fin de construir nuestro modelo recurrimos a los modelo llamados Modelos Teóricos Locales. Los modelos elaborados con la finalidad de "*analizar de manera localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa*" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 328) se conocen como Modelos Teóricos Locales (MTL) y por primera vez han sido propuestos y desarrollados por Eugenio Filloy[35] en los años ochenta del siglo pasado.

Compartimos con Puig (2008) lo referente al carácter de los MTL que se ajusta perfectamente con el carácter de nuestro modelo:

> *"El carácter de modelo viene dado, entre otras cosas, por el hecho de que no se hace la afirmación fuerte de que las cosas son tal y como las caracteriza el*

[35] La descripción más detallada puede encontrarse en Filloy y cols. (1999).

modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito. El modelo tiene pues carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera (mediante otro modelo)" (p.88).

Por otra parte, dado que los MTL se elaboran para observar los fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, estas situaciones se consideran como situaciones de comunicación y de producción de sentido, así como se precisa tener en cuenta a sus tres personajes clave: al profesor, al estudiante y las matemáticas, lo que lleva a considerar cuatro componentes de los MTL: un componente de competencia, un componente de actuación (o de procesos cognitivos), un componente de enseñanza y un componente de comunicación (Puig, 2008).

Tal como mencionamos, asumimos la existencia de otros modelos que puedan describir, explicar y predecir las relaciones entre OTL y CM de otra manera dependiendo de las consideraciones supuestas.

Las componentes de competencia y actuación están presentes en nuestro estudio en la medida que abordamos el análisis de la competencia matemática de los estudiantes y su concreción frente a la resolución de algunos problemas. De este modo, los procesos cognitivos (identificados con las competencias en PISA) son abordados en el análisis de las resoluciones de los problemas (componente de actuación), lo que nos permite inferir el nivel de competencia matemática adquirida por los estudiantes (componente de competencia). Asimismo, es foco principal de esta investigación el estudio de las oportunidades de aprendizaje que el profesor ofrece a sus alumnos, lo cual se relaciona directamente con el componente de enseñanza de los MTL. Al observar a los profesores, en busca de las características de las tareas y su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de las OTL, observamos intercambios comunicativos en los que podemos localizar elementos de la componente de comunicación; sin embargo, este componente no se abordará en la investigación que presentamos.

La elaboración del componente de enseñanza parte de las siguientes consideraciones inferidas de los fundamentos teóricos del enfoque por competencias (véase el apartado correspondiente del marco teórico de competencias matemáticas): (a) para llegar a tener competencias matemáticas los estudiantes necesitan un amplio abanico de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; (b) estos conocimientos y destrezas se adquieren mediante el aprendizaje significativo; (c) estos conocimientos y destrezas han de ser movilizados en una variedad de situaciones y contextos. Otra premisa a tener en cuenta (en la medida que ayuda a comprender mejor las relaciones), aunque explícitamente no esté presente en el modelo, es una actitud positiva hacia las Matemáticas. De acuerdo con esas premisas, intentaremos determinar OTL que promueven la adquisición significativa de los conocimientos matemáticos y destrezas y además los movilizan y activan.

Cabe destacar que, a pesar de que la evaluación de las competencias matemáticas por separado resulta una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área, dado que durante la actividad matemática a menudo se recurre al mismo tiempo a muchas competencias (De Lange, 1999; OCDE, 2004b), en cuanto al desarrollo de las competencias, quizás igualmente resulte artificial, sin embargo, sí que consideramos una tarea necesaria intentar identificar tales actividades del profesor que potencialmente facilitan la adquisición de cada una de las competencias o al mismo tiempo varias de ellas. De este modo podemos establecer relaciones e interpretar el modelo teniendo en cuenta diferentes objetivos del profesor, que se reflejan en sus actividades en el aula, a la luz de las competencias matemáticas de sus estudiantes.

II.3.3. Consideración de la Trayectoria Hipotética de Enseñanza (THE)

Vamos a considerar una trayectoria hipotética de enseñanza (THE) de las matemáticas, que tiene cierta similitud con la trayectoria hipotética de aprendizaje[36] (THA) (Simon, 1995; De Lange, 1999) en cuanto que ambas consideran los objetivos de aprendizaje como un componente principal. En nuestro modelo, la THE es entendida como

[36] La THA de Simon (1995) es parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas y está compuesta por tres componentes: objetivos de aprendizaje del profesor, actividades de aprendizaje e hipotético proceso de aprendizaje. El objetivo del profesor marca la dirección para la selección de las actividades de aprendizaje y la hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Simon usa la frase “trayectoria hipotética de aprendizaje” para referirse “*a la predicción del profesor acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje*” (1995, p.135). Mientras nosotros usamos la frase “trayectoria hipotética de enseñanza” para referirnos a la supuesta evolución en la enseñanza del profesor según cambian sus objetivos. Por otra parte, en nuestro modelo, los objetivos del profesor igualmente determinan sus actividades, sin embargo, no consideramos explícitamente sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje, sino las relacionamos con la potencialidad de desarrollar ciertas competencias matemáticas de los estudiantes.

constructo del investigador que representa una hipotética evolución del estilo de enseñanza del profesor en función de determinados objetivos de aprendizaje. En un primer nivel de la misma el objetivo del profesor respecto al aprendizaje de las matemáticas se enfoca en la adquisición por parte de los estudiantes de los conceptos y procedimientos, que es lo que tradicionalmente ocurre en las clases de matemáticas (Kilpatrick et al., 2001; Schoenfeld, 1988; Stein et al., 1996; Stigler y Hiebert, 1999) como consecuencia se proporcionarán a los estudiantes unas determinadas oportunidades de aprendizaje. En un segundo nivel, el objetivo del profesor sería que los estudiantes entendieran las relaciones entre los conceptos, sus propiedades y fórmulas aplicadas, entre la Matemática y los fenómenos del mundo real; se les plantearán oportunidades de aprendizaje correspondientes. En el siguiente nivel el objetivo podría ser que los estudiantes aplicaran sus conocimientos en situaciones desconocidas, que supieran argumentar sus decisiones, generalizar los resultados, usar diferentes estrategias; entonces las oportunidades de aprendizaje serán distintas. Admitimos que puede que los objetivos del profesor no pasen del primer nivel, pueden llegar al segundo o hasta el tercero, incluso pueden empezar por el último. Asimismo, asumimos que pueden observarse diferentes combinaciones de focos matemáticos, estrategias didácticas o tipo de tareas propuestas durante el abordaje de un tema determinado con mayor o menor énfasis en ellos (Andrews, 2005; Andrews, Carrillo y Climent, 2005). Sin embargo, para la construcción de nuestro modelo partimos de estos tres niveles en los objetivos, sin excluir la posibilidad de existencia de otros objetivos pero considerando un mayor énfasis en los mencionados, de manera que presenten otro continuo correspondiente al de los tres niveles[37] de la competencia matemática.

A continuación describimos cada una de las subcategorías desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje que se ponen en juego y estableciendo relaciones con las

[37] Para el manejo más operativo de los 6 niveles descritos en el apartado II.2.5, los agrupamos en tres niveles, considerando nivel bajo el correspondiente a los niveles 1 y 2, nivel medio a los 3 y 4, y nivel alto a los niveles 5 y 6 de las actuaciones de los estudiantes. Cabe recordar que cuando nos referimos a los niveles en las actuaciones de los estudiantes, éstos están sujetos a los procesos cognitivos que movilizan los estudiantes, a las situaciones y contextos, y a los contenidos matemáticos. Es decir, son más extensos y no se reducen solamente a los tres grupos (reproducción, conexión, reflexión).

siete competencias matemáticas[38] y, posteriormente, justificaremos nuestra decisión respecto a la correspondencia de cada uno de los tres niveles de la trayectoria hipotética de la enseñanza (THE) con los tres niveles de dominio.

II.3.4. Relaciones entre las OTL y CM

a) Relaciones relativas al foco matemático

Como se puede apreciar, los focos matemáticos c*onceptual, procedural, structural, derivational, efficiency, problem solving y reasoning*[39] (Andrews, 2005; Andrews, Carrillo y Climent, 2005) abarcan las principales facetas del conocimiento matemático.

Así, *problem solving*, como la actividad matemática principal, comprende las situaciones-problemas y las técnicas de resolución y requiere el dominio de los distintos recursos para llevarla acabo con éxito o, de acuerdo con Schoenfeld (1985), la resolución de problemas matemáticos se construye sobre el fundamento de los conocimientos matemáticos básicos. Los conocimientos matemáticos básicos, a su vez, como objeto del aprendizaje escolar, prioritariamente consideran el dominio de nociones básicas, de relaciones entre éstas, de procedimientos, operaciones y técnicas de cálculo, de razonamientos, demostraciones y justificaciones, de diferentes vías para abordar una variedad de problemas y cuestiones. Resumiendo, parafraseando a Rico y Lupiáñez (2008), el conocimiento matemático se organiza en dos grandes campos: conceptual y procedimental, que se desglosan, el primero en los conocimientos sobre hechos, conceptos (c*onceptual*) y estructuras conceptuales (*structural*), y el segundo en destrezas (p*rocedural*), razonamientos (r*easoning*) y estrategias (*efficiency*). El foco *derivational* se relaciona con el conocimiento matemático en cuanto enfatiza el modo en que se adquiere el conocimiento matemático: derivándose de los conocimientos existentes en un proceso de reestructuración continua de estructuras cognoscitivas.

Partimos del hecho de que todos los focos matemáticos son importantes a la hora de la construcción del sistema de conocimientos y cada uno a su vez promueve la adquisición

[38] Pensar y razonar (PR), argumentar (A), comunicar (C), modelizar (M), plantear y resolver problemas (RP), representar (R), utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico (ULS).

[39] Nos decidimos por usar las denominaciones de los focos en el idioma original del proyecto (inglés) para facilitar la comprensión del texto en cuanto a la coincidencia de algunos focos con las competencias matemáticas (Razonamiento-Razonar, etc.).

de distintos conocimientos y destrezas, así como puede complementar los demás focos, Dependiendo de a favor de cuál o cuáles focos se desequilibran las oportunidades de aprendizaje, pueden producirse desequilibrios en los conocimientos y destrezas de los estudiantes. De este modo, descuidar alguna de las facetas del conocimiento matemático "*es mutilar una formación que debe ser equilibrada*" (Mialaret, 1984, p.14).

A continuación exponemos las oportunidades de aprendizaje que comprenden cada uno de los focos y sus potencialidades para promover las siete competencias matemáticas.

El foco *conceptual* presenta la oportunidad para conocer los hechos (términos, notaciones, convenios y resultados) y conceptos matemáticos, sus representaciones de carácter gráfico y/o simbólico; distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones, casos especiales. **El conocimiento conceptual está en la base de las siete competencias**.

El hecho de conocer los hechos y conceptos y sus diferentes representaciones implica la comunicación y el intercambio de significados: comprender las afirmaciones del profesor y saber expresarse sobre los objetos matemáticos y sus propiedades (C); reconocer sus diversas representaciones y ser capaz de representarlos en diferentes maneras (R). La comprensión conceptual promueve la adquisición con significado de técnicas y procedimientos (ULS); es imprescindible para seguir y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos (A), para emplear conceptos y razonar sobre asuntos matemáticos (PR); para plantear y resolver problemas (RP) y modelizar (M).

El foco *procedural* es también básico y presenta la oportunidad de adquirir las técnicas y destrezas de cálculo y cálculo mental; ayudar a conocer, interpretar y aplicar fórmulas, algoritmos; saber usar técnicas matemáticas más provechosas dependiendo de la situación, por tanto **está explícitamente relacionado con las competencias matemáticas utilizar el lenguaje formal y las operaciones (ULS), plantear y resolver problemas (RP), modelizar (M), saber explicar los cálculos (C), interpretar representaciones simbólicas (R)**.

En la Figura 7 visualizamos las relaciones expuestas para el foco *conceptual* y *procedural*.

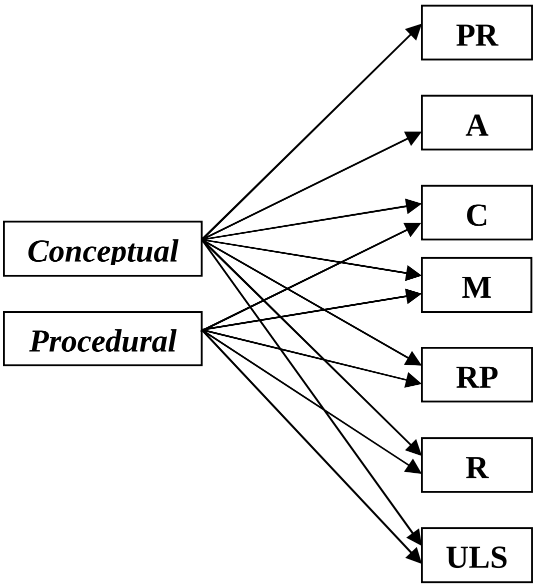


Figura 7: Visualización de las relaciones entre los focos matemáticos *conceptual* y *procedural* y las siete competencias matemáticas

El foco *derivational* implica una oportunidad de desarrollar nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente, de enlazar los conocimientos existentes de los estudiantes con los nuevos, aplicándolos en contextos diferentes a los que se habían adquirido, activándolos, dándoles sentido y estructurándolos. Este foco promueve, además, el proceso de actualización de los conocimientos que, a su vez, se considera como una de las características del pensamiento íntegro. En palabras de Rubinstein (1958):

> *"El pensamiento es la actualización y la aplicación de los conocimientos que resulta un proceso único"* (p.53).

Se entiende por el proceso de actualización, la elección de experiencias anteriores de los conocimientos y métodos necesarios y su aplicación a situaciones nuevas.

Este foco se relaciona con los procesos cognitivos en cuanto a la calidad de la construcción, retención y conexión de lo adquirido, dado que ayuda a fijar y mantener los conocimientos almacenados en la memoria, así como establecer nuevos recursos de una manera significativa y sistemática y los conocimientos adquiridos además de tener significado, son aplicables en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter dinámico a través de una red conceptual (Contreras y Carrillo, 1997; Carrillo, 1998a). O sea, ya no se trata de una competencia matemática concreta, sino de la profundidad y conectividad con que se adquieren.

El foco *structural* presenta la oportunidad de conocer las conexiones o enlaces entre entes matemáticos diferentes, es fundamental para la compresión tanto las interrelaciones entre los conceptos, las propiedades, los hechos, las operaciones, etc. dentro de un área o entre diferentes áreas de la Matemática, como las reglas por las cuales se pueden manipular y reorganizar para descubrir nuevos patrones y propiedades. Asimismo, es una oportunidad para destacar las conexiones entre los entes matemáticos y los fenómenos de la vida real.

Este foco, igualmente, promueve la adquisición significativa de los procesos cognitivos, ya que una compresión fundamental de las relaciones matemáticas por parte de los estudiantes les permite, en último extremo, generalizar su compresión aplicándola a una amplia gama de fenómenos y transferir su aprendizaje específico a nuevas situaciones y tareas (Resnick y Ford, 1998). Por otra parte, los conceptos, teoremas, hechos, operaciones adquieren el verdadero significado cuando se interpretan en relación con la realidad, "*y su significado es mayor en tanto que las conexiones son más fuertes*" (Ortega, 2005, p.11).

La Figura 8 refleja las relaciones anteriormente mencionadas.

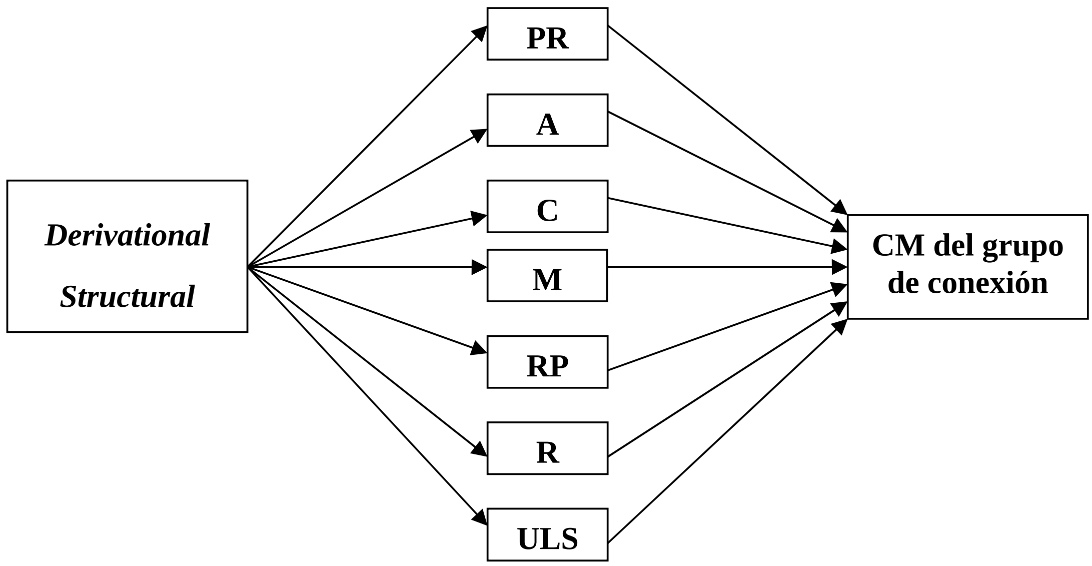


Figura 1: Visualización de las relaciones entre los focos matemáticos *derivational* y *structural* y CM del grupo de conexión

El foco *efficiency* da la oportunidad de adquirir los procesos o técnicas de flexibilidad, comparación crítica del trabajo (C), de conocer las estrategias de control y organización (RP, M), de saber cómo usar (PR) las relaciones, conceptos y la diversidad de las representaciones (R) para contestar a una pregunta o llegar a una conclusión (C), de saber elegir las técnicas más apropiadas (ULS) o recurrir a los conceptos y razonamientos adecuados (PR, A) en cada etapa de la resolución de problemas (RP), de conocer el papel de ejemplos y contraejemplos y saber emplearlos cuando sea preciso (PR). Es una oportunidad para apreciar los aspectos estéticos de las matemáticas (R): distinguir soluciones o demostraciones elegantes, procurar las propiedades de objetos matemáticos como forma, simetría, proporción, etc.; buscar soluciones originales y racionales de los problemas (RP, M).

Este foco, como se puede ver, se relaciona con las siete competencias matemáticas y además, a un nivel más avanzado que la pura reproducción.

Problem solving es entendida en este estudio como la resolución de problemas no triviales y no rutinarios que presentan situaciones nuevas para los alumnos y requieren procedimientos no elementales. *Problem solving* es una oportunidad de resolver problemas que presentan modos y respuestas múltiples de la solución, problemas motivadores con contenidos matemáticos importantes; de aprender estrategias y heurísticos, de pensar y razonar, conjeturar y generalizar, enfrentarse con las situaciones desconocidas, desarrollar habilidades de indagación individual y, por último, aprender a aprender.

> *"Podríamos decir que aprendemos en cuanto que resolvemos los problemas que se originan en un entorno siempre diverso y cambiante"*, García y García, (1989 en Carillo, 1998b, p. 93).

Este foco está explícitamente relacionado con las siete competencias, ya que éstas se movilizan y se activan, principalmente, al resolver problemas, aunque de manera especial con RP.

El foco *reasoning* es una oportunidad para el desarrollo y la articulación de justificaciones y argumentos, para activar las habilidades del razonamiento matemático (deducción, inducción, analogía), entender los diferentes modos de proceder en una demostración, justificar, seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos, generalizar, abstraer.

Este foco está explícitamente relacionado con las siete competencias ya que el razonamiento es como pegamento que permite mantener juntas todas estas competencias (Kilpatrick, et al., 2001), aunque existe una especial relación con PR, A y C.

En la Figura 9 presentamos las relaciones anteriormente expuestas.

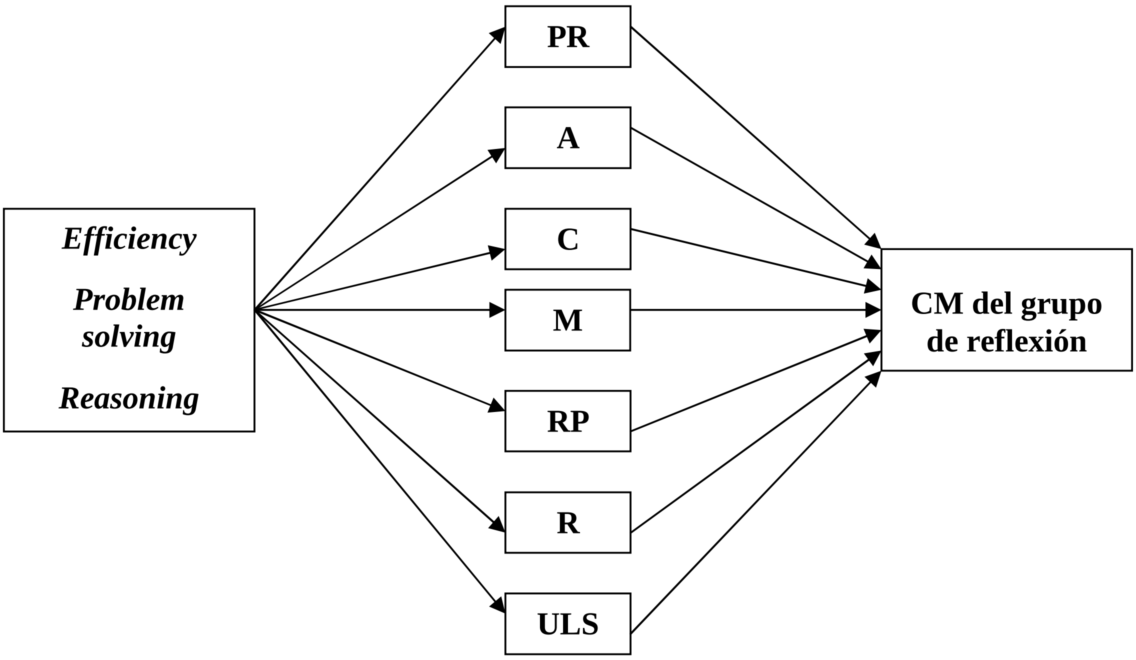


Figura 9: Visualización de las relaciones entre los focos matemáticos *efficiency, problem solving* y *reasoning* y CM del grupo de reflexión

b) Relaciones relativas a las estrategias didácticas

Las estrategias didácticas también tienen mucho que ver con las oportunidades de aprendizaje dadas a los estudiantes, dado que, dependiendo de las estrategias elegidas por el profesor para facilitar la compresión de sus estudiantes, variarían tanto el papel del estudiante y del profesor en el proceso de la enseñanza y aprendizaje, como las interacciones entre ambos y, por tanto, las situaciones de aprendizaje. Consideramos la enseñanza no como pura transmisión de conocimientos del profesor al estudiante, sino como un proceso complejo de interacción efectiva entre ambos. Por ello, estudiaremos, de forma particular, las estrategias didácticas que evidencian dichas interacciones. A continuación exponemos nuestras reflexiones al respecto.

Las estrategias didácticas *explicación* y *exploración* parecen tener el mismo objetivo: que los estudiantes lleguen a comprender una idea o solución, sin embargo, los métodos para llegar a ello son diferentes.

La estrategia *explicación* se centra en el profesor: en este caso el profesor es el informante principal que explica la idea o solución y el papel del alumno es pasivo y se reduce a atender y escuchar. La estrategia *explicación* también puede variar dependiendo del modo en que lo hace el profesor: desde la mera reproducción del tema con presentación de los conceptos, teoremas, etc. como hechos acabados, hasta la exposición de alto nivel *"descubriendo ante los alumnos su "laboratorio del pensamiento", demostrándoles el proceso mismo de la búsqueda de los caminos por los cuales se deducen diferentes fórmulas, teoremas"* (Kolyaguin et al., 1975, p. 261). Sin embargo, los conocimientos que obtienen los alumnos en forma completa y los que después ayudarán en la construcción de nuevos conocimientos, se adquieren mejor ni siquiera mediante una exposición perfecta del profesor o el libro de texto, sino mediante la investigación individual del alumno, durante la cual puede desarrollar su propia actividad creativa (Piaget, 1973).

El uso prioritario de esta estrategia no facilita el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas, ya que promueve una *comprensión pasiva* (reconocimiento) de los estudiantes (Mialaret, 1984).

La estrategia *exploración* se centra en el estudiante: el profesor aquí es más bien gestor, su papel es plantear problemas bien estructurados, durante el proceso de la resolución de los cuales el estudiante mismo (o con la ayuda del profesor, que le orienta mediante preguntas que no contienen respuestas explicitas) llega a descubrir una idea o solución. El estudiante, en este caso, tiene la oportunidad de involucrarse en el proceso de exploración y razonamiento; elegir y usar varias estrategias, plantear y resolver problemas. Esta estrategia facilita el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas ya que promueve una *comprensión activa* (evocación y utilización) de los estudiantes (Mialaret, 1984), el hecho que refleja la Figura 10.

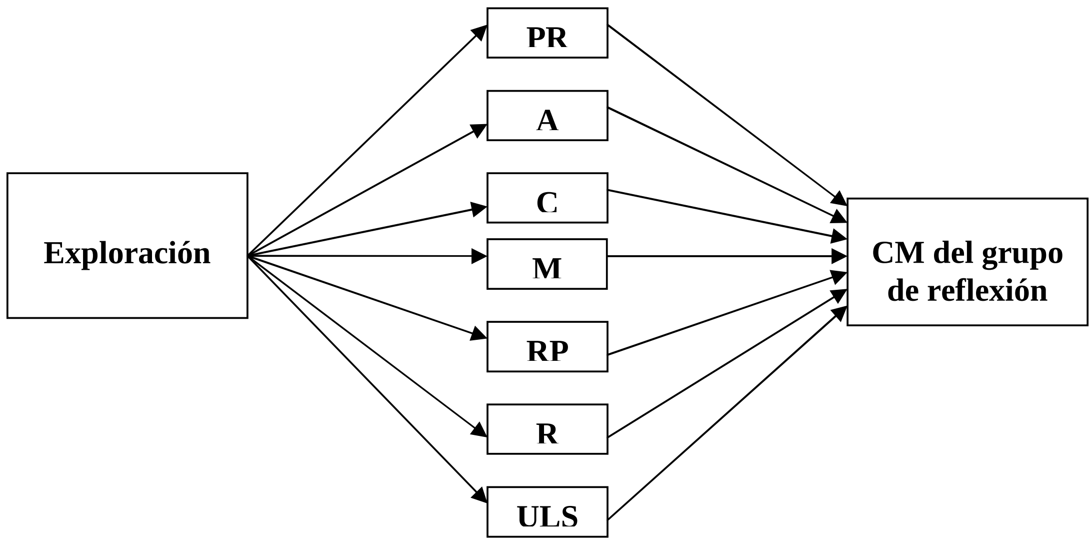


Figura 10: Visualización de las relaciones entre la estrategia didáctica exploración y CM del grupo de reflexión

De igual manera, las estrategias didácticas *entrenamiento* y *cuestionamiento* suponen métodos diferentes para llevar al estudiante a la aclaración de ideas o soluciones. Empleando la estrategia *entrenamiento* el profesor ofrece consejos e indicaciones directas (no se activan las competencias matemáticas), mientras que *cuestionamiento* mediante la secuencia de preguntas orientadas (llamada también diálogo Socrático[40]) proporciona la oportunidad para que el estudiante piense, razone, argumente, llegue a formar nuevas ideas o encontrar soluciones.

La Figura 11 visualiza lo que acabamos de exponer respecto a la estrategia cuestionamiento.

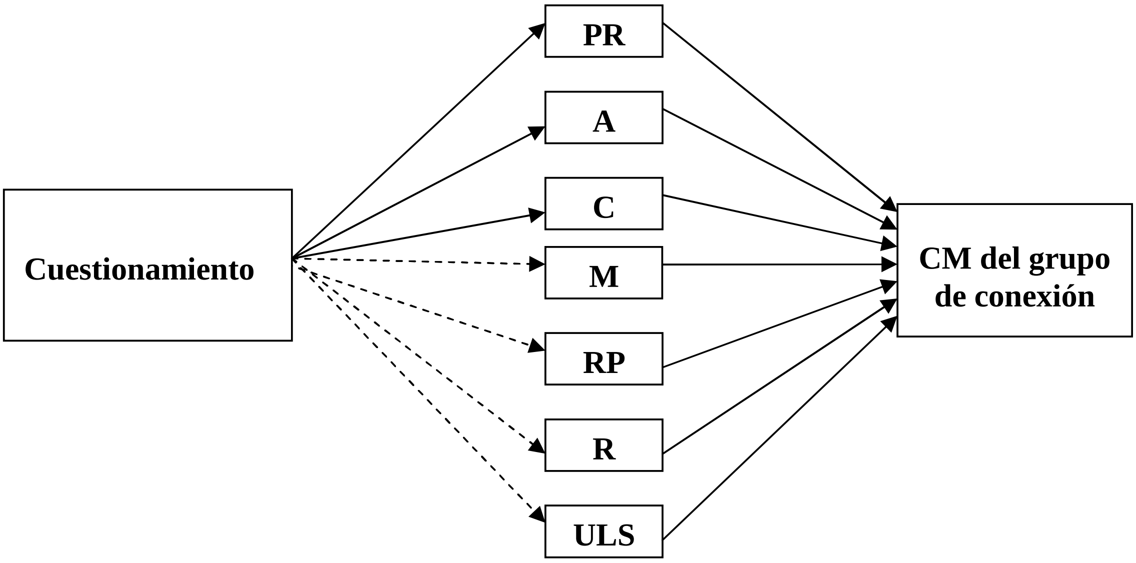


Figura 11: Visualización de las relaciones entre la estrategia didáctica cuestionamiento y CM del grupo de conexión

La estrategia *participación* da oportunidad a los estudiantes de implicarse en el proceso de compartir sus ideas, soluciones o respuestas en la discusión colectiva o en debates de grupo-clase. Esta estrategia representa una oportunidad que motiva a los estudiantes, les permite comunicar, dialogar, argumentar, comprobar, justificar y contrastar. El aprendizaje del razonamiento matemático, desde el punto de vista de Lave y Wenger (1991), se consigue mejor a través de la colaboración en las comunidades de práctica. La idea es crear tal comunidad en el aula, donde el papel principal del profesor es ayudar a los estudiantes a desarrollar interacciones y prácticas como en una comunidad (Brodie, 2010). Chazan y Ball (1999) destacan que el desarrollo del razonamiento matemático demanda que los estudiantes declaren en voz alta sus pensamientos

[40] Freudenthal (1973) advertía que incluso durante estos diálogos el papel del estudiante era demasiado pasivo.

matemáticos, pues ese discurso matemático sobre sus aserciones puede generar "fermento intelectual". Por tanto, cuando el papel del profesor deja de ser el de informante principal y llega a orientar, hacer cuestionarse, llevar a los estudiantes a descubrir nuevos conceptos, propiedades, soluciones, regularidades, se les facilita ser participantes activos y motivados en la construcción de sus conocimientos. De este modo, afirma Forman (1996, citado en Carillo, et al 2008), los estudiantes "*poseen más oportunidades de usar el registro matemático tanto como una herramienta para su propio pensamiento como un objeto para la reflexión*" (p.74).

En este caso **se promueve el desarrollo de todas las siete competencias, sobre todo, pensar y razonar (PR), argumentar (A), comunicar (C)**, como refleja la Figura 12.

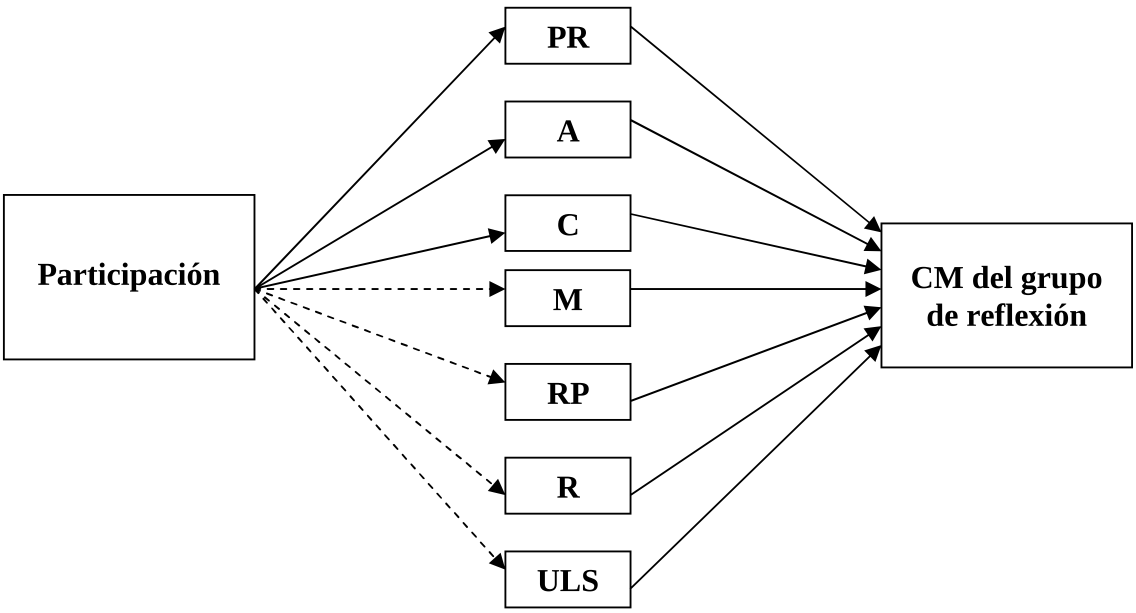


Figura 12: Visualización de las relaciones entre la estrategia didáctica participación y CM del grupo de reflexión

Las estrategias didácticas que exponemos a continuación se relacionan con las competencias matemáticas en cuanto que proporcionan las oportunidades para motivar a los estudiantes, promover la actitud positiva hacia matemáticas, la disposición para el aprendizaje, se ocupan, por tanto, del componente afectivo de las competencias. A causa de eso, consideramos que el uso adecuado de estas estrategias en el aula favorece al desarrollo de las competencias matemáticas.

La estrategia *evaluación* puede tener carácter formativo o sumativo dependiendo de qué, cómo y cuándo evalúa el profesor. Un modelo tradicional presenta la evaluación de los productos al terminar un determinado tema mediante un examen que mide la capacidad de retención y de aplicación mecánica, que a su vez adiestra al alumno en un estilo rutinario y mecánico de "aprender". Otro modelo más innovador es la evaluación continua de los procesos y progresos del alumno, donde el examen es un instrumento para medir tanto el grado de implicación del alumno, como la significatividad de su aprendizaje con el fin de reconducirlo y orientarlo en cada momento (Contreras, 1999). *"Dime como evalúas y te diré cómo aprenden tus alumnos"*, dicen Monereo y Castelló (2009, p.15), mencionando que para la mayoría de los estudiantes la evaluación constituye la principal razón de sus prácticas de estudio y aprendizaje.

Esta estrategia didáctica, aunque no esté explícitamente relacionada con ninguna de las competencias, tiene la función de poner acento en qué tipo de conocimientos y destrezas se evaluará, cómo y con qué objetivo. La evaluación formativa es una oportunidad para modificar o cambiar el modo de aprender de los estudiantes y su actitud hacia las matemáticas.

La estrategia didáctica *motivación* es una oportunidad para implicar a los estudiantes en sus estudios, a interesarles, hacerles apasionarse por el gusto de saber, por la búsqueda de respuestas a interrogantes; promueve actitudes como confianza en sí mismo, interés por las matemáticas, deseo de aprender, imprescindibles para sentirse seguro y mantener actitud positiva hacia las matemáticas que a su vez favorece la activación de los conocimientos y destrezas.

La estrategia *diferenciación* supone un acercamiento individualizado por parte del profesor, teniendo en cuenta las características personales de los estudiantes, sus intereses, capacidades, conocimientos previos, ritmos de aprendizaje, etc. "*Diferenciar*, en palabras de Perrenoud (2008), *es romper con la pedagogía frontal- la misma lección, los mismos ejercicios para todos…"* (p.47). Supone proponer tareas y actividades dentro de *la zona de desarrollo próximo del alumno* (Vigotsky, 1956), crear "*situaciones desafiadoras que empujan a cada uno a progresar, que estén a su alcance, por lo tanto situaciones movilizadoras"* (Ibid., p.35). Esta estrategia da oportunidad para motivar la disposición para el aprendizaje y la actitud positiva hacia las matemáticas.

Activación y ejercitación del conocimiento previo suele usarse en diferentes etapas de la instrucción: al principio del curso, durante el curso o al terminar todo el curso y en cada caso aunque persigue finalidades semejantes, sin embargo con distintas prioridades. Así, al principio del curso se hace hincapié en activar los conocimientos y preparar a los estudiantes para el aprendizaje de nuevos temas, mientras al terminar el curso, en relacionar las diferentes partes del material impartido y generalizar lo aprendido. Puede ir acompañando diferentes focos matemáticos dependiendo del objetivo que persigue el profesor, por ejemplo, si pretende repasar los conceptos de los temas anteriores, estaría ligada al foco conceptual, si interesa recordar algunos procedimientos, iría con el *procedural* o puede activar los dos tipos de conocimiento proponiendo un problema, entonces acompañaría al foco *problem solving*.

Entre los recursos que promueven la actitud positiva hacía las Matemáticas, cabe destacar *los materiales didácticos y el tipo de agrupamiento***.**

Respecto a los *materiales didácticos* que utilizan los profesores, es sabido que la actividad intelectual del estudiante está conectada estrechamente con su actividad relacionada con los objetos que le rodean (Piaget, 1973; Vigotsky, 1956). Creemos que es aquí donde los recursos didácticos (modelos que nos rodean, modelos construidos por los niños, modelos hechos, juegos, tablas, diapositivas, programas educativos (*software*) informáticos) desempeñan un papel importante como medios de percepción y operación y facilitan la formación de los conceptos matemáticos y el paso de lo concreto a lo abstracto, sobre todo en los primeros años de la escolarización. A los estudiantes de Secundaría, que se supone que tienen desarrollado hasta cierto grado el pensamiento formal y están familiarizados con conceptos matemáticos abstractos, les pueden resultar atractivos y útiles los *software* educativos (Ortega, 2005), sobre todo dedicados a los tópicos de geometría que visualizan las representaciones de figuras tridimensionales y facilitan la percepción de elementos, formas y propiedades de éstas; permiten mover, deformar, transformarlas observando modificaciones o las representaciones gráficas de las funciones, etc.

Aunque el uso de material didáctico no es un objetivo en sí e incluso su abuso puede frenar el desarrollo de otros tipos del pensamiento matemático (Kolyaguin et al., 1975), se trata de un recurso que proporciona oportunidades de adquirir conocimientos matemáticos sin intervención directa del profesor, en un modo interesante y atractivo para los alumnos, por lo que estos conocimientos resultan significativos y duraderos. A su vez, el uso del *libro de texto* como guía exclusiva de estudio limita el acceso a otras múltiples fuentes de información, a otras representaciones, impide a los alumnos aprender a buscar esa información, no se induce curiosidad, creatividad.

En cuanto a la *diversidad de agrupamiento* (individual, en pareja, en grupo, toda-clase) es una oportunidad para que los estudiantes experimenten sus conocimientos, creatividad en el trabajo en diferentes tipos de agrupamiento que dependiendo de la tarea y su finalidad podría ser más motivadora, provechosa y eficaz. A parte del fin formativo, la diversidad del agrupamiento persigue desarrollar habilidades y culturas de comunicación entre los alumnos (saber escuchar a sus compañeros, respetar su opinión, dialogar, compartir ideas, etc.). El trabajo en grupo, además, favorece las interacciones horizontales entre los alumnos que les ayudan en la construcción del conocimiento, advirtiendo y corrigiendo errores mediante la confrontación con las concepciones de los otros (Chamorro, 1991).

c) Relaciones relativas a los tipos de tareas (contexto y complejidad)

El contexto de tareas propuestas por el profesor, es una dimensión importante a considerar (Ponte, 2004) marca, esencialmente, el sentido y la finalidad de las matemáticas enseñadas y presenta la oportunidad para los estudiantes de formar ideas sobre las situaciones donde se pueden aplicar y sobre la utilidad y el papel de las matemáticas en la resolución de una gran variedad de problemas. Asimismo, el contexto tiene otras varias funciones, entre ellas, una de las más importantes, según De Lange (1987), es su uso para el proceso de la matematización conceptual[41], es decir, para la formación de conceptos. Desde la perspectiva de la RME, el contexto permite a los estudiantes acceder a las matemáticas de una manera natural y motivadora; proporciona un fundamento sólido para el aprendizaje de operaciones formales, procedimientos, notaciones, reglas y algoritmos; permite utilizar la realidad como recurso y dominio de aplicaciones; y realizar la ejercitación de las habilidades específicas en situaciones aplicables (Treffers y Goffree, 1985). A esta lista de funciones del contexto cabe añadir la que distinguen Meyer et al. (2001)[42]: el contexto como soporte para la comprensión de los estudiantes.

[41] *Conceptual mathematization,* para este autor, significa "*matematización destinada a la formación de conceptos matemáticos*" (De Lange, 1987, p.63).

[42] Las otras cuatro funciones del contexto, expresadas por este autor, prácticamente coinciden con las ya mencionadas. Meyer et al. (2001) distinguen cinco diferentes papeles del contexto: (a) para motivar, (b) para aplicar, (c) como recurso matemático, (d) como recurso para las estrategias de solución y (e) como soporte para la comprensión de los estudiantes.

De acuerdo con lo expuesto, la resolución de los problemas planteados en una variedad de situaciones y contextos proporciona a los estudiantes la oportunidad de experimentar sus conocimientos y habilidades de una manera significativa. Además, *actúan como dinamizadores de los aprendizajes,* siendo motivadores para ellos (Ortega, 2005). En el caso ideal, los estudiantes tendrían que trabajar en problemas representados en diversas situaciones y contextos, ya que cada uno proporciona oportunidades para el desarrollo de diferentes habilidades.

Por otra parte, la resolución de tareas de demanda cognitiva diferente presenta oportunidades para activar diferentes procesos cognitivos. Según señalan Stein et al. (1996), las tareas matemáticas en las que suelen trabajar los estudiantes determinan no solo lo esencial que aprenden, sino también cómo llegan a pensar sobre el desarrollo, el uso y el sentido de las matemáticas. En efecto, una distinción importante que sustenta la investigación sobre tareas académicas es la diferencia entre tareas que involucran a estudiantes a un nivel superficial y tareas que les involucran a un nivel más profundo por interpretación exigente, flexibilidad, control de recursos y construcción de significados.

La demanda cognitiva (o nivel cognitivo) de una tarea se refiere al tipo de procesos cognitivos que necesita estudiante para llevarla acabo (Doyle, 1988). Éstos pueden variar dentro de un continuo desde la memorización, la aplicación de procedimientos y algoritmos (con o sin comprensión) hasta el uso de estrategias de pensamiento y razonamiento complejas, que pueden ser prototípicos de lo que llamamos "hacer matemáticas" (conjeturar, justificar, interpretar, generalizar, etc.).

La demanda cognitiva de una tarea puede reconocerse por las características de la tarea que incluyen: número y tipo de representaciones, número de estrategias de solución y exigencias de comunicación (la extensión de explicación o justificación requerida del estudiante) (Stein et al., 1996). Las tareas de demanda cognitiva inferior suelen representarse de una única manera (simbólica, gráfica sencilla o verbal), requieren aplicación directa de fórmulas y algoritmos, y comunicación del resultado (prioritariamente, son tareas de respuesta cerrada). Las tareas de demanda cognitiva superior implican representaciones más sofisticadas, requieren su interpretación y traducción, y uso de diferentes estrategias para su proceder, así como, normalmente, son de respuesta abierta que invitan a explicar, argumentar o justificar. Entre estos dos extremos existe una variedad de tareas que combinan estas características de diferente manera. En todo caso, en las tareas que implican procesos cognitivos de nivel superior el foco se pone en la comprensión, interpretación y aplicación flexible de los conocimientos y habilidades (Doyle, 1988).

Como hemos mencionado en el apartado del marco teórico referido a las competencias matemáticas, se han considerado tres clases de complejidad de las tareas que afectan al modo en que deben ejecutarse los correspondientes procesos. Por otra parte, vamos a considerar también las situaciones y los contextos en que se presenta la tarea, igualmente descritos en detalle en el apartado mencionado.

A continuación presentamos las tres clases de tareas según la complejidad y contextos que presenten y las correspondientes oportunidades de aprendizaje que proporcionan.

Las tareas del *grupo de reproducción*, que requieren un procedimiento de rutina, sean planteadas en situaciones del mundo real o no, representadas en contextos hipotéticos o auténticos, dan oportunidad de reproducir el material practicado y aplicar fórmulas y procedimientos. En su mayoría son problemas de respuesta cerrada con el procedimiento y la solución únicos. Boaler (1997), citado en Brodie (2010), partiendo de los resultados de su investigación, en la cual había ilustrado el efecto de diferentes tareas sobre las habilidades de pensar, razonar y resolver problemas de los estudiantes, confirma que el énfasis en las tareas que descansan exclusivamente en los procedimientos, sin conexiones de los conceptos y significados subyacentes, pueden llevar a la comprensión limitada de qué son las matemáticas y cómo se ejecutan. Por otra parte, cabe destacar la utilidad de los ejercicios en cuanto que sirven para que los estudiantes practiquen los conocimientos adquiridos anteriormente, sin embargo, ejecutar ejercicios no resulta una actividad atractiva e interesante para los estudiantes (Ponte, 2004).

Se activan las competencias matemáticas del grupo de reproducción (Figura 13).

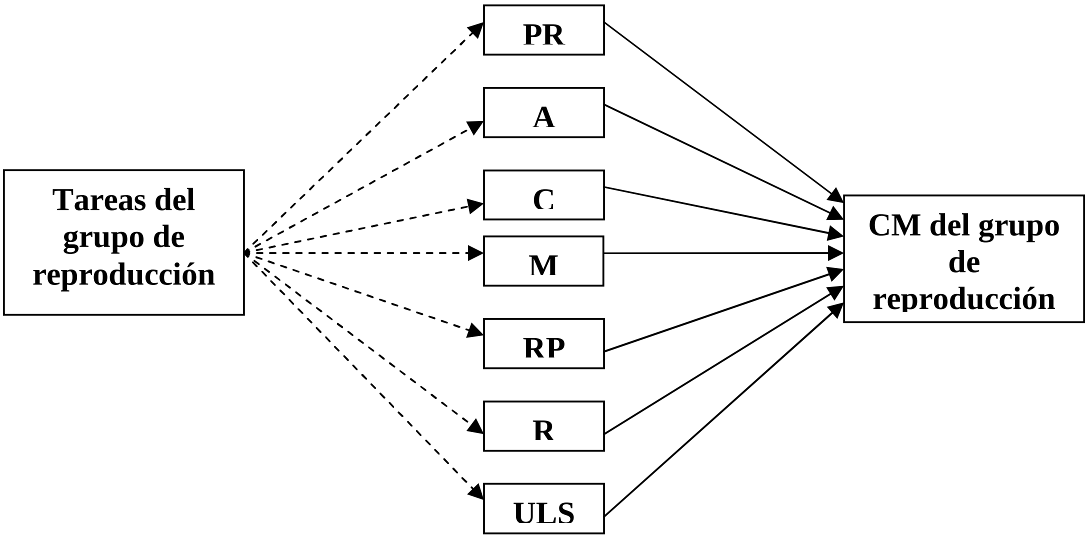


Figura 13: Visualización de las relaciones entre tareas y CM del grupo de reproducción

Las tareas del *grupo de conexión* llevan a los estudiantes más allá de la mera reproducción, conducen a situaciones de solución de problemas de más de un procedimiento, pero aún incluyen escenarios familiares. Este tipo de tareas dan oportunidad de integrar y vincular material derivado de diferentes áreas o conectar diferentes conceptos y sus propiedades.

Las tareas de este grupo, planteadas en situaciones del mundo real y en contextos auténticos, permiten que los estudiantes conecten conceptos y hechos matemáticos con la realidad y busquen regularidades con las situaciones familiares para ellos.

Se activan las competencias matemáticas del grupo de conexión (Figura 14).

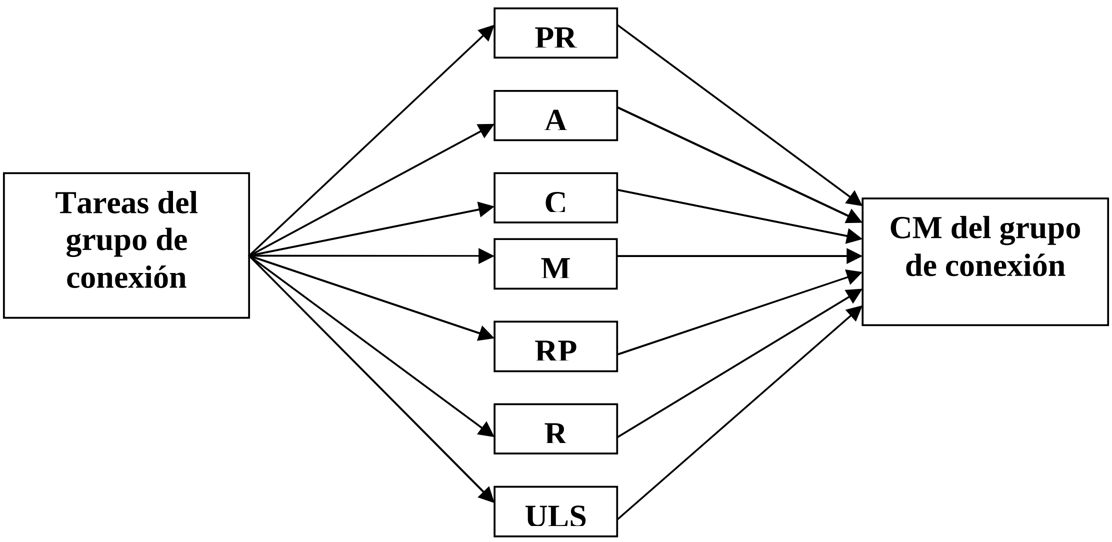


Figura 14: Visualización de las relaciones entre tareas y CM del grupo de conexión

Las tareas del *grupo de reflexión* requieren meditación por parte del estudiante sobre las estrategias de resolución empleadas, comprobación a medida que las elaboran y argumentación de éstas. Las preguntas de este grupo invitan al estudiante a pensar, a razonar, a justificar y a generalizar. Para Stein et al. (2000), si la finalidad del aprendizaje es el desarrollo de las habilidades de pensar, razonar y resolver problemas, entonces los estudiantes necesitan afrontarse con tareas de tal demanda cognitiva que tenga potencial de estimular a los estudiantes a pensar en forma más compleja. Dentro de este grupo pueden entrar problemas matemáticos puros o relacionados con otras ciencias que tienen, por una parte, valor formativo (desarrollo del pensamiento formal, razonamiento matemático, rigor en argumentaciones, etc.) y, por otra, destacan el papel fundamental de la Matemática en el desarrollo de las ciencias (naturales, experimentales, etc.).

Las tareas de este grupo planteadas, además, en situaciones del mundo real, dan oportunidades a los estudiantes de aprender a aplicar sus conocimientos a problemas de la vida real; de ampliar y profundizar la compresión de los conceptos más allá del marco de la asignatura y de promover el desarrollo de las habilidades de la matematización. Este tipo de tareas también pueden identificarse con problemas-investigaciones o proyectos, por lo tanto, proporcionan a los estudiantes oportunidades de vivir experiencias propias a la actividad del investigador: hacer preguntas, hipótesis, recolectar datos, elaborar estrategias, observar, argumentar, justificar, contrastar, analizar, validar los resultados, generalizar, etc. En definitiva, **se activan las competencias matemáticas del grupo de reflexión** (Figura 15).

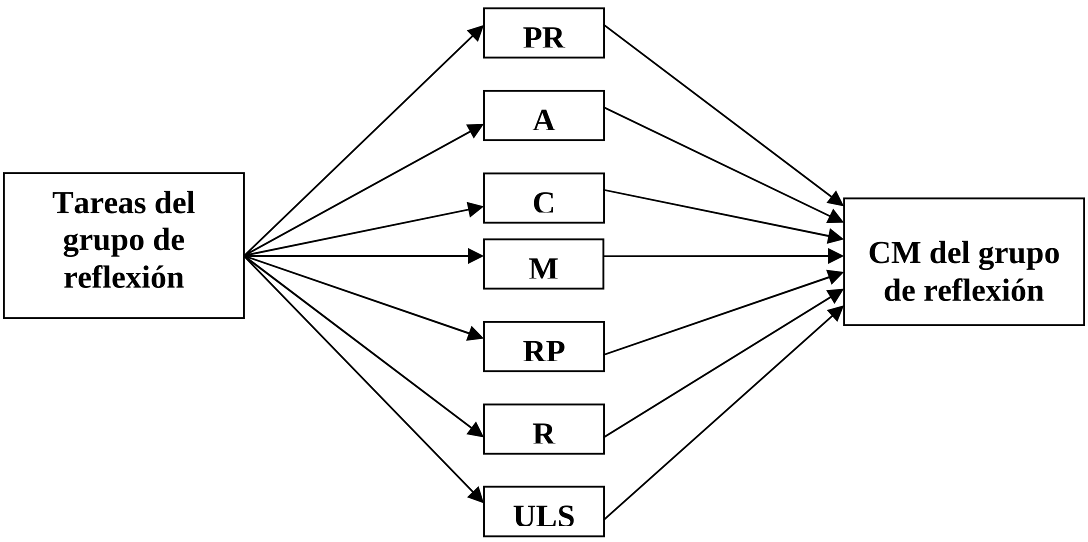


Figura 15: Visualización de las relaciones entre tareas y CM del grupo de reflexión

En las siguientes líneas presentamos el modelo que elaboramos a partir de las consideraciones realizadas.

II.3.5. Modelo OTL-CM

Al describir las relaciones entre cada una de las subcategorías consideradas con las siete competencias matemáticas y con los grupos de competencias, el siguiente paso es construir el modelo de relaciones entre OTL y CM.

El modelo OTL-CM, que sigue a continuación (Figura 16), describe, explica y predice estas relaciones y es representado mediante los tres niveles de THE, cada uno de los cuales comprenden las OTL que potencian las categorías y subcategorías correspondientes a ese nivel, y los tres niveles de dominio considerados como un continuo: nivel bajo-nivel medio-nivel alto.

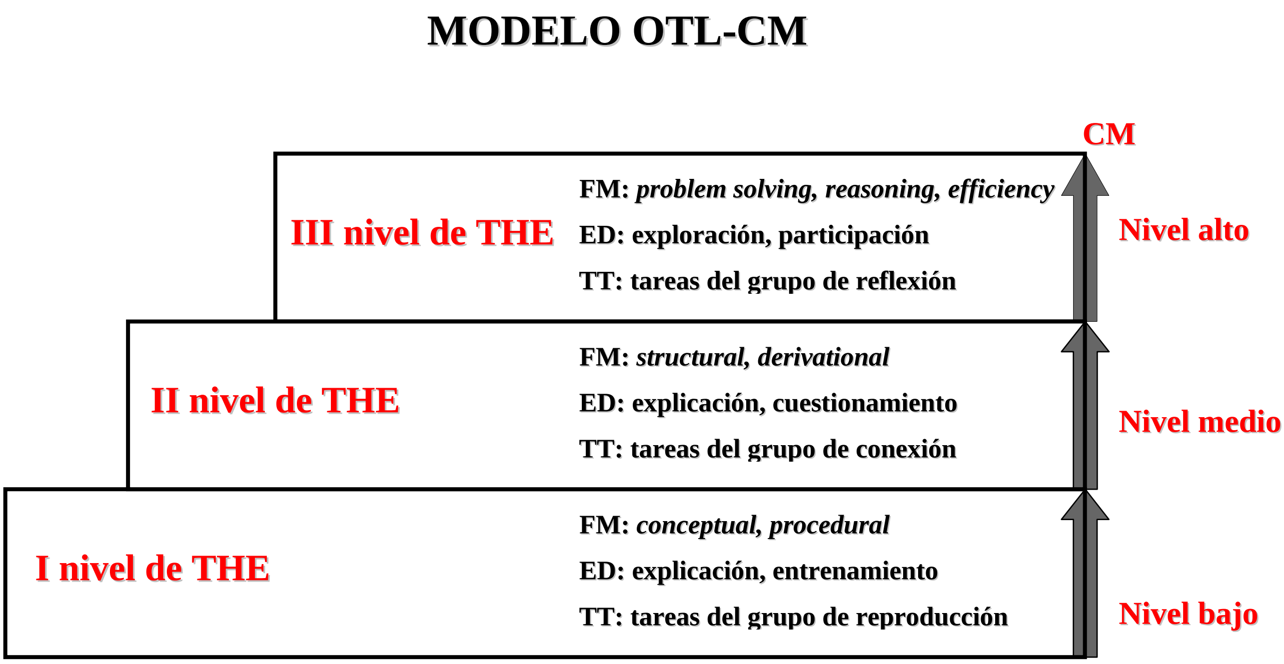


Figura 1: Modelo OTL-CM

Hay que advertir que la posición que tomamos respecto al papel de cada subcategoría, en su relación con alguno de los niveles de dominio, viene dada por tener siempre presente los tres niveles en los objetivos del profesor que determinan ese papel. Así, por ejemplo, no es que el foco *conceptual y procedural* se limiten al desarrollo de las competencias del grupo de reproducción, sino que el objetivo del profesor correspondiente al I nivel de THE, lo limita a ese papel. Estos mismos focos están presentes en los niveles II y III de THE, sin embargo, promueven el desarrollo de las competencias matemáticas más avanzadas, debido al objetivo distinto del profesor. Es decir, cada nivel de THE supone la presencia de las subcategorías del nivel anterior, sin embargo, su papel queda determinado por el objetivo del profesor. Por otra parte, con la intención de destacar el papel del profesor y del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, asignamos diferentes estrategias didácticas para cada nivel, pero no son fijos, sino, por ejemplo, en el nivel II o III de la THE, pueden ser otras combinaciones (*explicación y exploración* o *participación y cuestionamient*o), lo que hemos querido subrayar, es el papel pasivo, parcialmente activo/pasivo y activo de cada uno de los agentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las reflexiones que siguen a continuación explican y justifican nuestra posición.

I nivel de THE- Nivel bajo de dominio

Tal como mencionamos, en un primer nivel de la THE el objetivo del profesor se dirige, principalmente, a la adquisición por parte de los estudiantes de los conceptos y procedimientos, va acompañado, prioritariamente, por las estrategias didácticas explicación y entrenamiento, y resolución de ejercicios tipo. Exponemos las oportunidades de aprendizaje que se proporcionan en este caso.

En primer lugar, hay que destacar que el conocimiento conceptual se caracteriza como un conocimiento rico en relaciones: cada concepto se constituye tanto por los hechos como por las relaciones entre ellos. Por tanto, si no se dan a conocer (y se invitan a establecer) las diversas relaciones entre diferentes conceptos matemáticos *(structural, derivational)*, que a su vez, forman auténticas redes de conocimientos, éstos se quedan como unidades aisladas de información. Asimismo, si no se da la oportunidad de aplicar los hechos y conceptos aprendidos a situaciones y problemas nuevos mediante la resolución de problemas *(problem solving)*, este tipo de conocimiento no es transferible y está ausente de la componente “comprensión”. De acuerdo con Bloom et al. (1972, p.28) “*un conocimiento adquirido tiene poco valor en cuanto tal si no puede ser utilizado en situaciones nuevas o en formas bien diferentes de la original*”.

Por otra parte, Chamorro (1991) llama la atención sobre el significado de los procedimientos, que deberían compatibilizar la creatividad del sujeto con el aprendizaje de procedimientos estándar; éstos deben ser valorados por el estudiante en función de su mejor adaptabilidad a situaciones comunes y de una economía de acciones o de pensamiento. Sin embargo, cuando ésta es la oportunidad de aprender matemáticas, proporcionada casi en forma exclusiva, se convierte en un instrumento mecánico, carente de sentido y la Matemática llega a entenderse "*como un conjunto de datos y de procedimientos que no se relacionan entre sí, y no como un conjunto de estructuras de conocimiento complejas e interrelacionadas*" (Resnick y Ford, 1998, p.128). Como menciona Skemp (1976), las matemáticas instrumentales tienen la ventaja de aprenderse fácilmente, son más inmediatas y aparentes, sin embargo, son difícilmente adaptables a situaciones nuevas, ya que la comprensión instrumental necesita tener presente los métodos aplicados a un problema y ha de aprender cada vez un método diferente para una nueva tarea.

De acuerdo con lo expuesto, consideramos que cuando el énfasis se pone, principalmente, en el foco *conceptual* y *procedural*, se da la oportunidad de adquirir diferentes saberes necesarios para ejercitar matemáticas, pero no suficientes para saber conectar, aplicar y argumentar su uso. En palabras de Ball (2003) el conocimiento de los tópicos, conceptos y procedimientos tiene papel central en el manejo de las matemáticas, pero no es suficiente para el uso efectivo de las matemáticas.

Por otra parte, una enseñanza centrada principalmente en el profesor (explicación, entrenamiento), según lo anteriormente mencionado, limita las oportunidades para llegar a adquirir los conocimientos de una manera activa, que a su vez impide el desarrollo de las competencias matemáticas más avanzadas. En palabras de Piaget (1973), cada vez que enseñamos a los niños algo que hubiera sido capaz de descubrir solo, le impedimos inventarlo, o sea, comprenderlo completamente.

Además, si los estudiantes tienen la oportunidad de realizar principalmente tareas de demanda cognitiva inferior (reproducción), encuentran dificultad en abordar las tareas matemáticas complejas, ya que es poco probable que al emplear en el aula la ejercitación repetitiva de ejercicios tipo, los estudiantes adquieran procesos propios a la actividad matemática tales como observación, análisis y síntesis, generalización, abstracción, validación, etc., imprescindibles para ejecutar problemas con éxito. Por ello, los estudiantes tienen dificultades a la hora de resolver problemas distintos de los que resuelven en el aula, aquellos que no les resultan familiares y que requieren unos procedimientos diferentes de los usados. Sus habilidades en resolución de tareas rara vez llegan más allá de la resolución de ejercicios tipo con la aplicación mecánica de fórmulas y algoritmos. En definitiva, reducir la enseñanza de las matemáticas a la realización de ejercicios, "*comporta grandes riesgos de empobrecimiento de los desafíos propuestos y de desmotivación de los alumnos*" (Ponte, 2004, p.27).

De este modo, las oportunidades de aprendizaje que se proporcionan en el I nivel de THE se limitan a la memorización de los hechos y conceptos o aplicación de fórmulas, algoritmos y procedimientos a una serie de ejercicios similares, por tanto, promueven las competencias matemáticas del grupo de reproducción en situaciones rutinarias, lo que corresponde al nivel bajo de las actuaciones de los estudiantes.

II nivel de THE- Nivel medio de dominio

En este segundo nivel de la THE, el objetivo del profesor es que los estudiantes entiendan las relaciones entre los conceptos, sus propiedades, procedimientos y operaciones, que sepan reconocer estas relaciones y patrones, tanto dentro de las Matemáticas como en las situaciones del mundo real, reestructuren sus conocimientos nuevos a partir de los conocimientos previos (focos *structural, derivational*). Se les proponen resolver tareas matemáticas más complejas pero todavía en situaciones familiares.

La construcción de significados, según Ausubel (1982), implica la conexión de lo que el alumno sabe con los conocimientos nuevos. Asimismo, la comprensión de las secuencias del desarrollo de los contenidos matemáticos puede ser motivadora y promovedora para la construcción de "mapas mentales". Por su parte Skemp (1976), comparando la comprensión relacional e instrumental de las matemáticas, entre las ventajas de la comprensión relacional frente a la instrumental, destaca su adaptabilidad a nuevas tareas, ya que el saber por qué funciona un método permite aplicarlo a nuevos problemas; su facilidad para recordar, ya que el saber cómo están interrelacionadas las reglas o fórmulas permite recordarlas como parte de un todo y su retención a largo plazo.

Por tanto, cuando el énfasis se pone en el foco *derivational* y *structural* se da la oportunidad de relacionar diferentes conceptos y procedimientos, sus propiedades, conocer las conexiones entre ellos.

Por otra parte, se trata de una enseñanza parcialmente centrada en el profesor (explicación, cuestionamiento), se proporciona la oportunidad de cierta actividad del estudiante, que favorece el desarrollo de las competencias matemáticas más avanzadas.

Asimismo, en este nivel de la THE los estudiantes tienen la oportunidad de realizar tareas de demanda cognitiva más avanzada (conexión): aplicar sus conocimientos a situaciones familiares, conectar varios pasos, establecer relaciones, es decir, se movilizan las competencias matemáticas del grupo de conexión en situaciones y contextos familiares, las que condicionan el nivel medio en las actuaciones de los estudiantes.

III nivel de THE - Nivel alto de dominio

En el tercer nivel de la THE el objetivo del profesor es que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos en situaciones no rutinarias, en contextos distintos, que sepan argumentar y justificar sus respuestas y decisiones, generalizar los resultados, usar diferentes estrategias de resolución de modo autónomo. Este objetivo implica un mayor énfasis en los focos matemáticos *problem solving, reasoning y efficiency*, las estrategias recurridas son exploración y participación, las tareas propuestas requieren activar procesos cognitivos avanzados (reflexión) en una variedad de situaciones y contextos. Las oportunidades de aprendizaje correspondientes a este nivel son siguientes.

No será ninguna exageración la afirmación de que la actividad vital humana consiste en la resolución diariamente de diferentes problemas en toda su diversidad de contenidos, situaciones y métodos de resolución. La mayoría de estos problemas que nos plantea la vida se resuelven en el proceso de la actividad orientada y planeada, otros surgen imprevistamente y requieren soluciones espontáneas. La resolución de muchos problemas exige de las personas la capacidad bien desarrollada hacía la actividad creativa o, por lo menos, la habilidad de encontrar y tomar la solución óptima en unas condiciones dadas. Por tanto, no es de extrañar el papel importante que se le otorga a la resolución de problemas.

La potencialidad de la resolución de problemas para proporcionar situaciones de aprendizaje significativo ha sido destacada por numerosos investigadores (Blanco, 1993; Branca, 1980; García y García, 1989; Garofalo y Lester, 1985; Garret, 1988; Carrillo, 1998b; Contreras, 1987; Polya, 1980; Schoenfeld, 1987; Stacey, 1991, para citar a algunos de ellos).

La oportunidad que proporciona el foco *efficiency*, por su parte, supone algún dominio mayor que pura reproducción o conexión, ya que se trata de las estrategias que llevan a los estudiantes a elegir técnicas, conocimientos, destrezas o razonamientos en cada etapa de la resolución de problemas.

A su vez, el razonamiento causa un gran impacto en el desarrollo intelectual de cualquier persona, lo que le otorga un valor indiscutible y se considera tanto medio como fin en el desarrollo del alumno. Como toda ciencia, en esencia, es un sistema de proposiciones acerca los objetos que estudia, las matemáticas también se presentan como un determinado sistema de proposiciones expresadas mediante términos matemáticos o lógicos, o sus correspondientes símbolos. El proceso mental de realizar inferencias a partir de una o varias proposiciones interrelacionadas sobre una nueva proposición, que contiene un nuevo conocimiento acerca del objeto de estudio, se entiende como razonamiento y se considera propio de un pensamiento de alto nivel. No cabe duda que el valor cognoscitivo del razonamiento matemático es de importancia singular.

> *"El razonamiento matemático amplia las fronteras de nuestros conocimientos sobre los objetos y fenómenos del mundo real, en virtud de que la gran parte de las proposiciones matemáticas son inferencias de la relativamente pequeña cantidad de proposiciones principales obtenidas, por regla general, mediante la experiencia inmediata y en las cuales se refleja nuestro lo más simple y común conocimiento sobre los objetos del mundo"* (Kolyaguin et al., 1975, p. 82).

El razonamiento matemático, según los autores, supone no tanto habilidades de los estudiantes para la adquisición de destrezas y operaciones concretas, sino las habilidades para encontrar nuevas conexiones, adquirir procedimientos generales que puedan llevar a la resolución de nuevos problemas, a la adquisición de nuevos conocimientos. Para Ball y Bass (2003) el razonamiento es la habilidad fundamental de las matemáticas necesaria para varios objetivos: para la comprensión de conceptos matemáticos, para el uso flexible de ideas y procedimientos, para la reconstrucción de los conocimientos una vez entendidos, pero olvidados con el tiempo. Kilpatrick et al. (2001), en su definición de la pericia matemática (*mathematical proficiency*) entre sus cinco componentes[43] interconectados y mutuamente dependientes, destacan el

[43] Los cinco componentes de *mathematical proficiency* son: comprensión conceptual (*conceptual understanding*), fluidez de procedimientos (*procedural fluency*), competencias estratégicas (*strategic competence*), razonamiento flexible (*adaptive reasoning*) y disposición productiva (*productive disposition*) (Kilpatrick et al., 2001).

razonamiento flexible (*adaptive reesoning*), que es la capacidad para el pensamiento lógico, reflexión, explicación y justificación, y la describen como el pegamento que mantiene todo junto. El núcleo del razonamiento flexible es la justificación de declaraciones y desarrollo de argumentos. Para Russell (1999) el razonamiento matemático es esencial para el desarrollo, justificación y uso de la generalización matemática.

Por tanto, cuando el énfasis se pone en el foco *problem solving, reasoning* y *efficiency* se da la oportunidad de movilizar los conocimientos y destrezas, de saber cómo aplicar los diferentes saberes y por qué.

Por otra parte, estos focos implican el uso de las estrategias didácticas exploración y participación, que determinan una enseñanza centrada en el estudiante. De este modo, se da la oportunidad de adquirir los conocimientos de modo activo y significativo.

Además, el foco *problem solving* conlleva la oportunidad para los estudiantes de experimentar sus conocimientos y destrezas resolviendo problemas de demanda cognitiva de alto nivel (reflexión), mediante enfoques y estrategias originales, o sea, se movilizan las competencias matemáticas del grupo de reflexión en una variedad de situaciones y contextos que facilitan un alto nivel en las actuaciones de los estudiantes.

Como todo modelo teórico, el nuestro igualmente precisa la aprobación empírica, que con toda probabilidad nos llevará a reajustar, revisar o contrastar el modelo.

CAPÍTULO III:
MARCO METODOLÓGICO

INDÍCE DEL CAPÍTULO

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo, procurando cumplir el criterio de transparencia y claridad de las decisiones tomadas (Burton, 2005), introducimos las características principales de nuestra investigación, su ubicación en el espacio metodológico y nuestra elección de los métodos. A continuación concretamos el diseño de la investigación, atendiendo a la manera en que procedemos y las diferentes técnicas de recogida de información que empleamos para contestar a las preguntas planteadas y conseguir los objetivos propuestos en el contexto concreto de nuestro estudio. Asimismo, tratamos los procesos e instrumentos de análisis de la información obtenida y concluimos con nuestras consideraciones respecto a los criterios de rigor de la investigación.

III.1. Caracterización del estudio y elección de métodos

Los objetivos de una investigación determinan la estrategia o el paradigma que se adopte (Husén, 1988; Bericat, 1998). De ahí, debido a que el objetivo de nuestro estudio es comprender, describir e interpretar relaciones entre las oportunidades de aprendizaje proporcionadas por el profesor y las competencias matemáticas que activan los estudiantes al resolver problemas matemáticos, consideramos la investigación que desarrollamos de corte interpretativo (Ericson, 1986; Latorre et al., 1996; Lincoln y Guba, 2000). No obstante, la complejidad propia del objeto de estudio ha orientado nuestra actitud y, en consecuencia, el modo de abordar la problemática planteada hacia el diseño de investigación multimétodo (Bericat, 1998). Esto implica que situándonos en la pirámide cualitativa de la metafóricamente expresada *doble pirámide de la investigación social*[44], tomamos una postura dialéctica respecto a la integración de métodos cualitativos y cuantitativos, porque creemos que una apropiada combinación de éstos puede resolver los problemas planteados por el investigador y servir "*para llegar más alto y para ver más lejos*" (Bericat, 1998, p.23), y una postura prudente en cuanto a la coherencia del diseño metodológico.

[44] La metafóricamente denominada la *doble pirámide* se refiere a dos grandes corrientes cualitativa y cuantitativa, en la cual las cúspides equivalen a las dimensiones paradigmáticas (o metateóricas), mientras las bases equivalen a la dimensión técnica o empírica (Bericat, 1998).

De acuerdo con Sandín (2003), en la actualidad, el debate sobre la integración metodológica supera el de la inconmensurabilidad paradigmática (Denzin, 1978, Cook y Reichardt, 1986; Dendaluce, 1995; Bericat, 1998), posibilitando, de este modo, la construcción de diseños de investigación que integran componentes de ambas pirámides en el plano metodológico.

Múltiples esquemas de posibles estrategias de investigación multimétodo (Denzin, 1970; Bryman, 1988; Brannen, 1992; Bericat, 1998; Morgan, 1998, ente otros) proporcionan guías para alcanzar el objetivo de investigación. A nuestro parecer, Bericat (1998, p.149) presenta el esquema más completo y sistemático a tener en cuenta para diseños de este tipo. Las siguientes tres componentes (*las dimensiones metodológicas, las estrategias básicas de integración y las fases de investigación*) constituyen el citado esquema:

Dimensiones metodológicas	
SD	Sincronía – Diacronía
EI	Extensión – Intensión
OS	Objetividad – Subjetividad
AS	Análisis – Síntesis
DI	Deducción – Inducción
RN	Reactividad – Neutralidad
Estrategias de integración	
CP	Complementar
CB	Combinar
TR	Triangular
Fases de investigación	
OB	Definición del objeto
DI	Diseño del método
DA	Recogida de datos
AN	Análisis de datos
RE	Resultados

Cuadro 1. Componentes del diseño multimétodo

La combinación de estas tres componentes y sus correspondientes elementos genera, según el autor, todos los posibles diseños de integración y, además, sirve para clarificar las razones que dirigen a optar por un diseño concreto. En las siguientes líneas presentamos las opciones que consideramos apropiadas para la caracterización de nuestra investigación según estos tres componentes.

1. Dimensiones metodológicas

En la literatura sobre investigación social varios autores han realizado clasificaciones que caracterizan la naturaleza de los enfoques cualitativo y cuantitativo, entre ellos podríamos citar a Alvira (1983), Bryman (1988), Cook y Reichardt (1986), Hammersley (1992). A todas estas clasificaciones se les propia una debilidad común que es la dicotomía excluyente (Bericat, 1998).

Para caracterizar nuestra investigación recurrimos a la propuesta de Bericat (1998) de la clasificación de seis dimensiones metodológicas, dado que abarca las dimensiones básicas que suelen atribuirse a una u otra perspectiva, inspiran todos los posibles diseños de investigación y no son dimensiones dicotómicas, sino *gradientes* que admiten múltiples posicionamientos.

Tomando como fundamento estas seis dimensiones, sugiere el autor, es posible caracterizar la orientación metodológica de los estudios sociales. Tradicionalmente, a la investigación cualitativa se le atribuyen los componentes situados en el polo derecho de esta lista de dimensiones, y a la investigación cuantitativa los del polo izquierdo. No obstante, esta descripción, que no pretende ser exhaustiva, o cualquier otra más extensa y rigurosa no pueden responder de modo satisfactorio a ningún investigador social que caracterice, más allá de meras convenciones fijadas, las investigaciones concretas tal y como realmente se llevan acabo. Por tanto, estas seis dimensiones constituyen un espacio metodológico 6-dimensional que permite ubicar la orientación metodológica de un estudio en cualquier punto de cada uno de los seis ejes y no precisamente en alguno de sus dos extremos polares (Bericat, 1998). A continuación presentamos nuestra posición en este espacio metodológico.

Respecto a la primera dimensión (Sincronía – <u>Diacronía</u>), consideramos el fenómeno objeto de interés como dinámico y cambiante centrando nuestra mirada en el *proceso* de la enseñanza-aprendizaje cuando observamos las oportunidades de aprendizaje y en el *resultado* cuando se trata de conocer competencias matemáticas de los estudiantes, no por entender estas últimas como cualidades estáticas sino para fijar su alcance en un momento dado del tiempo.

La segunda dimensión (Extensión – Intensión) se refiere a la naturaleza espacial de la realidad: su amplitud, intensidad y la distancia entre el observador y el fenómeno observado. En nuestra investigación observamos el objeto de estudio desde una perspectiva que nos permite captarlo en su compleja e indisoluble concreción, una distancia ni demasiado alejada ni demasiado próxima para no perder de vista la totalidad y diversas caras del objeto. De este modo, a través de un estudio de casos, reduciendo la extensión, perseguimos una observación en profundidad del fenómeno y su contexto natural.

Las dimensiones metodológicas (Objetividad - Subjetividad) despliegan según el criterio de realidad y el criterio de verdad. Es en esta dimensión, donde adoptamos una actitud integradora de los métodos cualitativos y cuantitativos. Por una parte, nuestra postura respecto al criterio de realidad aboga por la consideración de la realidad como construcción de las interpretaciones subjetivas. Así, nuestro conocimiento sobre el fenómeno estudiado lo vamos construyendo desde las interpretaciones que hace el investigador observando actividades del profesor y de los estudiantes en aula, y de las interpretaciones de los propios observados. Por otra parte, debido a la complejidad y variedad de los constructos que constituyen la competencia matemática y porque ésta se manifiesta, principalmente, cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos en diversas situaciones y contextos (véase capítulo II), recurrimos al uso de una prueba para analizar y interpretar sus resultados a la luz de las competencias matemáticas y cuantificamos estos resultados para facilitar su clasificación en diferentes niveles de dominio. En lo que se refiere al criterio de verdad, la validez de los resultados ha sido negociada entre el investigador y los directores de este trabajo, con los investigados, con otros investigadores a través de las reuniones académicas (SIDM[45]) y entrevistas personales.

En cuanto a la cuarta dimensión (Análisis - Síntesis), nuestro modo de aprehensión del fenómeno estudiado se realiza componiendo sus diferentes partes, relacionándolas entre sí y estudiando su naturaleza como un todo. Así, tanto las oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas, como las características del profesor y de los estudiantes en su contexto natural, las estudiamos en su íntima integración.

[45] SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Huelva).

En relación con la quinta dimensión (Deducción-Inducción), cabe destacar que el proceso metodológico de toda investigación recorre desde las ideas a los datos así como desde los datos a las ideas, es decir, toda la investigación implica deducción e inducción (Hammesley, 1992). Sin embargo, según Bericat (1998) puede existir una variedad de opciones del uso de ambos procesos, dependiendo de la relevancia que se da a éstos, la secuencia temporal o de diversos tipos de deducción y de inducción que se apliquen. Al determinar el objetivo de nuestra investigación, inicialmente nos sumergimos en la realidad de dos aulas con la intención de observar lo ocurrido y a partir de ello intentar comprender las relaciones entre las OTL y las CM de los estudiantes. Los datos obtenidos, aunque aludían a ciertas relaciones, sin embargo, por ser algunas más bien intuitivas y otras no tan convincentes, no permitían comprender el fenómeno en su totalidad. De ahí, *"en el esfuerzo por llenar la distancia entre los hechos tal y como se nos presentan y los conceptos y esquemas con los que debemos aprehenderlos y comprenderlos"* (Bericat, 1998, p.82), desarrollamos un modelo teórico adaptado a la realidad observada. De este modo, con datos empíricos adicionales, el modelo se va consolidando en un proceso de refinamiento teórico que, teniendo presente la referencia empírica, nos lleva a abstracciones de mayor grado (Agar, 1996).

Finalmente, la última dimensión (Reactividad - Neutralidad) se refiere al modo en que el investigador se relaciona con la realidad. En el desarrollo de nuestra investigación adoptamos una postura externa para conocer la realidad, o sea, optamos por la neutralidad, en el sentido de que no tenemos intención ni de manipular ni de modificarla. De este modo, observamos los procesos de enseñanza y aprendizaje en dos aulas, sin intervención alguna. No obstante, asumimos que no se puede hablar de la mera neutralidad, tanto desde la perspectiva del investigador como de los investigados, ya que por una parte, solo la presencia del investigador en alguna medida hace modificar las acciones de los observados y por otra, el hecho de estar sumergido en un contexto concreto afecta al investigador en cuanto a sus componentes emotivos, evaluativos o puntos de vista.

2. Estrategias de integración

En la literatura podemos encontrar, principalmente, tres razones fundamentales que motivan al investigador a usar el diseño multimétodo (Bericat, 1998; Creswell, 2003; Sandín, 2003; Bisquerra, 2004):

(1) cuando en una misma investigación se quiere obtener dos imágenes procedentes de métodos cualitativos y cuantitativos (*complementación*);

(2) cuando se trata de integrar adicionalmente un método en el otro, con el propósito de asegurar la validez de éste último, incrementando así su calidad, mediante la incorporación de informaciones obtenidas por el otro método (*combinación*); y

(3) cuando se pretende utilizar dos orientaciones para obtener una imagen completa de un mismo e idéntico aspecto de la realidad (*triangulación*).

En nuestra investigación optamos por la estrategia de integración *combinación*, con el motivo de integrar subsidiariamente el *método cuantitativo para facilitar la investigación cualitativa* (Bryman, 1988). De ahí, con el objetivo de comprender las relaciones entre OTL y CM, aplicamos a los estudiantes estudiados una prueba, los resultados de la cual nos ayudan a realizar la interpretación y anotar posibles relaciones. Por otra parte, las actividades de los profesores son cuantificadas según unas categorías determinadas para facilitar el análisis cualitativo de la información.

3. Fases de investigación

Todo proceso de investigación supone una serie de *fases* para acercarse a la realidad objeto de estudio. Si bien, dependiendo de la aproximación metodológica de la investigación, en la literatura podemos encontrar una variedad de diseños que las orientan (p.ej. Bassey, 1999; Creswell, 2003; Latorre et al., 1996; Yin, 2003), todos ellos contemplan fases, previamente establecidas o emergentes, como definición del objeto de investigación, diseño del método, recogida de información, análisis de información y presentación de resultados. Según el objetivo del estudio, el diseño integrador puede aplicarse a diferentes fases, mencionadas y recogidas en el esquema de Bericat (1998), de la investigación. En nuestra investigación empezamos por el planteamiento del problema y concreción de las preguntas y objetivos a tratar fundamentándonos en respectivos marcos teóricos, diseñamos el método y los instrumentos de recogida y de análisis de la información necesaria para alcanzar los objetivos de la investigación, analizamos la información obtenida, presentamos los resultados y los interpretamos según el modelo elaborado a partir de los supuestos teóricos y de las aportaciones de trabajos empíricos.

Como ya adelantamos en el apartado anterior, en nuestro estudio, el modelo de integración diseñado se aplicará a la fase de recogida y análisis de datos cuando se trata de las competencias matemáticas y a la fase de análisis de datos en cuanto a las oportunidades de aprendizaje.

A modo de resumen, se trata de una investigación de corte interpretativo, que se apoya sobre la integración de métodos cualitativos y cuantitativos implementándolos para incrementar la calidad de ciertos datos en la fase de su obtención y facilitar el análisis cualitativo.

III.2. Diseño de la investigación

Todo investigador, al aproximarse a la realidad, reflexiona sobre qué observar, cómo y cuándo proceder, cómo obtener información relevante, qué instrumentos de recogida de información son más adecuados y cómo analizar la información (Bisquerra, 2004), es decir, diseña el proceso de su investigación. El diseño de una investigación, por tanto, representa una estructura que guía la ejecución de un método de investigación, la obtención y análisis de datos (Bryman, 2004), no obstante, cuando se trata de investigación cualitativa su diseño[46] se destaca por ser flexible, abierto y emergente, en el sentido de que pueda adaptarse o modificarse a medida que progrese la investigación (Bisquerra, 2004).

Nuestro diseño, en general, ha seguido un plan establecido en cuanto al acceso al escenario, la permanencia en el mismo y la retirada del escenario; sin embargo, ha permanecido constantemente evolucionando y reelaborándose a partir del estudio de los datos obtenidos a la luz de su reducción, categorización y elaboración del modelo teórico.

En este apartado, presentamos nuestro plan de acción para acercarnos al fenómeno objeto de estudio, atendiendo aspectos anteriormente mencionados.

III.2.1 El estudio de casos

Tal como mencionamos anteriormente, el objetivo de nuestra investigación implica un estudio en profundidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para comprender las relaciones entre OTL y CM, objetivo que decidimos alcanzar a

[46] Este tipo de diseño se conoce como *diseño emergente* (Goetz y LeCompte, 1988), lo que en ningún momento significa la ausencia de un plan previo, sino que su cualidad principal reside en la flexibilidad de ser reajustado durante el proceso de la investigación (Muñoz-Catalán, 2009).

través de un estudio de casos. Debido a la complejidad y variedad de los procesos y contextos educativos, los estudios de casos tienen un valor particular para los investigadores en el ámbito educativo (Cohen y Manion, 2002; Stake, 2007), dado que se caracterizan por su orientación hacia la comprensión profunda de los "cómo" y "por qué" de una entidad bien definida como una persona, un aula, un curso, una institución o un programa educativo (Ponte, 2006). Aun más, los estudios de casos siempre generan un conocimiento de tipo particularista, en el que, según Erickson (1986) se trata de encontrar algo más universal en lo particular (Ponte, 2006). Asimismo, un estudio de casos se considera *"una estrategia de investigación enfocada a entender las dinámicas presentes en contextos singulares"* (p.534) en la cual, con la finalidad de describir, verificar o generar teorías, habitualmente, se combinan diversos métodos cualitativos y/o cuantitativos de recolección de evidencias (Eithenhardt, 1989).

De manera análoga, en nuestra investigación, la respuesta a la pregunta planteada supone una comprensión de los *cómo y por qué* de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de un estudio de dos casos, combinando distintos métodos cualitativos y cuantitativos, con el fin de *"conocer cómo funcionan todas las partes del caso para generar hipótesis, aventurándose a alcanzar niveles explicativos de supuestas relaciones causales descubiertas entre ellas, en un contexto natural concreto y dentro de un proceso dado"* (Bartolomé , 1992, p.24).

Una vez establecidos los objetivos y métodos de la investigación, nos preguntamos "*¿qué casos pueden llevarnos a la comprensión, a los asertos, quizás incluso a la modificación de las generalizaciones?*" (Stake, 2007, p.17). En el siguiente apartado tratamos nuestras decisiones al respecto.

III.2.2. Selección y definición de casos

Existen diversos motivos e intereses para estudiar un caso o varios casos concretos. Nuestro interés reside sobre todo en aprender de los casos estudiados, obtener mayor comprensión sobre la pregunta planteada mediante el estudio de dos casos particulares. Este tipo de estudio de casos, donde el foco de interés no es el caso en sí, sino el caso es un instrumento para adquirir conocimiento y comprensión sobre una determinada temática con el fin de generar o refinar teorías, en la clasificación de Stake (2000, 2007) se conoce como *estudio instrumental de casos*[47]. A este interés, se suma en esta ocasión la motivación personal por comprender, a través de los casos estudiados, las dos realidades en las que esta investigadora se encuentra (Huelva, donde realiza su formación investigadora, y Ereván, donde reside). Desde esta perspectiva el investigador mismo decide cuántos y qué tipo de casos conviene seleccionar. De acuerdo con Stake (2000) los casos instrumentales pueden ser típicos o no, aquí la selección del caso está determinada además por un interés externo ya que el investigador simultáneamente tiene diferentes intereses, particular y general.

Además del motivo personal anteriormente expuesto, otro motivo que nos ha dirigido a estudiar dos casos (en Huelva y en Ereván), es su correspondencia a dos contextos y tradiciones de enseñanza diferentes, hecho que nos permite obtener información diversa y rica en significados.

Si, de acuerdo con Bisquerra (2004, p.311), "*llamamos casos a aquellas situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés en investigar*", la entidad que nos interesa estudiar, o sea el caso, es un aula (el profesor y los estudiantes desde la perspectiva de las competencias de estos y las oportunidades propiciadas por aquellos).

En nuestra investigación, al estudiar dos casos, respectivamente nos centramos en el estudio de dos aulas, una de ellas se ubica en un centro IES de Huelva (España) y la otra en una escuela de Ereván (Armenia). Elegimos los dos casos según el criterio que nos interesaba, aulas a las que acuden estudiantes entre 15-16 años (la edad en la que la mayoría de estudiantes terminan la enseñanza obligatoria).

De esta manera, entre dos aulas de 4ºESO de un centro de IES de Huelva que cumplían este requisito, preferimos escoger el curso que atendía un profesor de Matemáticas permanente y que estuviera disponible para la participación en el estudio, y además, los estudiantes de aquella aula habían elegido la Opción B en Matemáticas[48], que por su

[47] Además de los *estudios de casos instrumentales*, Stake (2000, 2007) define otros dos:

- *estudio intrínseco de casos*, cuando interesa estudiar algún caso particular, es el caso en sí mismo lo que interesa al investigador;
- *estudio colectivo de casos*, cuando el interés se centra en la investigación de un fenómeno, población o condición general, a través del estudio intensivo de un conjunto de casos.

[48] Opción B de Matemáticas: se supone algún contenido más abstracto y con más profundidad en el tratamiento de los temas.

programación se considera más avanzada, hecho que al principio nos pareció interesante en cuanto que los estudiantes podrían estar más motivados hacía las Matemáticas que los de la otra aula.

De igual manera, en una de las escuelas de Ereván, entre tres aulas de IX^{o} grado que cumplían el mismo criterio, elegimos el curso cuya profesora y estudiantes han demostrado su interés y disposición para participar en nuestro estudio.

Al emprender un estudio exploratorio e instrumental no nos fijamos otros criterios como el de representatividad o tipicidad de los casos, sino la oportunidad de aprender de estos casos. Asimismo, hemos considerado importante el hecho de que los participantes aceptaran de manera voluntaria las condiciones que implicaba su participación en nuestro estudio (grabaciones en video, entrevista, prueba, etc.) y compartieran con nosotros su disposición y experiencia.

III.2.2.1. El contexto y los participantes

Una de las principales características de los estudios de casos es que el fenómeno estudiado no puede separarse de su contexto (Matos, 1994; Stake, 2000, 2007; Yin, 2003;). Un caso siempre supone una entidad compleja relacionada con varios contextos y requiere una descripción profunda de "*cómo son las cosas en un determinado lugar y en un determinado tiempo*" (Stake, 2007, p.43).

Por otra parte, al ser un caso "*específico, algo complejo, en funcionamiento*" (Stake, 2007, 16) es todavía más complejo cuando en ello están involucrados diferentes actores (personas estudiadas), como es el caso de un aula.

En nuestra investigación entendemos que el contexto, aparte de delimitar un espacio físico, conjunta elementos y factores que condicionan un hecho. Por eso, describimos el espacio físico (el centro) donde se ubican dos casos estudiados, caracterizamos a los dos profesores (formación, experiencia, motivación, etc.) y a los estudiantes de las dos aulas (edad, sexo, rendimiento académico, nivel sociocultural, motivación, etc.)[49], así como, el clima y la dinámica de cada aula. A la hora de caracterizar a los profesores recurrimos a las unidades de información extraídas de las dos entrevistas (ENT) (Anexo

[49] Nos basamos en la información extraída de los documentos oficiales, así como de los cuestionarios aplicados a los estudiantes y a sus padres.

III y Anexo VI) que aplicamos a cada uno de ellos (la describimos con más detalle en el apartado III.2.3.).

De este modo, en los siguientes apartados contextualizamos los dos casos, tratando "Caso 1" cuando nos referimos al aula de 4º ESO de un centro de IES de Huelva y "Caso 2" al de IXº grado de una de las escuelas de Ereván.

III.2.2.2.1. Caso 1

El centro donde hemos realizado nuestra investigación es un Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) situado en la periferia de Huelva, en una zona bastante extensa de la ciudad, que aglutina una gran demarcación de barrios por lo que su entorno socioeconómico representa cierta diversidad, aunque un alto porcentaje de los estudiantes proceden de familias que no tienen estudios o poseen estudios básicos, en algunos casos incluso son analfabetos.

El centro comenzó su actividad a principios de los años ochenta como Instituto de Formación Profesional y a partir de los años noventa funciona como IES. Las instalaciones del centro- 2 edificios, 2 naves de talleres, 2 pistas polideportivas, patio de recreo y zona de aparcamiento- se encuentran rodeadas por obras de construcción de nuevas viviendas.

El centro cuenta con una extensa oferta educativa que va desde el Primer y Segundo Ciclo de la Educación Secundaria, pasando por Enseñanza Secundaria de Adultos, tres modalidades de Bachillerato, Ciclos Formativos de Grado Medio, Ciclos Formativos de Grado Superior y otros programas, debido a que se imparte en tres turnos, de mañana, tarde y noche. Al centro acuden alrededor de mil estudiantes.

El Departamento de Matemáticas del centro está formado por 5 profesores. La Programación se elabora en el Departamento, siguiendo las directrices del Equipo Técnico de Coordinación Pedagógica. Se incluye en el Proyecto Curricular de Centro (PPC) y se perfila en cada Plan Anual.

Según la Programación en el 4ºESO se dedica 3 horas semanales a las Matemáticas, la duración de una lección es de 50 minutos.

El profesor, a quien en adelante, por motivos éticos nombraremos con el seudónimo Pablo**,** ha sido elegido intencionadamente, puesto que nos interesaba un profesor que impartiera clases de Matemáticas en 4ºESO. Había dos profesores para este curso, pero dado que el otro ocupaba una plaza de interino, en un puesto por sustitución, nos convenía trabajar con un profesor permanente. En aquel momento, Pablo tenía 29 años de experiencia como docente en el mismo centro, en aquel curso impartía clases de matemáticas a los estudiantes de 4º ESO (opción B). Su formación inicial es la carrera de ingeniero-técnico de minas, que en cierto modo le hace sentir desventajas y no sentirse formado como docente.

> *"La verdad que no. Primero no he recibido una formación específica para docente, tengo muchos años de experiencia pues en cuanto a la materia mía pues cada día se hace menos.* (¿Por qué?) *Porque los estudiantes no te motivan, al revés te van desmotivando, entonces ni estudian, no implican sugerencias. Pues yo creo que en este sentido siento desventajas"* ENT [29-35].

Respecto a su motivación hay que destacar que Pablo eligió la profesión docente, como había mencionado en la entrevista, por la seguridad que le daba el puesto y por la misma razón volvería a elegir esta profesión; aunque, por el desánimo que le produce la desmotivación de los estudiantes, piensa que no lo haría. Cree que hoy en día los estudiantes vienen con poco interés y es difícil motivarlos. No siente que su profesión esté valorada por parte de los estudiantes, sus padres, la sociedad. Cree que la remuneración que reciben los profesores no es satisfactoria y en alguna medida se debe a esa baja valoración.

Una" buena enseñanza" para Pablo se debe en primer lugar al alumno, a su motivación, su gana de aprender:

> *"…es fundamental que el alumno quiera aprender, evidentemente, si el alumno no quiere aprender, yo nunca podré hacer nada…"* ENT [165-167].

Cree que la implicación de los padres en los estudios de sus hijos es muy importante:

> "…mu*y importante que los padres tengan algún nivel de exigencia sobre los estudiantes, sigan exigiéndolos que realmente aprovechen el tiempo, y motivarlos…* […] *Hay padres que preguntan mucho por sus hijos y exigen y eso pues sí, se nota, se nota en comportamiento propio del alumno, en la gana de estudiar y aprovechar las clases"* ENT [185-197].

Lo que refiere a la responsabilidad del profesor en la enseñanza, Pablo cree que en cierta medida puede tener influencia y opina del siguiente modo:

"*Hombre, el profesor influye en alguna manera, evidentemente si conecta con los estudiantes es capaz de engancharlos asignatura y además con el profesor ganan bastante, entonces el profesor puede influir en un momento determinado en la actividad del alumno que éste aprende o no*". ENT [157-161]

Pablo plantea la programación sobre la base de lo que daba en los años anteriores, pues ya sabe los temas que son más complicados para los alumnos o los que van a tener menos utilidad. Si le da tiempo para darla entera, lo hace, si no, intenta adaptarse a los propios alumnos. Su programación no tiene ninguna relación con lo que hacen en otras asignaturas, de lo que se lamentaba en la entrevista diciendo que cada vez los profesores están más aislados.

El libro de texto tiene un papel principal en su programación, lo considera más conveniente porque cree que el libro de texto hoy en día contiene las ideas bien explicadas, ejemplos muy claros, ejercicios resueltos y muchas actividades.

Pablo decide abandonar un tema determinado cuando ya han hecho todo tipo de ejercicios del libro. Cuando algunos de sus alumnos están atrasados, intenta motivarlos y les ofrece unas clases de acompañamiento por las tardes.

Los estudiantes de 4ºESO del curso académico 2006/07, son jóvenes entre 15-16 años, han sido elegidos dado que nos interesaba conocer las competencias de los estudiantes de dicha edad, la que en España corresponde a los de 4ºESO. Los 15 estudiantes de este aula que participaron en el estudio, entre ellos 8 chicas y 7 chicos, son procedentes de familias del nivel social económico y cultural[50] medio bajo[51].

[50] El estatus social, económico y cultural del estudiante hace referencia al Índice social económico y cultural (ISEC) definido a partir de cuatro componentes: el nivel más alto de estudios de los padres, la profesión más alta de los padres, el número de libros en el domicilio familiar y el nivel de cuatro recursos domésticos: disponibilidad de un sitio tranquilo para estudiar, conexión a Internet, libros de lectura y televisores (Instituto de Evaluación, 2010).

La clase social a la que pertenece el niño se determina mediante la clasificación de la ocupación más alta de los padres:

I. /II. Ocupaciones cualificadas (profesionales y directivos)

III. Administrativos y cualificados no manuales, cualificados manuales

IV. Ocupaciones parcialmente cualificados

V. Ocupaciones no cualificados.

El rendimiento curricular (promedio del aula) en matemáticas de estos estudiantes durante los tres primeros años de Secundaria se aproxima a la puntuación de Notable, decreciendo en el cuarto año hasta la de Suficiente. Dos estudiantes han repetido curso en el segundo ciclo de Secundaria.

Muchos de los estudiantes esperan seguir sus estudios hasta el Grado Superior. Sus experiencias relacionadas con las matemáticas no entusiasman mucho: una mayoría aplastante de los estudiantes trabaja sin ilusión en sus lecciones de matemáticas y no disfruta trabajando con ellas, aunque considera que es una asignatura importante y necesaria.

La mayoría de los estudiantes se tensa mucho haciendo tareas de matemáticas y la mitad se siente impotente cuando resuelve problemas matemáticos. En promedio, dedican al estudio de matemáticas 3 horas a la semana. La mayoría de los estudiantes, cuando estudia matemáticas, aprende de memoria tanto cuanto puede; para aprender Matemáticas trata de recordar cada paso en los procedimientos; con el fin de recordar el método para solucionar un problema de matemáticas, resuelve ejemplos similares una y otra vez; hace autocontrol para ver si recuerda el trabajo que ya tiene hecho; trata de entender qué conceptos todavía no entiende correctamente. Asimismo, la mayoría de los estudiantes no participa en las clases porque no siente seguridad en matemáticas, aunque intenta aclarar sus dudas.

El nivel social y cultural de la familia se establece a partir de la información no tanto sobre cuánto dinero dispone la familia, sino cómo se utiliza el dinero, asimismo se tiene en cuenta el nivel educativo de los padres, los libros que hay en casa, condiciones generales de vida (Nisbet y Entwistel, 1980)

[51] Los estudios más altos de sus padres corresponden a la Educación Primaria (9), Secundaria (1), Bachillerato (2) y han recibido cursos de Formación Profesional (3). La profesión más alta de los padres corresponde a las ocupaciones administrativos y cualificados no manuales (auxiliar de enfermería, secretaria, guardia de seguridad, inspector de seguridad, administrativo, dependiente, comerciante, coordinadora de TV); cualificados manuales (fontanero, mecánico, manipuladora, instrumentista); semi-cualificados (trabajadora agrícola) y no cualificados (vendedor, limpiadora). La mayoría de los estudiantes dispone de habitación propia, escritorio, lugar tranquilo para estudiar, ordenador y Internet. Menos de la mitad de los estudiantes tienen en sus casas libros de literatura clásica, poesía y pintura; sin embargo, diccionarios poseen todos ellos. Hay en total alrededor de 25-100 libros en casa de la mayoría y televisores hasta dos o tres en algunos casos.

El factor promotor de sus estudios no es la competencia entre los compañeros, sino el interés por la asignatura que, en el caso de matemáticas, no se presenta. La mayoría atribuye la responsabilidad en los fracasos en sus estudios a sí mismo, por no estudiar suficientemente, por no tener interés hacía la asignatura, no atender a las explicaciones del profesor, por no sentirse seguro ni confiar en si mismo.

En general, el ambiente del aula durante las clases de matemáticas ha sido bastante tranquilo con momentos puntuales de desorden y ruido. No obstante, dejaba la impresión de la presencia obligatoria de los participantes: la mayoría de los estudiantes parecía aburrirse preguntando la hora uno al otro, distrayéndose y hablando entre sí en sus sitios. Se portaban pasivamente, sin manifestar mucho interés, llegaban a las clases sin realizar deberes, excepto unos pocos, y sus actividades se reducían a leer, escuchar, copiar o repetir. Normalmente, trabajaban en la pizarra los mismos estudiantes con la ayuda del profesor, aunque Pablo invitaba a los demás, se resistían en salir. En total, las clases se caracterizaban por presentar cierta monotonía siguiendo la misma rutina establecida.

III.2.2.2.2. Caso 2

Antes de describir el contexto local del caso (el centro), parece conveniente detenernos en una breve presentación del contexto más amplio (el panorama educativo armenio), por tener éste características distintas del contexto español.

El sistema educativo armenio en el momento de realizar dicho estudio, durante el año académico 2008-2009, en general, es el heredado de la época de la Unión Soviética: los estudiantes tienen acceso a la escuela al cumplir 6,5-7 años, los primeros tres años es la enseñanza primaria, que se caracteriza por tener cada aula a su único profesor durante tres años, desde cuarto hasta el décimo año las asignaturas las imparten los profesores especializados en la materia y normalmente mantienen el mismo grupo de estudiantes hasta último grado. Tras terminar la escuela (16,5-17 años) los estudiantes tienen acceso al Grado Superior (Universidad) aprobando los exámenes de Selectividad (Markusievich, 1983). Sin embargo, cabe mencionar que en los últimos años se han puesto en marcha varias reformas educativas referidas a la edad de acceso a la escuela, a la duración de la enseñanza obligatoria, a los procedimientos de los exámenes de Selectividad, etc., intentando aproximar el sistema educativo armenio al de los países europeos. Así, a partir del año académico 2009-2010 la enseñanza obligatoria es de diez años, más dos años que corresponden al Bachillerato en España.

Los estudiantes pueden tener hasta 6-7 lecciones al día, de 45 minutos cada una. En el periodo del estudio los estudiantes tenían clases 6 días a la semana[52]. A los profesores se les trata de usted y se les llama por su apellido poniendo antes señor/a respectivamente. Cuando el profesor entra en aula le saludan en pie. Las aulas son de 23-30 estudiantes.

Las tradiciones en la enseñanza de Matemáticas en Armenia no pueden separarse de las tradiciones de la escuela soviética. A pesar de que hace 20 años que no existe la URSS, es indiscutible que la educación en general en todas las republicas que formaban parte de la Unión Soviética ha tenido su auge en ese periodo[53] y las tradiciones en la enseñanza han sido formadas y desarrolladas durante todos esos años por el trabajo colectivo de los científicos, pedagogos, especialistas en diferentes áreas de todas las republicas.

Se consideraba la educación universal, donde a la Matemática se le prestaba atención especial. Se fundaron escuelas físico-matemáticas con un programa especial para los alumnos más brillantes en matemáticas; las olimpiadas en matemáticas es algo habitual entre escuelas, provincias, republicas; también las revistas, círculos matemáticos, institutos de investigación matemática. Se observa una alta valoración de la Matemática así como la Música y la Lectura por parte de la sociedad como factores importantes en la formación de una persona educada. Armenia, además tiene larga tradición en la escuela de ajedrez que ha dado campeones del mundo en este deporte que suelen relacionar con el alto nivel en el razonamiento y en las estrategias matemáticas.

Aunque durante los últimos veinte años en Armenia se han realizado y siguen produciendo cambios en el sistema educativo, en programas, libros de texto, las tradiciones de escuela soviética siguen teniendo su influencia ya que las generaciones de profesores que imparten clases en escuelas y universidades, la mayoría fueron instruidos en aquella época.

La convicción de que la escuela sirve para enseñar “ciencias” y no “habilidades” no deja de reflejarse en la enseñanza con profundidad de tales contenidos que probablemente

[52] A partir del curso 2009-2010 son cinco días a la semana

[53] La URSS ha existido durante 1922-1991.

nunca serán usados por los alumnos; los libros de texto se caracterizan por ausencia de los dibujos, diagramas, ilustraciones, etc. pero sí están presentes en ellos los teoremas y fórmulas. En los libros de texto de los grados superiores de educación obligatoria, sin exageración alguna no se encontrarán ni un problema relacionado con el mundo real. Matemáticas para matemáticas, eso sí, se hace hincapié en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas matemáticos, demostraciones, uso del lenguaje simbólico (Ammosov, 2005). Resumiendo en palabras de este autor, *lo abstracto reina sobre lo concreto y lo espiritual sobre lo cotidiano*.

Tras la introducción del contexto educativo del país nos situamos en el centro donde realizamos nuestra investigación.

El centro de estudio ha sido una escuela de enseñanza media en Ereván, la capital de Armenia, en una zona bastante extensa que está representada, en general, por el nivel sociocultural medio alto de sus habitantes. Al centro asisten alrededor de mil estudiantes desde el I^{er} hasta el X^{o} grado. La escuela tiene un programa específico en ingles que quiere decir que las horas dedicadas al estudio de ingles son más que las que suelen tener en escuelas ordinarias, pero que no influyen en la cantidad de horas en las demás asignaturas. La escuela funciona como centro educativo desde hace sesenta años y tiene fama de ser uno de los mejores centros de la zona. Cuenta con dos edificios de tres pisos, dos salas de deporte, una biblioteca, dos talleres y un patio de recreo.

El Departamento de Matemáticas del centro lo forman 6 profesores. La Programación se elabora según las directrices establecidas por el Ministerio de Educación.

Las Matemáticas están representadas en el currículo por dos asignaturas separadas Álgebra y Geometría a partir del VI^{o} grado, y en los grados IX^{o} y X^{o} por Álgebra y Elementos de Análisis Matemático, y Geometría. Se dedican 3 horas semanales al Álgebra y 2 horas a la Geometría. Los libros de texto también son diferentes para estas asignaturas. No se han venido impartiendo los temas del área de la probabilidad y estadística, lo iban a empezar a partir del próximo año en el último curso.

La profesora, en adelante Mery (seudónimo), ha sido elegida intencionadamente debido a que impartía clases de matemáticas a los estudiantes entre 15-16 años que corresponden al grado IX^{o}. Entre los tres profesores para este grado nos quedamos con Mery para la investigación más profunda teniendo en cuenta su disponibilidad. Es una profesora que ha terminado dos carreras: Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y hace tres años que se tituló como Profesora en Físicas y Matemáticas por la Universidad Pedagógica para recibir la especialización de Profesora. En aquel momento tenía 12 años de práctica en el centro y mantenía el mismo grupo de estudiantes a partir de IV^{o} grado.

Mery ha elegido la profesión docente porque es de familia de profesores y le gustaba esta profesión.

> *"A mi siempre me gustaba esa profesión y además he crecido en familia de profesores. Mi abuelo, mi madre son profesores"* ENT [8-9].

Cree que no volvería a elegir esta profesión por las exigencias inadecuadas que se les plantean a los profesores.

> "*Sinceramente no. Porque los últimos años he experimentado una frustración muy fuerte relacionada con los programas de estudio, con las exigencias en general, no coinciden en absoluto programas y exigencias que nos plantean. Resulta que el objetivo de la enseñanza de Matemáticas es una cosa, el programa es otra y la exigencia es la tercera y las tres nos se corresponden una con la otra"* ENT [13-19].

Cree que ser docente es su vocación y se siente formada como profesora y valorada por parte de sus estudiantes y sus padres, sin embargo, por parte de la sociedad no tanto y cree que la remuneración que reciben los profesores no se corresponde con la labor que ejercen.

Una" buena enseñanza" para Mery se debe en primer lugar a la programación.

> *"En primer lugar, depende del contenido que se ofrece, este ha de ser comprensible para el alumno, ha de corresponder a su nivel intelectual, si lo consiguen los responsables de la educación, se mejorará mucho"* ENT [147-150].

Asimismo, atribuye la importancia al factor del profesor:

> *"Depende mucho, si no fuera por el factor del profesor ni siquiera tendríamos la situación que tenemos. Nosotros intentamos servirles el contenido lo más comprensible posible, muchas cosas dependen del profesor"* ENT [152-155].

Y también se debe al interés del alumno:

> *"Claro, solo comprensibilidad es poco, el alumno ha de tener ganas de aprender, ha de tener ganas de aceptar lo dado, ha de entender que eso le va a servir. Debe tener interés, el gusto"* ENT [157-159].

Cree que ya en los grados mayores no depende mucho de los padres, los alumnos mismos han de asumir esa responsabilidad:

> *"En los grados menores* [depende] *de la consecuencia de los padres, pero en los grados mayores sinceramente no creo que dependa mucho de los padres, ya los niños mismos han de ser concientes de sus deberes, ¿qué pueden hacer los padres?, supongamos que sí, quieren que aprenda bien, pero qué hace, bueno se sientan con el niño a hacer deberes o ayudarle, o le obligan hacerlo, pero esa no es la solución…"* ENT [161-167].

Respecto a cómo planifica la programación:

> *"Primero, a pesar de qué año entro en esta aula o cuantos años imparto en el mismo grado, todos los días me preparo para las lecciones, sin ninguna diferencia de que aula vaya a entrar. Aproximadamente sé qué trabajo tengo que hacer, elaboro algo como algoritmo, qué voy a hacer primero, siguiente, etc. Reviso sin falta todos los ejercicios y problemas que vamos a hacer en el aula y lo que voy a encomendar para casa. El programa general nos viene del Ministerio, lo elaboramos ya personalmente, aunque solo podemos hacer unos pocos cambios"* ENT [59-67].

El libro de texto es el material didáctico principal, también se usa los libros antiguos que contienen buenos problemas.

Mery habitualmente decide abandonar el tema determinado según lo planteado, pero dependiendo del tema:

> *"…depende del tema, aquí es más importante para mí ver que los estudiantes han entendido el tema. Dependiendo del tema, si es un tema no muy pesado cuando veo que la mayoría de los estudiantes se ha enterado, aunque a veces siento que el tema ha quedado crudo, que no han entendido con la profundidad precisa, pero simplemente al no tener otro remedio sigo adelante. También eso depende de si el tema va a servirles para entender otros temas, en cuanto es importante, etc. Si tenemos que construir nuevo conocimiento sobre este tema, intento que quede comprendida por la mayoría"* ENT [97-107].

Los estudiantes del IXº grado de curso académico 2008/2009, son jóvenes entre 15-16 años, igual que en el Caso 1, han sido elegidos dado que nos interesaba conocer las competencias de los estudiantes de dicha edad, la que en Armenia corresponde a los de IXº grado. En el estudio participaron 25 estudiantes, entre ellos 13 chicas y 12 chicos, que proceden de familias del nivel social económico y cultural medio alto[54].

El rendimiento curricular (promedio del aula) en matemáticas de estos estudiantes durante los últimos cuatro años de sus estudios (VIº-IXº)[55] oscila alrededor de la puntuación de Notable[56] y es más bajo que el de otras dos aulas del mismo grado.

Excepto un estudiante, todos los demás esperan acceder al Grado Superior. La mayoría de los estudiantes afirma de trabajar con ilusión en sus clases de matemáticas y de disfrutar trabajando en ellas; cree que merece la pena hacer esfuerzo en aprender matemáticas porque les ayudará en su futura profesión.

Más de la mitad de los estudiantes considera las Matemáticas su asignatura favorita, saca buenas notas y cree aprenderlas rápido, aunque no siempre entiende hasta problemas más difíciles, y se preocupa cuando saca notas bajas en Matemáticas. En promedio dedica entre 3 a 6 horas semanales al estudio de Matemáticas. La mayoría de los estudiantes, cuando estudia Matemáticas, trata de entender qué conceptos todavía no entiende correctamente y si no entiende algo siempre busca más información para

[54] Los estudios más altos de sus padres corresponden a la Educación Universitaria (19), Ciclos de Formación Media (3) y Educación Obligatoria (3). La profesión más alta de los padres corresponde a las ocupaciones profesionales (cuatro profesoras, tres ingenieros, dos médicos, dos propietarios, dos contables, físico, jurista, traductora, arquitecto, economista, inspector de aduana, diseñadora); administrativos y cualificados no manuales (guardia de seguridad, peluquera, viajante de comercio) y cualificados manuales (joyero, conductor de camión). La mayoría de los estudiantes dispone de habitación propia, escritorio, lugar tranquilo para estudiar, ordenador y Internet. Más de la mitad de los estudiantes tienen en sus casas libros de literatura clásica, poesía y pintura, y diccionarios poseen todos de ellos. Hay una diversidad en la cantidad de los libros que se encuentran en sus casas: desde 11-25 libros (5), 25-100 libros (5), 101-200 libros (5), 201-500 libros (6) hasta más que 500 libros (4) y televisores hay en todas las casas.

[55] Tomamos los últimos cuatro años para corresponder al número de años de Secundaria en el Caso 1.

[56] Los primeros tres años se evalúan según un baremo de máximo 5 puntos, y el promedio es 3, 8 puntos en el VIº, 3,9 en el VIIº y 4 puntos en el VIIIº. En el año del estudio la evaluación es según el baremo de 10 puntos y la nota media del aula es 6,8.

clarificar el problema; intenta relacionar nuevos conceptos matemáticos con las cosas que ya sabe; para aprender matemáticas trata de recordar cada paso en los procedimientos y hace autocontrol para ver si recuerda el trabajo que ya tiene hecho. Asimismo, más de la mitad de los estudiantes intenta ser activa y hacer preguntas cuando no tiene algo claro, aproximadamente la mitad de ellos participa con entusiasmo en las clases, sin embargo, una tercera parte de los estudiantes se siente insegura en matemáticas.

A pesar de que la mayoría de los estudiantes ha manifestado su deseo de ser el mejor de su clase en matemáticas, el factor que más les motiva no es la competición sino el interés por la asignatura. La mayoría atribuye la responsabilidad en los fracasos en sus estudios a sí mismo, por no tener interés hacía la asignatura, por no estudiar suficientemente, no atender a las explicaciones del profesor, por no sentirse seguro ni confiar en sí mismo.

En general, durante las clases de matemáticas, el ambiente del aula predispone al trabajo. A pesar de que en casos puntuales la profesora hace advertencia sobre el comportamiento de algunos de los estudiantes, consigue mantener su atención en el trabajo e implica casi a todos ellos, unos participan con más entusiasmo y otros con menos, pero se destaca una dinámica propia de cada clase, aunque siga una rutina más o menos establecida. Normalmente, los estudiantes vienen preparados a la clase con deberes realizados. Excepto un estudiante que se sentaba en la última fila y no hacía nada relacionado a la clase, ni prestaba atención a lo que se ocurría en el aula, los demás mostraban bastante interés, levantaban la mano para preguntar, contestar o salir a la pizarra.

III.2.3. Proceso e instrumentos de obtención de la información

Esta investigación, que emprendemos en el enero de 2007, tuvo su fase de estudio de campo, en Huelva, a lo largo de los meses febrero-junio del año 2007 del curso académico 2006/2007 (Caso 1), y en Ereván, durante los meses febrero-junio del año 2009 del curso académico 2008/2009 (Caso 2).

En ambos casos el “ingreso” al escenario se ha iniciado a través de un *contacto previo* (Bisquerra, 2004), profesores conocidos del centro, y posteriormente el acceso al campo ha sido negociado con el director del centro correspondiente y con su permiso hemos tenido la posibilidad de permanecer en el centro todo el tiempo requerido, de acceder a la información necesaria, de asistir a las clases de matemáticas en todas las aulas del grado interesado para obtener una primera visión de los casos disponibles en el centro hasta que decidiéramos por un caso concreto, y de realizar el proyecto previsto.

Una vez elegidos los casos, a los profesores y a los estudiantes de cada aula les comunicamos las actividades que pretendíamos realizar con su apoyo y participación. En ambos casos, los participantes han manifestado verdadero interés y a partir de ese momento empieza el acercamiento más intensivo del investigador con el profesor y los estudiantes, hecho que ha permitido, en un plazo bastante corto, conseguir un ambiente abierto y familiar, ("rapport" positivo con los participantes, Taylor y Bogdan, 2002), que nos ha acompañado en el transcurso de todo el proceso de recogida de la información.

Con el fin de construir e interpretar la realidad objeto de investigación hemos empleado las técnicas de obtención de la información que enunciamos a continuación, según el informante:

<u>Centro</u>

- Documentos oficiales

<u>Profesor</u>

- Observaciones de aula: registros y videograbaciones
- Entrevista semiestructurada

<u>Estudiantes</u>

- Prueba

En las siguientes líneas presentamos nuestras decisiones respecto a las técnicas de obtención de la información aplicadas a cada uno de los informantes y al proceso seguido en ambos casos.

Para obtener información referencial sobre el centro y datos complementarios sobre el caso, recurrimos a una fuente rica y valiosa (Del Rincón et al., 1995; Bisquerra, 2004) como son los *documentos oficiales*[57]. En nuestro estudio los documentos oficiales han

[57] Los documentos oficiales aglutinan todo tipo de documentos, registros y materiales oficiales y públicos disponibles como fuentes de información (Del Rincón et al., 1995).

constituido el Plan del Centro, horarios, programaciones, expedientes de los estudiantes, fichas de exámenes y libros de texto.

En nuestra investigación, consideramos la *observación de aula* como la fuente principal de la información. Coincidimos con Cohen y Manion (2002) en que independiente del problema o la metodología empleada, todo estudio de caso implica un *método de observación*[58]. En nuestro estudio, en ambos casos, realizamos las observaciones de aula a través del método de *observación no participante*, que ha supuesto la presencia de la investigadora en el aula, sin intervención alguna.

Al principio realizamos observaciones simplemente contemplando lo sucedido en el aula, recolectando impresiones y tomando notas en casos puntuales. En el transcurso de unos días se reveló la dinámica general del aula, la rutina de las actividades del profesor, sus secuencias. A partir de ahí, durante los meses de marzo y abril del año académico 2006/2007 (Caso 1) y los meses de marzo y abril del año académico 2008/2009 (Caso 2), usamos una tabla para registrar las observaciones (Anexo I y IV) según una determinada actividad ha sido observada (1) o no (0).

De este modo, en el Caso 1, hemos observado en total 23 sesiones mientras Pablo impartía el tema "Funciones" del bloque Aritmética y Álgebra, y los tópicos de "Elementos de geometría" del bloque de Geometría. De esas sesiones hemos grabado en vídeo las 7 relacionadas a los tópicos de "Elementos de geometría" (finales del abril-principio del mayo de 2007). Decidimos grabar estos tópicos por dos razones: por una parte, las observaciones de las sesiones dedicadas al bloque de Aritmética y Álgebra han presentado la ausencia de algunos indicadores establecidos para las OTL, que esperábamos observar cuando Pablo impartiera los tópicos dedicados al bloque de Geometría, y por otra, debido a que los bloques se imparten en un orden secuencial (primero el bloque de Aritmética y Álgebra y después el de Geometría) nos inclinamos a esperar a que el profesor introdujera una nueva unidad didáctica.

En el Caso 2, observamos en total 20 sesiones dedicadas al tema "Funciones, igualdades y desigualdades exponenciales y logarítmicas" de la asignatura Álgebra y Elementos de Análisis Matemático, y los tópicos relacionados al tema "Poliedros" y "Vectores en el

[58] Cohen y Manion (2002) tratan de dos tipos principales de observación: *observación participante* y *observación no participante*. *Un observador participante* está involucrado en las actividades que observa, es un miembro más del grupo, mientras *un observador no participante*, permanece separado de las actividades del grupo y evita ser su miembro.

espacio" de la asignatura Geometría. Entre ellas, han sido videograbadas 6 sesiones, una unidad didáctica del tema "Concepto de logaritmo" de Álgebra y Elementos de Análisis Matemático y una de "Vectores en el espacio" de Geometría (finales del abril-principio del mayo de 2009). En el Caso 2, como hemos mencionado, las dos asignaturas se imparten por separado, por tanto, hemos tenido la posibilidad de observar los tópicos de ambas simultáneamente y decidimos grabar una unidad didáctica de cada asignatura.

Durante las grabaciones en vídeo, en ambos casos, nos interesaba captar tanto las intervenciones del profesor como las de los estudiantes, por lo que la cámara ha sido colocada en la parte trasera del aula.

Presentamos las transcripciones de las sesiones videograbadas, correspondientes al Caso 1 y al Caso 2, mediante tablas en el Anexo II y Anexo V respectivamente.

Después del análisis previo de las observaciones de aula, a los profesores de ambas aulas les realizamos una *entrevista semiestructurada* en soporte audio. Como corresponde a esta modalidad de entrevistas (Bisquerra., 2004), disponemos previamente de un guión de preguntas[59] acerca de su experiencia, motivación, sus decisiones respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como las cuestiones surgidas durante el análisis de sus lecciones, etc. y nos dejamos margen para ampliar o concretar, cuando sea preciso, las intervenciones de los profesores durante la entrevista. En el Anexo III y Anexo VI presentamos las trascripciones de ambas entrevistas.

Por último, la técnica de recogida de la información acerca de las competencias matemáticas de los estudiantes, ha sido una *prueba* de matemáticas. Dicha prueba de papel y lápiz con la duración de 1 hora y 40 minutos ha consistido en 39 problemas liberados de los de PISA2003 (INECSE, 2005). Estos 39 problemas (Anexo VII) presentados en varios formatos mantenían una cierta proporción con el número total de problemas empleadas en la prueba PISA por la cantidad de problemas de cada uno de los tres grupos de competencias matemáticas (procesos cognitivos), por estar planteados en diferentes contextos y situaciones y por la pertenencia a las cuatro sub-áreas, de tal forma que nos daba la seguridad en la efectividad y la fiabilidad de la prueba que nos propusimos a organizar. Decidimos realizar la prueba al final del año académico correspondiente en cada caso, con el propósito de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de cursar la mayor parte posible de la programación establecida para el

[59] Estas preguntas quedan reflejadas en las transcripciones de ambas entrevistas (Anexo III, VI).

curso. La prueba ha sido realizada a finales del mes de mayo de 2007 (Caso 1) y en el mismo periodo del año 2009 (Caso 2), cuando la dirección de ambos centros ha considerado conveniente unir dos lecciones seguidas con el recreo para llevarla a cabo en forma continua.

III.2.4. Proceso e instrumentos de análisis de la información

Tras la transcripción de la información obtenida, realizamos su análisis y organización. En los siguientes apartados exponemos el proceso, el instrumento de análisis y organización de la fuente principal de la información sobre OTL, de las sesiones grabadas, y el proceso y el instrumento de análisis referidos a las competencias matemáticas.

De este modo, los registros, las entrevistas y los documentos oficiales son fuentes secundarias que nos sirven para completar y en otros casos, triangular los datos obtenidos.

III.2.4.1. El proceso y el instrumento de análisis de las OTL

Con el fin de proceder al análisis de las observaciones de aula, dividimos las sesiones en episodios que representan las oportunidades dadas a los estudiantes. Entendemos por episodio un fragmento de la sesión en el que la intención relativa a los objetivos de aprendizaje del profesor ha sido constante (p.ej. trabajo en la resolución de problemas, introducción de los conceptos, ejercitación de las fórmulas). Los objetivos del profesor los identificamos a partir de las actividades que realiza en el aula. De este modo, analizamos cada episodio según las siguientes categorías determinadas en el proyecto METE: *foco matemático*, *estrategias didácticas*, *materiales didácticos y tipo de agrupamiento* (descritos en el apartado II.1.3) Además de estas categorías, establecemos otras, relacionadas al *tipo de tareas* propuestas por el profesor. Seguidamente describimos esta categoría que en conjunto con las demás presentan el instrumento de análisis de las observaciones de aula.

Tipo de tareas

En las tareas propuestas por el profesor, distinguiremos los diferentes grados de complejidad de las mismas por el tipo de *procesos cognitivos* que se activan en los estudiantes para llevarlas a cabo. Otro aspecto importante al tratar las tareas propuestas por el profesor son *situaciones* y *contextos* en los cuales se plantean las tareas (véase el apartado II.2.5.).

La Tabla 3 recoge los descriptores de tareas que nos interesa estudiar.

Procesos cognitivos (según los tres grupos)	
Reproducción	Reproducción del material practicado y realización de las operaciones rutinarias.
Conexión	Integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.
Reflexión	Razonamiento avanzado, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.
Situaciones	
Personal	Son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos (p.ej. cuando se pide representar gráficamente la altura de los pies por encima del suelo mientras se columpia).
Educativa/ profesional	Son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo (p.ej. cuando se plantea calcular la nota media de los exámenes en una asignatura determinada).
Pública	Son las que se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno (p.ej. un problema donde se pide calcular el interés que ofrece una cuenta bancaria).
Científica	Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático (p.ej. calcular el aumento absoluto y relativo de las emisiones de CO_2 de varios países, representadas mediante dos diagramas en porcentaje y en millones de toneladas).

Contexto	
Auténtico	Es el que se dirige directamente a la resolución del problema, aunque las preguntas de matemáticas no sean necesariamente verdaderas y reales (p.ej. la situación pública que ejemplificamos puede resultar parte de la experiencia del estudiante, por lo que presenta un contexto autentico o cuando los estudiantes cortan los tres ángulos de un triangulo de papel y al juntarlos comprueban que se forma un ángulo llano).
Hipotético	Es el que se presenta como pretexto para hacer prácticas de operaciones matemáticas (son las que encontramos frecuentemente en los libros de texto, p.ej. se dan hipotéticas dimensiones de un campo para que los estudiantes practiquen el calculo del área del rectángulo).

Tabla 5: Descriptores de tareas

Tal como mencionamos, codificamos las sesiones grabadas en ambos casos mediante las categorías expuestas y realizamos un análisis profundo de la información con el fin de generar una comprensión del problema planteado.

Por otra parte, para organizar los datos en unidades de información, recurrimos al esquema de representación del modelo[60] propuesto por Schoenfeld (1998; 2000). De esa representación gráfica, nos interesa utilizar el esquema mismo para organizar los episodios j de una sesión concreta i, [i, j] y describir los eventos iniciales de un episodio y los que funcionan como causa del fin del mismo, el objetivo del profesor. Por lo demás, seguimos nuestra meta de identificar los indicadores de las OTL, anteriormente establecidos. La Ilustración 1 representa el esquema que seguiremos para el análisis de las sesiones grabadas.

[60] El modelo descriptivo de Schoenfeld (1998, 2000) permite caracterizar la práctica de la enseñanza de un determinado profesor, dividiendo las sesiones en episodios fenomenológicamente coherentes e identificando en ellos los *conocimientos, objetivos y creencias* del profesor. Se destaca el evento desencadenante y de término de un episodio y el episodio se caracteriza según forma parte o no de *la imagen de la sesión* (todo aquello que el profesor considera que pudiera ocurrir durante la sesión) y el *tipo de episodio* (rutina, guión de acción, improvisación, etc.).

[i.j] **Designación del episodio** (línea de inicio – línea de fin)

Evento desencadenante: Evento que funciona como desencadenante de las secuencias de actividades.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Identificación de las oportunidades de aprendizaje subyacentes en esta secuencia de actividades.

Foco matemático:
Conceptual
Procedural
Structural
Derivational
Efficiency
Problem solving
Reasoning

Estrategias didácticas:
Activación de conocimiento previo
Ejercitación de conocimiento previo
Explicación
Participación
Exploración
Entrenamiento
Evaluación
Motivación
Cuestionamiento
Diferenciación

Materiales didácticos (libro de texto, diapositivas, Internet, etc.)

Tipo de agrupamiento (individual, en pareja, en grupo, toda-clase)

Tipo de tareas:

Procesos cognitivos
Reproducción
Conexión
Reflexión
Situaciones
Personal
Educacional/profesional
Pública
Científica
Contexto
Auténtico
Hipotético

Evento de término:
Evento que funciona como causa de término de la secuencia de actividades.

Ilustración 1: Representación del modelo de análisis de las sesiones

De este modo, realizamos el análisis de las sesiones grabadas según el esquema expuesto y en el siguiente capítulo presentamos el análisis interpretativo de las sesiones por *episodios* y por *dimensiones*.

III.2.4.2. El proceso y el instrumento de análisis de las CM

La fuente principal para análisis de las competencias matemáticas son los resultados de la prueba aplicada.

En primer lugar, realizamos el análisis de protocolos de resolución de cada ítem (Anexo VIII y Anexo IX) desde el enfoque de análisis de contenido (Bardin, 1996), a la luz de las CM (los procesos cognitivos), previamente establecidas en el Anexo VII[61], las que han sido capaz de activar y/o las que han resultado imposible poner en marcha durante sus actuaciones.

En segundo lugar, realizamos un análisis cualitativo de los resultados y presentamos una visión global de los resultados por las tres variables consideradas: procesos cognitivos, situaciones y contextos, y sub-áreas, destacando los errores comunes, los puntos fuertes y débiles en las actuaciones de los estudiantes.

Por último, los trabajos de los estudiantes son corregidos según los criterios y códigos establecidos para los ítems liberados de la prueba PISA2003 (INECSE, 2005), son analizados cuantitativamente según el modelo de Rasch[62] y categorizados por niveles de

[61] En el Anexo VII describimos las competencias matemáticas asociadas a cada ítem de la prueba, basándonos en los descriptores de las siete competencias matemáticas según los grupos de reproducción, conexión y reflexión (Tabla 3, en el apartado II.2.5.).

[62] El análisis Rasch está basado en un modelo matemático propuesto por Georg Rasch (1953, 1960), en el que se describe la relación entre la probabilidad (P) de una respuesta correcta a un ítem y la diferencia entre el rendimiento del alumno (**β**) y la dificultad del ítem (**δ**).

$$\mathrm{P} = \frac{e^{\beta-\delta}}{1+e^{\beta-\delta}}$$

La unidad de medida de la escala de Rasch se denomina lógit (d),

$$\mathrm{d} = \ln \frac{P}{1-P}$$

Si sustituimos en esta formula el valor de la probabilidad de respuesta correcta, tenemos que d=β-δ. El resultado demuestra que las medidas en el modelo de Rasch dependen solo de la capacidad del estudiante y de la dificultad del ítem, es decir, es un modelo independiente del tamaño de la muestra (*person free* dominio. Para la elaboración de los datos usamos el programa Winsteps (Linacre, 1991-2006), que es un recurso de cómputo que implementa el análisis de tipo Rasch en patrones de respuesta a ítems emitidos por estudiantes en exámenes de conocimientos y habilidades, así como en otros instrumentos de medición. Para escalar nuestro test en la métrica de la prueba PISA hemos seguido *los procedimientos básicos para establecer el escalamiento común* (Prieto y Días, 2003) según los cuales hemos correlacionado los parámetros de dificultad de los 28 ítems comunes[63] (test de anclaje). Se ha hecho el diagrama de dispersión de los resultados para visualizar si alguno de los ítems se aparta mucho de la recta de regresión para no incluirlos en el test de anclaje; con los demás ítems, mediante el programa Winsteps, hemos realizado un procedimiento que sitúa tanto la dificultad de los ítems de nuestra prueba, como la habilidad de los estudiantes, en la escala de los niveles de PISA (Anexo X y XI).

Esta categorización de las respuestas nos permite conocer los niveles en el dominio de los estudiantes de acuerdo con la escala establecida en la prueba PISA2003 y, además, nos ayuda a ubicarlos en el continuo de niveles bajo-medio-alto a la hora de interpretar los resultados según el modelo elaborado.

Por último, los resultados de la investigación correspondientes a las OTL y CM los interpretamos a la luz de las relaciones determinadas en el modelo OTL-CM, elaborado en nuestro estudio (Capítulo II.3.).

III. 3. Criterios de rigor de la investigación

Al emprender una investigación cualitativa pretendemos representar la realidad y no reproducirla (Flick, 2007). No obstante, esta representación de la realidad, parafraseando a Schopenhauer[64], es *nuestra representación*, por lo que reconocemos la necesidad de seguir, en diferentes fases de la investigación, procedimientos que respondan a los criterios de rigor de la investigación cualitativa.

measurement) y de la calibración de los ítems del test (*item free calibration*). Esta independencia permite considerar el modelo de Rasch como objetivo (Manual análisis de datos de PISA2003, www.pisa.oecd.org).

[63] Los 11 restantes ítems de la prueba no disponen de parámetros de dificultad ya que han sido utilizados en pruebas piloto.

[64] Nos referimos a la frase "*El mundo es mi representación*" con la que el filósofo alemán Arthur Schopenhauer abre su obra "El mundo como voluntad y representación" (1987).

Con el fin de asegurar, en cierta medida, nuestros supuestos acerca del conocimiento que construimos sobre la realidad objeto de estudio, atendemos tres principales aspectos de rigor de la investigación cualitativa, estudios de caso, particularmente: validez interna, fiabilidad[65] y validez externa (Merriam, 1995).

Validez interna o credibilidad (Lincoln y Guba, 1985) consiste en confrontar la información obtenida de las personas implicadas en el caso, con el propósito de obtener múltiples fuentes de evidencia (Díaz de Salas et al, 2011).

Una de las estrategias que seguimos para asegurar la validez interna de nuestro estudio es la triangulación de fuentes de datos (Denzin, 1978; Stake, 2000, 2007).

De tal modo, después del análisis de las sesiones grabadas, recurrimos a los registros de observaciones que nos sirven de apoyo para comprender y comprobar en qué medida las sesiones videograbadas representan una lección tipo en la práctica de dos profesores. Asimismo, el análisis de la entrevista nos proporciona información acerca de las intenciones y preferencias de los profesores, por ejemplo, respecto al material didáctico que usan o tipo de tareas que plantean, la que nos ayuda a comprender mejor sus actividades en el aula.

En lo que se refiere a la interpretación de los resultados relacionados con las competencias matemáticas de los estudiantes, consultamos los documentos oficiales referenciales a los expedientes académicos durante sus estudios en Secundaria y fichas de exámenes. Asimismo, las observaciones de aula nos han servido para formarnos una idea sobre sus actuaciones durante las sesiones cuando resuelven tareas propuestas por el profesor o contestan a preguntas.

Otro procedimiento para asegurar la validez interna del estudio es verificar los resultados de la investigación con los investigados y otros miembros de la comunidad investigadora.

Después del análisis de la información, presentamos nuestras interpretaciones y los resultados sobre las OTL y las CM a los dos profesores de nuestro estudio. En ambos casos, los profesores confirmaron la adecuación y objetividad de los resultados respecto a las OTL, y en general, declararon como esperados los resultados acerca de las CM de sus estudiantes. Los estudiantes, por su parte, manifestaron su acuerdo con los resultados de la prueba.

[65] *Reliability* en el original.

Asimismo, durante el proceso de la investigación en los Seminarios de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIDM) de la Universidad de Huelva, con cierta periodicidad, hemos expuesto asuntos relacionados con las diferentes fases de la investigación y avances en ellas, lo que implica discusión y crítica constructiva por parte de los investigadores participantes. Además, aparte de las discusiones con los directores de este estudio, hemos mantenido entrevistas personales con varios investigadores de nuestra área, con el fin de obtener una visión externa sobre el proceso y los resultados de la investigación. En este tipo de revisiones con puntos de vista teóricos alternativos, dado que dos investigadores nunca interpretan las cosas de una manera completamente similar, se produce algún tipo de triangulación de la teoría (Denzin, 1978; Stake, 2007).

<u>Fiabilidad</u> o dependencia en la definición de Lincoln y Guba (1985) se refiere a la consistencia de los datos, es decir, a la fiabilidad de la información, y la estabilidad de la misma en el tiempo. En este sentido, aseguramos la fiabilidad de nuestra investigación mediante la descripción detallada del contexto de los dos casos, de participantes, y su relación con el lugar y el tiempo de realización del estudio. Asimismo, como sugiere Bisquerra (2004), creemos presentar descripciones minuciosas del proceso seguido, de las técnicas empleadas y sus finalidades, que son algunos procedimientos para subsanar la posible inestabilidad de los datos.

<u>Validez externa</u> se refiere al grado en que los resultados de una investigación pueden aplicarse a otras situaciones, o sea, la generalización de los resultados (Merriam, 1995). La generalización de los resultados procedentes del estudio de caso tiene carácter algo diferente de las generalizaciones de otros tipos de investigaciones que pretenden producir conocimientos acerca de toda una población o de resolver grandes problemas educativos (Matos, 1994). Respondiendo a las críticas acerca de la "debilidad" de la extrapolación de los resultados de los estudios de caso, varios autores se han pronunciado a su defensa, destacando que *"el cometido real del estudio de casos es la particularización, no la generalización"* (Stake, 2007, p.20), que la generalización a partir de los estudios de caso no consiste en la *generalización estadística*, sino en la *generalización analítica* que ayuda a generar nuevas teorías (Yin, 2002). Por estas mismas razones algunos autores hablan de la *transferibilidad* (Lincoln y Guba, 1985) de las teorías surgidas a otros casos. Asimismo, Sandín (2003, p.200) señala *"el reto y la responsabilidad de la investigación cualitativa* [incluido el estudio de caso] *de*

contribuir a la ampliación y desarrollo de “corpus” de conocimiento existente”. En nuestro estudio, el objetivo de comprender las relaciones entre las OTL y CM nos ha dirigido a estudiar en profundidad los dos casos, sin pretensión de generalizar sus resultados a otros casos, sino tratando de aprender de cada uno y extraer conocimiento para generar el modelo teórico.

El siguiente capítulo dedicamos al análisis de la información.

CAPÍTULO IV:

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

INDÍCE DEL CAPÍTULO

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

IV.1. ANALISIS DE LAS OTL

En el presente apartado tratamos de dar sentido a la información obtenida de las sesiones videograbadas en ambos casos (la fuente principal de la información), tratándola desde la perspectiva de las OTL que proporcionan Pablo y Mery, en sus correspondientes aulas, cuando enseñan matemáticas.

En primer lugar, hemos realizado la reducción de la información que ha consistido en simplificar y organizar los datos brutos de las trascripciones en las categorías mediante la modelación de las sesiones (véase el capítulo III). Con este fin, dividimos las sesionen en episodios, fragmentos de las sesiones en los que el objetivo del profesor permanece constante, identificando los eventos iniciales y finales de los mismos. Posteriormente, para la comprensión más profunda de estas categorías, que conjuntamente aglutinan las OTL, realizamos análisis cualitativo de la información por dimensiones.

En algunos casos respaldamos la información obtenida de las sesiones videograbadas con las unidades de información extraídas de las transcripciones de las entrevistas (ENT).

IV.1.1. Análisis de las sesiones grabadas en video desde la perspectiva de las OTL proporcionadas por el profesor Pablo (Caso 1)

En este subapartado analizamos las siete sesiones grabadas en video de “Elementos de geometría” del bloque de Geometría y destacamos los rasgos más característicos de las sesiones del profesor Pablo con la síntesis posterior de sus actividades, presentada mediante los gráficos que reflejan las dimensiones de las OTL.

IV.1.1.1. Análisis por episodios

Análisis de la Sesión 1 de Pablo

En la *primera sesión,* tras hacer un breve comentario sobre los resultados del examen del tema anterior y sugerir a los estudiantes que dediquen más tiempo al estudio de matemáticas [1er episodio], Pablo introduce el concepto de semejanza partiendo de la idea intuitiva de figuras semejantes, planos y mapas, ilustrando ejemplos del libro de texto[66]; recuerda qué es una escala y repasa el concepto de vector (este último lo iban a usar cuando pasaran el tema de perpendicularidad y paralelismo de rectas) tratando nociones como módulo, sentido, dirección y coordenadas del vector; procedimientos relacionados al cálculo del modulo y coordenadas del vector [2º episodio]. Después, Pablo propone realizar una actividad que pide presentar vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ con coordenadas de origen y extremo dadas y demostrar que son iguales, enseñando a los estudiantes en la pizarra cómo hacerla [3er episodio]. Siguen con la intervención de Pablo que explica cómo son dos figuras semejantes y nombra dos requisitos de semejanza con la introducción posterior del teorema de Thales (sin demostración) [4º episodio]. Aquí Pablo pregunta a los estudiantes si saben qué es una proporción, y entonces surge la necesidad de recordar cómo despejar una proporción [5º episodio] y propone ver algunos ejercicios resueltos del libro de texto, hace uno de éstos en la pizarra y encomienda actividades para hacer en casa [6º episodio]. Se da la definición de dos triángulos semejantes y la de los triángulos en posición de Thales, con la demostración del teorema correspondiente [7º episodio].

[1.1] Comentario del examen [1-7]

Evento desencadenante: Pablo empieza la clase comentando los resultados del examen del bloque anteriormente tratado.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Estrategias didácticas

<u>Evaluación</u> – Pablo explícitamente evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase [1-2].

<u>Motivación</u> – Pablo explícitamente reacciona a las actitudes de los estudiantes hacia matemáticas, intentando motivarlos [3-7].

Evento de término: Pablo acaba los comentarios con el fin de empezar el primer tema del bloque de Geometría.

[1.2] Concepto de semejanza [8-105]

Evento desencadenante: Pablo introduce el concepto de semejanza y recuerda el concepto de vector.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Foco matemático

[66] Aquí y adelante se refiere al libro de Colera y otros (2007). Matemáticas de 4ESO, Opción B, Anaya.

Conceptual – Pablo promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, introduciendo un ejemplo del libro de texto que representa un plano de una casa y poniendo en evidencia la correspondencia entre el plano y la realidad [11-28].
Procedural – Pablo promueve la adquisición de técnicas de cálculo de las coordenadas de un vector [69-89] y su módulo [95-102].
Estrategias didácticas
Explicación – Pablo explícitamente explica las ideas y procedimientos relacionados con el tópico [11-28], [30-105].
Activación del conocimiento previo – Pablo activa explícitamente los conocimientos previos de los estudiantes sobre vectores [30-105].
Entrenamiento – Pablo explícitamente ofrece indicaciones para la comprensión de los procedimientos de cálculo de las coordenadas [69-89] y del módulo de vector [95-102].
Evento de término: El profesor termina con la explicación del cálculo del módulo del vector.

[1.3] Trabajo en tareas [106-122]
Evento desencadenante: Pablo propone realizar una actividad del libro de texto.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Foco matemático
Procedural – Pablo promueve la adquisición de técnicas de representación de los vectores y procedimientos de cálculo de su modulo [106-122].
Estrategias didácticas
Entrenamiento – Ofrece explícitamente concejos e indicaciones para realizar la actividad propuesta [109-118].
Tipo de tarea
N 2. Representa vectores AB y CD siendo A (1,1), B (2,7), C (6, 0), D (3, 6) y observa que son iguales. Comprueba nuevamente que AB=BC hallando sus coordenadas. Calcula su modulo (p.153).
Procesos cognitivos**:** Reproducción
Situación: Científica
Contexto: Hipotético
Evento de término: Pablo termina de realizar la actividad en la pizarra.

[1.4] Figuras semejantes [123-168]
Evento desencadenante: Pablo interviene con la explicación de cómo son dos figuras

semejantes.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

<u>*Conceptual*</u> – Pablo promueve el desarrollo conceptual de sus estudiantes familiarizándolos con el concepto de semejanza y el teorema de Thales [123-168].

Estrategias didácticas

<u>Explicación</u> – Pablo aborda el foco *conceptual* mediante la explicación del tema [123-168].

<u>Motivación</u> – Pablo llama la atención de los estudiantes sobre la utilidad de los conceptos matemáticos, recordando que uno de los estudiantes en algún momento le había preguntado sobre cómo dividir un segmento a partes iguales y que el teorema de Thales precisamente da respuesta a la cuestión [152-157].

Evento de término: Pablo termina de explicar el tema.

[1.5] Proporción [169-196]

Evento desencadenante: Pablo recuerda cómo despejar una proporción.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

<u>*Derivational*</u> – Al abordar el teorema de Thales, surge la palabra “proporción”, y Pablo trata que los estudiantes recuerden qué significa ésta, para poder construir nuevo conocimiento [169-196].

<u>*Procedural*</u> – Pablo enseña el procedimiento para despejar una proporción [182-196].

Estrategias didácticas

<u>Activación del conocimiento previo</u> – Pablo explícitamente activa conocimientos previos de los estudiantes acerca de la proporción [169-196].

<u>Entrenamiento</u> – Ofrece indicaciones explícitas para facilitar la comprensión de los procedimientos para despejar una proporción [182-196].

Evento de término: Pablo termina la explicación.

[1.6] Revisión de ejercicios resueltos [197-211]

Evento desencadenante: Pablo propone ver dos ejercicios resueltos del libro de texto y explica cómo hacerlas.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Pablo enseña cómo tomar una proporción y despejar la incógnita [197-211].
Estrategias didácticas
Entrenamiento – Ofrece indicaciones explícitas [206-210].
Evento de término: Termina la explicación.

[1.7] Semejanza de dos triángulos [212-248]
Evento desencadenante: Pablo introduce el teorema de semejanza de dos triángulos.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Foco matemático
Conceptual – Pablo promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, explicando las condiciones necesarias para que dos triángulos sean semejantes y el teorema sobre triángulos en posición de Thales [212-248].
Estrategias didácticas
Explicación – Pablo explícitamente explica el tópico [212-248].
Evento de término: Pablo termina la explicación del tópico.

Análisis de la Sesión 2 de Pablo

En la *segunda sesión* Pablo cita e interpreta tres criterios de semejanza de triángulos, criterios de semejanza de triángulos rectángulos y sus consecuencias, teorema del cateto y teorema de la altura [1er episodio]. Al escribir las fórmulas en la pizarra para aplicarlas, Pablo explica que las letras que se ponen en las fórmulas dependen de la figura, que han de saber qué significa la fórmula, hay que ir identificando las letras para resolver la tarea. Y así se resuelve la actividad que propone [2º episodio].

[2.1] Criterios de semejanza de triángulos [249-390]
Evento desencadenante: Pablo introduce los criterios de semejanza de triángulos.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Foco matemático
Conceptual – Pablo promueve el desarrollo conceptual de sus estudiantes, explicando los tres criterios de semejanza de triángulos [249-390].
Structural – Pablo destaca la importancia de estudiar el caso de los triángulos debido a que cualquier figura normalmente se puede dividir en triángulos, enfatizando, de este modo, la conexión entre diferentes objetos geométricos [290-292].

Estrategias didácticas

Explicación – Pablo explícitamente explica las ideas relacionadas con el tópico [249-390].

Evento de término: El profesor termina la explicación.

[2.2] Trabajo en tareas [391-435]

Evento desencadenante: Pablo escribe en la pizarra fórmulas y propone realizar actividades para aplicarlas.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Después del intento fracasado de invitar a los estudiantes realizar la actividad, Pablo enseña en la pizarra cómo realizar los procedimientos para llevarla a cabo [408-424].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Pablo explícitamente ofrece consejos e indicaciones para realizar la actividad [408-424].

Tipo de tarea

N5 En este triángulo rectángulo (se da el dibujo con los catetos dados 7 y 10, la altura h y las proyecciones de los catetos sobre hipotenusa m y n), calcula las longitudes h, m y n (p.159).

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 3 de Pablo

La *tercera sesión* Pablo la empieza resumiendo lo comentado en la sesión anterior, enumerando las definiciones y los criterios de semejanza [1^{er} episodio], y propone recordar cómo se calcula la pendiente y la ecuación de la recta [2^{o} episodio]. Luego revisan algunos ejercicios resueltos del libro de texto, del tipo encontrar la ecuación de la recta con un punto y vector dirección dados [3^{er} episodio]. A continuación, Pablo explica los tópicos relacionados con vectores y rectas perpendiculares y paralelas, cómo son sus pendientes [4^{o} episodio]. Hacen una actividad del libro de texto [5^{o} episodio] y Pablo pasa a explicar el tema de rectas paralelas al eje X y al eje Y, forma general de la ecuación de una recta y ecuación de la circunferencia [6º episodio]. Propone realizar algunas actividades del libro de texto [7º episodio]. Al final de la sesión se concluye que ya han terminado la parte teórica y a partir de la siguiente sesión empezarán la parte práctica.

[3.1] Revisión de los contenidos matemáticos anteriormente tratados [436-458]
Evento desencadenante: Pablo empieza a repasar los conceptos y los criterios tratados en las sesiones anteriores.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Estrategias didácticas
Ejercitación del conocimiento previo – Pablo explicitamente llama la atención de los estudiantes hacia los contenidos anteriormente tratados, en forma del periodo de revisión [436-458].
Evento de término: Pablo termina de nombrar los conceptos y los criterios tratados en las sesiones anteriores.

[3.2] Cálculo de la pendiente de la recta [459-488]
Evento desencadenante: Pablo recuerda cómo se calcula la pendiente de la recta.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Foco matemático
Derivational – Pablo promueve el desarrollo de nuevos conocimientos (hallar ecuación de la recta) a partir de los existentes [459-488].
Procedural – Recuerda los procedimientos para el cálculo de la pendiente de una recta [459-488].
Estrategias didácticas
Activación del conocimiento previo – Pablo explícitamente activa conocimientos previos de los estudiantes con el fin de aplicarlos [459-488].
Evento de término: Pablo termina de exponer los procedimientos en la pizarra.

[3.3] Revisión de los ejercicios resueltos [489-523]
Evento desencadenante: Pablo propone revisar algunos ejercicios resueltos del libro de texto.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Foco matemático
Procedural – Pablo enseña los procedimientos para calcular la pendiente de la recta

cuando se dan dos puntos de la misma [494-515].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Pablo explícitamente ofrece consejos e indicaciones para facilitar la comprensión de los procedimientos [494-515].

Evento de término: Pablo termina de explicar la solución de los ejercicios.

[3.4] Vectores y rectas perpendiculares y paralelos [524-563]

Evento desencadenante: Pablo empieza a explicar los tópicos relacionados con vectores y rectas perpendiculares y paralelos.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Conceptual – Pablo promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, explicándoles las condiciones y características de vectores y rectas perpendiculares y paralelos [555-562].

Procedural – Pablo promueve el desarrollo de destrezas para reconocer y determinar vectores y rectas perpendiculares y paralelos [527-554].

Estrategias didácticas

Explicación – Pablo explícitamente explica las condiciones y los procedimientos [524-563].

Evento de término: El profesor termina la explicación.

[3.5] Trabajo en tareas [564-573]

Evento desencadenante: Pablo propone realizar una actividad del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Pablo promueve el desarrollo de técnicas para obtener vectores perpendiculares [564-573].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Pablo ofrece indicaciones directas para realizar la actividad [564-573].

Tipo de tarea

N5. Da tres vectores perpendiculares a (-6,1) (p.161).

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Terminan de resolver la actividad propuesta.

[3.6] Rectas paralelas al eje X y al eje Y, la forma general de la ecuación de la recta y ecuación de la circunferencia [574-686]

Evento desencadenante: Pablo pasa a explicar el tema de rectas paralelas al eje X y al eje Y, la forma general de la ecuación de la recta y ecuación de la circunferencia.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Conceptual – Pablo promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, familiarizándolos con el concepto de rectas paralelas al eje X y al eje Y [574-605], con la forma general de la ecuación de la recta [651-659] y con la ecuación de la circunferencia [672-686].

Procedural – Pablo promueve la adquisición de técnicas de cálculo del vector dirección de las rectas paralelas y perpendiculares [606-650] y del paso de una forma de la ecuación de la recta a la otra [660-671].

Estrategias didácticas

Explicación – Pablo explícitamente explica las ideas relacionadas con los temas mencionados [574-605, 651-659, 672-686].

Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para facilitar la comprensión y realizar cálculos [606-650, 660-671].

Evento de término: El profesor termina la explicación.

[3.7] Trabajo en tareas [687-700]

Evento desencadenante: Pablo propone realizar una actividad del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Pablo promueve el desarrollo de técnicas de cálculo de la ecuación de la circunferencia [687-700].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para realizar la actividad [691-696].

Tipo de tarea

N3. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C (7, 1) y radio r=5 (p.164).

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 4 de Pablo

Y así, la *cuarta sesión* es dedicada a la resolución de actividades del tipo hallar la ecuación de la recta que pase por dos puntos o un punto dado y sea perpendicular o paralela a la otra cuya ecuación es dada. Son tareas que han sido encomendadas para hacer en casa. Durante esta sesión cinco estudiantes han trabajado en la pizarra en las actividades propuestas, los demás les seguían, trabajando en sus sitios [un episodio].

[4.1] Trabajo en tareas[701-791]

Evento desencadenante: Empiezan a realizar actividades del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Pablo promueve el desarrollo de técnicas de cálculo de la ecuación de la recta a partir de diversos datos dados (dos puntos, punto y vector dirección, punto y vector dirección de otra recta paralela o perpendicular) [701-791].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para realizar las actividades [704-708, 713-718, 748-755, 767-770].

Tipo de tarea

N1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A (1, 6), B (8, -2) (p.160).

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (7, -5) y tiene por vector dirección (7, -4) (p.160).

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N3. Hallar la recta paralela a 5x+6y+14=0 que pasa por (0,3) (p.160).

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (2, 5) y es perpendicular al vector (5,7) (p.161).

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N7. La recta r pasa por (3, 0) y la recta s por (5,3). Ambas son perpendiculares a 4x+2y7=0. Halla sus ecuaciones (p.161).

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 5 de Pablo

Al empezar la *quinta sesión* [1er episodio], Pablo pregunta a los estudiantes si han realizado las tareas encargadas, que son actividades del tema de semejanza. Unos dicen que no, algunos que no las han entendido y hay pocos que las hayan realizado. Entonces Pablo cita otra vez los conceptos, los teoremas del tema y propone hacer las actividades que no han sabido ejecutar. Una estudiante dice que no entiende y Pablo explica otra vez los criterios de semejanza y siguen con la resolución de tareas [2^{o} episodio]. Las actividades propuestas son de tipo calcular uno o dos valores ausentes, comparar, demostrar, aplicando el teorema de Thales. Durante esta sesión una estudiante trabaja en la pizarra en una tarea, las demás las explica Pablo.

[5.1] Revisión de los contenidos anteriormente impartidos [792-805]

Evento desencadenante: Pablo empieza preguntando a los estudiantes si han realizado las tareas encargadas y recuerda los conceptos del tema tratado anteriormente.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Estrategias didácticas

Activación del conocimiento previo – Pablo activa los conocimientos previos de los estudiantes, de forma de periodo de revisión, con el fin de realizar las actividades del tema [792-805].

Evento de término: Pablo termina de recordar los conceptos.

[5.2] Trabajo en tareas [806-882]

Evento desencadenante: Empiezan a realizar las actividades del tema.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Reasoning – Pablo promueve la articulación de las justificaciones y argumentos por parte de los estudiantes, invitando a éstos a que justifiquen su respuesta [812]

Efficiency – Pablo promueve la adquisición de técnicas de flexibilidad, sugiriendo usar los datos dados en vez de obtenidos para calcular algún valor ausente, con el fin de minimizar posibles fallos [881-882]

Procedural – Pablo promueve la adquisición de técnicas, procedimientos y algoritmos relacionados con los temas tratados mediante la ejecución de actividades [806-882].

Estrategias didácticas

Explicación – Pablo explícitamente explica soluciones de las actividades [822-831, 842-843].

Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para realizar actividades [817-820, 846-848, 853-857, 872-878].

Diferenciación – Pablo explícitamente intenta tratar en modo diferente en función de las necesidades de los estudiantes, particularmente, presta atención especial a la estudiante más débil, con el fin de reforzar la comprensión [832-834].

Tipo de tarea

N4. Hemos dividido en cuatro partes iguales el lado mayor del rectángulo ABCD y en tres partes iguales el lado menor.

a) ¿Es semejante cada uno de los doce rectángulos obtenidos con el inicial?

b) Si dividimos los dos lados en tres partes iguales, ¿obtendremos rectángulos semejantes?

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N6. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y su razón de semejanza es 2/3. Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ si sabemos que AB=12m, BC=9m y AC=7,5m.

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N8. a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB? AQ= 5, PQ= 3, CP =7

b) Calcula x = BQ

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N10. Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD.

a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC.

b) Calcula x e y (CD y OD).

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 6 de Pablo

La *sexta sesión* ha sido dedicada a la ejecución de las tareas encomendadas para hacer en casa [un episodio]. Las actividades demandadas son de tipo calcular un valor ausente. Durante esta sesión Pablo explica cómo realizar las tareas que no han sabido realizar y dos estudiantes hacen las tareas en la pizarra.

[6.1] Trabajo en tareas [883-938]

Evento desencadenante: El profesor propone hacer actividades del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Pablo promueve la adquisición de técnicas, procedimientos y algoritmos relacionados con los temas tratados a través de la realización de las actividades [883-938].

Estrategias didácticas

Explicación – Pablo explícitamente explica soluciones de las actividades [906-916, 918-931].

Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para realizar actividades [937-938].

Diferenciación – Pablo explícitamente intenta tratar en modo diferente en función de las necesidades de los estudiantes, particularmente, presta atención especial a la estudiante más débil, con el fin de reforzar la comprensión [900-902].

Tipo de tarea

N11. Estos dos triángulos tienen sus lados paralelos. ¿Cuánto miden los lados a y b?

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N12. En un triángulo ABC, la base AB mide 5,7 m y la altura relativa a esa base mide 9,5 m. ¿Cuánto mide el área de otro triángulo semejante a ABC en el que $A'B' = 4{,}14$ m?

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N14. Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8cm y 13,6cm, respectivamente. Si el área del primero es 26cm^2. ¿Cuál es el área del segundo?

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N15. Di cuál es la relación entre los radios de dos círculos si la razón entre sus áreas es 16/9.

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 7 de Pablo

En *la última (séptima) sesión* cinco estudiantes realizan tareas del libro de texto en la pizarra con la intervención permanente de Pablo [un episodio]. Son tareas relacionadas con todos los tópicos estudiados anteriormente.

[7.1] Trabajo en tareas [939-1076]

Evento desencadenante: El profesor propone realizar actividades del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Pablo promueve la adquisición de técnicas, procedimientos y algoritmos relacionados con los temas tratados a través de la realización de las actividades [939-1076].

Structural – Pablo promueve conexiones entre entes matemáticos diferentes, explicando la relación entre la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales y el punto de corte de dos rectas [978-986].

Estrategias didácticas

Explicación – Pablo explícitamente explica soluciones de las actividades [940-954, 997-1003, 1065-1072, 1076].

Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para realizar actividades [958-959, 996, 1039-1041].

Cuestionamiento – Pablo explícitamente utiliza una secuencia de preguntas que conducen al estudiante a la solución de la actividad [1048-1058].

Tipo de tarea

N21. Halla la ecuación de las siguientes rectas: a) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N22. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al vector v, en los siguientes casos: a) P (–7, 2), v (2, 1).

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N30 (Reproducción). Determina el punto de corte de las rectas:

$r: 5x + 4y + 3 = 0 \qquad s: -4x + 2y - 5 = 0$

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N35. Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes:

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ c) $x^2 + y^2 = 10$

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N40. Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?

Procesos cognitivos: Reproducción

Situación: Personal

Contexto: Hipotético

N41. Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165cm de altura, se situó a 1,5m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Personal

Contexto: Hipotético

N42. Dados los puntos A (–1, 1) y B (3, 4), halla:

a) La ecuación de una recta r que pase por A y sea perpendicular a AB.
b) La ecuación de una recta s que pase por B y sea paralela al eje X.
c) El punto de corte de r y s.

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

IV.1.1.2. Análisis por dimensiones

En total, en las siete sesiones de Pablo hemos registrado 21 episodios que representan oportunidades dadas a los estudiantes. A continuación exponemos cómo se presentan las diferentes OTL dentro de estos episodios. Empezaremos por la descripción de los focos matemáticos, sin embargo, simultáneamente destacaremos las estrategias didácticas que les acompañan, cuando sea el caso.

a) Foco matemático

El foco *conceptual* en las sesiones de Pablo se presenta más intensamente durante las primeras tres sesiones, es cuando Pablo sucesivamente introduce la teoría. En la primera sesión el foco *conceptual* se observa cuando el profesor recuerda la noción de escala y de vector [1.2][67] y expone el concepto de semejanza [1.4] y [1.7]. Pablo introduce un ejemplo del libro de texto que representa un plano de una casa y pone en evidencia la correspondencia entre el plano y la realidad. Este ejemplo se queda aislado pues atañe solamente la noción de escala, dado que enseguida, a modo de recordatorio, comienza a tratar la noción de vector y vuelve al tema de semejanza ya en el cuarto episodio. La aproximación de Pablo al concepto de semejanza ha sido dentro de la *relación intrafigural*[68]*,* es decir, se ha destacado la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de trasformar una figura en otra.

En la segunda sesión el foco *conceptual* se observa cuando Pablo explica los tres criterios de semejanza de triángulos y sus consecuencias [2.1]. Por último, en la tercera sesión, Pablo explica los criterios de paralelismo y perpendicularidad [3.4], los criterios de vectores paralelos a los ejes X e Y, la ecuación general de recta y la ecuación de circunferencia [3.6].

El foco *conceptual* se acompaña, principalmente, por las estrategias didácticas *explicación* o *entrenamiento* como se puede observar en los ejemplos extraídos de las sesiones. En el primer episodio, Pablo explica qué son las coordenadas de un vector:

P: Bien, como decíamos, en un vector cabe distinguir también sus coordenadas. ¿Qué son las coordenadas de un vector? La dirección de la recta, es decir, imagínate, por ejemplo, r (muestra en la pizarra) esa es la dirección. Dentro de esta dirección tenemos sentido, sería, por ejemplo, esta..., pues puede tener dos sentidos: desde abajo arriba o desde izquierda a la derecha y al revés. Entonces dentro de una dirección puede tener dos sentidos, ¿de acuerdo? […]" [44-50].

Y en el segundo ejemplo, Pablo trata el concepto de semejanza, explícitamente dando indicaciones cómo han de ser figuras semejantes, sin llegar a invitar a los estudiantes que piensen y razonen al respecto, basándose en su intuición o intentando inferir de la palabra "semejantes" que describe la relación entre figuras.

[67] [i, j] indica episodio j de la sesión i, en este caso [1.2] se refiere al segundo episodio de la primera sesión.

[68] Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de *semejanza* los cuales, a su vez, determinan tres aproximaciones al concepto de semejanza: *relación intrafigural*, *transformación geométrica vista como útil* y *transformación geométrica como objeto matemático*.

P: Bien, empezamos con semejanza. [...] primero, dos figuras geométricas, en este caso, no compararé nunca con figura que tiene otro número de lados, un triángulo con triángulo, un rectángulo con rectángulo, etc. Por ejemplo, si me dicen comparar un triángulo con un cuadrado, es absurdo, ¿no? Desde el principio tienen que parecerse. Entonces podemos decir que dos figuras que se parecen son semejantes, pero matemáticamente esto no nos sirve [123-133].

Los conceptos abordados durante las sesiones se presentan como hechos acabados, unidades de información aisladas. Así, a pesar de que los conceptos relacionados con la semejanza y el teorema de Thales están presentes en numerosas situaciones del mundo real, tales como fotografías, proyecciones de imágenes o máquinas fotocopiadoras, proyección de sombras a distintas horas del día, etc., excepto el ejemplo de escala ilustrado en el libro de texto que Pablo introdujo al inicio de la primera sesión, no había puesto ningún otro, ni había invitado a los estudiantes a que pensaran y dieran sus ejemplos relacionados con la vida cotidiana, que podrían ser oportunos para el mejor entendimiento de estos conceptos.

O cuando en un problema se les da el área del triángulo, Pablo constata como hecho que las áreas también son proporcionales, solo que la razón es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

P: ... ¿Qué ocurre con las áreas? No sé si hemos dicho cuando estuvimos explicando el tema, pues las áreas son también proporcionales, solo la razón es igual a cuadrado de la razón de semejanza, ¿vale? Venga, aquí podemos poner $\frac{n}{n_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1}=k$ *pues eso nos da la razón de semejanza, y* $\frac{S}{S_1}=k^2$*, ¿vale?...* [908-913].

Una estudiante no lo entiende y pregunta por qué no es igual sino el cuadrado, contesta *P: …porque estamos hablando de superficie, acabamos de decir que cuando estamos comparando lados, o alturas o perímetros son longitudes y nos da una constante y si yo comparo superficie me da, no la razón de semejanza, sino el cuadrado de la razón de semejanza. [...] No sé si vendrá algún ejercicio de volumen, pues si habrá volumen, los volúmenes serían igual, estamos hablando de figuras en espacio, pues los de volúmenes es igual al cubo de la razón de semejanza* [918-931].

Sin embargo, no se da la oportunidad de que los estudiantes lo comprobaran y siguen sin entenderlo, ya que ante el siguiente problema, donde se les da la razón entre áreas de dos círculos y han de encontrar la razón ente sus radios, quedan igual, sin saber hacerlo, aunque el profesor cree que después de su explicación sabrían hacerlo sin problemas:

P: Hacemos el N15, ***con este ya me imagino que deberíais saber hacer perfectamente el 15****. Nos dice, halla el tipo de la relación entre los radios de circunferencias si la razón entre sus áreas es* $\frac{16}{9}$*. Entonces tenemos* $\frac{S}{S_1}=\frac{16}{9}$*,* $\frac{r}{r_1}=$ *¿? ¿Cómo hacemos?* (Intentan razonar, pero lo que dicen no es correcto). ***A ver, aquí me da ahora la razón de las áreas, entonces yo elevo*** r/r_1 ***al cuadrado, me da 16/9. Acabo de decir. Entonces*** $\frac{r}{r_1}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ [932-938].

Durante las sesiones observamos que la parte teórica se pasa como un recorrido rápido, debido al hecho de que Pablo tiende a considerar la teoría principalmente como herramienta o recurso para la parte práctica.

P: ***Tenéis que tener presente cuando estamos pendientes de la parte teórica, que ésta es solo una herramienta para después resolver problema****s, ¿vale? (escribe en la pizarra fórmulas)* ***aquí tenemos la herramienta****,* ***la fórmula que va a repetir a teorema*** [392-395].

Asimismo, confirma su posición durante la entrevista:

"…intento hacer la matemática muy práctica: haciendo ejercicios, entendiendo. Esa es la forma que yo sigo en el trabajo, la manera en que realmente se aprende la matemática es hacer muchos ejercicios, aplicarlos, pensando en teoría a través de los ejercicios ENT [214-218].

El foco *procedural* es el que hemos observado con la mayor frecuencia: en [1.2], [1.3], [1.5], [1,6], [2.2], [3.2]-[3.7], [4.1], [5.2], [6.1], [7.1]. Este foco se presenta principalmente por medio de *explicación y entrenamiento*. En las siguientes líneas se ejemplifica cómo Pablo explica el procedimiento para despejar una proporción.

P: Si yo tengo, por ejemplo, $\frac{3}{5}$ *y* $\frac{6}{10}$ *[…] En una proporción tenemos 4 números, 4 elementos, estos de 3 y 10 se llaman extremos, 5 y 6-medios. Para ver si dos razones forman proporción, normalmente dividen nominador por denominador y comparan dos* *partes, que es largo, pero se puede hacer así, hay que multiplicar los extremos y los medios, así es más fácil averiguar sin tener que dividir, ¿de acuerdo? Yo digo 3 x 10 =30, 5 x 6=30, entonces es una proporción. Una proporción, quiero que recordéis, es muy fácil despejar. Yo no sé por qué os cuesta mucho trabajo despejar una proporción, es muy fácil* [182-191].

La importancia que Pablo atribuye al foco *procedural* se manifiesta constantemente durante sus sesiones. Por ejemplo, cuando los estudiantes no son capaces de ejecutar alguna actividad, Pablo repite la técnica y los procedimientos y en varias ocasiones se sorprende de que los estudiantes no sean capaces de aplicar fórmulas después de que haya explicado el procedimiento una y otra vez.

P: La regla siempre sigue la misma, yo lo que no entiendo es que una vez sale bien y otra vez sale mal, no lo entiendo, o sale todo mal o todo bien porque la aplicación es siempre igual [725-727].

Al escribir las fórmulas en la pizarra para aplicarlas, Pablo explica que las letras que ponen en las fórmulas dependen de la figura, que han de saber qué significa la fórmula, hay que ir identificando las letras para resolver el problema. El hecho de no entender el significado de las fórmulas ha llevado a los estudiantes a situaciones confusas, ya que solo se fijan en las letras que éstas contienen. El fragmento que sigue es un ejemplo de tal confusión:

Durante la resolución de una actividad del tipo hallar la ecuación de la recta con el punto y el vector director dados, el profesor escribe en la pizarra la ecuación de la recta $y= y_0+\underline{\mathbf{m}}(x-x_0)$.

E: *Maestro, decimos anteriormente la ecuación $b^2=a\underline{\mathbf{m}}$, ¿es otra cosa?* (se refiere al ***m*** que ha visto en ambas fórmulas).

P: *Es el teorema del cateto que dice que un cateto al cuadrado es igual al producto de hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa. ¿Para qué sirve todo eso? Para que cuando tenéis unos elementos o datos de un triángulo para calcular más elementos por esa fórmula, ¿vale? Ella que nos da posibilidades, como ya te he dicho calcular los datos. Para calcular distancias, altura, todo eso, ya veremos la aplicación, un poco de práctica, haremos más problemitas* [516-523].

El foco *derivational* se presenta en las sesiones del profesor estudiado mediante *activación del conocimiento* sobre contenidos anteriormente tratados con el fin de preparar a los estudiantes para abordar un tema nuevo. De este modo ha sido revisado, por ejemplo, el procedimiento de despejar una proporción [1.5]:

P: En general son proporcionales, es decir $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$. *Y surge aquí palabra "proporción". ¿Alguno recuerda qué es una proporción? [...]. Son proporciónales, es decir, forman una proporción, ¿Qué es una proporción? (Equivalencia). Una equivalencia, igualdad, una razón de dos cantidades, es decir, por ejemplo, me dicen cuál es la razón* $\frac{3}{5}$ *y, por ejemplo,* $\frac{7}{8}$ *...*" [169-178].

Durante las sesiones de Pablo hemos observado el foco *structural* en dos ocasiones: cuando Pablo enuncia que es muy importante estudiar el caso de triángulos ya que cualquier figura normalmente se puede dividir en triángulos [2.1]:

P: ...En general estoy hablando ahora de figuras semejantes, hablamos ahora mismo de triángulos porque es muy importante, ***cualquier figura normalmente se puede dividir en triángulos*** [290-292].

Y cuando explica la relación entre la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales y el punto de corte de dos rectas (interpretación geométrica) [7.1]:

P: ***Cuando estamos resolviendo un sistema, lo que estamos haciendo realmente es calculando el punto donde se cortan dos recta****s. En el plano dos rectas ¿cómo pueden ser?* ***Pueden ser secantes cuando tienen un punto del corte; pueden ser paralelas, el sistema no tiene resolución o puede ser la misma recta cuando el sistema también tiene solución****. Bien, entonces* ***cuando estamos resolviendo el sistema estamos buscando el punto que pertenezca a dos rectas, es decir el punto del corte, y encontrar el punto del corte es igual que resolver sistema****...* [978-986].

El foco *efficiency* lo hemos observado durante un episodio: en [5.2], cuando sugiere usar los datos dados, en vez de los obtenidos, para calcular algún valor ausente.

P: Yo prefiero utilizar los datos dados, porque si tú lo calculas mal, vas a seguir mal [881-882].

El foco *problem solving* tal como lo entendemos en este estudio (resolución de problemas no triviales y no rutinarios) no se presenta *per se* en las sesiones de Pablo.

Cabe destacar que la resolución de la mayoría de las tareas, aunque requerían identificación y aplicación de fórmulas familiares han resultado verdaderamente problemas para los estudiantes. Lo exponemos en detalle al tratar el tipo de tareas propuestas por Pablo.

El foco *reasoning* se observa una única vez cuando en [5.2] el profesor, al resolver una tarea que presentamos a continuación, invita a los estudiantes a que justifiquen su respuesta y espera que contesten. Aunque en este caso finalmente lo justifica el profesor, sin embargo, se da la oportunidad de que lo hagan los estudiantes.

Han dividido en cuatro partes iguales el lado mayor, y en tres el lado menor del rectángulo ABCD. Pregunta: ¿estos pequeños rectángulos son semejantes con el rectángulo grande?"

Es: *Si*

P: *¿Si?*

Es: *Si*

P: ***¿Por qué?***

E1: *Tienen mismos ángulos, ¿no?*

E2: *Son iguales*

P: *Vamos a ver, los ángulos son iguales, los lados ¿cómo tienen que ser?*

E1: *Proporcionales*

P: *¿Qué proporción hay entre estos rectángulos? ¿Entre el lado grande de este pequeño y el lado grande de este grande? ¿Hay uno de cuánto? De cuatro, entonces tienen proporción 1:4, y el otro lado 1:3, entonces no son semejantes. […]* [806-820].

Según las observaciones, este foco no ha sido prioritario entre los objetivos del profesor.

A continuación presentamos la representación gráfica de uso de los diferentes focos matemáticos en las sesiones de Pablo (Gráfico 1):

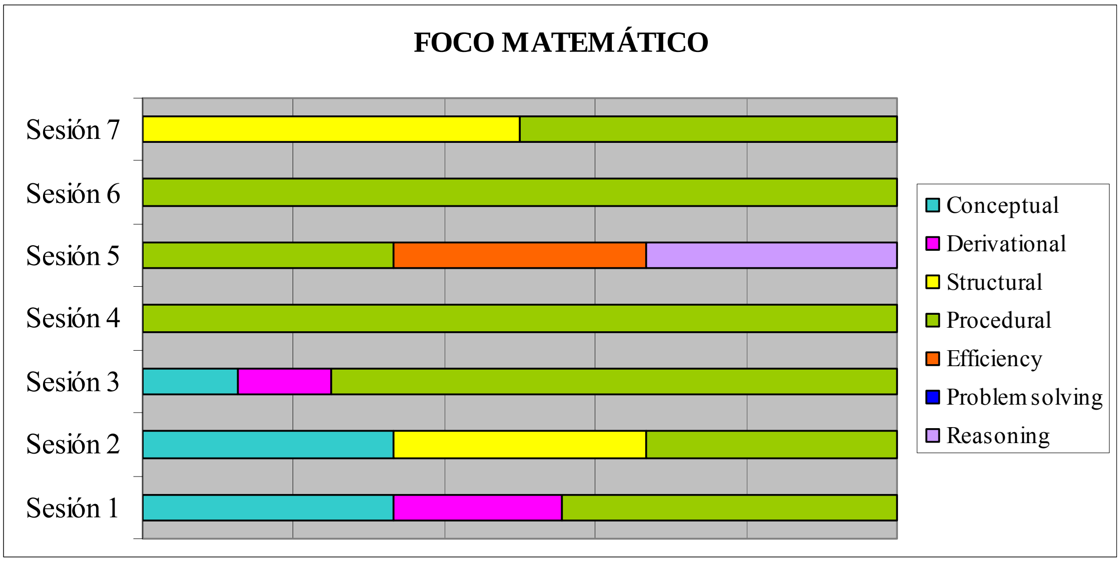


Gráfico 1: Distribución de los distintos focos matemáticos en las siete sesiones de Pablo

Como se puede apreciar, es destacable la prevalencia del foco *procedural*, que subyace en el énfasis que Pablo pone en los procedimientos y técnicas de cálculo. Asimismo, promueve el desarrollo conceptual de sus estudiantes (foco *conceptual*). Por otra parte, es notable la ausencia del foco *problem solving* y la escasa frecuencia de los focos *reasoning, efficiency, structural* y *derivational*. De este modo, los objetivos de Pablo respecto al aprendizaje de las Matemáticas se enfocan en la adquisición de las habilidades procedimentales y de los conceptos por parte de los estudiantes.

b) Estrategias didácticas

Como ya hemos indicado, Pablo ha usado con mayor frecuencia las estrategias didácticas *explicación* en [1.2], [1.4], [1.7], [2.1], [3.4], [3.6], [5.2], [6.1], [7.1] y *entrenamiento* en [1.2], [1.3], [1.5], [1,6], [2.2], [3.3], [3.5]-[3.7], [4.1], [5.2], [6.1], [7.1]. Un rasgo muy propio observado en todas las sesiones asistidas y grabadas es su modo de introducir un nuevo concepto, teorema, criterios, etc. que consistía en que alguno de sus estudiantes leía los enunciados de éstos del libro de texto y luego le seguía la explicación de Pablo.

P: Vamos a ver que nos dice teorema de Thales [...] ¿Adrián quieres leer? (Lee del libro). *Bien, vamos a ver, aquí lo que nos dice es que tenemos dos rectas cortadas a su vez por tres rectas paralelas, entonces estas tres rectas determinan segmentos, entonces dice, si el segmento AB y BC son iguales los segmentos que determina otra recta,* A_1B_1

y B_1C_1 son también iguales. Si los segmentos, ahora el otro ejemplo, AB es el doble de BC, pues A_1B_1 es doble de B_1C_1. Esto lo que está diciendo [154-164].

La explicación de Pablo en algunos casos se presentaba como reproducción literal del libro de texto (ejemplo anterior) y, en otros, como transmisión verbal con exposiciones durante la cual hacía preguntas como si fueran dirigidas a los estudiantes y contestaba él mismo aclarándolas, de tipo monólogo.

P: Los ángulos, se ve evidentemente que son iguales, ¿por qué? Porque las dos rectas paralelas forman ángulos homólogos, porque estas rectas (b, c) paralelas y cortan la misma recta, entonces los ángulos formados son iguales, entonces el ángulo $B=B_1$, $C=C_1$ y ángulo A es común". [236-240].

Asimismo, durante la explicación, Pablo proponía ejemplos para facilitar la comprensión de sus estudiantes y se apoyaba en dibujos para visualizar lo expuesto.

Pablo empleaba la estrategia didáctica *entrenamiento* sobre todo para dar indicaciones explicitas con el fin de facilitar la comprensión, la resolución de tareas o para corregir errores. Así, en el siguiente ejemplo, da sugerencias para realizar una tarea:

P: Aquí tenemos una actividad… presenta vectores AB y CD y nos da las coordenadas de origen y extremo, demuestra que son iguales. […] ***Han de tener mismas coordenadas****, ¿vale?* ***Si tenemos coordenadas de los puntos del vector, calculamos coordenadas del vector y en este caso me dará 4 puntos, dos pares de puntos. Así se demuestra que son iguales****.* [106-118].

Otro fragmento que ejemplifica el uso de la estrategia *entrenamiento*:

P: Entonces si A y B son dos puntos de una recta, la metadirección de la recta sería el vector AB y vector AB ¿qué coordenadas tendría? (x….pausa), ***entonces (x_2-x_1, y_2-y_1) serían las coordenadas de este vector, ya hemos visto ¿no?*** *Ahora, cuando tengo un punto concreto A (3, 5) y el punto B (2, -7), por ejemplo. Entonces el vector AB ¿tiene coordenadas cuáles?*

E1: 3 - 2

P: ***sería 1, ¿y?***

E1: 5 - 7

E2: 7 - 5, eeeeh -7 - 5

E3: -7 - 5

P: *¿Está de acuerdo todo el mundo?* ***Recordad cómo era, la coordenada de extremo menos la de origen, entonces 2-3 sería -1 y este sería -7-5, sería -12, (-1, -12)***. ***Si tú pones vector BA, sería 3-2, sería 1 y 5-(-7), sería 12***, *¿vale?* [468-483].

La intervención del profesor durante el proceso de la resolución ha sido permanente y ha consistido en dar consejos e indicaciones de corregir, muchas veces la tarea quedaba resuelta por él.

Normalmente, Pablo usaba una secuencia de preguntas que requerían de los estudiantes identificación y reproducción, tales como: ¿Qué es?, ¿Cuál aplico?, ¿Cómo sería?, ¿Cuál será? ¿Cuánto mide?, etc. El ejemplo que sigue ilustra lo anteriormente mencionado:

P: ***Aquí, en este triángulo si queréis ponemos letras y vamos a identificar, entonces todo esto sería la hipotenusa a, este cateto es b y el otro es c****, lo que quiero que veáis que eso es un cateto, este es el otro,* ***¿eso qué es?*** (señala la proyección del cateto *b* sobre la hipotenusa).

E: *La proyección del cateto b sobre la hipotenusa.*

P: ***¿Eso qué es?*** (señala la proyección del cateto *c* sobre la hipotenusa).

E: *La proyección del cateto c sobre la hipotenusa.*

P: *Que en este caso valen 7 y 10, y* ***¿h qué es?***

E: *La altura sobre hipotenusa.*

P: *y m+n sería igual a a-hipotenusa, bien, hemos identificado y* ***¿qué hacemos ahora? ¿Qué ocurre? ¿Qué yo veo en la lista?*** (se refiere a la lista de fórmulas que ha escrito en la pizarra) ***¿Cuál aplico?*** [408-419].

El siguiente fragmento ejemplifica cómo Pablo, al no conseguir que uno de los estudiantes proceda en la resolución de la tarea propuesta por un método, intenta que lo haga por el otro. Es la única ocasión [7.1] en la que emplea la estrategia didáctica *cuestionamiento*:

P: ***Bueno, eso es una forma de hacerlo, vamos a hacer otra. ¿Tú sabes calcular la pendiente? ¿Cuál será la pendiente que pasa por estos dos puntos? A ver si así te enteras mejor***.

E: $m = \frac{3}{4}$

P: *Entonces,* ***¿cómo será la pendiente de la recta perpendicular a esta?***

E: *Inversa y cambiada de signo.*

P: *Entonces,* ***¿cuál sería?***

E: $-\frac{3}{4}$

P: $-\frac{3}{4}$*, no*

E: $-\frac{4}{3}$

P: *¿Y la ecuación? Tenéis mucha duda al operar con números, eh* [1046-1056].

La estrategia *evaluación* solo se observa en [1.1] cuando Pablo comenta los resultados del examen pasado y en el mismo episodio intenta motivar a los estudiantes (*motivación*) sugiriendo que la matemática es complicada y requiere un trabajo diario, poquito a poco, haciendo ejercicios. También intenta motivar a los estudiantes destacando la utilidad y la aplicabilidad de lo que iban a aprender cuando, antes de tratar el teorema de Thales en [1.4], recuerda que uno de los estudiantes en algún momento le había preguntado sobre cómo dividir un segmento a partes iguales y que este teorema precisamente da respuesta a la cuestión, sin embargo, no han llegado a aplicarlo.

Pablo ha empleado la estrategia didáctica *ejercitación del conocimiento previo* en un episodio [3.1] enumerando los conceptos importantes de los temas impartidos durante dos sesiones anteriores.

Observamos la estrategia *diferenciación* cuando Pablo muestra un acercamiento individualizado respecto a una estudiante, la que constantemente manifestaba la dificultad a la hora de comprender las explicaciones del profesor y Pablo volvía a repetir las mismas explicaciones.

El siguiente gráfico representa el uso de las estrategias didácticas en las sesiones de Pablo.

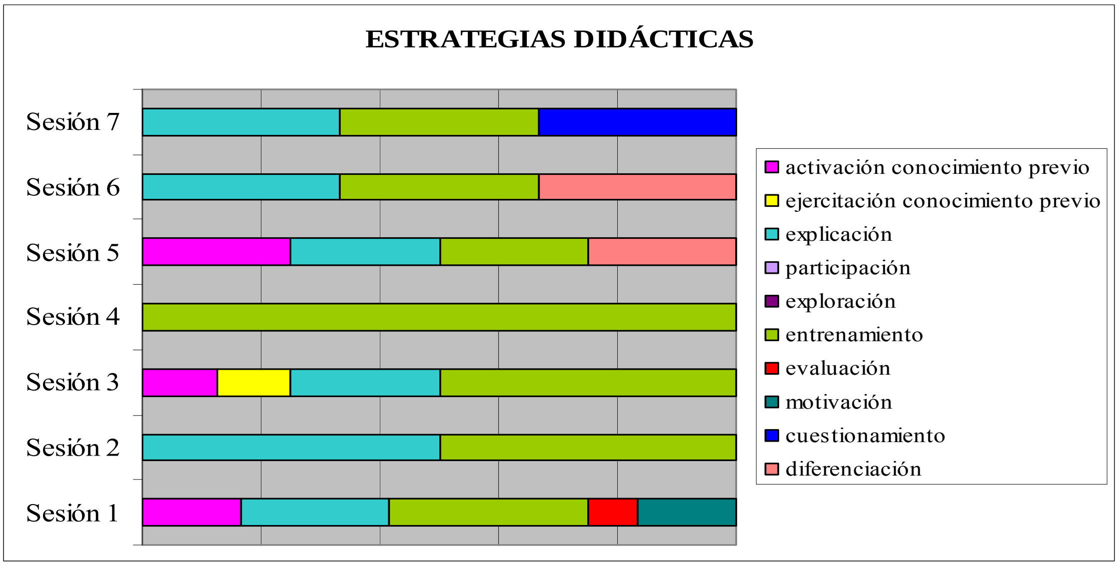


Gráfico 2: Uso de las diferentes estrategias didácticas en las siete sesiones de Pablo

De este modo, Pablo ha empleado con mayor frecuencia las estrategias didácticas entrenamiento y explicación. Ha recurrido al uso de la activación de conocimientos previos, diferenciación. En casos puntuales motiva, explícitamente evalúa a los estudiantes, utiliza las estrategias cuestionamiento y ejercitación de conocimientos previos. Hemos de mencionar las estrategias didácticas prácticamente no puestas en acción por Pablo durante sus sesiones: *participación, exploración*.

c) Materiales didácticos

De los *materiales didácticos,* Pablo y sus estudiantes usaban el libro de texto, calculadora, pizarra; aunque el aula disponía de ordenadores e Internet, no usaban ninguno de estos. El siguiente fragmento, extraído de la entrevista con Pablo, explica el uso exclusivo del libro de texto:

"La verdad que utilizo muy pocos. Los tradicionales como son libros, procuro darles también algunos ejercicios a parte algunas veces cuando veo que en el libro hay pocos ejercicios, pero hoy en día los libros están bastante bien y tienen muchísimos ejercicios, demasiado. Creo que haciendo ejercicios del libro es ya sobra, otras veces complemento con otros ejercicios. No utilizo la verdad los recursos didácticos de la última generación como puede ser Internet, ordenador porque las pocas veces que lo exploraba, es culpa mía, porque en este campo no encontraba algo que realmente era fascinante para dedicarlo en clases" ENT [95-104].

d) Tipo de agrupamiento

El *tipo de agrupamiento* observado es mayormente el trabajo con el grupo-clase y pocas veces individual.

e) Tipo de tareas

Un aspecto importante en las actividades del profesor consideramos que lo constituye el tipo de tareas propuestas en diferentes contextos y situaciones y de complejidad diferente. Normalmente, como habíamos mencionado, Pablo al principio explicaba todos los tópicos de un tema o un bloque, poniendo algunos ejemplos de ejercicios resueltos para facilitar la comprensión de cada tópico y, al terminar la parte teórica, empezaban la parte práctica, trabajando en tareas del libro de texto.

A continuación presentamos la clasificación según la complejidad de las tareas elegidas por Pablo durante las sesiones grabadas para resolver en el aula y para trabajar en casa, asimismo destacaremos cómo han sido abordadas.

1. N 2 (Reproducción) Representa vectores AB y CD siendo A (1,1), B (2,7), C (6, 0), D (3, 6) y observa que son iguales. Comprueba nuevamente que AB=BC hallando sus coordenadas. Calcula su modulo (p.153).

Esta tarea, ha sido asignada para trabajar en casa, después de la explicación del profesor sobre cómo hacerla.

P: ...Eso hacemos gráficamente, lo presentamos, lo vemos gráficamente y después hacemos en forma algebraica, es decir, hacemos con números. ¿Cómo hacemos con números? Han de tener mismas coordenadas, ¿vale? Si tenemos coordenadas de los puntos del vector, calculamos las coordenadas del vector y en este caso me dará 4 puntos, dos pares de puntos. Así se demuestra que son iguales. Esta voy a daros para casa [113-118].

La siguiente tarea se propone inmediatamente después de la explicación del teorema del cateto y de la altura, sin embargo, los estudiantes tienen dificultad en ejecutarla.

2. N5 (Reproducción) En este triángulo rectángulo (se da el dibujo con los catetos dados 7 y 10, la altura h y las proyecciones de los catetos sobre hipotenusa m y n), calcula las longitudes h, m y n (p.159).

Pablo escribe en la pizarra las fórmulas correspondientes ($b^2=an$, $c^2=am$, $b^2+c^2=a^2$) e invita a los estudiantes a que salgan a la pizarra, nadie se atreve, intentan ejecutarla en sus sitios. Unos minutos después, el profesor propone cambiar las letras del triángulo de la tarea por las de la fórmula y así ir identificando. Finalmente la tarea queda resuelta por el profesor.

3. N5 (Reproducción). Da tres vectores perpendiculares a (-6,1) (p.161)

Esta tarea se propone para ejemplificar el tópico sobre vectores perpendiculares:

P: *¿Cuál sería?*

E: *(1,6)*

P: *(1,6), ¿no? Sería (1,6), ¿otro?*

E: *(-1,6)*

P: *No complicaos la vida, era (1,6), ¿no? Multiplicamos por un mismo valor y tenemos (2,12), (3, 18), etc.*

E: *Pero estos son paralelos, ¿no?*

P: *Estos son perpendiculares a (-6,1)* [566-573].

De las pocas veces que los estudiantes intentan razonar, al profesor le parece que *"se complican la vida"*, aunque evidentemente la intención de Pablo es facilitarles un procesamiento más seguro y con menos probabilidad de equivocarse.

4. N3 (Reproducción). Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C (7, 1) y radio r=5 (p.164).

Esta tarea ha sido propuesta para ejemplificar el tópico correspondiente y ha sido resuelta por el profesor.

P: Me dan coordenadas del centro y radio, pues simplemente hay que sustituir, pues sustituyo aquí y digo $(x\text{-}7)^2+ (y\text{-}1)^2=25$*, si quiero desarrollarla pues quito paréntesis aplicando la formula de cuadrado de binomio y se hace, ¿vale? si no, la dejo así [...] Yo quiero que sepáis la técnica, el radio sustituimos a esa fórmula…*[689-697].

Pablo ha propuesto las siguientes tareas para trabajar en casa, sin embargo, como la mayoría no ha sabido realizarlas, el día siguiente las ejecutan en la clase.

5. N1 (Reproducción). Hallar la ecuación de la recta que pasa por A (1, 6), B (8, -2) (p.160).

Una estudiante hace la tarea en la pizarra y el profesor simultáneamente explica a los demás cómo se hace. Con algunas correcciones del profesor y sus compañeros lleva la tarea a cabo. Pablo le pregunta si sabe escribir la ecuación de dicha recta en forma general y lo hace correctamente.

6. N2 (Reproducción). Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (7, -5) y tiene por vector dirección (7, -4) (p.160).

En esta tarea, igualmente, trabaja uno de los estudiantes en la pizarra y con las sugerencias de sus compañeros la realiza, sin embargo, la ecuación de la recta en forma general la termina Pablo.

7. N3 (Reproducción). Hallar la recta paralela a 5x+6y+14=0 que pasa por (0,3) (p.160).

Para ayudar al estudiante a proceder en la resolución de esta tarea, Pablo parte del heurístico: "qué tienen en común dos objetos", en este caso dos rectas:

E: *Tienen la misma pendiente.*

No obstante, vuelve a dar indicaciones explicitas para su ejecución:

P: *Entonces, hay que calcular la pendiente, al calcular la pendiente de esa recta, con esta pendiente y el punto podemos escribir la ecuación de la otra recta, ¿vale?* [752-755].

8. N6 (Reproducción). Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (2, 5) y es perpendicular al vector (5,7) (p.161).

Esta tarea también se hace con las indicaciones directas del profesor:

P: *Entonces un vector perpendicular a (5, 7) tiene coordenadas y signo cambiadas* d_1 *(-7,5) y la pendiente en este caso sería* $m= -\frac{7}{5}$.

E: $y = -5 - \frac{7}{5}(x-2) = -\frac{7x}{5} - \frac{11}{5}$ [768-771].

9. N7 (Reproducción). La recta r pasa por (3, 0) y la recta s por (5,3). Ambas son perpendiculares a 4x + 2y -7=0. Halla sus ecuaciones (p.161).

P: *¿Qué hacemos?*

E5: *Calculamos la pendiente de esa recta, y…*

P: *En este caso la pendiente es…*

E5: *-2*

P: *Por favor, es fundamental lo que acabamos de decir, ¿cómo tiene que ser la pendiente de recta perpendicular?*

Es: *Igual, la misma.*

P: *La misma es cuando sean paralelas. Inversa y cambiada de signo, recordad.*

E5: $m=\frac{1}{2}$

P: *Entonces ya conocemos la pendiente de estas dos rectas y podemos hallar las ecuaciones.* [776-786].

A partir de aquí se presentan las tareas que han sido propuestas por Pablo en el marco de la parte de práctica. En el libro de texto, este capítulo tiene varios apartados: practica, piensa y resuelve, profundiza. La mayoría de las tareas elegidas pertenecen al apartado "practica" (pp.170-172) y las dos últimas al de "piensa y resuelve" (pp. 172-173).

10. N4 (Conexión). Hemos dividido en cuatro partes iguales el lado mayor del rectángulo ABCD y en tres partes iguales el lado menor.

a) ¿Es semejante cada uno de los doce rectángulos obtenidos con el inicial?

b) Si dividimos los dos lados en tres partes iguales, ¿obtendremos rectángulos semejantes?

Presentamos la resolución de esta tarea a continuación:

P: *Pregunta: ¿estos pequeños rectángulos son semejantes con el rectángulo grande?"*

Es: *Si*

P: *¿Si?*

Es: *Si*

P: *¿Por qué?*

E1: *Tienen mismos ángulos, ¿no?*

E2: *Son iguales*

P: *Vamos a ver, los ángulos son iguales, los lados ¿cómo tienen que ser?*

E1: *Proporcionales*

P: *¿Qué proporción hay entre estos rectángulos? ¿Entre el lado grande de este pequeño y el lado grande de este grande? ¿Hay uno de cuánto? De cuatro, entonces tienen proporción 1:4, y el otro lado 1:3, entonces no son semejantes. [...]*

Sigue otra pregunta: *¿si dividimos los dos lados del rectángulo en tres partes iguales, serían semejantes?*

E: *Si*

P: *Porque tendríamos 1:3 y 1:3* [807-831].

11. N6 (Reproducción). Dos triángulos ABC y A´B´C´ son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{2}{3}$. Calcula los lados del triángulo A´B´C´ si sabemos que AB=12m, BC=9m y AC=7,5m.

P: Vamos a ver, ¿tú sabes qué es la razón de semejanza? Dos triángulos son semejantes entonces tienen los lados proporcionales, es decir $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{2}{3}$, *entonces nos están dando la razón de semejanza* [840-843].

Después de la intervención del profesor, la estudiante resuelve correctamente la tarea.

12. N8 (Conexión). a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?
b) Calcula x = BQ

(Se da un dibujo de dos triángulos en posición de Thales, con los lados AQ=5, PQ=3, PC=7)

P: *Bien entonces ahora nos piden calcular BQ.*

E2: *(Calcula AP por el teorema de Pitágoras, obtiene 4)*

P: *Calculamos primero AP, ¿no? Aplicamos el teorema de Pitágoras. ¿Qué haces ahora?*

E2: *BQ,* $\frac{x}{7}=\frac{5}{4}$

P: *Pero tienes que coger el lado completo, a ver como lo haces. Él dice 5:4=x:7 ¿Es cierto eso?*

Es: *No*

P: *¿Por qué no? Vamos a ver, esto son dos rectas, vale, cortadas por las tres paralelas, entonces los segmentos determinados son proporcionales. Es teorema de Thales. Es una proporción. ¿Cuánto vale x?*

E2: $x=\frac{35}{4}$ [851-862].

13. N10 (Conexión). Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD. a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC. b) Calcula x e y (CD y OD).

(Se da un dibujo de dos triángulos formados por dos rectas cortadas en el punto O, se dan todos los lados del triángulo OAB y el lado OC del triángulo ODC)

Esta tarea queda resuelta por el profesor, como se puede apreciar en el siguiente fragmento:

P: *Vamos a hacer la figura, nos dice el segmento $AB \parallel CD$, ¿Por qué son semejantes los Δ ABO y Δ CDO? Halla los lados.*

E: *Porque los ángulos son iguales y los lados proporcionales.*

P: *No me digáis así, tenéis que demostrarlo, luego no hace falta que cumplan las dos, si cumple una es bastante. Bien, los ángulos se ven mejor, son mejor, son iguales, entonces los Δ-os son semejantes, entonces los lados son proporcionales. ¿Cómo calculamos el x e y? Aquí tenemos dos triángulos, vale, tú dices $\frac{10,6}{y}=\frac{8,5}{6}$ entonces y=... Hay que tener cuidado porque en esta figura no se ve bien cuáles son los lados grandes de este triángulo.*

E: *Maestro, entonces de la x sería $\frac{7,2}{x}=\frac{8,5}{6}$, maestro y como ya sabemos y ¿ya podemos cogerla?*

P: *Yo prefiero utilizar los datos dados, porque si tú lo calculas mal, vas a seguir mal. Hay que tener cuidado cuando cogemos la proporción, ¿vale?* [869-882].

14. N11 (Reproducción). Estos dos triángulos tienen sus lados paralelos. ¿Cuánto miden los lados a y b?

(Se da un dibujo con dos triángulos los dos lados de los cuales se conoce)

Una estudiante resuelve la tarea en la pizarra, formando la proporción y encuentra el lado *a* del triángulo grande y el lado *b* del triángulo pequeño, realizando correctamente los cálculos.

15. N12 (Conexión). En un triángulo ABC, la base AB mide 5,7 m y la altura relativa a esa base mide 9,5 m. ¿Cuánto mide el área de otro triángulo semejante a ABC en el que $A'B'$ = 4,14 m?

Esta tarea queda resuelta por uno de los estudiantes, que primero encuentra la altura del triángulo y luego su área. Pablo interviene con algunos comentarios y haciendo dibujos en la pizarra.

16. N14 (Conexión). Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8cm y 13,6cm, respectivamente. Si el área del primero es 26cm^2. ¿Cuál es el área del segundo?

Respecto a esta tarea ya comentamos, al exponer el foco *conceptual,* que el profesor menciona que la razón entre áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, sin dejar la oportunidad a los estudiantes de llegar a esta conclusión por sí mismos y quedan sin entenderlo. La tarea la resuelve Pablo, explicando:

P: ...Venga, aquí podemos poner $\frac{n}{n_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1}=k$ *pues eso nos da la razón de semejanza, y* $\frac{S}{S_1}=k^2$*, ¿vale?... Pues aquí ¿qué hacemos?, como son semejantes, encontramos la razón de semejanza* $\left(\frac{8}{13{,}6}\right)^2=\frac{26}{S_1}$ *... Pues, entonces aquí decimos este área a este como el cuadrado de la razón de semejanza y desde aquí ya despejamos* $S_1=\frac{26\cdot 13{,}6^2}{8^2}$*, simplemente eso, ¿de acuerdo?* [911-923].

17. N15 (Reproducción). Di cuál es la relación entre los radios de dos círculos si la razón entre sus áreas es $\frac{16}{9}$.

Esta tarea, como consecuencia de la tarea anterior, igualmente la resuelve Pablo.

P: ¿Cómo hacemos? (Intentan razonar, pero lo que dicen no es correcto). *A ver, aquí me da ahora la razón de las áreas, entonces yo elevo* $\frac{r}{r_1}$ *al cuadrado, me da* $\frac{16}{9}$. *Acabo de decir. Entonces* $\frac{r}{r_1}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ [935-938].

18. N21 (Reproducción). Halla la ecuación de las siguientes rectas: a) Paralela a 2x – 4y + 3 = 0 y pasa por (4, 0).	

Para que el estudiante que ha salido a resolver esta tarea pueda proceder a su solución Pablo le ofrece las siguientes indicaciones directas:

P: *¿Qué en común tienen estas dos rectas? Por favor, pensad un poquito. Si es una recta y ésta es la paralela, el ángulo de la inclinación es el mismo, es decir la pendiente es igual, ¿de acuerdo? Luego, tienes la ecuación de la recta, calcula la pendiente. ¿Cuál será la pendiente?*

E1: *m=2*

P: *Vamos a ver, hemos dicho que la pendiente de una recta es igual a m que es el coeficiente de x cuando y está despejada. ¿Qué ocurre aquí? Que hay que despejar la y,* $y=\frac{2x}{4}+\frac{3}{4}$, *entonces la pendiente sería* $m=\frac{1}{2}$. *Entonces la ecuación de la recta que pasa por el dicho punto es* $y=\frac{1}{2}(x-4)$, *esta sería la ecuación, si quiero puedo poner en la forma general, sería x-2y-2=0. Es que todo es igual, yo no entiendo* [942-954].

19. N22 (Reproducción). Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al vector v, en los siguientes casos: a) P (–7, 2), v (2, 1).	

Esta tarea queda resuelta por uno de los estudiantes en la pizarra y se acompaña por los comentarios de Pablo, que explica a los demás los procedimientos que se realizan al resolverla.

20. N30 (Reproducción). Determina el punto de corte de las rectas: r: 5x + 4y +3= 0 s: –4x + 2y – 5 = 0	

Una estudiante resuelve esta tarea en la pizarra y Pablo explica que cuando resolvemos un sistema, realmente, estamos calculando el punto de corte de dos rectas y recuerda que hay dos formas de hacerlo. La estudiante prefiere resolver el sistema por el método de sustitución. Con ayuda de Pablo la lleva acabo.

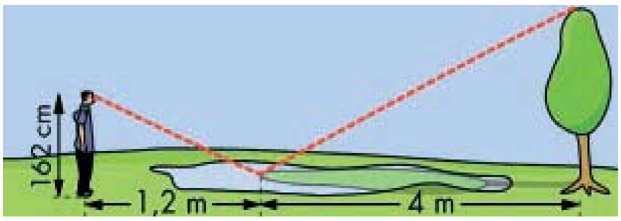
21. N35 (Reproducción). Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes: a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ c) $x^2 + y^2 = 10$

Uno de los estudiantes sale a la pizarra y no sabe por dónde empezar, le sugieren que el centro es (2, -3) y aquí interviene Pablo:

P: Sería (2,-3) y ¿el radio? El radio 4. Vamos a ver, dijimos en su momento que la circunferencia es una línea cerrada y que cada uno de sus puntos P(x, y) está a la misma distancia r del centro C (a, b), r-radio. La distancia del centro hasta cualquier punto de la circunferencia ¿cuál era? $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ *entonces esa la distancia que igual a radio. Elevado al cuadrado tenemos* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$*, entonces comparo la fórmula con la dada y veo que las coordenadas del centro son (2,-3) y 16 ¿no es cuadrado de 4?, pues r=4. Eso se hace así, es muy fácil. ¿Habéis entendido ahora o no?* [996-1004].

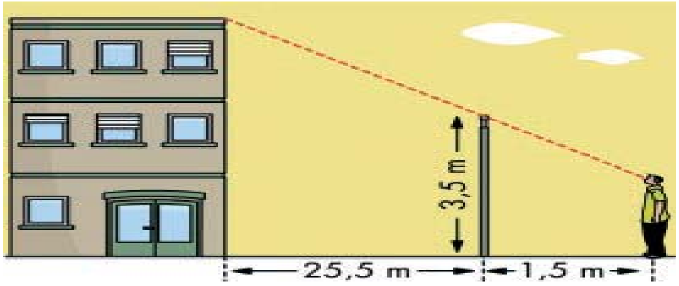
En el c) ya saben identificar las coordenadas y el radio, entre algunos estudiantes lo concluyen correctamente.

22. N40 (Reproducción). Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?



Pablo representa dos triángulos sobre la pizarra e invita a una estudiante resolver la tarea. La proporción que forma la estudiante es $\frac{162}{120}=\frac{h}{4}$, de ahí obtiene h=5,4 **cm**; no cuestiona el resultado y tras el comentario de Pablo, corrige la respuesta.

23. N41 (Conexión). Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165cm de altura, se situó a 1,5m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?



Esta tarea ha resultado difícil para los estudiantes. Pablo pregunta si alguien ha sabido hacerla:

E: *Yo he puesto* $\frac{1,65}{1,5}=\frac{25,5}{h}$

P: *No, ¿alguien lo ha hecho?* [1021-1022]

Deja unos minutos para que piensen; los estudiantes hacen sus supuestos, sin embargo, son erróneos, entonces Pablo resuelve la tarea explicando la solución.

24. N42 (Conexión). Dados los puntos A (–1, 1) y B (3, 4), halla: a) La ecuación de una recta r que pase por A y sea perpendicular a AB. b) La ecuación de una recta s que pase por B y sea paralela al eje X. c) El punto de corte de r y s.

El punto a) de esta tarea lo intenta resolver uno de los estudiantes con la ayuda del profesor, demostrando inseguridad en operar con números.

El punto b) lo resuelve oralmente desde su sitio una de las estudiantes y Pablo explica otra vez para los demás estudiantes, exponiendo en la pizarra cómo es la pendiente de una recta paralela al eje X.

Finalmente, el punto c) lo concluye Pablo, resolviendo en la pizarra.

Según lo expuesto se puede apreciar la intervención constante del profesor en la resolución de tareas, mayormente mediante las indicaciones explicitas y correcciones directas, incluso los datos de tareas y los dibujos, los hace él mismo en la pizarra, dejando poco protagonismo a los estudiantes.

El siguiente gráfico refleja el tipo de tareas, según la complejidad y situación/contexto; propuestas por Pablo durante las sesiones grabadas.

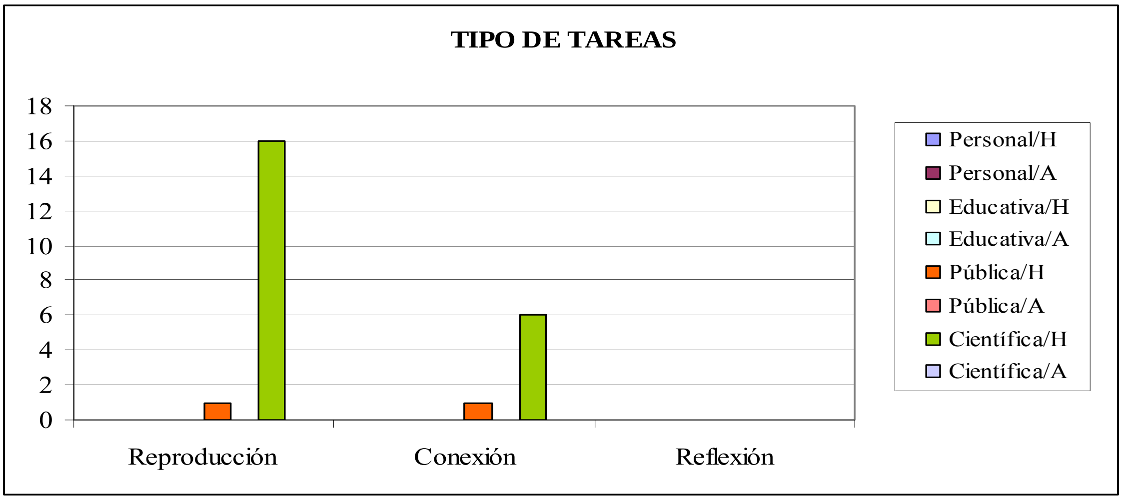


Gráfico 3: Tipo de tareas propuestas por Pablo durante las siete sesiones

Resumiendo el tipo de tareas que ha manejado Pablo en sus sesiones, podemos destacar el trabajo en tareas, la mayoría de las cuales son ejercicios tipo (tareas de grupo de reproducción) y otras más complejas, de más de un paso de procesamiento, donde se requiere identificación y conexión de conceptos y sus propiedades (tareas de grupo de conexión). No se han contemplado la ejecución de tareas del grupo de reflexión durante el abordaje de este bloque. Dentro de estas tareas la mayoría son planteadas en situaciones *científicas* (matemáticas) y tan solo dos tareas en situaciones *públicas*, todas ellas en contextos *hipotéticos*.

De acuerdo con el análisis de las sesiones grabadas, el siguiente gráfico visualiza el perfil de Pablo según las OTL consideradas en nuestro estudio.

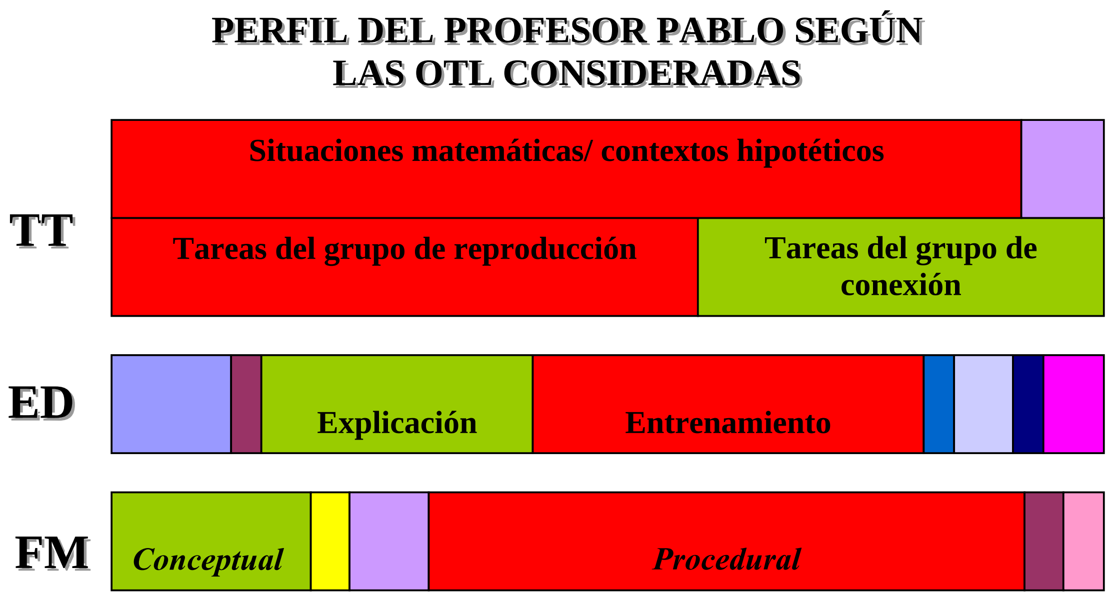


Gráfico 4: Perfil del profesor Pablo según las OTL consideradas

De este modo, Pablo ha puesto un mayor énfasis en los procedimientos y conceptos, por medio de entrenamiento y explicación; ha utilizado trabajo en grupo-clase o individual, ha recurrido al libro de texto como al material didáctico único; ha manejado, mayormente, tareas del grupo de reproducción, pero también del grupo de conexión, planteadas en situaciones matemáticas y contextos hipotéticos.

IV.1.2. Análisis de las clases grabadas en video desde la perspectiva de las OTL proporcionadas por la profesora Mery (Caso 2)

En este subapartado analizamos las seis sesiones grabadas en vídeo (tres dedicadas al bloque de Álgebra y Elementos de Análisis Matemático y otras tres al de Geometría) y destacaremos los rasgos más característicos de las sesiones de la profesora Mery con la síntesis posterior de sus actividades, presentada mediante los gráficos que reflejan las categorizaciones establecidas para las OTL.

Los tópicos grabados de Álgebra y Elementos de Análisis Matemático abarcan el concepto de logaritmo; y los de Geometría, vectores en el espacio.

IV.1.2.1 Análisis por episodios

Análisis de la Sesión 1 de Mery

La *primera sesión* se empieza por el comentario de la profesora de los errores cometidos por los estudiantes en el examen del tema anterior. Mery pone dos ejemplos de problemas en los que el error ha sido cometido por la mayoría y explica la resolución correcta con el fin de corregir el malentendido. Alaba a dos estudiantes que han realizado el examen muy bien y dice que al final de la clase les repartirá los cuadernos a todos para que vean sus trabajos [1er episodio]. Sigue la sesión con la introducción del concepto de logaritmo como la solución de ecuaciones exponenciales. Mery parte en su discurso de un caso particular, generalizándolo a continuación para cualquier ecuación exponencial. De las condiciones que cumple la función exponencial hacen inferencias para la función logarítmica y deducen sus propiedades, comprobándolas con algunos ejemplos [2^{o} episodio]. Mery encomienda tareas para casa y propone hacer algunos ejercicios del cálculo de logaritmos. Durante esta actividad tres estudiantes trabajan en la pizarra con la ayuda de sus compañeros y las sugerencias puntuales de la profesora [3er episodio].

[1.1] Revisión de errores del examen [1-26]

Evento desencadenante: Mery comenta los resultados y errores cometidos en examen del tema anterior.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Conceptual – Mery promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, exponiendo los errores de sus estudiantes, relacionados con la comprensión conceptual errónea [1-10].

Procedural – Mery promueve la adquisición de destrezas y procedimientos en la resolución de desigualdades exponenciales [11-24].

Estrategias didácticas

Evaluación – Mery explícitamente evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase [1, 24-26].

Explicación – Mery explícitamente explica las ideas y procedimientos relacionados con los errores del examen [1-24].

Evento de término: La profesora acaba los comentarios con el fin de empezar el tema siguiente.

[1.2] Concepto de logaritmo [27-82]

Evento desencadenante: Mery introduce el concepto de logaritmo como la solución de las ecuaciones exponenciales.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Foco matemático

Conceptual – Mery promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, introduciendo la definición del logaritmo [27-50].

Structural – Mery promueve la conexión entre diferentes entes matemáticos, destacando la relación directa del logaritmo con la función exponencial e infiriendo las propiedades de la función logarítmica a partir de las de la exponencial [52-57, 74-76].

Estrategias didácticas

Explicación – Mery explícitamente explica las ideas y procedimientos relacionados con el tópico [27-57, 73-82].

Cuestionamiento – Mery explícitamente utiliza una secuencia de preguntas que conducen a los estudiantes a aclarar las ideas existentes sobre qué es solución de una ecuación [58-72].

Evento de término: La profesora termina la explicación del tópico.

[1.3] Trabajo en tareas [83-107]

Evento desencadenante: Mery encomienda deberes para casa y empiezan a hacer unos ejercicios en el aula.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Mery promueve la adquisición de técnicas de cálculo de logaritmos a través de ejecución de ejercicios [83-107].

Reasoning – Mery promueve la articulación de las justificaciones y argumentos por parte de los estudiantes, invitando a éstos a que razonen sobre porqué el logaritmo puede tener valores negativos [99-102].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Mery ofrece indicaciones explícitas para facilitar la comprensión de los procedimientos [97, 106].

Tipo de tarea

N 453. Calcular las siguientes expresiones:

$\log_3 81 \qquad \log_{0,1} 1000 \qquad \log_2 16 \qquad \log_{2/3} 16/81$

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 454. Calcular:

$$\log_2 4^{1/5} \qquad \log_{1/3} \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{81}} \qquad \lg \frac{100}{\sqrt{10}} \qquad \log_5 25\sqrt[3]{5} \ \ldots$$

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 455. Calcular:

$$5^{2\log_5 12} \qquad 7^{0,5\log_7 16} \qquad 100^{\lg 11} \qquad 9^{\log_3 8} \qquad \ldots$$

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión. Mery llama la atención de los estudiantes sobre cómo ejecutar uno de los ejercicios que había encomendado para hacer en casa y lo ejemplifica en la pizarra.

Análisis de la Sesión 2 de Mery

La *segunda sesión* se dedica a la resolución de tareas de los temas anteriormente tratados, tales como igualdades e desigualdades exponenciales, definición del dominio de funciones exponenciales y ecuaciones trigonométricas, con el fin de ejercitar el conocimiento previo [un episodio]. En esta sesión seis estudiantes realizan tareas en la pizarra con algunas sugerencias de Mery que interviene cuando le parece que hay que llamar la atención de los estudiantes sobre el proceso de la resolución o donde suelen cometer errores: les propone diferentes situaciones para que puedan seguir posibles soluciones.

[2.1] Revisión de los contenidos matemáticos tratados anteriormente [108-202]

Evento desencadenante: Mery invita a los estudiantes a trabajar en la resolución de problemas de los temas tratados anteriormente.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Mery promueve el desarrollo de técnicas de resolución de desigualdades exponenciales, llamando la atención de los estudiantes hacia los errores que suelen cometer [118-131].

Estrategias didácticas

Ejercitación del conocimiento previo – Mery explícitamente centra la atención de los estudiantes en los contenidos tratados anteriormente [108-202].

Exploración – Mery explícitamente invita a los estudiantes a que articulen sus conclusiones [132-135].

Explicación – Mery explícitamente explica cómo se define el dominio de una función de tipo exponencial [136-142, 150-156]

Entrenamiento – Mery explícitamente ofrece consejos e indicaciones para facilitar la comprensión de los estudiantes [143-148, 168-173, 180].

Tipo de tarea

N 423. Resolver la ecuación: $5^{x+2} - 9 \cdot 5^{x-1} = 116$

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 446a-447a. Resolver desigualdades: $9\cdot 3^{2x} - 82\cdot 3^{x} + 9 \geq 0$; $11\cdot 5^{x+2} - 2\cdot 5^{1-x} < 5$

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N. Definir el dominio de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt[7]{\frac{2}{2x-3}} \ ; \quad y = \left(\frac{3}{x-4}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N. Hallar sen α si se da $2\cos^2(\pi - \alpha) + 5\operatorname{sen}\alpha + 2 = 0$

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 3 de Mery

En la *tercera sesión* vuelven a tratar el tema de los logaritmos. Mery pide a una estudiante que escriba en la pizarra las propiedades de la función logaritmo y ella explica e interpreta estas propiedades [1er episodio]. Empiezan a resolver tareas del libro de texto[69]. La primera tarea la resuelve Mery, mencionando que es un ejemplo distinto y que por eso va a explicar qué es lo que se les pide. Se les dan diferentes expresiones como, por ejemplo, $\frac{0{,}1\sqrt{b^3}}{c^3 b^2}$ donde a, b, c>0 y han de calcular su lg y siguen con el cálculo de las expresiones logarítmicas. Durante esta sesión cuatro estudiantes trabajan en la pizarra, Mery les invita a salir consultando antes en su cuaderno del profesor [2º episodio]. La sesión termina por la asignación de tareas para casa.

[69] Aquí y en adelante referimos a dos libros distintos: para la asignatura Álgebra y Elementos de Análisis Matemático se usa el libro de texto de Gevorgyan y Sahakyan (2001). Álgebra y elementos de análisis matemático 9; y, en Geometría, trabajan con el libro de texto de Atanasyan et. al. (2001). Geometría 9.

[3.1] Propiedades de logaritmo [203-210]

Evento desencadenante: Mery invita a una estudiante a escribir en la pizarra las propiedades básicas del logaritmo y ella las interpreta y explica.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Conceptual – Mery promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, familiarizándolos con las propiedades del logaritmo [206-207].

Estrategias didácticas

Explicación – Mery explícitamente explica las propiedades del logaritmo [206-207].

Evento de término: Mery termina de explicar.

[3.2] Trabajo en tareas [211-248]

Evento desencadenante: Mery invita a los estudiantes realizar actividades del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Procedural – Mery promueve la adquisición de técnicas de cálculo de logaritmos, a través de exposición de ejemplos de aplicación de las propiedades del logaritmo [211-248].

Estrategias didácticas

Entrenamiento – Mery explícitamente ofrece consejos e indicaciones para facilitar la comprensión de los procedimientos [236, 241].

Evaluación – Mery explícitamente evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase [226, 242].

Diferenciación – Mery explícitamente trata a los estudiantes en modo diferente, en términos del tipo de resultado esperado [242-243].

Tipo de tarea

N 466. Calcular lg de las siguientes expresiones:

$$100\sqrt{a^3b^2c}\,; \qquad \frac{0{,}1\sqrt{b^3}}{c^3b^2} \qquad \text{a, b, c>0}$$

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 471. Calcular: $10^{1-2\lg 5}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,5}6-2}$ $2^{\log_8 27+3}$ $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{49}9-1}$ …

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 472. Calcular la expresión: $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$; $(5^{\log_{25}9}+3^{\log_9 25})^{\log_2 5}$

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión. Mery encomienda deberes para casa.

Análisis de la Sesión 4 de Mery

La *cuarta sesión* es dedicada al tema de los vectores en el espacio. La profesora empieza mencionando que ya conocen vectores en el plano y ahora juntos van a investigarlos en el espacio. Así, van recordando la definición de vector, su representación y notación, así como módulo y dirección de los vectores. A continuación tratan vectores iguales y opuestos, y posiciones de los vectores en el espacio. Al concluir la idea del vector Mery da ejemplos de física sobre vectores en el espacio y en el plano [1er episodio]. Encomienda tareas para casa y empiezan a realizar otras en el aula. Mery advierte a los estudiantes que, en comparación con los problemas de geometría que habían resuelto en las sesiones anteriores, éstos son muy fáciles e invita a una estudiante trabajar en la pizarra Las tareas demandadas son de tipo encontrar la longitud de los vectores representados como aristas de un paralelepípedo, tetraedro, etc., indicar pares de vectores iguales y justificar su igualdad partiendo de las propiedades de estas figuras geométricas y confirmar o refutar afirmaciones dadas [2o episodio].

[4.1] Vectores en el espacio [249-349]

Evento desencadenante: Mery introduce el concepto de vectores en el espacio basándose en su definición y propiedades en el plano.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Conceptual – Mery promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, introduciendo la idea del vector en el espacio [261-310].

Structural – Mery promueve el desarrollo de lazos entre los conceptos matemáticos y los de física, poniendo ejemplos de física de los vectores en el plano y en el espacio [330-344].

Derivational – Mery promueve el desarrollo de los nuevos conocimientos sobre los vectores en el espacio a partir de los existentes acerca de los en el plano [251-274].

Procedural – Mery promueve la adquisición de las técnicas de representación de los vectores en el mismo plano [300-313].

Estrategias didácticas

Activación del conocimiento previo – Mery explícitamente activa los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de aplicarlos [256-274].

Explicación – Mery explícitamente explica las ideas y procedimientos relacionados con el tópico [256-310]

Cuestionamiento – Mery explícitamente utiliza una secuencia de preguntas que conducen a los estudiantes a aclarar las ideas existentes sobre cómo proceder en la representación de dos vectores cruzados en el mismo plano [312-329].

Evento de término: Mery termina de exponer el tópico.

[4.2] Trabajo en tareas [350-409]

Evento desencadenante: Mery propone realizar tareas del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Reasoning – Mery promueve la articulación de las justificaciones y argumentos por parte de los estudiantes [373-395, 404-406].

Efficiency – Mery promueve la comprensión de técnicas de flexibilidad y elegancia, enseñando cómo representar una pirámide para que se vean bien sus aristas y caras [359-362].

Problem solving – Mery promueve la implicación de los estudiantes en la resolución de problemas no triviales y no rutinarios [357-409].

Estrategias didácticas

Exploración – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en la resolución de problemas y que articulen sus conclusiones [373-393, 398-498].

Cuestionamiento – Mery explícitamente utiliza una secuencia de preguntas que conducen a los estudiantes a aclarar las ideas [373-393].

Tipo de tarea

N 321. El paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tiene las siguientes medidas: AD=8cm, AB=9cm, AA_1=12cm. Hallar la longitud de los siguientes vectores:

a) CC_1, CB, CD,

b) DC, DB, DB_1.

Procesos cognitivos**:** Reproducción

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 323. Se da una pirámide con un triangulo equilátero en la base. Los puntos M, N, P y Q son puntos medios de las aristas AB, AD, DC, BC.

a) Halla todos los pares de vectores iguales,

Determina qué cuadrilátero se ha formado con los puntos MNPQ.

Procesos cognitivos: Reflexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 324. Di si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) Dos vectores colineales con el otro no nulo son colineales entre si,
b) Dos vectores unidireccionales con el otro no nulo son unidireccionales entre si,
c) Dos vectores colineales con el otro no nulo son unidireccionales entre si.

Procesos cognitivos: Reflexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 5 de Mery

Mery empieza la *quinta sesión* formulando cuestiones a los estudiantes sobre el tema impartido el día anterior. Estas preguntas se orientan en algunos casos a evidenciar si los estudiantes han aprendido las definiciones y modos de representar los conceptos estudiados y sus propiedades; en otros, a comprobar si entienden los *porqués*. Durante este episodio interroga a catorce estudiantes [1er episodio], mostrando su intención de involucrar al mayor número posible de sus estudiantes. Después pasan al tema de suma de vectores. La profesora junto con los estudiantes recuerda los métodos del triángulo y del paralelogramo para sumar vectores, exponiendo todo el proceso en la pizarra [2^{o} episodio]. A continuación Mery encomienda tareas para casa y propone resolver otras. Resuelve un ejemplo para que los estudiantes vean cómo se ejecuta ese tipo de tareas. Las tareas demandadas son de tipo demostrar que la suma de dos vectores de una figura geométrica es igual a la suma de otros dos o simplificar la expresión dada. En esta actividad en la pizarra han trabajado tres estudiantes con algunas sugerencias de la profesora. Al resolver la tarea, Mery le hacía preguntas de teoría a cada uno de los estudiantes y según ambas cosas evaluaba poniendo la nota en su cuaderno [3er episodio].

[5.1] Revisión del contenido matemático tratado en la sesión anterior [410-488]

Evento desencadenante: Mery organiza la discusión de grupo-clase acerca del tema impartido en la última sesión de Geometría.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Reasoning – Mery promueve la articulación de las justificaciones y argumentos por parte de los estudiantes, planteándoles preguntas [435, 484].

Estrategias didácticas

Activación del conocimiento previo – Mery explícitamente activa los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de aplicarlos [410-488].

Participación – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en el proceso de intercambio público de las ideas [410-488].

Exploración – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en la articulación de sus conclusiones [435-440, 481-486].

Evento de término: Terminan la discusión.

[5.2] Suma de vectores [489-540]

Evento desencadenante: Mery introduce el tema: Suma de vectores.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Conceptual – Mery promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, introduciendo la idea de suma de vectores en el espacio [536-540].

Derivational – Mery promueve el desarrollo de los nuevos conocimientos sobre los vectores en el espacio a partir de los existentes acerca de los en el plano [489-540].

Procedural – Mery promueve la adquisición de los procedimientos para la suma de los vectores en el espacio [490-504].

Estrategias didácticas

Activación del conocimiento previo – Mery explícitamente activa los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de aplicarlos [489-540].

Explicación – Mery explícitamente explica las ideas y procedimientos relacionados con el tópico [490-504].

Evento de término: La profesora termina la explicación.

[5.3] Trabajo en tareas [541-593]

Evento desencadenante: Mery encomienda deberes para casa y empiezan a realizar tareas en el aula.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Problem solving – Mery promueve la implicación de los estudiantes en la resolución de problemas no triviales y no rutinarios [541-593].

Efficiency – Mery promueve la comprensión de técnicas de flexibilidad y elegancia, llamando la atención de los estudiantes a que organicen bien los datos del problema y procedan en su resolución paso por paso [546-552, 574-576]

Estrategias didácticas

Explicación – Mery explícitamente explica cómo proceder en la resolución de un problema [541-551].

Exploración – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en la resolución de problemas y que articulen sus conclusiones [554-573].

Cuestionamiento – Mery explícitamente utiliza una secuencia de preguntas que conducen a los estudiantes a proceder en la resolución de problemas [576].

Evaluación – Mery explícitamente evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase [571, 580, 585].

Tipo de tarea

N 328. Se da el tetraedro ABCD. Demostrar que:

a) AB+BD=AC+CD; b) AB+BC=DC+AD; c) DC+BD=AC+BA

Procesos cognitivos**:** Reflexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 329. Indicar todos los vectores que se forman de las aristas del paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ y que:

a) son opuestos al vector CB
b) son opuestos al vector B_1A

c) son iguales al vector -DC

d) son iguales al vector - A_1B_1

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 335. Simplificar expresiones:

a) AB+MN+BC+CA+PQ+NM

b) FK+MQ+KP+AM+QK+PF

c) KM+DF+AC+FK+CD+CA+MP

d) AB+BA+CD+MN+DC+NM

Procesos cognitivos**:** Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión.

Análisis de la Sesión 6 de Mery

En la *sexta sesión* Mery hace la corrección de algunos problemas del examen de álgebra del tema de logaritmo y reparte los cuadernos de examen a los estudiantes [1er episodio]. Siguen con el tema de multiplicación del vector por un número y Mery plantea unas situaciones para que los estudiantes participen en su resolución [2^{o} episodio]. Enseguida empiezan con la resolución de tareas del libro de texto de tipo encontrar vector *x* de una expresión e indicarlo en el paralelepípedo u otra figura dada [3er episodio].

[6.1] Corrección de algunos errores del examen de Álgebra [594-628]

Evento desencadenante: Mery destaca los errores cometidos en el examen.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Conceptual – Mery promueve el desarrollo conceptual de los estudiantes, explicando qué es el dominio de una función [601-611].

Procedural – Mery promueve la adquisición de las técnicas de definición del dominio de una función logarítmica [615-627].

Structural – Mery promueve la conexión entre diferentes entes matemáticos, destacando la relación directa del logaritmo con la función exponencial e infiriendo las propiedades de la función logarítmica a partir de las de la exponencial [603-610].

Estrategias didácticas

Explicación – Mery explícitamente explica las ideas y procedimientos relacionados con los errores cometidos en el examen [601-627].

Entrenamiento – Mery explícitamente ofrece consejos e indicaciones para facilitar la comprensión de los procedimientos [615-627].

Evaluación – Mery explícitamente evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase [594-595, 627].

Evento de término: La profesora termina la explicación.

[6.2] Multiplicación del vector por un número [629-677]

Evento desencadenante: Mery plantea unas situaciones para que los estudiantes participen en su resolución.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Problem solving – Mery promueve la implicación de los estudiantes en la resolución de problemas no triviales y no rutinarios [653-677].

Estrategias didácticas

Exploración – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en la resolución de problemas y que articulen sus conclusiones [638-648].

Participación – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en el proceso de intercambio público de ideas, soluciones y respuestas [653-677].

Evento de término: Terminan resolver la situación planteada por Mery.

[6.3] Trabajo en tareas [678-700]

Evento desencadenante: Mery propone realizar tareas del libro de texto.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:

Foco matemático

Problem solving – Mery promueve la implicación de los estudiantes en la resolución de problemas no triviales y no rutinarios [678-700].

Estrategias didácticas

Exploración – Mery explícitamente compromete a los estudiantes en la resolución de problemas y que articulen sus conclusiones [678-700].

Tipo de tarea

N 339. Se da el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Indica el vector X que tiene su origen y extremo en los vértices del paralelepípedo y que:

a) $DC+D_1A_1+ CD_1+X+A_1C_1=DB$

b) $DA+X+D_1B+AD_1+BA=DC$

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

N 340. Se da un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$. Indica el vector X que tiene su origen y extremo en los vértices del prisma y que:

a) $AA_1+B_1C-X=BA$

b) $AC_1-BB_1+X=AB$

c) $AB_1+X=AC-X+BC_1$

Procesos cognitivos: Conexión

Situación: Científica

Contexto: Hipotético

Evento de término: Fin de la sesión

IV.1.2.2. Análisis por dimensiones

En total, durante las seis sesiones de Mery, hemos registrado 14 episodios que representan oportunidades proporcionadas a los estudiantes. En las siguientes líneas enunciamos cómo se han manifestado los diferentes indicadores de las OTL dentro de los episodios identificados.

a) Focos matemáticos

El foco *conceptual* se presenta en las sesiones de Mery cuando introduce un tema nuevo [1.2], [3.1], [4.1], [5.2] o cuando expone los errores de sus estudiantes, relacionados con la comprensión conceptual errónea [1.1] y [6.1]. Así, en la primera sesión Mery pone dos ejemplos de una tarea del examen anterior con el fin de corregir el malentendido de los estudiantes:

P:… ahora voy a poner el ejemplo que teníais en el examen $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}$ *y* $\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$. *Poned atención, por favor. No es siempre que se pueda poner el signo de igualdad entre estas dos expresiones. En el segundo caso bajo el radical podemos tener cualquier número, ahora no voy a referirme al denominador. En el primer caso la base es solo número* *positivo.* $x^{\frac{1}{n}}$ *está definida solo para los números positivos, x ≥ 0, pero* $\sqrt[n]{x}$ *para n=2k+1,* $x \in R$*. Entonces, ¿cómo se pueden igualar estas dos funciones o considerar el dominio de una como el de la otra? Otra cosa cuando x-2>0, entonces sí, se puede* [2-10].

El foco *conceptual* está presente, como hemos mencionado, cuando se introduce un tópico nuevo y éste se acompaña, principalmente, por la estrategia didáctica *explicación* y en algunos casos *cuestionamiento*. A continuación ejemplificamos cómo se observa el foco *conceptual* en las sesiones de Mery. El primer ejemplo refiere a la explicación del concepto de logaritmo.

P: ¿Qué es un logaritmo? Cuando hemos estudiado ecuaciones exponenciales, hemos dicho que ecuaciones de tipo $a^x=b$ *donde a>0, a≠1 y b>0 son exponenciales [...] En particular, ¿cuál es la solución de la ecuación* $2^x=8$*? (3) x=3. ¿Qué nos muestra el x este? x es aquel número al elevar 2 al él, nos da 8. Ahora, la ecuación tipo* $2^x=7$ *también tiene solución, además, x es un número al elevar 2 nos tiene que dar 7. Si queremos resolver la ecuación hemos de pensar al qué numero elevar 2 para obtener 7. Este mismo número se llama logaritmo con la base 2 de 7,* $x=\log_2 7$*, es la solución de la ecuación nuestra, es decir si elevamos 2 al* $\log_2 7$ *vamos a tener 7. Logaritmo se llama la solución de la ecuación exponencial. En la ecuación anterior también podemos escribir como logaritmo, es decir* $x=\log_2 8$*, x=3[…] Ahora en el caso general* $x= \log_a b$ [30-52].

El segundo ejemplo refleja cómo Mery, mediante el *cuestionamiento,* intenta promover el desarrollo conceptual de sus estudiantes. Este extracto se refiere al tópico de vectores en el espacio:

P: *Vamos a ver,* ***¿qué diferencia hay entre un segmento y un vector?***

E1: *(Sale a la pizarra, dibuja un vector AB).*

P: ***¿Se puede leer vector BA?***

E1: *No.*

P: ***¿Y segmento BA?***

E1: *Si.*

P: *Entonces,* ***¿cuál es la diferencia?***

E1: *Un vector tiene origen y extremo.*

P: ***Un vector tiene dirección y longitud, y ¿segmento?***

E1: *Solo longitud.*

P: ***¿Qué entendemos por la longitud de un vector?***

E1: *Es la longitud del segmento AB.*

P: ***¿Cómo se escribe?***

E1: *|AB|*… [410-423].

El foco *procedural* se observa cuando Mery promueve la adquisición de técnicas de cálculo con logaritmos [1.3] y [3.2] y procedimientos para presentar dos vectores cruzados en el mismo plano [4.1], cuando llama la atención de los estudiantes hacia los errores procedimentales que habían cometido en el examen [1.1], [2.1] durante la resolución de tareas, y cuando explica los métodos de triángulo y paralelogramo para sumar vectores en [5.2]. Mery normalmente promueve la adquisición de técnicas y destrezas, mediante las estrategias didácticas *entrenamiento* y *cuestionamiento*. Dos ejemplos que presentamos a continuación ilustran lo comentado. En el primer ejemplo la profesora da indicaciones explicitas para corregir el error cometido en el examen:

P:… Ahora si la expresión que está bajo el radical no es simplemente x, sino una expresión fraccional o cualquier otra, por ejemplo, $y=\sqrt[7]{\frac{2}{2x-3}}$, $y=\left(\frac{3}{x-4}\right)^{\frac{1}{7}}$ *tenemos que definir sus dominios. Ahora, como aquí tenemos una fracción, entonces el denominador ha de ser distinto de cero. Entonces la condición adicional es* $x\in R \cap 2x-3\neq 0$ [...] *Para la segunda función tenemos que exigir que* $\frac{3}{x-4}\geq 0$*, ¿correcto? ¿Cuándo una fracción ≥ 0? Cuando su nominador y denominador tienen el mismo signo o nominador es igual a cero. Entonces, ¿esta expresión es equivalente a cuál? En el nominador tenemos un número positivo distinto de cero, entonces en el signo de la fracción solo puede influir el signo de denominador. Es decir* $x-4>0$ [137-155].

Y en el segundo ejemplo utiliza una secuencia de preguntas para aclarar el procedimiento de presentar dos vectores cruzados en el mismo plano:

P: … ***¿Y qué hacemos si los vectores se encuentran en dos rectas cruzadas?*** *(Muestra con las manos como serían).* ***¿Qué hacemos? Sabemos que…***

E: *Se puede presentar un vector igual.*

P: ***Es decir, sabemos que desde cualquier punto se puede llevar vector igual al vector dado. ¿Cómo lo hacemos?***

Es: *(Dicen algo inseguro).*

P: ***Sabemos que por el punto que no pertenece a la recta dada se puede pasar otra paralela a esta. Entonces, ¿qué hacemos?***

Es: *Pasamos una recta paralela.*

P: ***¿Luego?***

Es: *Indicamos la dirección.*

P: ***No, todavía la dirección no. Medimos la longitud del vector dado. El segmento igual a este desprendemos ¿dónde?***

E: *En la recta paralela.*

P: ***Eso, y ¿qué elegimos?***

Es: *Dirección* [312-328].

El foco *derivational* se presenta en las sesiones de Mery cuando prepara a sus estudiantes para tratar un tema nuevo a partir de los conocimientos existentes mediante la a*ctivación del conocimiento* sobre los contenidos anteriormente tratados. Es el caso de la introducción del tópico relacionado con los vectores en el espacio [4.1] y [5.2] que parte de los conocimientos de los estudiantes sobre el concepto de vector en el plano, se activan tanto los conocimientos conceptuales como procedimentales de los estudiantes.

P: Ahora introducimos los vectores. ***Ya conocéis los vectores en el plano, ahora vamos a investigar estos vectores en el espacio****. ¿Está claro? Son vectores que conocéis. Vamos a intentar hacerlo juntos...* [251-253].

P:… Suma de los vectores. ***Está claro que no es novedad para vosotros. Sabemos que en el plano a cualquier vector dado se puede llevar otro igual por el cualquier punto****. […] ¿Cuántos métodos de sumar vectores sabemos? (Dos, método del triángulo y del paralelogramo)* [489-494].

El foco *structural* se ha observado cuando Mery explica que las condiciones que imponemos a la función logarítmica vienen dadas por la relación directa de ésta con la función exponencial [1.2]:

P: …Ahora, ***ya que el logaritmo tiene relación directa con la función exponencial, entonces aquí también se cumplen las mismas condiciones. Es decir, la base del logaritmo es a>0, a≠1 y de aquí b>0.*** *Es decir, que log_{-3} 4 no existe, $log_1$10 no existe ya que uno elevado a ningún número nos da 10, y log_5-25 no existe* [52-57].

O cuando deducen las propiedades del logaritmo en la igualdad logarítmica fundamental (a^{logab}=b) [1.2] y cuando Mery pone ejemplos de física de los vectores en el plano y en el espacio [4.1] para enfatizar los lazos entre los conceptos matemáticos y los de física.

P: *... Por ejemplo,* ***de los vectores en el plano, vosotros habíais visto valores vectoriales de física tales como la velocidad, fuerza. . ¿Y del espacio qué vectores habéis visto?***

Por ejemplo, partículas cargadas de tensión (electricidad), E ¿no? *[...]*

Es: *Lo hemos visto muy por encima.*

P: *Bueno, y* ***¿la carga magnética?***

Es: *Igual.*

P: *Bueno,* ***¿todas esas cargas qué crean?***

Es: *Campos.*

P: *Eso.* ***¿Qué hacen las cargas en sus campos? Se mueven, ¿no? Se mueven por las direcciones diferentes. Es decir, los trayectos de sus movimientos ¿qué son?***

Es: *Son vectores*

P: *Si, son vectores.* ***Esa sería la idea de un vector en el espacio****. Ya no es en el plano, ¿claro? Sino en el espacio* [330-346].

El foco *efficiency* se ha registrado en varias ocasiones: una, es cuando Mery enseña cómo representar una pirámide para que se vean bien sus aristas y caras [4.2] y la otra, es cuando recuerda que la estrategia para simplificar la expresión de la suma es buscar componentes opuestos y suprimirlos [5.3].

P: *...simplificar la expresión.* ***Quienes pueden simplificar sin dibujo, que lo hagan, quienes no, que dibujen los vectores****.* ***Cuando simplificamos una expresión de suma, ¿Qué hacemos, qué buscamos?***

E2: *Miramos si hay componentes opuestos para reducirlos* [572-577].

Asimismo, Mery presta atención especial al hecho de que los estudiantes organicen bien los datos del problema y procedan en su resolución paso por paso [5.3], [6.2].

El foco *problem solving* se ha observado en tres episodios durante las sesiones dedicadas a los tópicos de geometría [4.2], [5.3] y [6.2]. En [4.2] se plantea un problema (tarea 16 en nuestra asignación) que comentamos a continuación al ejemplificar el foco *reasoning*. En la resolución de este problema los estudiantes han de conocer y manejar con cierta fluidez las propiedades de la pirámide, de punto medio de los triángulos, de rectas paralelas y saber justificar sus respuestas basándose en los teoremas correspondientes. En el tercer episodio de la quinta sesión [5.3] se propone un problema de demostración (tarea 19), que se puede llevar a cabo gráficamente o formalmente aplicando la propiedad conmutativa y asociativa de suma de los vectores. En [6.2] la profesora pide a un estudiante que dibuje dos vectores, cuyos extremos coinciden, y que encuentre su suma. El estudiante intenta hacer construcciones con otros vectores complementarios, pero complica el dibujo, entonces Mery invita a una estudiante para que lo corrija y así con su ayuda llevan a cabo la tarea. Durante el foco *problem solving* Mery usa estrategias didácticas *exploración* y *participación*.

En las sesiones de Mery se observa el foco *reasoning* cuando ella invita a los estudiantes a argumentar sus respuestas y decisiones, y normalmente lo acompaña con la estrategia didáctica *cuestionamiento y exploración*. En el tercer episodio de la primera sesión [1.3] hemos registrado el foco *reasoning* cuando Mery pregunta a los estudiantes por qué el logaritmo puede obtener valores negativos; a continuación exponemos el ejemplo:

P: *Bien, atención aquí: a diferencia de la expresión que está bajo el signo de log, el logaritmo sí puede tener valores negativos, como hemos visto.* ***¿Por qué es así? ¿De qué se deduce?*** *De* $a^x = b$*…*

Es: *Del dominio de la función* $a^x = b$. [99-102].

El fragmento que sigue surge durante la resolución de una tarea en [4.2] y refleja cómo Mery promueve el desarrollo de la argumentación y razonamiento en sus estudiantes:

P: *Bueno, ahora se dan cuatro puntos medios de dos aristas de la base y dos de lateral de tal modo que se forma un cuadrilátero. Has de indicar todos los pares de vectores iguales que se han formado. ¿Puedes? Dínoslos.*

E2: *MN y PQ.*

P: ***¿Por qué son iguales?***

E2: *Porque tienen la misma dirección.*

P: ***¿Por qué?***

E2: *Porque se encuentran en dos rectas paralelas.*

P: ***¿Y por qué son paralelas?***

E: *Porque la figura que se ha formado es un paralelogramo.*

P: ***Y yo digo, no, que es un trapecio.***

E: *Porque si en un triángulo unimos los puntos medios de dos lados, la línea media es paralela al tercer lado. Y por otro lado, tenemos dos rectas paralelas a la tercera, entonces son paralelas entre si* [373-387].

Otro fragmento extraído de [5.1], ejemplifica el uso del foco *reasoning*:

P: *¿Cuál sería el vector colineal al vector nulo?*

Es: *Cualquiera.*

P: ***¿Por qué?***

E: *Porque en el plano por el punto que no pertenece a la recta dada siempre se puede pasar una recta paralela a la dada* [481-486].

El siguiente gráfico representa la distribución de los focos matemáticos durante las sesiones de Mery:

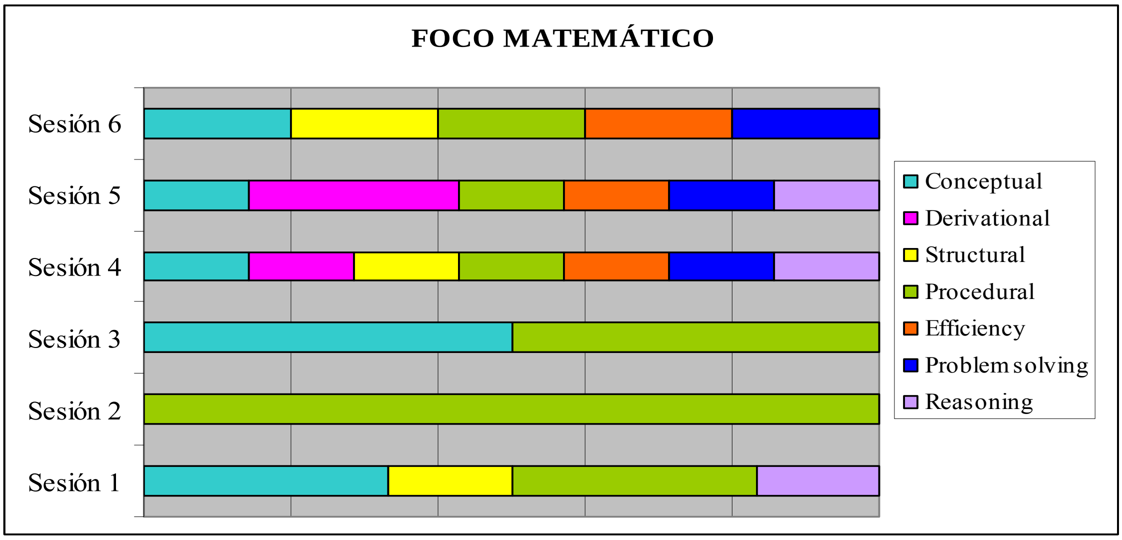


Gráfico 5: Distribución de los diferentes focos matemáticos en las seis sesiones de Mery

El análisis de las sesiones de Mery revela la intención de la profesora de atender diferentes facetas del conocimiento matemático de una manera más o menos equilibrada, aunque con relativamente mayor énfasis en los conceptos y procedimientos, destacando las conexiones y relaciones de los entes matemáticos tratados. Asimismo, pone énfasis en los focos *problem solvinig, efficiency y reasoning*.

b) Estrategias didácticas

Las observaciones de las sesiones de Mery han mostrado el uso frecuente de la estategia didáctica *explicación* [1.1], [1.2], [2.1], [3.1], [4.1], [5.2], [5.3], [6.1]. Las explicaciones de Mery se presentaban como la trasmisión verbal o la exposición en la pizarra de los conceptos, propiedades, tareas, etc., apoyandose sobre dibujos cuando era preciso, poniendo ejemplos y dirigiendose a los estudiantes con preguntas puntuales para comprobar si van enetendiendo lo que explica.

Mery usaba la estrategia *cuestionamiento* [1.2], [4.1], [4.2], [5.3], [6.2] para ayudar a los estudiantes, mediante peguntas orientadoras, llegar a una conclusión, respuesta o solución. Un ejemplo del uso de esta estrategia ilustra el siguiente fragmento:

P: *Así, como $x = \log_a b$ es solución de la ecuación entonces al sustituir x en la ecuación hemos de tener…* ***¿Qué hemos de tener?***

Es: *(No contestan).*

P: ***¿Qué es la solución de una ecuación?***

E1: *Al sustituir la cual en la ecuación convierte la ecuación en cero.*

P: ***¿Y si aquí no es un cero?***

Es: *(Dicen algo parecido, pero no exactamente).*

P: *¡Cómo no os da vergüenza!* ***Si tenéis x+3=8, ¿cuál es la solución?***

Es: *5*

P: ***¿Cómo lo sabéis?***

Es: *8-3*

P: ***Si sustituís 5 en la ecuación...***

Es: *Hace igualdad* [58-70].

Mery recurre a la estrategia *exploración* en [2.1], [4.2], [5.1], [5.3], [6.2] y [6.3] cuando compromete a los estudiantes a que articulen sus conclusiones y, como ya hemos ejemplificado, prioritariamente junto con los focos *reasonig* y *problem solving*. El siguiente fragmento es otro ejemplo del uso de esa estrategia.

P: ***Si multiplicamos un vector por el número, ¿qué vector obtenemos?***

Es: *Vector colineal a este.*

P: ***¿Y si por un número negativo?***

Es: *Igual.*

P: *Si, es colineal al vector dado. Bien.* ***¿Qué significa*** $a - b$ ***?***

Es: *Al vector a sumar vector –b.*

P: *Correcto. Vamos a presentarlo en la pizarra. Ven Mane.*

E1: *(Sale a la pizarra).*

P: ***Diseña dos vectores con los orígenes en el mismo punto.***

E1: *(Diseña dos vectores OA y OB).*

P: ***Ahora, OA+OB.***

E1: *(Lo hace por el método del paralelogramo, es el vector OC).*

P: ***Ahora dime qué diferencia hay entre siguientes expresiones: |OA| +|OB| y |OA+OB|.***

E1: *La primera es la suma de longitudes de los vectores OA y OB, la segunda es la longitud de la suma de vectores OA y OB.*

P: ***Es decir…***

E1: *Es la longitud de OC* [630-648].

Una estrategia propia a sus clases (*participación*) [5.2], [6.2], es la discusión del tema impartido que se hace con varias finalidades: para sondear la comprensión del tópico por parte de los estudiantes, para que los estudiantes expongan las ideas aprendidas en sus propias palabras y elaboren el discurso matemático correcto, para que compartan las ideas con sus compañeros y aprendan a escuchar y completar las respuestas de otros. Se trata de que participen todos los estudiantes o la mayoría, por lo que las preguntas se diriguen a toda la clase, sin embargo, para evitar que siempre contesten los estudiantes más preparados, la profesora misma elige quién va a contestar y en el caso de no poder abordar la pregunta recurre a la ayuda de los demás. Durante esta actividad, Mery usa un amplio abanico de cuestiones de todo tipo, unas que invitan a los estudiantes a reproducir definiciones, propiedades o teoremas, y otras que requieren razonar y argumentar las respuestas. El fragmento que sigue ejemplifica lo expuesto:

P: *…* ***¿Qué vectores conocemos?***

Es: *Colineales y no colineales.*

P: ***¿Cuáles son colineales, Astgik?***

E3: *Los que se encuentran en la misma recta o en las rectas paralelas.*

P: ***En caso contrario****…*

E3: *No son colineales.*

P: ***Entre los colineales ¿qué vectores distinguimos?***

E4. *Unidireccionales y con direcciones diferentes.*

P: ***Levón, ven representa aquí vectores colineales.***

E5: *(Sale a la pizarra, dibuja dos vectores paralelos).*

P: ***¿Por qué crees que son colineales?***

E5: *Porque se encuentran en dos rectas paralelas.*

P: ***¿Pueden estar en la misma recta?***

E5: *Si* […] [425-438].

La estrategia didáctica *entrenamiento* ha sido registrada cuando Mery ofrece a los estudiantes las indicaciones y consejos explícitos para proceder en la resolución de una tarea [1.3], [2.1], [3.2]. En el ejemplo que sigue la profesora se ofrece resolver la tarea ella, para explicar a los estudiantes qué es lo que se les pide:

P: Ahora, se da la expresión: 100$\sqrt{a^3b^2c}$*, a>0, b>0, c>0 hay que calcular lg. Aquí no se puede poner el signo de igualdad entre esta expresión y su lg, no son iguales. Simplemente se escribe* $lg100\sqrt{a^3b^2c}$ *y se calcula. (Resuelve explicando cómo aplica las propiedades.* [215-219].

En el otro ejemplo da indicaciones directas para resolver una tarea que se encomienda para casa:

P: Tenemos que hacerlo por pasos. Vamos a ver qué vector es AB+BC. Ha de ser un vector que une origen de AB y extremo de BC, es decir, es AC. Ahora DC+AD=AD+DC, sin mirar al dibujo se puede entender que el segundo vector está aplicado desde el extremo del primer vector y se ve que la suma de estos dos es AC. Es decir está demostrado. Así tenéis que hacerlo [546-551].

Como hemos mencionado, la *activación del conocimiento previo* ha sido puesta en práctica por Mery como estrategia ligada al foco matemático *derivational*. Así, se intenta construir nuevo conocimiento sobre los vectores en el espacio a partir del conocimiento previo sobre los vectores en el plano.

P: ***¿Quién puede decirme qué es un vector?***

E1: *Es un rayo orientado.*

P: *¿Rayo? ¿Tiene dirección el rayo? El rayo tiene origen y no tiene extremo.*

E2: *Es un segmento orientado.*

P: *Eso, es un segmento orientado. […] Ahora,* ***¿qué entendemos cuando decimos la longitud de un vector?***

E1: *Modulo.*

P: *Es decir…*

E1: *El módulo del segmento, la longitud del segmento…* [256-274].

Asimismo, Mery emplea esta estrategia cuando plantea preguntas del tema impartido en la sesión anterior [5.1]

La ejercitación del conocimiento previo se usa durante toda una clase [2ª sesión]. En esta sesión de Mery se han repasado algunos de los temas anteriormente impartidos mediante la resolución de tareas por parte de los estudiantes. Las tareas propuestas se referían a las igualdades e desigualdades exponenciales, definición del dominio de funciones exponenciales y ecuaciones trigonométricas. La elección de estos temas se debe al hecho de estar incluidos en el examen final del curso.

La estrategia didáctica *evaluación* es también muy típica para sus sesiones. A parte de las notas de exámenes, el estudiante es evaluado según cómo trabaja en la pizarra en alguna actividad y si contesta correctamente o no a las preguntas que se le hacen de teoría. El siguiente fragmento ejemplifica lo expuesto:

P: *…Bien, siéntate. Ahora vamos a hacer n.339a, Astgik, ven tú.*

E3: *Se da* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *paralelepípedo. Se da una expresión. Hay que encontrar el vector x e indicarlo en el paralelepípedo. (Hace el diseño). La expresión es:* $DC+D_1A_1+CD_1+x+A_1C_1=DB$.

P: *Bien, hacemos por pasos.*

E3: *(Lo hace correctamente). […] ¿Hago el b) también?*

P: *No, es para casa.* ***Muy bien, siéntate. Ah, dime ¿qué son vectores colineales? ¿Vectores opuestos?***

E3: *(Contesta correctamente).*

P: ***Muy bien. (Pone la nota en su cuaderno)****. Tigrán, ven tú. n.340…* [678-691].

Sin embargo, en otras ocasiones puede no evaluar dependiendo de las circunstancias, como, por ejemplo:

P: *Sergey, ven tú. N 472.*

E4: *(Escribe:* $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$*, resuelve con ayuda de la profesora).*

P: ***Siéntate, no voy a evaluarte, no has estado la semana pasada, ahora trabaja*** [240-242].

Esa *diferenciación* se debe a que las expectativas de la profesora respecto a este estudiante son mayores de las que había demostrado [3.2], ya que normalmente es capaz de trabajar en tareas de modo autónomo. Esta estrategia se observa también cuando, cuestionando a los estudiantes o proponiéndoles alguna tarea, Mery implícitamente hace diferenciación en el tipo de preguntas o tareas planteadas a los estudiantes menos preparados y a los que pueden abordar cuestiones más complejas para satisfacer las necesidades de unos y otros.

En las sesiones de Mery no se ha observado el uso de la estrategia *motivación*, tal vez debido a que se da por sentado la importancia de las matemáticas. No obstante, no se ha explicado el interés de los temas impartidos, cómo se pueden aplicarse los conocimientos y dónde o porqué son importantes y cuál es el objetivo.

A continuación presentamos el gráfico que ilustra la distribución de las estrategias didácticas que ha empleado Mery durante sus sesiones:

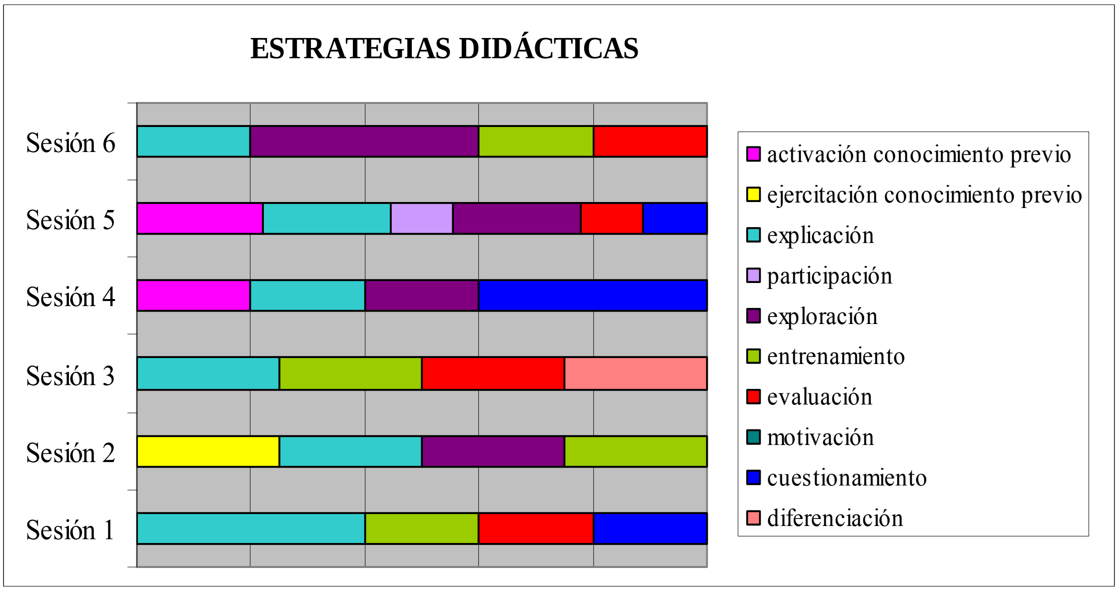


Gráfico 6: Uso de las diferentes estrategias didácticas en las seis sesiones de Mery

Tal como se puede apreciar, las sesiones de Mery se destacan por el uso de una variedad de estrategias didácticas. Mery emplea con más frecuencia la estrategia *explicación*, completándola con *entrenamiento, exploración, evaluación* y *cuestionamiento*. En menos ocasiones recurre a la *activación y ejercitación del conocimiento previo* y *participación*, y no ha empleado la estrategia *motivación*.

c) Materiales didácticos

De los *materiales didácticos*, Mery usaba el libro de texto y otro libro de problemas. En las sesiones grabadas los estudiantes trabajaban en sus cuadernos o en la pizarra, usaban calculadora; el aula no disponía de ordenadores. En las sesiones asistidas, que trataban las figuras geométricas en el espacio, Mery presentaba a los estudiantes esas figuras hechas de cristal con aristas resaltadas en metal.

d) Tipo de agrupamiento

El *tipo de agrupamiento* observado es mayormente el trabajo con el grupo-clase y individual.

e) Tipo de tareas

De acuerdo con lo observado, Mery en sus sesiones maneja principalmente las tareas del libro de texto y consulta algunas tareas de un libro de problemas que se usaba antiguamente durante la época soviética. Tradicionalmente, ella propone resolver tareas después de introducir un tema nuevo, para repasar algún concepto impartido o para trabajar en errores cometidos en los exámenes.

Cuando se trata de resolver tareas de un tópico nuevo, Mery suele exponer la resolución de una tarea y luego invita a algunos estudiantes a trabajar en la pizarra y a los demás en sus sitios. En este caso la complejidad de las tareas sigue un orden creciente: de las tareas sencillas, de aplicación directa de fórmulas, pasan a resolver otras más complejas que requieren conectar y relacionar diferentes propiedades de los conceptos estudiados y normalmente concluyen resolviendo algunas tareas que invitan a reflexionar y argumentar.

A continuación presentamos las tareas abordadas durante las sesiones dedicadas al tópico de logaritmos. Destacaremos el tipo de tareas según los tres grupos de complejidad establecidos y el modo en que se resuelve la tarea.

En las dos tareas del grupo de reproducción siguientes, que han sido propuestas tras de exposición del concepto de logaritmo, sus propiedades y algunos ejemplos que han visto juntos, en general, los estudiantes no han tenido dificultad en realizarlas, con algunos comentarios de la profesora.

1. N 453 (Reproducción) Calcular las siguientes expresiones:

$$\log_3 81 \qquad \log_{0,1} 1000 \qquad \log_2 16 \qquad \log_{2/3} \frac{16}{81} \ldots$$

2. N 454 (Reproducción) Calcular:

$$\log_2 4^{1/5} \qquad \log_{1/3} \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{81}} \qquad \lg \frac{100}{\sqrt{10}} \qquad \log_5 25\sqrt[3]{5} \ \ldots$$

Sin embargo, Mery tuvo que intervenir para explicar cómo se hace la tarea 3 y la encomienda para que terminen en casa junto con la cuarta.

3. N 455 (Conexión) Calcular:

$$5^{2\log_5 12} \qquad 7^{0,5\log_7 16} \qquad 100^{\lg 11} \qquad 9^{\log_3 8} \qquad \ldots$$

4. N 465 (Conexión) Calcular las siguientes expresiones:

$$\frac{\log_5^{36} - \log_5^{12}}{\log_5^{9}} \qquad \frac{\log_2^{24} - \frac{1}{2}\log_2^{72}}{\log_3^{18} - \frac{1}{7}\log_3^{72}} \qquad \ldots$$

La profesora hace un ejemplo de la tarea que sigue para que vean qué es lo que se les pide, las demás expresiones las calculan los estudiantes con algunas sugerencias de Mery. En esta tarea, Mery otra vez llama la atención de los estudiantes de que, por ejemplo, en la segunda expresión, se puede pasar de $\sqrt{b^3}$ a $b^{1/3}$ dado que b>0.

5. N 466 (Reproducción) Calcular lg de las siguientes expresiones:

$$100\sqrt{a^3b^2c}\,; \qquad \frac{0{,}1\sqrt{b^3}}{c^3b^2} \qquad a, b, c>0 \qquad \ldots$$

Las dos expresiones de la siguiente tarea las resuelve correctamente uno de los estudiantes sin intervención de la profesora y otro estudiante la hace con la ayuda de la profesora y sus compañeros.

6. N 471 (Conexión) Calcular: $10^{1-2\lg 5} \qquad (\frac{1}{4})^{\log_{0,5} 6-2} \qquad 2^{\log_8 27+3} \qquad (\frac{1}{7})^{\log_{49} 9-1} \ \ldots$

Una de las expresiones de la tarea 7 también se resuelve con las indicaciones directas de Mery y las aportaciones de los estudiantes, y la otra la lleva a cabo correctamente una de las estudiantes.

7. N 472 (Conexión) Calcular la expresión: $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$; $(5^{\log_{25} 9}+3^{\log_9 25})^{\log_2 5}$

La siguiente tarea se encomienda para hacer en casa junto con las demás expresiones restantes de las tareas realizadas en el aula.

8. N 474 (Conexión) Pasar al logaritmo de base *a* y calcular:

$$\log_a \sqrt{a}\ \frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^3\sqrt{a}};\qquad \log_{\sqrt[4]{a^3}} \frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^5\sqrt[3]{a}};\qquad \log_{0,2\sqrt[5]{5}} \frac{\sqrt[4]{125}}{0,04\sqrt[5]{25}}\quad a=5\quad \ldots$$

En el marco de la revisión de los contenidos matemáticos anteriormente impartidos durante la 2ª sesión se realizan las siguientes tareas:

9. N 423 (Conexión) Resolver la ecuación: $5^{x+2} - 9\cdot 5^{x-1} = 116$

Uno de los estudiantes resuelve en la pizarra esta ecuación separando exponentes que contienen variables. Algunos estudiantes que trabajan en sus sitios dicen que se podría hacer de otro modo; Mery contesta que sí se puede, pero así también es correcto. La tarea queda resuelta por el estudiante sin intervención de Mery.

10. N 446a-447a (Conexión) Resolver desigualdades: $9\cdot 3^{2x} - 82\cdot 3^x + 9 \geq 0$;
$11\cdot 5^{x+2} - 2\cdot 5^{1-x} < 5$

Para resolver la primera de las desigualdades se ha ofrecido uno de los estudiantes (Tigrán). Demuestra bastante seguridad al operar con los números, designa $3^x=t$ y resuelve la ecuación cuadrática respecto a t, encuentra raíces: $t_1=\frac{1}{9}$, $t_2=9$. Aquí interviene Mery, para llamar la atención de los estudiantes: es donde suelen cometer errores.

P: *Atención, de aquí empezáis a cometer errores. ¿Dónde se encuentra el conjunto de las soluciones, Tigrán?*

E3: *$(-\infty, \frac{1}{9}]\ U\ [9, +\infty)$*

P: *Eso. Mirad aquí, (señala el intervalo mencionado). ¿Qué significa esto? Esto significa que $t \leq \frac{1}{9}$ U $t \geq 9$.*

E3: *(escribe el sistema y sustituye t por 3^x y resuelve correctamente: $3^x \leq \frac{1}{9}$ U $3^x \geq 9$ $\Rightarrow x \in (-\infty, -2]$ U $[2, +\infty)$).*

P: *Así, solo después de todo esto tenéis que volver a la designación que habíais hecho. Bien, siéntate.* [118-126].

La segunda desigualdad se resuelve por otro estudiante siguiendo indicaciones de la profesora y sus compañeros:

P: *Primero, ¿qué hacemos?, separamos los exponentes con variables.*

E2: *(escribe $11 \cdot 25 \cdot 5^x - 10 \cdot 5^{-x} < 5$)*

P: *¿Cómo os he enseñado multiplicar 11 por un número de dos cifras?*

Es: *(lo hacen mentalmente $11 \cdot 25 = 275$)*

P: *Correcto: dejamos las dos cifras y entre ellos escribimos lo que nos da su suma. Ahora ponemos $5^x = t$ y resolvemos.*

E2: *(sigue las indicaciones de la profesora, encuentra las raíces de la ecuación).*

P: *Ahora, ¿cómo hacemos? ¿Cuáles son los signos de los intervalos? Sabemos que si el coeficiente de x es positivo, son + - +. ¿Dónde están las soluciones de nuestra desigualdad?*

Es: *Entre t_1 y t_2.*

P: *Entre t_1 y t_2. Ahora sí sustituimos 5^x y escribimos el sistema.*

E2: *(escribe el sistema de dos desigualdades, encuentra los valores de x)* [189-202].

11. (Conexión) Definir el dominio de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt[7]{\frac{2}{2x-3}} \quad ; \quad y = \left(\frac{3}{x-4}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Esta tarea, que es parecida a la otra que ha sido tratada en la primera sesión dentro del marco de trabajo en la corrección de los errores del examen pasado, queda explicada por Mery. Esta vez, a diferencia de la explicación inicial que hemos expuesto al tratar el foco *conceptual*, el acento se pone en los procedimientos para llevarla acabo.

12. (Conexión) Hallar senα si se da $2\cos^2(\pi - \alpha) + 5\text{sen}\alpha + 2 = 0$

Para resolver esta ecuación trigonométrica, Mery invita a una de las estudiantes a trabajar en la pizarra. Ofrece sugerencias para su proceder y la tarea se resuelve por la estudiante con su ayuda y la de sus compañeros:

P: *Vamos a ver, ¿que hacíamos aquí? Primero nos libramos de π, aplicando la fórmula de reducción, ¿no? Olvidaos por un momento del cuadrado de coseno, entonces cos (π-α), ¿qué nos da? Restamos de π alfa, ¿a qué cuadrante pasa? Al segundo. En el segundo cuadrante coseno no se cambia, se queda coseno y es negativo, pero tenemos coseno al cuadrado, entonces es positivo.*

E1: *(Escribe la ecuación ya reducida y piensa cambiar sen por cos).*

Es: *No, mejor poner en vez de* $cos^2\alpha$ *la expresión* $(1- sen^2\alpha)$.

E1: *(Lo sustituye y sigue resolviendo).*

P: *Entonces, ¿qué hemos usado aquí? La igualdad trigonométrica fundamental. ¿Cuál es, Ani?*

E: $cos^2\alpha + sen^2\alpha=1$

P: *Bien. ¿Qué hacemos? Designamos sen α =a y, ¿qué condición ponemos sobre a?*

Es: $a \in [-1, 1]$

P: *Eso. Sigue resolviendo.*

E1: *(Encuentra dos raíces de la ecuación cuadrática: uno cae dentro del intervalo y otro no).*

P: *¿Qué nos pedían? El seno, pues ya está.* [168-186].

Por último, durante las sesiones dedicadas a los vectores en el espacio, Mery propone resolver las tareas que siguen:

13. N 320 (Reproducción) En el tetraedro ABCD los puntos M, N y K son puntos medios de las aristas AB, BC y CD respectivamente. AB=3cm, BC= 4cm, BD= 5cm. Hallar el modulo de los siguientes vectores: a) AB, BC, BD, NM, BN, NK b) CB, BA, DB, NC, KN.
14. N 322 (Conexión) En el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ los puntos M y K son puntos medios de las aristas A_1B_1 y C_1D_1 respectivamente *(se da el dibujo del mismo que tiene por aristas vectores indicados)*. Se pide encontrar todos los pares de vectores: a) que tienen la misma dirección, b) que son opuestos, c) que son iguales.

Estas dos tareas se encomiendan para ejecutar en casa.

15. N 321 (Reproducción) El paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tiene las siguientes medidas: AD=8cm, AB=9cm, AA_1=12cm. Hallar la longitud de los siguientes vectores:

a) CC_1, CB, CD,

b) DC, DB, DB_1.

Para realizar la tarea 15, Mery invita a una de las estudiantes trabajar en la pizarra, le dice que la lea en voz alta y que haga el dibujo. La estudiante escribe los datos del problema, hace dibujo y va identificando vectores, el modulo de los cuales se le pide hallar; en el punto a) se trata de identificar simplemente los segmentos iguales y sus medidas correspondientes, y en el punto b) en caso de vectores DB, DB_1 se aplica el teorema de Pitágoras. La tarea se lleva a cabo correctamente por la estudiante.

16. N 323 (Reflexión) Se da una pirámide con un triangulo equilátero en la base. Los puntos M, N, P y Q son puntos medios de las aristas AB, AD, DC, BC.

b) Halla todos los pares de vectores iguales,

c) Determina qué cuadrilátero se ha formado con los puntos MNPQ.

La resolución de este problema la hemos ejemplificado al tratar el foco *reasoning* dado que Mery pide al estudiante que realiza la tarea que razone y justifique cada paso de la solución.

17. N 324 (Reflexión) Di si son ciertas las siguientes afirmaciones:

d) Dos vectores colineales con el otro no nulo son colineales entre si,

e) Dos vectores unidireccionales con el otro no nulo son unidireccionales entre si,

f) Dos vectores colineales con el otro no nulo son unidireccionales entre si.

De esta tarea, en el aula se realiza el punto a), por falta del tiempo el resto se encomienda para casa. Las opiniones de los estudiantes respecto a la afirmación difieren, entonces la profesora concreta:

P: *A ver, es una afirmación, entonces tenemos que confirmar que si es siempre así o no. (Dibuja en la pizarra tres vectores). ¿Por qué es correcto?*

E: *Por la propiedad de las rectas que dice que si dos rectas son paralelas a la tercera son paralelas entre sí* [404-408].

18. N 327 (Reproducción) Se da el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *(se hace referencia al dibujo del problema N 322)*. Se pide nombrar tales vectores que tienen por origen y extremo los vértices del paralelepípedo y que son resultado de las siguientes sumas: a) AB+ A_1D_1 ; b) AB+ AD_1 …

La tarea 18 también se encomienda para casa.

19. N 328 (Reflexión) Se da el tetraedro ABCD. Demostrar que:

a) AB+BD=AC+CD; b) AB+BC=DC+AD; c) DC+BD=AC+BA

Esta tarea Mery la encomienda para casa pero antes quiere enseñarles a los estudiantes cómo se hace la demostración, por ejemplo, del punto b) de la tarea. Uno de los estudiantes le dice en seguida que es porque la suma de ambas partes de la igualdad es el vector AC, pero Mery aconseja que lo hagan por pasos y muestra en la pizarra cómo hacerlo.

20. N 329 (Conexión) Indicar todos los vectores que se forman de las aristas del paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ y que:

e) son opuestos al vector CB
f) son opuestos al vector B_1A
g) son iguales al vector -DC
h) son iguales al vector - A_1B_1

El estudiante que sale a la pizarra para resolver la tarea, la lee en voz alta, hace el dibujo y la lleva a cabo con la ayuda de Mery y sus compañeros:

P: *¿Qué vectores son opuestos?*

Es: *Los que tienen la misma longitud y el sentido contrario.*

E1: *(Escribe los vectores opuestos).*

P: *Ahora, enseña los vectores iguales al vector -A_1B_1. ¿Cómo los encontramos? Vamos a localizar el vector A_1B_1, cambiamos el sentido, tenemos -A_1B_1 que es lo mismo que B_1A_1. Escribe.*

E1: *(Sigue escribiendo).*

P: *Ahora, los que son iguales a –BC. Vamos a escribirlo mejor.*

Es: *Sería CB* [557-565].

21. N 335 (Conexión) Simplificar expresiones:

e) AB+MN+BC+CA+PQ+NM

f) FK+MQ+KP+AM+QK+PF

g) KM+DF+AC+FK+CD+CA+MP

h) AB+BA+CD+MN+DC+NM

Esta tarea no presenta dificultad para el estudiante que la trata. Simultáneamente a su proceder en la solución, Mery intenta implícitamente llevar a los demás estudiantes a la solución:

P: *Quienes pueden simplificar sin dibujo, que lo hagan, quienes no, que dibujen los vectores. Cuando simplificamos una expresión de suma, ¿qué hacemos, qué buscamos?*

E2: *Miramos si hay componentes opuestos para reducirlos.*

P: *Si. Entonces aquí vamos a encontrar vectores opuestos.*

E2: *(Simplifica la expresión)* [574-579].

22. N 339 (Conexión) Se da el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Indica el vector X que tiene su origen y extremo en los vértices del paralelepípedo y que:

c) $DC+D_1A_1+ CD_1+X+A_1C_1=DB$

d) $DA+X+D_1B+AD_1+BA=DC$

La estudiante que sale a la pizarra, lee la tarea, hace dibujo y encuentra el vector X correctamente.

23. N 340 (Conexión) Se da un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$. Indica el vector X que tiene su origen y extremo en los vértices del prisma y que:

d) $AA_1+B_1C-X=BA$

e) $AC_1-BB_1+X=AB$

f) $AB_1+X=AC-X+BC_1$

Esta última tarea también se resuelve correctamente por uno de los estudiantes, la profesora se dirige a los demás estudiantes:

P: *¿Qué podemos hacer para que se simplifique la expresión?*

Es: *Pasar x a la derecha, librarse del menos y BA a la izquierda* [696-697].

Como se puede observar, la intervención de la profesora en la resolución de tareas es frecuente: en algunos casos ofrece indicaciones directas, en otras intenta guiar a los estudiantes planteando preguntas que les orienten. No obstante, deja cierto protagonismo a los estudiantes en la resolución y trata que argumenten sus respuestas y soluciones. A continuación presentamos el tipo de tareas propuestas por Mery mediante el siguiente gráfico:

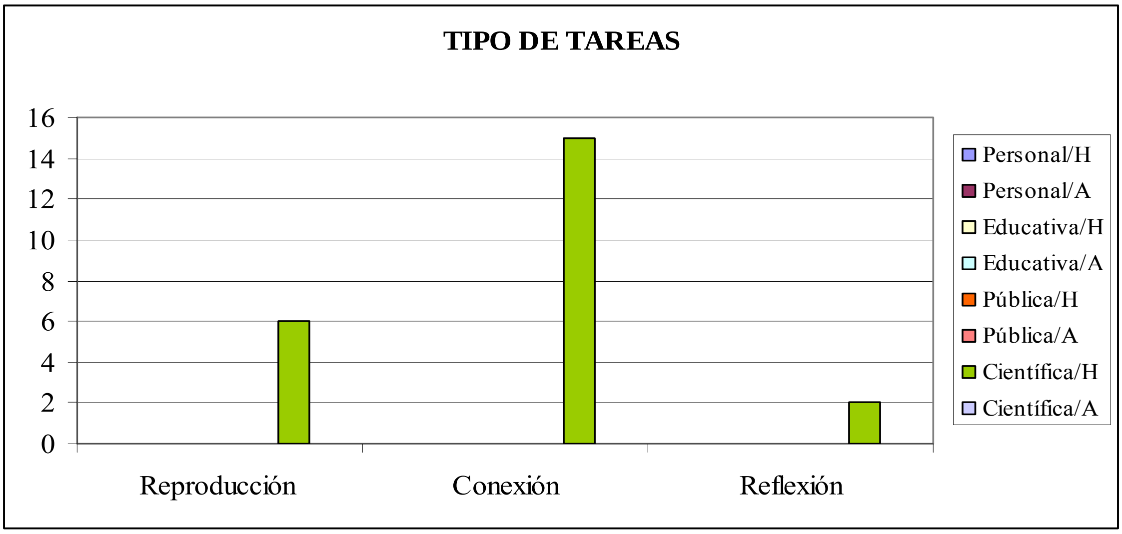


Gráfico 7: Tipo de tares propuestas por Mery durante las seis sesiones

En las sesiones de Mery se destaca el trabajo en tareas de los tres grupos de complejidad, con el predominio de las del grupo de conexión. Asimismo, la profesora propone realizar tareas del grupo de reproducción y del grupo de reflexión. Cabe subrayar que todas las tareas son planteadas, exclusivamente, en situaciones *científicas*, matemáticas, en este caso, contextos *hipotéticos*, y no tan sólo las que se relacionan con los tópicos grabados u observados, sino las tareas que se usan durante todo el curso.

A partir del análisis realizado, en el siguiente gráfico presentamos el perfil de Mery según las OTL consideradas.

PERFIL DE LA PROFESORA MERY SEGÚN LAS OTL CONSIDERADAS

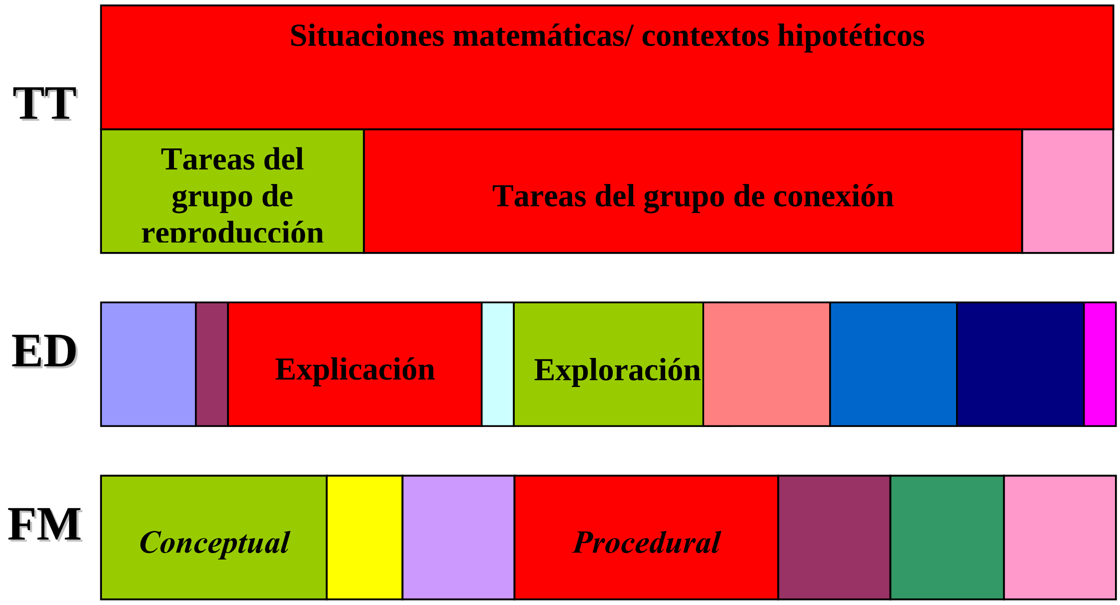


Gráfico 8: Perfil de la profesora Mery según las OTL consideradas

De este modo, durante sus clases, Mery recurre a la diversidad de focos matemáticos, con relativamente mayor énfasis en los conceptos y procedimientos, pero también en los demás focos. Usa, prioritariamente, estrategias didácticas explicación, exploración, entrenamiento, evaluación, cuestionamiento; trabaja con el grupo-clase o individual, usa el libro de texto como material didáctico principal; así como, propone trabajar, mayormente, en tareas del grupo de conexión, planteadas, exclusivamente, en situaciones científicas y contextos hipotéticos.

IV.2. ANÁLISIS DE LAS CM

En este apartado presentamos los diferentes tipos de análisis acerca de las actuaciones de los estudiantes a la hora de resolver los ítems de la prueba. En primer lugar, en el apartado IV.2.1., exponemos los informes de análisis de los protocolos de resolución de cada estudiante para ambos casos. A continuación, en el apartado IV.2.2., presentamos el análisis de las actuaciones de los estudiantes, atendiendo las tres variables consideradas para los ítems de la prueba: complejidad, contenido, situaciones y contextos, intentando dar una visión general. Por último, dedicamos el apartado IV.2.3. al análisis cuantitativo según los niveles de dominio.

IV.2.1. Análisis de las competencias matemáticas de los estudiantes

En el presente subapartado exponemos los informes de análisis de los protocolos de resoluciones de los ítems de la prueba de los estudiantes de ambos casos. Los informes siguen un determinado orden: Informe de análisis de E1, de E2, de E3, etc. enumerando, de este modo, a los 15 estudiantes del Caso 1 e Informe de F1, de F2, F3, etc. a los 25 estudiantes del Caso 2. Por otra parte, hemos ordenado los informes a partir del estudiante que ha mostrado la mejor actuación poniendo en marcha las competencias matemáticas de alto nivel y así sucesivamente hasta el estudiante con la peor actuación. Pensamos que este tipo de ordenación resulta más cómoda para la lectura del texto y para su síntesis posterior que presentamos tras el análisis de cada caso.

Asimismo, hemos decidido organizar cada informe de la siguiente manera: en primer lugar, analizamos las actuaciones del estudiante cuando aborda los ítems que activan las CM del grupo de reproducción. En el caso de que el estudiante haya sido capaz de abordar gran parte de ellos, nos detendremos tan solo en los errores y dificultades que han presentado los demás ítems de este grupo y pasamos a los ítems que invitan a movilizar las CM de los otros dos grupos (conexión y reflexión), ya aquí mencionando tanto los ítems realizados correctamente como erróneamente. Pero si el estudiante tan solo ha sido capaz de realizar los ítems que requieren CM del grupo de reproducción y algunos de otros dos grupos, sí nos detendremos en todos los ítems realizados correcta o incorrectamente. Esta decisión se basa en el hecho de que para obtener información sobre las CM del estudiante que ha sido capaz de ir más allá de la reproducción y aplicación mecánica de los conocimientos y destrezas matemáticos, estos ítems simplemente nos informan acerca de su capacidad de realizarlos con éxito y es más interesante estudiar su actuación en las situaciones más complejas, que proporcionan una información más rica y significativa. Contrariamente, cuando el estudiante ha sido capaz de ejecutar principalmente los ítems que requieren reproducción, tiene sentido analizar tanto los ítems que ha podido abordar como los que ha intentado hacer sin éxito.

A lo largo del informe, siguiendo el orden mencionado, vamos a destacar las CM (procesos cognitivos) más subyacentes de las que han puesto en marcha los estudiantes a la hora de abordar los ítems de la prueba y para evitar la repetición de todas las demás CM, consideramos que en el caso de haber realizado satisfactoriamente cualquiera de los ítems (si no hacemos ninguna observación al respecto), los estudiantes demuestran poseer todas las CM asociadas a éste, que determinamos en el Anexo VII (en el cual presentamos la descripción de cada ítem según las tres variables, su solución y/o respuesta admitida y las CM asociadas).

Todo el análisis va acompañado con unidades de información que son fragmentos de las soluciones y/o respuestas, extraídos de los protocolos de la prueba de cada uno de los estudiantes (Anexo VIII y IX). Concluimos los subapartados con la síntesis de las actuaciones de los estudiantes para cada Caso.

IV.2.1.1. Análisis de las competencias matemáticas de los estudiantes (Caso 1)

En este subapartado exponemos los informes de análisis de los protocolos de soluciones de los ítems de la prueba de los 15 estudiantes del Caso 1. De este modo, los informes para este Caso siguen el orden siguiente: Informe de análisis de E1, de E2, de E3,…, de E15 (enumeramos, de tal manera, a los 15 estudiantes).

1. Informe de análisis de E1

Este estudiante ha realizado correctamente 33 de los 39 ítems propuestos, **demostrando poseer competencias matemáticas avanzadas**. **Ha ejecutado con éxito todos los ítems que han requerido reproducción y aplicación directa de los conocimientos y destrezas matemáticos,** mostrando dificultad tan solo en un ítem de este grupo (ítem 1). Presentamos la solución de E1 para el ítem 1 (Caminar 1). Para proceder en su resolución, E1 ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada $\frac{n}{P} =$

140, sin embargo, como se puede ver en sus cálculos, **comete error al despejar la incógnita *P* de dicha fórmula.**

$$\frac{70}{P} = 140$$

$$P = \frac{140}{70} = 2 \qquad P = 2 \text{ m.}$$

El error que comete E1 puede ser debido a que al ser *n* = 70 y la igualdad 140, el resultado en este caso da un número “limpio” (entero pequeño), lo que le hace proceder de una manera mecánica, sin una interpretación adecuada del resultado obtenido. En caso contrario, al obtener la longitud del paso de un hombre igual a dos metros, según sus cálculos, cuestionaría este resultado.

Los demás 15 ítems de este grupo los resuelve correctamente, manifestando las competencias matemáticas asociadas correspondientes.

En lo que se refiere a las preguntas que invitan activar procesos cognitivos del grupo de conexión, E1 ha sido capaz de llevar a cabo con éxito la mayoría de ellas.

En el ítem 2 (Caminar 2), que es la continuación del ítem 1, igualmente identifica correctamente los datos con las variables de la fórmula dada, despeja la incógnita *n* de la misma fórmula $\frac{n}{P} = 140$ y realiza los cálculos correctamente.

$$\frac{n}{P} = 140$$

$$n = 140 \cdot 0{,}8 = \boxed{112 \text{ m/min}}$$

Obtiene, de este modo, el número de pasos por minuto, considerándolo erróneamente como la velocidad a la que camina Bernardo en metros por minuto (es lo que les pide en el enunciado del ítem).

$$112 \cdot 60 = 6720 \text{ m/h} = \boxed{6{,}72 \text{ km/h}}$$

Parece que no ha sido capaz de razonar que si en un minuto Bernardo realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m (112 x

0,8), que es la velocidad en m/min. Sin embargo, tomando la velocidad igual a 112 m/min, realiza correctamente el paso de m/min a km/h.

Con la explicación que E1 ha dado a la pregunta planteada en el ítem 5 (Crecer 2), ha manifestado las CM asociadas a este ítem, particularmente, comprender y saber emplear el concepto del cambio de la gradiente del gráfico, interpretar el gráfico, explicar.

Porque a partir de los 12 años cada vez la
inclinación de la curva es menor, hasta quedar
casi en posición horizontal.

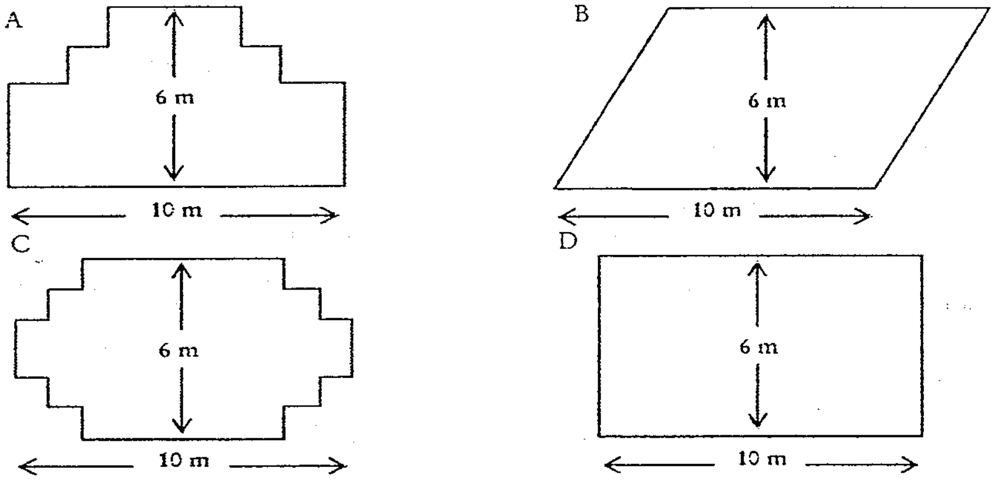
"Porque a partir de los 12 años cada vez la inclinación de la curva es menor, hasta quedarse casi en posición horizontal". Como se puede ver, usa explícitamente el lenguaje matemático para describir la fuerte pendiente del gráfico.

Asimismo, en el ítem 7 (Robos) del mismo grupo, E1 ha mostrado comprender y saber emplear el concepto de aumento de una cantidad, pensar y razonar acerca de la información presentada en el gráfico, cuestionar la afirmación acerca del aumento enorme de robos que hace el presentador interpretando el gráfico.

No, porque el aumento no ha sido signi-
ficativo, pero como ha cogido una medida
muy pequeña para hacer la gráfica la diferencia
parece mucha.

Como se puede ver, ha sabido expresarse por escrito acerca de la cuestión: *"No, porque el aumento no ha sido significativo, pero han cogido una medida muy pequeña para hacer el gráfico y la diferencia parece mucha"*, y destacando la no adecuación entre la información presentada en el gráfico y la afirmación del presentador, propone un argumento para refutarla.

En el ítem 8 (Carpintero), según las opciones propuestas por E1 para la construcción del parterre, no ha sido capaz de establecer correctamente conexiones entre el perímetro de los cuatro diseños dados y la cantidad de madera que dispone el carpintero.



Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	[illegible]
Diseño D	Sí / No

Sí / No

Es sorprendente el hecho que E1 ha elegido correctamente los diseños A y C, siendo éstos visualmente más complejos, sin embargo, no le pareció posible el diseño D que es un rectángulo con dimensiones 6 m y 10 m que dan un perímetro exactamente 32 m, parece que más bien se debe a algún fallo en el razonamiento. En el caso del diseño B es correcta la decisión que ha tomado.

En el ítem 9 (Chatear 1), E1 ha sido capaz de relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de dos países; así como en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada.

A la hora de abordar el ítem 18 (Feria), E1 ha sabido descodificar e interpretar dos diferentes representaciones de la situación dada mediante dos dibujos, de una ruleta y de canicas, calcular que la probabilidad de que salga un número impar es de $\frac{1}{6}$ y de una canica negra $\frac{6}{20}$. No obstante, no ha sido capaz de razonar correctamente que como hay solo un número impar, es muy probable que la ruleta pare en un número par, sin embargo, al haber solo 6 canicas negras, es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad).

E1 realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) que requiere cálculos mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada. En el ítem 22 (Selección), sin embargo, no ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles. Da respuesta errónea 8 combinaciones en lugar de 6.

Respuesta: . . . . . . 8 . . . .

Es probable que simplemente haya multiplicado el número de ingredientes a elegir por el número de los posibles (2x4=8) o se le repitieron algunas combinaciones. Parece que al principio las tiene 10 o más bien 16 y luego rehace los cálculos.

E1 aborda con éxito el ítem 23 (Puntuaciones en un examen), mostrando CM asociadas al ítem: sabe descodificar e interpretar la representación de la situación mediante el diagrama, sabe expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones y sabe seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos a partir de los datos:

Porque han aprobado más alumnos y han sacado más alumnos mejor nota.

"Porque han aprobado más alumnos [Grupo A] y han sacado más alumnos mejor nota". De este modo, da dos argumentos matemáticos válidos.

E1 resuelve correctamente el ítem 27 (Monopatín 3), mostrando CM asociadas. En el ítem 29 (Los niveles de CO_2 1), es capaz de explicar cómo se obtiene 11% a partir de la información representada mediante dos diagramas.

$6727 - 6049 = \frac{678}{6049} = 0'11 \cdot 100 = \boxed{11\%}$

De este modo, demuestra haber comprendido el concepto del porcentaje y su aplicación tanto directa como en el sentido contrario.

Al resolver correctamente el ítem 30 (Los niveles de CO_2 2), manifiesta las CM asociadas a éste, concretamente, comprende y sabe emplear el concepto de la media aritmética, sabe descodificar e interpretar la representación de la situación mediante dos diagramas, sabe expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones lógicas. Asimismo, ha sido capaz de elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos a partir de sus propias reflexiones:

No, porque Alemania puede haber reducido mucho sus emisiones, pero si el resto de países no lo han hecho así la media puede ser 4%

"No, porque Alemania puede haber reducido niveles de sus emisiones, pero si el resto de países no lo han hecho, así la media puede ser 4%". Ha sabido generalizar el concepto media aritmética y aplicarlo a una situación poco familiar.

En el ítem 32 (Vuelo espacial), E1 no ha sido capaz de razonar correctamente que el diámetro de la órbita de la Mir es el de la Tierra más la distancia de la Mir a la Tierra, por lo que ha llevado la solución por camino erróneo: ha multiplicado la circunferencia de la Tierra por el número de las vueltas (40.000 × 86.500) y al producto le ha sumado la distancia de Mir a la Tierra (3.460.000+400). Perece intuir la idea, sin embargo, no ha sido capaz de modelizar correctamente el campo.

86500
× 40000
3.460.000.000 0 km.
+ 400
.466.000.400

40000 × 86500 =

E1 ha sido capaz de llevar a cabo los ítems 34 (Dados 1) y 35 (Dados 2), ambos presentan diferentes formas de representación de los objetos matemáticos conocidos (cubos).

En el ítem 36 (Respaldo al presidente), E1 ha sabido expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones lógicas:

Periódico 3, porque se sabe seguro que tienen derecho a voto y se sondea a más votantes, por lo que el resultado es más significativo.

"Periódico 3, porque se sabe seguro que tienen derecho a voto y se sondea con más votantes, por lo que el resultado es más significativo". De este modo, entre los cuatro periódicos sabe elegir el que propone mejores predicciones, dando dos argumentos matemáticos a partir de los datos (considera el número de votantes y su derecho a voto) para justificar su respuesta.

En relación a los ítems que requieren activar procesos cognitivos del grupo de reflexión, **E1 igualmente ha sabido abordarlos con éxito**, excepto el ítem 10 (Chatear 2), en el cual no ha sido capaz de calcular correctamente el intervalo en el cual podrían chatear dos chicos, siendo uno en Sidney y el otro en Berlín.

Así, en el ítem 13 (El tipo de cambio 3) sabe expresarse por escrito, explicando porqué un tipo de cambio es mejor que el otro a partir de la información dada:

Si, porque como bajó el precio del rand. Gana 0,2 ZAR por cada dólar, por lo que le favorece.

"Si, porque como bajó el precio de rands, gana 0,2 ZAR por cada dólar, por lo que le favorece". De este modo, da una razón adecuada y la argumenta usando lenguaje matemático.

Asimismo, en el ítem 20 (Basura), E1 es capaz de interpretar correctamente la información presentada mediante una tabla y razonar sobre la inadecuación de presentarla mediante un diagrama de barras:

Porque la información que se quiere dar no es la suficientemente directa

Y argumenta: *"Porque la información que se quiere dar no es la suficientemente cierta"*, refiriéndose a la gran variabilidad de los datos de algunas categorías (la longitud de la barra para los vasos de plástico es indeterminada o no se puede hacer una barra para 1-3 años o 20-25 años).

En el ítem 21 (Terremoto) de este grupo, E1 ha sabido razonar sobre la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres.*

C La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

De este modo, ha sabido valorar y criticar las opciones dadas y ha elegido la opción correcta.

Este estudiante, al abordar el ítem 31 (Los niveles de CO_2 3), ha sido capaz de combinar las diferentes representaciones de las situaciones (cantidades representadas en unidades de toneladas y el porcentaje de cambio) de manera creativa, ha demostrado comprender y emplear conceptos matemáticos como el aumento absoluto y relativo en situaciones complejas, saber expresarse por escrito sobre asuntos que implican relaciones complejas (dos aproximaciones matemáticas):

Australia, porque es el que más ha incrementado el porcentaje y EE.UU. porque es el que en más cantidad ha incrementado su emisión

"Australia, porque es el que más ha aumentado el porcentaje y EE.UU. porque es el que en más cantidad ha incrementado su emisión". De este modo, ha sabido dar dos respuestas "correctas", explicando, indicando correctamente los países y argumentando a partir de sus propias reflexiones.

Por último, E1 ha sido capaz de abordar el ítem 38 (El mejor coche 2), en el cual, empleando varias estrategias para su proceder, ha sabido combinar las diferentes representaciones de las situaciones de manera creativa e inventar nuevas. De este modo, inventa una regla correcta para convertir el coche Ca en el ganador:

........3X S+ ....9X C+ ....9X D+ ....3X H.

2. Informe de análisis de E2

El estudiante E2 ha resuelto 26 ítems de la prueba, **mostrando dominar competencias matemáticas avanzadas**. **Ha realizado con éxito gran parte de los ítems del grupo de reproducción, sin lograr hacer cuatro de ellos**. Así, en el Caminar 1, ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada $\frac{n}{P} = 140$, sin embargo, no ha sido capaz de despejar la incógnita *P*.

$\frac{70}{P}$

Es así como deja los cálculos que se les piden mostrar.

En el ítem 6 (Crecer 3), este estudiante en lugar de dar una respuesta en el lenguaje matemático, mencionando el intervalo correspondiente o un número del intervalo, o en el lenguaje cotidiano indicando una edad concreta del intervalo, menciona:

La pubertad

En cierto modo tiene razón en cuanto que el proceso se inicia alrededor de 11 años y el intervalo que debería indicar es de 11 a 13 años, sin embargo, no hemos considerado la respuesta como correcta, ya que no se evidenciaron sus conocimientos matemáticos, sino más bien los generales.

A la hora de abordar el ítem 25 (Monopatín 1), E2 aparte de que por despiste ha puesto el valor máximo y mínimo al revés, que no hubiésemos considerado como falta, ha utilizado datos que no correspondían para la solución del problema.

(a) Precio máximo: ....162..............zeds
(b) Precio mínimo ....221.....zeds

Creemos que este fallo se debe al proceder mecánico, ya que debía sumar los precios máximos en un caso y mínimos en el otro de las diferentes partes de monopatín para montarlo uno mismo, sin embargo E2 suma también el precio de los monopatines completos, sin fijarse bien en la cuestión planteada.

Por último, E2 ha dejado en blanco el espacio para la respuesta del ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, probablemente por falta de tiempo, ya que ha pasado por los demás 38 ítems de la prueba, intentando realizarlos, aunque no todos con éxito. Los demás 12 ítems de este grupo, resuelve correctamente.

En cuanto a los ítems que requieren poner en marcha los procesos cognitivos correspondientes al grupo de conexión, E2 ha actuado con éxito a la hora de resolver la mayor parte de éstos.

El primer ítem de este grupo Caminar 2, se ha quedado sin resolver, dejando en el papel la siguiente expresión:

$$\frac{N}{0{,}80}$$

Igual que en el caso de Caminar 1, muestra dificultad en despejar la incógnita correspondiente.

E2 ha explicado cómo se refleja en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante, en el ítem 5 (Crecer 2) de la siguiente manera:

Disminuyendo la pendiente o inclinación del gráfico

Ha sabido utilizar el lenguaje matemático para expresar explícitamente el cambio de la gradiente del gráfico.

En el ítem 7 (Robos), ha sabido oponer un argumento a la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos representado mediante un gráfico:

No, solo aumementa en unos ocho robos, es algo insignificante comparado con el numero total de robos

De este modo, ha manifestado comprender y emplear el concepto de aumento de una cantidad y su representación gráfica, así como expresarse por escrito explicando cuestiones matemáticos que implican relaciones y fundamentar sus argumentos.

No ha sido capaz de realizar con éxito el ítem 8 (Carpintero), ha indicado erróneamente como no válido para la cantidad de madera disponible el diseños C.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	*Sí* / *No*
Diseño B	*Sí* / *No*
Diseño C	*Sí* / *No*
Diseño D	*Sí* / *No*

Ha razonado correctamente para los demás diseños, sin embargo, parece no notar la analogía entre el diseño A y el diseño C para deducir también su adecuación.

E2 ha sabido relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de los dos países (Chatear 1), en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente el porcentaje directo a la cantidad dada, asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada.

En el ítem 23 (Puntuaciones en un examen) intenta dar un argumento matemático que podrían utilizar los alumnos del Grupo A:

El Grupo A tiene menor número de alumnos

Parece que se refiere al menor número de alumnos que han suspendido, sin embargo, por no haber terminado con claridad su pensamiento, no lo consideramos como un argumento valido.

Para llegar a contestar la pregunta planteada en el ítem 27 (Monopatín 3), había que estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes del monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos. E2 no ha sido capaz de estimar correctamente ese precio.

Este estudiante lleva a cabo con éxito el ítem 29 (Los niveles de CO_2 1), explicando la obtención de los 11% del cambio de emisiones gráficamente representado:

~~6.727 - 6.049 = 678~~
~~678 es el 11%~~
6727 es el 111% de 6049
entonces ha subido un 11%

De este modo, ha mostrado la comprensión del concepto de porcentaje, su aplicación directa y en el sentido contrario, entiende y emplea la expresión menos usual 111% como aumento en 11% y otras CM asociadas a este ítem.

Asimismo, en el ítem "Los niveles de CO_2 2"que es la continuación del ítem anterior, intenta razonar y fundamentar su argumento.

No, porque las emisiones de la UE representan un 4% de todo el mundo y las emisiones de Alemania se incluyen en las de la UE

No expresa su idea con bastante claridad, sin embargo, se sobreentiende que con eso se refiere a que aunque la total de la UE representa un 4% de descenso, siendo Alemania miembro de UE es posible que tenga más descenso en emisiones (16%) que puede ser recompensada con su aumento en otros países miembros de UE.

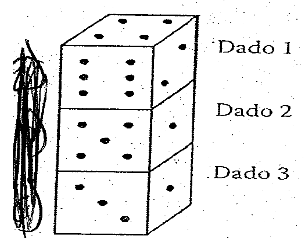
E2 intenta resolver el ítem 32 (Vuelo espacial), sin embargo, según los cálculos que muestra, no ha sabido modelizar correctamente el campo.

40.000Km X 86.500 = 3460000000Km
346 mil millones de Km

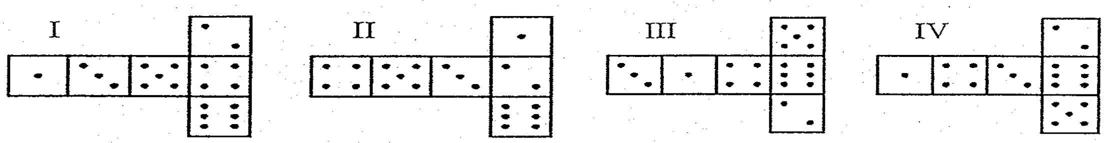
Ha multiplicado la circunferencia de la Tierra por el número de las vueltas (40.000 × 86.500) sin tener en cuenta que la Mir ha estado a una distancia de 400 km de la Tierra, lo que implica que ha dado vueltas por otra circunferencia distinta de la de la Tierra.

Parece no entender la pregunta planteada en el ítem 34 (Dados 1), ya que en vez de contar los puntos de las caras horizontales que no se pueden ver de los tres dados, escribe simplemente los puntos de las tres caras verticales.

1) 5
2) 6
3) 6



Tampoco ha sido capaz de interpretar y visualizar mentalmente las representaciones bidimensionales de los dados en el ítem 35 (Dados 2).



Foma	¿Cumple la regla de que la suma de las caras opuestas es 7?
I	*Sí / No*
II	*Sí / No*
III	*Sí / No*
IV	*Sí / No*

Lo hace correctamente para las formas I y II, sin embargo, se equivoca en el caso de las formas III y IV. Es fácil notar que no cumple la regla en I, ya que 6+2 ya da 8, para las demás tres formas el procedimiento es el mismo y ha sido de esperar que si lo ha sabido inferir correctamente para II lo hubiese hecho también para III y IV.

E2 ha sido capaz de abordar el último ítem de este grupo, "Respaldo al presidente":

La tercera
1· Porque al ser elegidas al azar puede haber distintas opiniones ya que si llaman pueden llamar solo los que

lo apollan
2. Es muy cercano al dia de las elecciones

De este modo, ha indicado correctamente al periódico 3 y ha dado dos razones validas que justifican la mejor predicción de este periódico, manifestando las CM asociadas al ítem.

En lo que se refiere a los ítems que requieren CM del grupo de reflexión, E2 ha realizado correctamente la mayoría de ellos. Uno de los ítems que no ha llevado a cabo con éxito es el 10 (Chatear 2): no ha sido capaz de calcular correctamente el intervalo en el cual podrían chatear dos chicos, siendo uno en Sidney y el otro en Berlín, con la diferencia horaria correspondiente dada.

Este estudiante aborda el ítem 13 (El tipo de cambio 3), en el cual da un argumento correcto aunque bastante lacónico:

Si, porque le corresponderon mas dólares

No explica a qué se debe este hecho, sin embargo, lo tomamos como válido, ya que parece haber razonado al respecto.

E2 sabe abordar el ítem 20 (Basura), razonando acerca la inadecuación de representar los datos dados mediante un diagrama de barras:

Porque los tiempos de descomposición son muy diferentes por ejemplo las cajas de carton tardan 0,5 años y los vasos de plastico mas de 100 años

Su argumento se basa en la gran variación de los datos (la diferencia en la longitud de las barras en la diagrama de barras sería demasiado grande). Asimismo manifiesta las demás CM asociadas a este ítem.

En el ítem 21 (Terremoto) ha sabido razonar sobre la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la* *posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres,* mostrando la capacidad de criticar y valorar los argumentos propuestos y elige la opción correcta.

Da una explicación razonable en el ítem 31 (Los niveles de CO_2 3):

Puede ser el que mas haya subido según el ~~porcentaje~~ porcentage o según ~~la~~ cantidad real de CO_2 emitido

E2 no menciona cuáles de los países han subido sus emisiones en porcentaje y en millones de toneladas, sino indica que es posible tener dos diferentes respuestas "correctas", según observamos dos diagramas que reflejan el aumento absoluto o relativo respectivamente. Consideramos que aun así, es aceptable la respuesta como válida, ya que manifiesta la comprensión de que existan estas dos aproximaciones matemáticas.

Por último, E2 ha intentado resolver el ítem 38 (El mejor coche 2), tratando de inventar reglas para convertir el coche Ca en el ganador.

$\frac{2}{3}$ S + $\frac{1}{3}$ C + $\frac{2}{3}$ D + $\frac{3}{3}$ H.

Sin embargo, ninguna de las dos reglas que propone son válidas: en el caso de la primera regla, los ganadores son dos coches (Ca y XK) y si aplicamos la segunda regla ganan N1 y XK.

3. Informe de análisis de E3

El estudiante E3 ha resuelto correctamente los 28 ítems de la prueba. Excepto dos ítems, que presentamos adelante, **ha llevado a cabo con éxito todos los demás que requieren reproducción y aplicación de los conocimientos y destrezas matemáticos básicos**.

E3 no ha sabido realizar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes.

Media: La media es de 70 puntos...

E3 obtiene como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en el entendimiento del concepto de media aritmética.

Otro fallo lo ha cometido en el cálculo de la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3×S) + C + D + H en el ítem 37 (El mejor coche 1).

Coche	**Seguridad (S)**	**Ahorro de combustible (C)**	**Diseño exterior (D)**	**Habitáculo interior (H)**
Ca	**3**	**1**	**2**	**3**
M2	**2**	**2**	**2**	**2**
Sp	**3**	**1**	**3**	**2**
N1	**1**	**3**	**3**	**3**
XK	**3**	**2**	**3**	**2**

Puntuación total de *Ca*: ..9..

Parece que tan solo ha sumado las puntuaciones de Ca (3+1+2+3=9), sin realizar la operación 3×S. No creemos que le haya resultado difícil realizar esta operación, más bien se trata del acercamiento mecánico y de la falta de atención a los componentes de la fórmula. Los demás 14 ítems de este grupo, E3 los realiza con éxito, demostrando las CM asociadas a éstos.

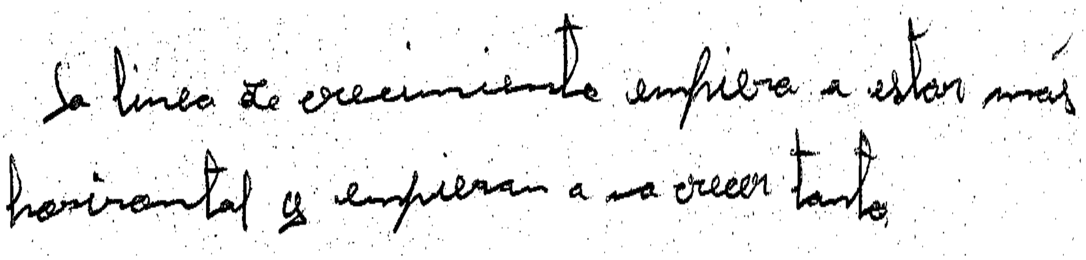
En cuanto a los ítems que invitan a activar las CM del grupo de conexión, E3 ha mostrado la capacidad de abordar la mayoría de estos ítems.

En el ítem 2 (Caminar 2), sin embargo, no ha sabido ir más allá de la identificación de las variables y aplicación de la fórmula dada. Encuentra correctamente el número de pasos en un minuto.

$\frac{n}{0'8} = 140 \qquad n = 140 \cdot 0'8 = 112$

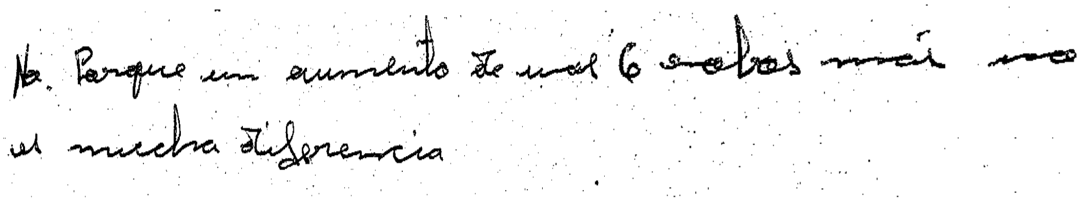
No ha sido capaz de seguir el problema para encontrar la velocidad en m/min y km/h, razonando que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, que sería la velocidad en m/min.

Este estudiante realiza correctamente el ítem 5 (Crecer 2).


La línea de crecimiento empieza a estar más horizontal y empiezan a no crecer tanto.

Con la explicación más bien en el lenguaje coloquial: "*La línea de crecimiento empieza a estar más horizontal y empieza a no crecer tanto*", manifiesta entender cómo se refleja que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas desminuye a partir de los 12 años y poseer las demás CM asociadas a este ítem.

E3 ha sabido emplear el concepto de aumento de una cantidad, en el ítem 7 (Robos):


No. Porque un aumento de unos 6 robos más no es mucha diferencia

Asimismo, es capaz de expresarse por escrito, argumentando asuntos matemáticos que implican relaciones: *"No, porque un aumento de unos 6 robos más no es mucha diferencia"*. Sin embargo no específica en comparación al total.

No ha sido capaz de realizar el ítem 8 (Carpintero). Rechaza todas las opciones de los diseños propuestos para la construcción del parterre.

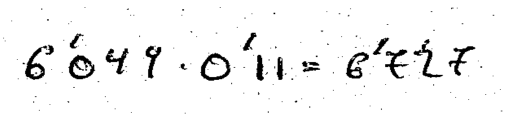
Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Parece que ha tenido dificultad a la hora de relacionar los 32 m de madera con el perímetro de los diseños dados, ya que al menos en el caso del diseño D (rectángulo 6x10), más sencillo y familiar, hubiese calculado su perímetro y hubiese visto la posibilidad de utilizar este diseño.

E3 ha sido capaz de realizar los siguientes ítems, poniendo en marcha las CM asociadas a cada uno: relaciona las 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de los dos países (Chatear 1), en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente el porcentaje directo a la cantidad dada, asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada y en el ítem 22 (Selección) ha sabido formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada.

En el ítem 27 (Monopatín 3), E3 ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y, a través de estrategias no triviales, elegir entre los precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible.

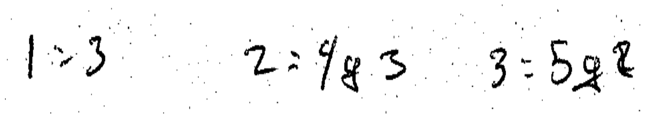
Intenta proceder en la solución del ítem 29 (Los niveles de CO_2 1):



Sin embargo, no ha sido capaz de explicar correctamente cómo se obtiene el aumento del 11% a partir de los datos. Parece intuir, yendo por el camino de la aplicación directa del porcentaje, parte de la cantidad inicial pero no sabe llegar a la cantidad final, ni proceder en el sentido contrario.

Asimismo, en el ítem 30 (Los niveles de CO_2 2), razona erróneamente cuando con su “Si” confirma estar de acuerdo con que no es posible que el descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) sea mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%). No obstante, no da ninguna explicación al respecto. Parece que no comprende el concepto de media aritmética con debida profundidad y no ha sido capaz de generalizarlo a una situación poco familiar.

Este estudiante resuelve correctamente los ítems 34 y 35 (Dados 1 y Dados 2). Llega a la solución en el 34 siguiendo una estrategia más estándar:



Calcula los puntos de las caras que no se pueden ver, deduciendo de los puntos de las que se ven y aunque no lleva a cabo la solución, ya que se les pide la suma de las cinco caras, consideramos como válida su solución, dado que la fase más importante del problema lleva a cabo correctamente. En el ítem 35 sabe identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

Este estudiante resuelve correctamente tres ítems de los que invitan a activar procesos cognitivos del grupo de reflexión. Así, ha sido capaz de realizar el ítem 10 (Chatear 2) razonando sobre el intervalo en el cual pueden chatear los chicos y llevando a cabo los cálculos correspondientes:

Lugar	Hora
Sydney	De 7:00 A 8:00
Berlin	De 22:00 A 23:00

En el ítem 13 (El tipo de cambio 3) es capaz de razonar acerca de cuál de los dos tipos de cambio ha favorecido a Mei-Ling:

Si: Porque cuando volvió tuvo que dar menos ZAR para obtener más SGD

Con la explicación: *"Si, porque cuando volvió tuvo que dar menos ZAR para obtener más SGD"* ha manifestado la capacidad de expresarse por escrito explicando asuntos matemáticos que implican relaciones. Da una explicación más bien general, sin especificar qué cantidad en concreto.

Asimismo, ha sido capaz de dar un argumento válido en el ítem 20 (Basura):

Porque no son todos los datos precisos, hay aproximaciones y eso no se puede representar en un diagrama de barras.

La razón que da E3:*"Porque no son todos los datos precisos, hay aproximaciones y eso no se puede representar en un diagrama de barras"*, se basa en la gran variabilidad de los datos de algunas categorías que hace imposible su representación por medio de un diagrama de barras.

4. Informe de análisis de E4

El estudiante E4 ha realizado con éxito 25 ítems de la prueba. **Ha sabido ejecutar los ítems que invitan a activar procesos cognitivos del grupo de reproducción, manifestando CM correspondientes**. Tan solo no lleva a cabo dos ítems de este grupo.

Uno de ellos es el ítem 1 (Caminar 1), donde ha tenido que identificar los datos con las variables de la fórmula dada y, despejando la incógnita, calcular su valor. Parece que no ha intentado resolverlo ya que no ha dejado ningunos cálculos al respecto. Otro es el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), elige la opción errónea (25%). Los demás 14 ítems de este grupo, E4 los resuelve correctamente.

A la hora de abordar los ítems que requieren poner en marcha procesos cognitivos del grupo de conexión, ha actuado de la siguiente manera.

Ahora, en el ítem 7 da una explicación según la cual le parece una interpretación razonable la afirmación del presentador respecto al enorme aumento del número de robos de 1998-1999.

Sí, porque la columna de 1999 es mucho más elevada que la de 1998. Si nos fijamos en el número de robos de 1998, son alrededor de los 508 robos, mientras que en 1999 son unos 516.

Indica que en 1998 hay alrededor de 508 robos y en 1999 hay 516, sin embargo, considera un aumento de 8 robos en un año enorme en comparación con el total, con lo que está de acuerdo con el presentador. Parece que tan solo se ha fijado en que hay aumento, o más bien le parece un aumento grande producir 8 robos al año porque no lo compara con la producción total del año anterior.

En el ítem 8 del Carpintero, menciona correctamente la posibilidad de construir el parterre con los diseños A, B y D.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	*Sí* / *No*
Diseño B	*Sí* / *No*
Diseño C	*Sí* / *No*
Diseño D	*Sí* / *No*

Sin embargo, no ha sido capaz de estimarla correctamente para el diseño C, el que tiene cierta analogía con el diseño A.

E4 ha realizado correctamente los siguientes ítems, demostrando las CM asociadas a éstos: ha sabido relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de los dos países (Chatear 1), en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente porcentaje directo a la cantidad dada, asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada, y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada.

En el ítem 23 (Puntuaciones de un examen), E4 ha sido capaz de dar un argumento matemático válido:

El aprobado es a partir de los 50 puntos, si se suman
el número de aprobados de ambas clases, el grupo A
suman 11 aprobados mientras se el grupo B suman
solo 10 aprobados.

Su argumento se basa en que el número de aprobados en el grupo A es mayor que el del grupo B. Asimismo ha manifestado las demás CM asociadas a este ítem.

En el ítem 27 (Monopatín 3), E4 no ha sabido estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín y quedarse con el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

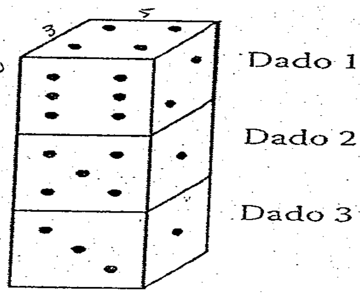
Asimismo, en el ítem 29, no ha sabido explicar cómo se obtiene los 11%. Y en el ítem 30, da una explicación errónea:

Sí, porque se hacer el porcentaje no se contó el descenso de Alemania. Puesto que si se ~~tuvo~~ hubiera contado, el porcentaje de la ~~UU. EE.~~ UE sería del 10%.

Confirma su acuerdo con que el descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) no puede ser mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%) ya que Alemania forma parte de la UE. Aún más, parece contar la media aritmética de los dos porcentajes para obtener el 10% de emisiones de la UE. Este hecho refleja que no ha comprendido el concepto de media aritmética con debida profundidad o más bien no lo ha aplicado a situaciones donde hay que generalizarlo.

E4 en el ítem 34 (Dados 1), identifica erróneamente los números de las dos caras del dado 3:

	CARA ARRIBA		CARA ABAJO
1 →	4	—	3
2 →	3	—	4
3 →	6	—	1



Sin embargo, ha sabido realizar correctamente el ítem 35 (Dados 2), identificando y reconociendo los elementos de las figuras tridimensionales en una representación bidimensional.

E4 en el ítem 36, da un argumento no válido para justificar que los resultados del periódico 4 hacen mejor predicción acerca del nivel del respaldo al presidente.

El Periódico 4 porque los se votaron lo hicieron voluntariamente.

Se basa en que los votantes llamaron voluntariamente, mencionando de este modo exactamente la razón por la que los resultados no son de mucha fiabilidad, ya que no son elegidos al azar y pueden llamar solo los que le apoyan.

En cuanto a los ítems que requieren activar procesos cognitivos del grupo de reflexión, E4 ha realizado los que presentamos a continuación. Ha sido capaz de resolver el ítem 10 (Chatear 2) razonando sobre el intervalo en el cual pueden chatear los chicos y llevando a cabo los cálculos correspondientes. En el ítem 13 (El tipo de cambio) sabe explicar la razón por la que un tipo de cambio ha sido más favorable que el otro:

Sí, porqe el rands sudafricano bajó su valor respecto a los dólares de Singapur lo qe hizo qe se le devolviese más dinero.

Con esta explicación: *"Sí, porque el rands sudafricano bajó su valor respecto a los dólares de Singapur lo que hizo que se le devolviese más dinero"* demuestra las CM asociadas a este ítem.

Asimismo, en el ítem 20 (Basura), E4 ha sabido dar una razón que justifica la inadecuación de un diagrama de barras para los datos que se dan:

Porqe la diferencia de tiempo de descomposición entre unos desechos y otros es muy elevada.

La razón que da se fundamenta en la gran variación de los datos (la diferencia en la longitud de las barras en la diagrama de barras sería demasiado grande).

Por último, en el ítem 21 (Terremoto), ha sido capaz de razonar sobre la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres,* mostrando la capacidad de criticar y valorar los argumentos propuestos y elige la opción correcta.

5. Informe de análisis de E5

La estudiante E5 ha realizado con éxito 18 de la prueba. Entre ellos, **ha sabido resolver principalmente los que invitan a activar CM del grupo de reproducción y algunos más complejos hasta los que requieren movilizar CM más avanzadas**.

E5 ha sabido abordar correctamente el ítem 1 (Caminar 1), mostrando los cálculos correspondientes con claridad:

$$\frac{70}{P} = 140$$

$$\frac{70}{140} = P$$

$$P = 0{,}50\ m$$

Ha sabido identificar las variables con la fórmula dada, despejar la incógnita y realizar los cálculos.

E5 ha sido capaz de descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos). No le ha presentado ninguna dificultad realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas.

Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente:

$$\begin{array}{r} 170{,}6 \\ -\quad 2{,}3 \\ \hline 168{,}3 \end{array}$$

Hace los cálculos ayudándose del papel y lápiz.

En el ítem 6 (Crecer 3), ha sido capaz de interpretar la representación gráfica de dos funciones e indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

Desde los 11 hasta los 13 años

En los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), E5 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, realizando procedimientos estándares.

Esta estudiante, realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; el ítem 16 (Caramelos de colores), calculando correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo. Asimismo, aborda el ítem 17, mostrando sus cálculos:

Media: 64 puntos

$$\frac{80 + (60 \times 4)}{5} =$$

De este modo calcula correctamente la media de las notas tras cinco exámenes: un examen con la puntuación 80 y otros cuatro con una media de 60 puntos.

E5, sabe descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Al realizar los ítems mencionados, ha mostrado las CM asociadas a cada uno de ellos.

Ahora bien, **de los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de conexión**, ha sabido realizar el ítem 2 (Caminar 2):

$$\frac{n}{0{,}80} = 140 \qquad 112 \cdot 0{,}8 = 89{,}6 \text{ m/min}$$

$$n = 140 \cdot 0{,}80 = 112$$

Realiza la primera parte del ítem, buscando número de pasos por minuto y es capaz de ir más allá, razonar y calcular la velocidad en m/min, sin embargo, no ha sido capaz de pasar de m/min a km/h.

E5 hace una elección correcta entre los diseños propuestos en el ítem 8 (Carpintero) para la construcción del parterre con 32 m de madera disponible:

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	*Sí* / *No*
Diseño B	*Sí* / *No*
Diseño C	*Sí* / *No*
Diseño D	*Sí* / *No*

Ha sabido reconocer que se trata de estimar el perímetro de los diseños dados y ha sido capaz de calcular correctamente el perímetro de las figuras geométricas dadas para decidir respecto al diseño adecuado.

En el ítem 9 (Chatear 1), E5 se equivoca al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney):

Respuesta: Las 4 de la mañana

Siendo 9 horas por delante de la hora en Sidney, la estudiante, en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta que ha dado.

E5 no ha sido capaz de elegir una opción correcta en el ítem 15 (Exportaciones 2) a partir de la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados), más bien porque no ha sabido descodificar e interpretar las representaciones gráficas dadas. Asimismo, en el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad); tampoco ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones en el ítem 22 (Selección).

Entre los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión, esta estudiante aborda los siguientes.

El ítem 10 (Chatear 2), donde había que indicar los intervalos cuando podrían chatear los chicos, E5 se limita a indicar tan solo las horas puntuales de estos intervalos, aunque esta vez sí lo hace correctamente.

Lugar	**Hora**
Sydney	5 de la tarde.
Berlin	8 de la mañana

De este modo, no llega a demostrar las CM asociadas a este ítem, sino más bien al ítem 9 (Chatear 1).

Ahora bien, ha sabido explicar el tipo de cambio más favorable, en el ítem 13 (El tipo de cambio 3):

Si le favoreció, ya que así recibe un dolar por menos cantidad de ZAR.

Su razonamiento se basa en que pagando menos ZAR recibe más dólares.

Da una razón en el ítem 20 (Basura), por la que no es adecuado representar los datos de la tabla dada mediante un diagrama de barras.

Porque el periodo de descomposición es muy variado

Con este argumento se refiere a la gran variabilidad de los datos de algunas categorías.

Por último, en el ítem 21 (Terremoto), ha sido capaz de valorar y criticar las opciones dadas que describen la probabilidad la ocurrencia de un terremoto, y elegir la opción correcta.

6. Informe de análisis de E6

El estudiante E6 ha sido capaz de resolver correctamente 18 ítems, en general, **activando las CM del grupo de reproducción y, en otras pocas ocasiones, las CM más avanzadas**.

Este estudiante ha sabido realizar correctamente el ítem 1 (Caminar 1), mostrando los siguientes cálculos:

$$\frac{70}{p} = 140 \quad ; \quad p = \frac{70}{140} ; \quad p = 0'5\,m$$

De este modo, ha sabido identificar las variables, despejar la incógnita y calcular su valor.

En el ítem 3 (Cubos), ha sido capaz de descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y calcular los valores de las caras escondidas.

Hace correctamente la operación sencilla de resta, en el ítem 4 (Crecer 1):

Respuesta: ....168'3..............cm

170'6 - 2'3 = 168'3

Se ayuda con la expresión escrita de la operación para proceder a su cálculo.

En el ítem 6 (Crecer 3), da una respuesta corta, indicando tan solo un valor del intervalo pedido.

A los 12 años

Sabe reconocer un número donde una función toma valores más grandes que la otra, sin embargo, no llega ha indicar el intervalo total.

En los ítems 11 y 12, que se refieren al cálculo de la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dado, los ha realizado correctamente aplicando procedimientos estándares. E6 ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de sacar un caramelo rojo (6 de 30), ha elegido la opción errónea (25%).

E6 ha sido capaz de abordar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), calculando la nota media tras cinco exámenes. Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Sin embargo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido:

	Mesa 1	*Mesa 2*
1ª Ronda	Tomás-Ricardo	Luis-David
2ª Ronda	Tomás - Luis	Luis - Ricardo
3ª Ronda	Tomás - David	David - Ricardo

Asimismo, mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

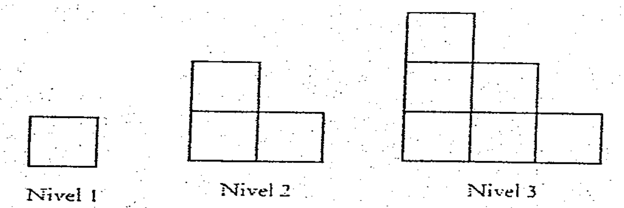
E6 ha tenido fallo en el cálculo de la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3×S) + C + D + H en el ítem 37 (El mejor coche 1).

Coche	Seguridad (S)	Ahorro de combustible (C)	Diseño exterior (D)	Habitáculo interior (H)
Ca	**3**	**1**	**2**	**3**
M2	**2**	**2**	**2**	**2**
Sp	**3**	**1**	**3**	**2**
N1	**1**	**3**	**3**	**3**
XK	**3**	**2**	**3**	**2**

Puntuación total de *Ca*: ..9..

Parece que tan solo ha sumado las puntuaciones de Ca (3+1+2+3=9), sin realizar la operación 3×S, probablemente, debido al acercamiento mecánico y a la falta de atención a los componentes de la fórmula.

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, no ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitará Roberto para construir el Nivel 4:



Respuesta: ....12 cuadrados.

Más bien ha duplicado el número de los cuadrados del Nivel 3 (6x2=12), razonando que como los 6 cuadrados de este Nivel es doble de los 3 cuadrados del Nivel 2, es esa sería la regla, aunque el paso del Nivel 1 al Nivel 2 es distinto.

En cuanto a los ítems que invitan a movilizar las CM del grupo de conexión, ha llevado a cabo con éxito tan solo cuatro de ellos.

En el ítem 2 (Caminar 2), ha sabido identificar las variables, pero no ha sido capaz de despejar correctamente la incógnita.

$$\frac{n}{0'8} = 140 \quad ; \quad n = \frac{140}{0'8} = 175$$

No da ninguna explicación acerca de cómo se manifiesta en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas desminuye a partir de los 12 años (ítem 5), probablemente debido a que no está familiarizado con el concepto. En el ítem 7, se contradice a sí mismo.

Si, en 1998 hubo entre 505 y 510 robos y en 1999 hubo un gran aumento 515 robos, pero no es

Por una parte confirma su acuerdo con la interpretación del presentador acerca de un aumento enorme del número de robos, por otra parte, llega a la conclusión que no es un número enorme.

En el ítem 8 (Carpintero) descarta todas las opciones de los diseños propuestos para la construcción del parterre.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Parece que ha tenido la dificultad a la hora de relacionar los 32 m. de madera con el perímetro de los diseños dados, ya que al menos en el caso del diseño D (rectángulo 6x10), más sencillo y familiar, hubiese calculado su perímetro y hubiese visto la posibilidad de utilizar este diseño.

Asimismo, en el ítem 9 (Chatear 1), falla al relacionar las 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de 9 horas de los dos países, dando respuesta errónea las 11 de la mañana.

En el ítem 15 (Exportaciones 2), ha sabido identificar los datos de los dos diagramas y aplicar correctamente el porcentaje.

A 1,8 millones de zeds.
B 2,3 millones de zeds.
C 2,4 millones de zeds.
D 3,4 millones de zeds.
E 3,8 millones de zeds.

42'6 · 9% ; 42'6 · 0'09 = 3'834

A partir de sus cálculos elige correctamente la opción adecuada.

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar correctamente que, como hay solo un número impar, es muy probable que la ruleta pare en un número par, sin embargo, al haber solo 6 canicas negras, es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad).

E6 realiza correctamente el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone el carpintero en su almacén ha de encontrar el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

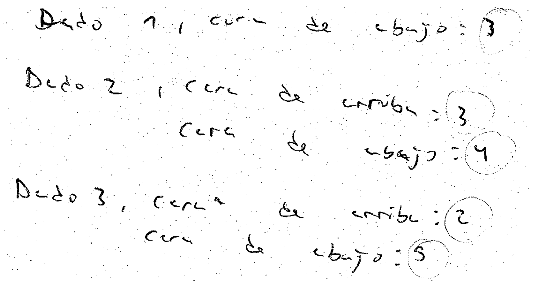
Respuesta:.............5.............estanterías.

T. Largos = 26 : 4 = 6'5
T. Cortos = 33 : 6 = 5'5
Ganchos P. = 200 : 12 = 16'6
Ganchos G = 20 : 2 = 10
Tornillos = 510 : 14 = 36'4

E6 divide el número de piezas del almacén entre el número necesario para una estantería y así llega a la conclusión de que solo alcanzará a construir 5 estanterías.

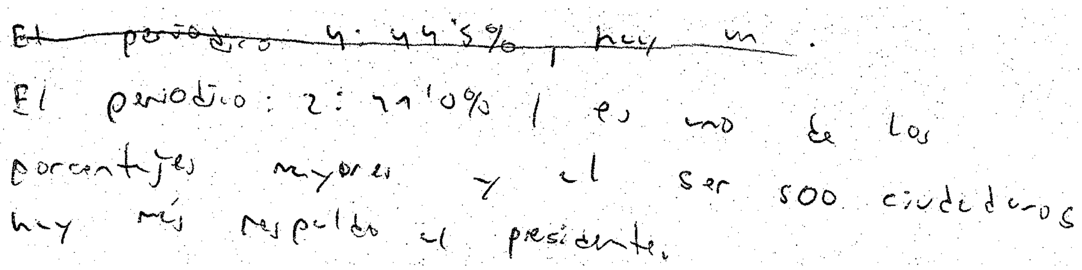
En el ítem 22 (Selección), sin embargo, no ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles. Da como respuesta errónea 16 combinaciones, en lugar de 6.

En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven.


Dado 1, cara de abajo: 3
Dado 2, cara de arriba: 3
cara de abajo: 4
Dado 3, cara de arriba: 2
cara de abajo: 5

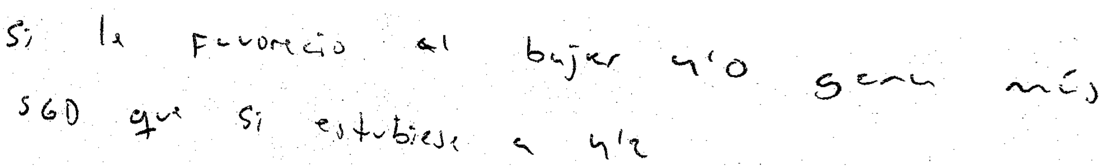
Aunque se les pide la suma de estos números, consideramos la solución válida, ya que la parte más significativa del ítem E6 ha realizado correctamente. Asimismo, ha llevado a cabo el ítem 35 (Dados 2), identificando correctamente formas de las figuras tridimensionales en la representación bidimensional.

En el ítem 36 (Respaldo al presidente), da dos razones erróneas acerca del periódico que mejor predice el nivel del apoyo al presidente


~~El periódico 4: 44'5%, hay un~~.
El periódico: 2: 41'0%, es uno de los porcentajes mayores y al ser 500 ciudadanos hay más respaldo al presidente.

Parece fijarse más bien en el porcentaje predicho y no en el tipo de muestra, ni en la fecha de realización. Menciona primero el periódico 4 que predice 44,5% de apoyo, pero luego cambia la opinión y se inclina hacia el periódico 2. Una de las razones que da es la muestra de 500 ciudadanos con el derecho a voto, sin embargo, no razona que el sondeo del periódico 3, con las mismas características pero con una muestra de 1000 ciudadanos, tiene más probabilidad de predecir mejor.

Ahora, **de los ítems del grupo de reflexión**, E6 ha realizado con éxito el ítem 13 (El tipo de cambio 3).


Si la favoreció al bajar a 4'0 serían más SGD que si estubiese a 4'2

Ha sabido dar una explicación apropiada para justificar por qué le favoreció a Mei-Ling el tipo de cambio, razonando que al dividir la misma cantidad por un número menor se obtiene un número mayor.

Asimismo, en el ítem 20 (Basura), ha dado una razón por la que no es adecuada una representación mediante del diagrama de barras de los datos dados.

Porque para hacer un diagrama de barras, necesita datos precisos y los datos de descomposición no son precisos.

Su razonamiento se basa en la gran variabilidad de algunos datos que hace imposible su presentación mediante un diagrama de barras.

En el ítem 21, a la pregunta cuál de las cuatro opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*, elige la opción no válida:

A $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed

B $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto

Parece que su elección viene determinada más bien por la idea de que nunca se puede predecir con seguridad acerca de los fenómenos de la naturaleza en general y no precisamente a la luz de la afirmación del geólogo.

7. Informe de análisis de E7

Esta estudiante, ha realizado con éxito 18 ítems de la prueba. **Ha sabido abordar principalmente los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción y algunos ítems más complejos**.

En el ítem 1 (Caminar 1), según los cálculos que muestra, ha sabido identificar las variables de la fórmula sin llegar a despejar correctamente la incógnita:

$$\frac{n}{P} = 140 \; ; \; \frac{70}{P} = \cancel{140} \; ; \; 140 = \frac{70}{P} \; ; \; P = \frac{140}{70} \; ; \; P = 2$$

$\boxed{\text{Son 2 metros}}$

Como hemos mencionado en el caso de otros estudiantes, más bien se trata de una actuación mecánica debido a la comodidad de manejar los números 140 y 70 en esta operación, o bien en el caso de esta estudiante puede que resulte problemático el proceso mismo de despejar, ya que en el ítem 2 igualmente ha presentado dificultad para este procedimiento. En todo caso, tampoco cuestiona el resultado obtenido: la longitud del paso de un hombre igual a dos metros.

E7 ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos). Sin dificultad realiza la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta y ayudándose del papel y lápiz, lleva a cabo su solución correctamente.

En el ítem 6 (Crecer 3), ha sido capaz de interpretar la representación gráfica de dos funciones e indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

Entre los 11 y 13 años

En el ítem 16 (Caramelos de color), descodifica el diagrama de barras, sacando valores de los varios caramelos y los suma:

$6+5+3+3+2+4+2+5=30$

A 10%

$\boxed{\text{B 20\%}}$

NO ~~C 25%~~

D 50%

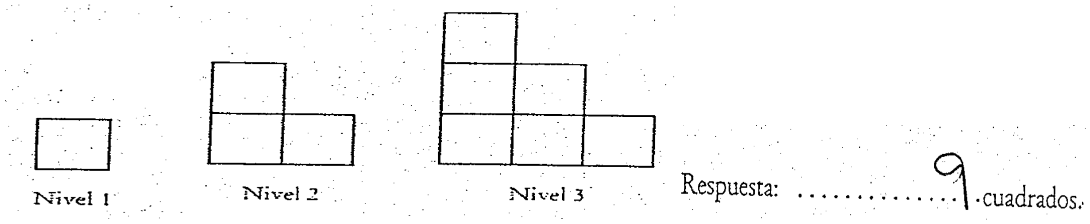
De 30, 6 son rojos-

A continuación ha sabido pasar "de 30, 6 son rojos" a que la probabilidad de que Roberto coja un caramelo rojo es de 20 %.

E7 ha sido capaz de abordar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), calculando la nota media tras cinco exámenes. Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad y en el ítem

26 (Monopatín 2) calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes. En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido; y en el ítem 33 mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

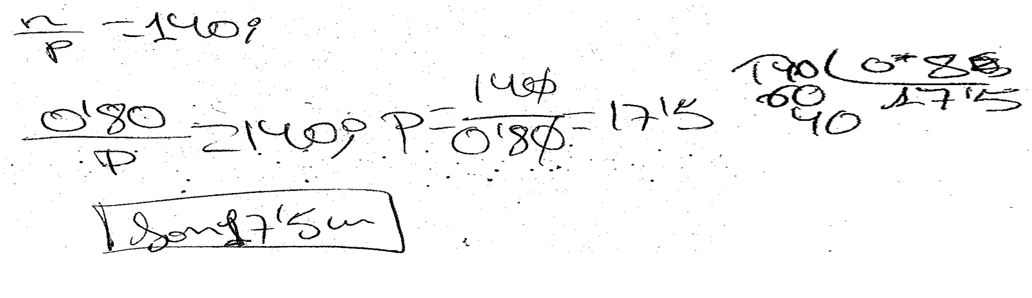
E7 no ha sabido hacer el cálculo de la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3×S) + C + D + H en el ítem 37 (El mejor coche 1).Y en el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, no ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4:



Parece que toma como regularidad sumar tres cuadrados a los cuadrados del nivel anterior, aunque no es así para el Nivel 2, sin embargo, para formar el Nivel 3 se añaden 3 cuadrados o más bien no ha contado un cuadrado al colocarlos para formar el Nivel 4.

A continuación presentamos cómo E7 ha abordado los ítems que invitan a movilizar las CM del grupo de conexión.

Así, en el ítem 2 (Caminar 2), en primer lugar, se ha equivocado a la hora de identificar las variables de la fórmula, ya que se le da la longitud del paso P=0,80m y ha de encontrar en número de pasos, n.



En segundo lugar, aun así, despeja erróneamente P, luego la división que realiza es incorrecta ya que no ha sabido “quitar” el cero cuando éste aparece en la parte decimal del número y lo reduce con el cero del otro número entero. Por último, la respuesta que supone el número de pasos ha resultado “son 17,5m”. Este hecho, aparte de las carencias importantes en conceptos y procedimientos, refleja un acercamiento mecánico a la resolución, sin una debida interpretación de los resultados.

En el ítem 5 (Crecer 2), E7 ha sido capaz de explicar cómo se refleja en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas desminuye a partir de los 12 años.

Porque a partir de los 12 años
empieza a ser constante y deja
de ascender.

Con esta explicación demuestra entender y emplear el concepto de cambio de la gradiente del gráfico.

En el ítem 7 (Robos), da una razón por la que no está de acuerdo con la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos.

No, porque en realidad sólo hay 7 robos más.

No detalla que 7 robos no es un aumento enorme en relación con el número total de robos.

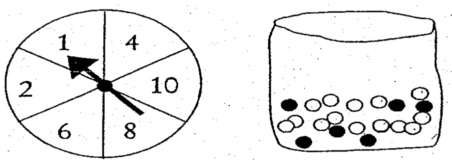
E7 no ha sido capaz de realizar con éxito el ítem 8 (Carpintero), ha indicado correctamente como válido tan solo el diseños C y no válido el diseño B. Para los otros dos diseños A y D lo ha hecho erróneamente aunque ambos diseños son más simples que el diseño C.

En el ítem 9 (Chatear 1), E7 ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín:

Respuesta: las 10 de la mañana

de 10 a 7 = 9 h.
1+9=10

A la hora de abordar el ítem 18, demuestra lo siguiente:



6 negras
14 blancas

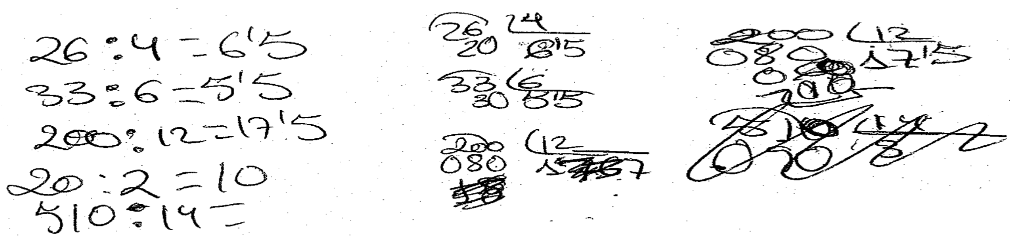
Sabe usar la estrategia adecuada para su proceder, contando las canicas negras y blancas, sin embargo, parece interpretar erróneamente el enunciado y representación de la ruleta.

¿Cómo es de probable que Daniela gane un premio?

A Es imposible. porque le ha tocado el 1, que es impar
B No es muy probable.
C Tiene aproximadamente el 50% de probabilidad.
D Es muy probable.
E Es seguro.

Según la explicación que da E7, seguramente ha interpretado que a Daniela ya le ha tocado el 1 al girar la ruleta, debido a que la flecha en el dibujo indica 1, por lo que según las condiciones del problema, cuando sale un número impar no tiene la oportunidad para sacar canica negra, es cuando se da el premio. Sin embargo, el dibujo no refleja el número que ha tocado a Daniela, sino que es una representación general, la flecha podría indicar con la misma probabilidad otro número.

E7 realiza correctamente el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha de encontrar el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.



E7 divide el número de piezas del almacén entre el número necesario para una estantería y así llega a la conclusión que solo alcanzará construir 5 estanterías, demostrando inseguridad a la hora de manejar los números y realizar las operaciones.

En el ítem 22 (Selección), E7 ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles.

No ha sido capaz de dar un argumento válido en el ítem 23 (Puntuaciones de un examen):

En la mayoría de los

Empieza con una frase, sin embargo, no ha sabido llevar a cabo un razonamiento adecuado.

En el ítem 27 (Monopatín 3), E7 no ha sabido estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos. Asimismo, en el ítem 29, intenta explicar cómo se obtiene los 11%, sin embargo, no llega a concluirlo correctamente.

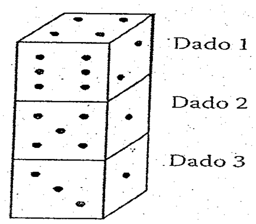
$$\cancel{\begin{array}{r} 6,727 \\ -\,6,049 \\ \hline 0,678 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} 6.727 : 100 = 67'27 \\ 6.049 : 100 = 60'49 \end{array}$$

$$\frac{x}{100} \cdot 678 \qquad x = 678 \cdot 100 \qquad \begin{array}{r} 67'27 \\ -\,60'49 \\ \hline 6'78 \end{array}$$

Según la primera operación de resta, parece intuir el primer paso, sin embargo, no ha sido capaz de seguir los siguientes pasos del procedimiento. De este modo, demuestra no entender con debida profundidad y no saber emplear el concepto de porcentaje en el sentido contrario.

Por último, resuelve correctamente los ítems 34 y 35 (Dados 1 y Dados 2). En el ítem 34 usa una estrategia menos estándar:

$21-4 \; 17$



Razona que si la suma de las caras opuestas es siete y hay tres cubos, en total dan 21 puntos y restándole los cuatro puntos de la cara de arriba obtiene el resultado. Asimismo, en el ítem 35 sabe identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

Entre los ítems que requieren activar las CM del grupo de reflexión, esta estudiante ha sabido abordar el siguiente.

En el ítem 20 (Basura), ha sido capaz de razonar correctamente acerca de la inadecuación de un diagrama de barras para la representación de los datos dados.

Porque estamos hablando de muchas cantidades: días (que no lo especifica), meses, años y siglos. Y además, no especifica las pieles, los chicles, los periódicos ni los vasos de plástico.

Sus argumentos se basan, uno, en la gran variación de los datos (la diferencia en la longitud de las barras en la diagrama de barras sería demasiado grande), y en la gran variabilidad de los datos de algunas categorías.

8. Informe de análisis de E8

La estudiante E8 ha llevado a cabo con éxito 15 ítems de la prueba, **entre ellos gran parte son los que requieren poner en marcha las CM del grupo de reproducción y otros más complejos**.

Así, el ítem 1 (Caminar 1) donde ha tenido que identificar los datos con las variables de la fórmula dada y despejando la incógnita calcular su valor, no ha sido capaz de llevarlo a cabo.

$\frac{n}{P} = 140 \quad P = 140 \cdot \quad P = .$

Parece que tiene dificultad para despejar la incógnita cuando ésta es el divisor del cociente, ya que en el ítem 2, sabe despejar correctamente n de la misma fórmula.

E8 ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos), así como, no le ha resultado difícil realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente:

En el ítem 6 (Crecer 3), ha sido capaz de interpretar la representación gráfica de dos funciones e indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

De los 11 años hasta los 18 años aproximadamente.

En los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), E8 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, utilizando la regla de tres. Comete fallos al tratar los números, confunde el punto que separa miles con la coma para separar decimales, tomando éste primero como coma.

1 SGD —— 4,0 ZAR
x —— 3,900 ZAR X = 0,975 SGD

Hemos considerado válida la respuesta, debido al proceder y cálculos correctos.

Esta estudiante, realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

E8, en el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), elige la opción errónea (25%); asimismo, no ha sabido realizar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes.

Media: ..70...puntos..

E8 obtiene como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en la comprensión del concepto de media aritmética.

Esta estudiante ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad.

En el ítem 33 mediante un procedimiento rutinario de división, E8 ha sabido calcular correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

En cuanto a los ítems que invitan a activar las CM del grupo de conexión, E8 ha mostrado la capacidad de realizar algunos de estos ítems.

E8 en el ítem 2 (Caminar 2) no ha sabido ir más allá de la identificación de las variables y aplicación de la fórmula dada.

$\frac{n}{P} = 140 \quad \frac{n}{0,8} = 140$

$/ \; 140 \cdot 0,8 = 112$ Paso

No ha sido capaz de seguir el problema para encontrar la velocidad en m/min y km/h, razonando que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, que sería la velocidad en m/min.

En el ítem 5 (Crecer 2), parece no entender que se trata de la velocidad del crecimiento del gráfico.

No disminuye la tasa de crecimiento
sino aumenta.

La explicación que da se basa en que el gráfico sigue creciendo, y no se fija que ya no con la misma velocidad.

Asimismo, no ha sido capaz de razonar correctamente en el ítem 7 (Robos). Confirma su acuerdo con la afirmación del presentador acerca del aumento enorme de robos a partir de la interpretación del gráfico que éste hace.

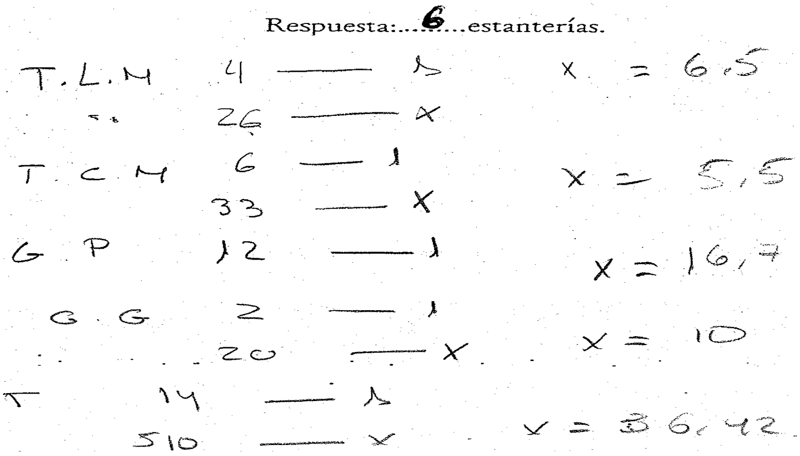
Si, Porque en la tabla se aprecia que en el
año 1998 el número de robos es mucho más
inferior que en el año 1999. En el cual la
afirmacion del presentador es correcta.

Es cierto que el gráfico hace que parezca que ha habido un incremento enorme pero si hubiese fijado en las cifras se daría cuenta que no hay mucho incremento, sin embargo, su argumento se basa en la apariencia del gráfico.

No ha sido capaz de realizar con éxito el ítem 8 (Carpintero), ha razonado correctamente acerca de la posibilidad de construir el parterre con los diseños A y D, sin embargo, no ha notado la analogía entre el diseño A y el diseño C para deducir también su adecuación.

E8 en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane, demostrando de este modo las CM asociadas a este ítem.

A la hora de abordar el ítem 19, E8 realiza correctamente los cálculos empleando la regla de tres:



Sin embargo, se equivoca al dar la respuesta. Parece redondear 5,5 y llegar a la respuesta 6 estanterías o simplemente lo ha hecho por despiste.

En el ítem 22 (Selección), no ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles. La respuesta errónea es 16 combinaciones en vez de 6. En el ítem 23 (Puntuaciones de un examen), da un argumento desde el punto de vista de los alumnos del Grupo B, mientras se les pide dar un argumento que podrían usar los del Grupo A para convencer al profesor en que han hecho el examen mejor que el grupo B.

No obstante, en el ítem 35 (Dados 2) sabe identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

Esta estudiante resuelve correctamente dos ítems de los que invitan a activar procesos cognitivos del grupo de reflexión.

Así, ha sido capaz de realizar el ítem 10 (Chatear 2) razonando sobre el intervalo en el cual pueden chatear los chicos y llevando a cabo los cálculos correspondientes. Asimismo, en el ítem 20 (Basura), E8 es capaz de interpretar correctamente la información presentada mediante una tabla y razonar sobre la inadecuación de presentarla mediante un diagrama de barras:

no resulta adecuado porque el tiempo de descomposición no es concreto entonces no se puede representar.

Su argumento se basa en a la gran variabilidad de los datos de algunas categorías.

9. Informe de análisis de E9

La estudiante E9 ha resuelto correctamente 14 ítems de la prueba. **Ha sabido ejecutar sobre todo los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción y algunos más complejos, sin llegar a realizar ninguno del grupo de reflexión**.

E9 ha sido capaz de abordar correctamente el ítem 1 (Caminar 1), mostrando los cálculos correspondientes:

$$\frac{70}{p} = 140$$

$$p = 0'5 \ m$$

Ha sabido identificar las variables con la fórmula dada, despejar la incógnita y realizar los cálculos. Asimismo, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas.

E9 en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente, así como, en el ítem 6 (Crecer 3), ha sido capaz de interpretar la representación gráfica de dos funciones e indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

Durante los 11 - 13 años.

De este modo, explica asuntos matemáticos que implican relaciones sencillas.

En los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), E9 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, realizando procedimientos de una sola operación; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

No ha sido capaz de calcular correctamente la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30 caramelos de diferentes colores), en el ítem 16, elige la opción de 50%. Asimismo, ejecuta erróneamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. La respuesta que da no se entiende bien, parece ser un 35.

Media: .....35.....

Puede que lo haya obtenido dividiendo 70 ($\frac{60+80}{2}$) entre 2. En todo caso es incorrecto el procedimiento.

Por último, ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24).

En lo que se refiere a los ítems más complejos, ha sido capaz de realizar con éxito algunos de ellos.

Así, en el ítem 2, ha sabido identificar las variables, pero no ha sido capaz de despejar correctamente la incógnita.

$$\frac{u}{p} = 140$$

$$\frac{n}{0'8} = 140 \; ; \; n = 175$$

En el ítem 5 (Crecer 2), ha sabido explicar cómo se refleja que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas desminuye a partir de los 12 años.

Pues porque la línea de puntos (la respectiva a las chicas) se hace más paralela al eje x.

Su explicación se basa en que el gráfico deja de crecer con la misma rapidez. Con esta explicación demuestra entender el concepto de cambio de la gradiente del gráfico, y manifiesta las demás CM asociadas a este ítem.

En el ítem 7 (Robos) sigue un razonamiento equivocado cuando confirma su acuerdo con la interpretación que hace el presentador acerca de un aumento enorme del número de robos a partir del gráfico.

Si, porque en 1998, el número de robots ni siquiera llegaba a los 510 y en el año 1999 el número de éstos llegaba a sobrepasar los 515.

Su argumento parte del hecho de que en el año 1998 el número de robos apenas llega a los 510 y en el 1999 sobrepasa a los 515, considerando de este modo el aumento de unos 5 robos como enorme respecto al total.

En el ítem 8 (Carpintero), según las opciones propuestas por E9 para la construcción del parterre, no ha sido capaz de establecer correctamente conexiones ente el perímetro de los cuatro diseños dados y la cantidad de madera que dispone el carpintero.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

E9 ha elegido correctamente los diseños A, C y D, sin embargo, no ha razonado que el diseño B, que es un romboide (6x10), no tiene el mismo perímetro que un rectángulo con las mismas dimensiones (diseño D), por lo que no es posible construir el parterre con 32 m de madera utilizando este diseño.

En el ítem 9 (Chatear 1), E9 se equivoca al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney). Siendo 9 horas delante la hora en Sidney, la estudiante, en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea 16:00 en Berlín.

Esta estudiante realiza correctamente el ítem 15 (Exportaciones 2):

9% de 42'6

$$\frac{42'6 \cdot 9}{100} = 3'8 \text{ millares de zeds.}$$

De este modo, sabe descodificar e interpretar representaciones gráficas y a partir de los datos aplicar porcentaje directo.

Asimismo, E9 en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta.

En el ítem 23 ha sabido descodificar e interpretar la representación de la situación mediante el diagrama, expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones y sabe seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos a partir de los datos:

Pues los alumnos del grupo A pueden convencer al profesor de que el grupo B no es el mejor realizando un diagrama en el que el nº de alumnos aprobados supere al de suspensos.

Su argumento se basa en que el número de los alumnos aprobados en el Grupo A es mayor que los del Grupo B.

Ahora, entre los ítems del grupo de reflexión intenta realizar algunos, sin embargo, sin éxito.

Así, en el ítem 20 (Basura), da un argumento no válido para justificar la inadecuación de un diagrama de barras para los datos que se dan:

Porque en el diagrama no se apreciaría bien los distintos tipos de basura ya que la naranja y el plástico tienen el mismo tiempo de descomposición.

Su argumento se basa en que el tiempo de descomposición de la piel de naranja y de plátano es el mismo, y no es una razón para no poder representar los datos en un diagrama de barras. Aunque menciona que no se aprecian bien los distintos tipos de basura, no explicita qué es exactamente lo que la hace imposible.

En el ítem 21 (Terremoto), no ha sido capaz de valorar y criticar correctamente las opciones dadas para elegir una de ellas que mejor describe la predicción del geólogo que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*. La opción que elige es errónea:

(B) $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$; por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

Parece no entender que con una posibilidad "dos de tres" aunque sea mayor de 50%, no se puede estar seguro de que ocurra un terremoto, sino que tiene mayor probabilidad que haya algún terremoto de que no haya ninguno.

10. Informe de análisis de E10

La estudiante E10 ha sido capaz de abordar correctamente 12 ítems de la prueba, **entre ellos la mayoría son ítems que invitan a activar procesos cognitivos del grupo de reproducción y algunos ítems de otros dos grupos.**

Esta estudiante en el ítem 1 (Caminar 1) ha tenido dificultad a la hora de despejar la incógnita de la fórmula dada:

$\frac{n}{P} =$ $\frac{70}{P} = 140$

~~$p = 70 \times 140$~~

Parece que la despeja erróneamente como P=70 x 140, sin embargo, lo tacha y abandona el problema.

Ha sido capaz de descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos, como dados, mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos), y de realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas.

Sin embargo, en el ítem 4 (Crecer 1), no ha sido capaz de encontrar la estatura media de chicas de 20 años en el 1980, sabiendo que desde 1980 ha aumentado 2,3 cm hasta alcanzar 170,6 cm. Ha tenido que utilizar el procedimiento rutinario de resta. Tampoco ha sabido contestar la pregunta del ítem 6 de la misma serie Crecer 3, indicando el intervalo en el que las chicas son más altas que chicos de su misma edad.

Esta estudiante, en los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, realizando procedimientos estándares; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; el ítem 16 (Caramelos de colores), calculando correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo. Asimismo, aborda correctamente el ítem 17, mostrando sus cálculos:

Media: ....64 puntos .. de 100.

60
x4
240
+80
320 | 5
20 64

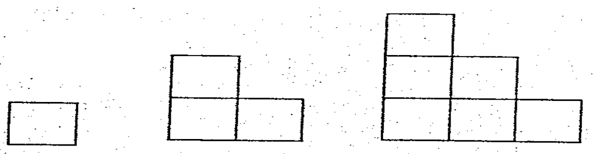
De este modo, calcula correctamente la media de las notas tras cinco exámenes: un examen con la puntuación 80 y otros cuatro con una media de 60 puntos.

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. En este ítem comete algunos fallos que no consideramos significativos:

(a) Precio máximo: ....80'6............zeds
(b) Precio mínimo ....137...........zeds

En primer lugar se equivoca poniendo al revés el valor máximo y mínimo, y en el segundo, al sumar los precios de varios componentes del monopatín, entre los tres precios de la tabla (40, 60 o 65), toma cuarenta coma sesenta (40,60) como un número decimal por lo que obtiene 80,6 zeds en vez de 80.

Intenta realizar el ítem 39 (Esquema de escalera), sin embargo, lo lleva a cabo erróneamente.



Nivel 1 Nivel 2 Nivel 3 Respuesta: ....9 cuadrados.

Es posible que como el número de cuadrados en el Nivel 3 se obtiene sumando 3 a los 3 cuadrados del Nivel 2 ha razonado que en el siguiente paso igualmente hay que añadir 3 cuadrados y en total da 9.

En cuanto a los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de conexión, E10 ha sabido realizar algunos de ellos.

En el ítem 2 (Caminar 2) no llega a identificar las variables con la fórmula dada (n/P=140) y parece no entender el enunciado:

$v = \frac{s}{t}$ $v = \frac{800 km}{60 m} = 13'\overline{3}\ k/h$

Como se les pide calcular la velocidad a la que anda Bernardo, E10 escribe la fórmula para la obtención de la velocidad a partir de la distancia y el tiempo dados. Sin embargo, en el problema se les da la longitud de un paso 0,80m de Bernardo. Parece que se ha perdido entre los datos y no ha sido capaz de razonar y usarlos para llegar a la solución.

Realiza correctamente el ítem 19 (Estantería), utilizando procedimientos familiares y estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta.

En lo que se refiere a los ítems que requieren poner en marcha los procesos cognitivos avanzados, presentamos a continuación los que ha sido capaz de realizar con o sin éxito.

En el ítem 13 (El tipo de cambio) aunque da una respuesta correcta que "Si" le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD, sin embargo, la explicación que da no es correcta:

Si, porque al ser mas elevada la cifra anterior (4'2) le dieron mas dinero que si hubiese sido (4'0).

Tal como explica esta estudiante, le favorecería si hubiese quedado 4,2.

En el ítem 20 (Basura), E10 da una razón que justifica la inadecuación de un diagrama de barras para los datos que se dan:

Porque los datos no estan especificados para un diagrama

Su argumento se fundamenta en la gran variabilidad de los datos de algunas categorías. Por último, en el ítem 21 (Terremoto), ha sido capaz de valorar y criticar las opciones dadas con el fin de elegir la opción correcta.

C La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

11. Informe de análisis de E11

La estudiante E11, ha realizado con éxito l2 ítems de la prueba, **entre ellos principalmente los ítems que invitan a activar los procesos cognitivos del grupo de reproducción y algunos ítems de otros dos grupos.**

Exponemos a continuación los que E11 ha intentado realizar o ha realizado correctamente. Así, ha sido capaz de ejecutar el ítem 3 (Cubos) que requiere descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos, como dados, mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas; en los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, utilizando la regla de tres. En el ítem 12 comete un fallo al manejar los números: en vez de 3.900 ZAR que aparece en el enunciado del ítem toma 3.000 ZAR y sigue los cálculos con este dato:

Respuesta: . . 750 DOLARES .

\$GD	ZAR
1	4,0
x	3000

Sin embargo, consideramos la respuesta como válida, debido a que el procedimiento y los cálculos, E11 los ha realizado correctamente.

En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), E11 ha elegido la opción errónea (25%). Asimismo, no ha sabido realizar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. E11 obtiene como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en el entendimiento del concepto de media aritmética.

En el ítem 25 (Monopatín 1), no ha sabido elegir correctamente los precios adecuados de varias componentes de un monopatín para formar su precio total máximo y mínimo. Y en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

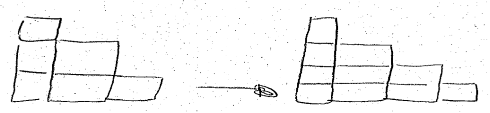
En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

	Mesa 1	*Mesa 2*
1ª Ronda	Tomás-Ricardo	Luis-David
2ª Ronda	TOMAS-LUIS	RICARDO-DAVID
3ª Ronda	TOMAS-DAVID	RICARDO...LUIS

Ha realizado el ítem 33 mediante un procedimiento rutinario de división, calculando correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

Por último, el ítem 39 de este grupo ha sabido abordar correctamente.

Respuesta: ..10.......cuadrados.



De este modo, ha sabido construir el Nivel 4 del esquema de Roberto, representarlo mediante dibujo, indicando correctamente el número de cuadrados necesarios para ello.

En cuanto a los ítems que movilizan las CM del grupo de conexión, ha intentado realizar algunos, sin embargo, no todos con éxito.

Así, en el ítem 8 (Carpintero), ha indicado correctamente la posibilidad de construir el parterre con los diseños A, B y D.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Sin embargo, no ha sido capaz de estimarla correctamente para el diseño C, que tiene cierta analogía con el diseño A.

En el ítem 9 (Chatear 1), E11 ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín.

E11 no ha sido capaz, en el ítem 15 (Exportaciones 2), de aplicar correctamente el porcentaje directo a una cantidad ya que elige una opción errónea de las respuestas.

En el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta.

E11 no ha sido capaz llevar a cabo correctamente el ítem 27 (Monopatín 3), donde había que estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven.

DADO 1 → 3
DADO 2 → 4 y 3
DADO 3 → 5 y 2

Aunque se les pide la suma de los números de las cinco caras que no se ven, consideramos la solución válida, ya que la parte más significativa del ítem E11 la ha realizado correctamente. Asimismo, E11 ha sabido realizar correctamente el ítem 35 (Dados 2), identificando y reconociendo la posición de las caras de figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

De los ítems que activan procesos cognitivos del grupo de reflexión, E11 ha sido capaz de realizar con éxito tan solo el ítem 13.

En este ítem, esta estudiante, ha sido capaz de explicar la razón por la que un tipo de cambio ha sido más favorable que el otro:

SÍ YA QUE RECIBIÓ MÁS DINERO AL QUE SÍ HUBIERA SIDO 4,2.

En el ítem 21, a la pregunta cuál de las cuatro opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*, elige una opción, la tacha, vuelve a elegir otra:

NO ~~A~~ $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed

B $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto

Ambas opciones que elige son incorrectas.

12. Informe de análisis de E12

La estudiante E12 ha realizado 12 ítems de la prueba, **entre ellos ha sabido ejecutar algunos que invitan a activar las CM del grupo de reproducción y unos ítems más complejos.**

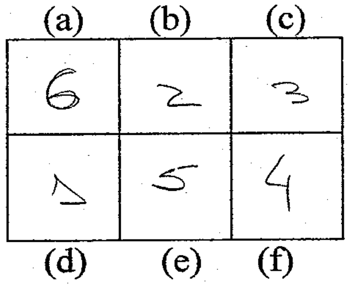
Así, ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada, despejar correctamente la incógnita *P* de dicha fórmula.

$\frac{70}{P} = 140$ SI LA LONGITUD ES DE 0'5 M

$P = \frac{70}{140} = 0'5$

Asimismo, lleva a cabo correctamente los cálculos correspondientes.

En el ítem 3 (Cubos), E12 no ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen. No ha sabido realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo.



Es posible que no haya comprendido el enunciado del ítem, ya que en la primera fila escribe los números de las caras de arriba de los dados de la imagen (izquierda) y en la segunda fila los números de sus caras del abajo y no de las de los dados de la imagen (derecha).

E12 ha sido capaz de realizar un cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1) y en el ítem 6 (Crecer 3) ha sabido expresarse por escrito acerca de los asuntos matemáticos sencillos, así ha indicado correctamente el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

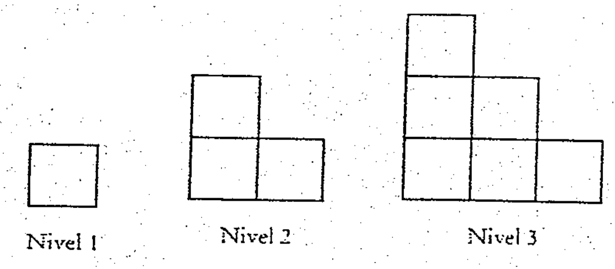
Desde los 11 a los 13 años las chicas son más altas.

Esta estudiante ha abordado el ítem 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, utilizando la regla de tres.

En el ítem 16 (Caramelos de color), no ha sabido relacionar correctamente la cantidad de caramelos rojos respecto al total (6 de 30) con la probabilidad de sacarlo. Ha contestado que la probabilidad de que Roberto coja un caramelo rojo es de 50%. De este modo, demuestra no entender el concepto de probabilidad de la ocurrencia de un suceso.

En el ítem 25 (Monopatín 1), E12 ha sabido elegir correctamente los precios adecuados de varias componentes de un monopatín para formar su precio total máximo y mínimo. Asimismo, en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido; y en el ítem 33, mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, no ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitará Roberto para construir el Nivel 4:



Respuesta: ....6......... cuadrados.

Da una respuesta que hace difícil seguir su razonamiento: o se refiere a que necesitará otros 6 cuadrados más, o simplemente no ha entendido qué significa construir el Nivel 4.

En cuanto a los ítems más complejos, esta estudiante ha abordado los siguientes.

Ha intentado abordar el ítem 7 (Robos), sin embargo, ha dado una explicación no adecuada.

Sí, porque se produjo un gran aumento de tener 508 con algo, hasta tener 516 con algo, es decir, aumentó casi un doble por encima.

Ha basado su argumento en que un aumento desde unos 508 robos a unos 516 es enorme ya que es el doble. Parece no fijarse que no se trata del doble del total sino de un número bastante pequeño respecto al total.

En el ítem 9 (Chatear 1), E12 ha sido capaz de relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de dos países dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney); así como, en el ítem 13 (El tipo de cambio 3), explica la razón por la que un tipo de cambio ha sido más favorable que el otro:

Le favoreció porque si hubiese seguido como antes le hubieran dado 975 dólares.

Ha sabido razonar correctamente comprobando que con el tipo de cambio anterior recibe menos SGD.

Asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane.

Intenta dar una razón que justifique la inadecuación de presentar los datos mediante un diagrama de barras (ítem 20):

Porque no existe relación entre un tipo de basura y otro tipo.

Su argumento se basa en que no existe relación entre un tipo de basura y otro, sin embargo, no explicita a qué tipo de relación se refiere y se necesita para poder representarlos mediante diagrama de barras.

Asimismo, en el ítem 21 (Terremoto) no ha sido capaz de valorar y criticar correctamente las opciones dadas para elegir la que mejor describe la predicción del geólogo que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*.

(B) $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

Parece no entender que una posibilidad “dos de tres” no asegura la ocurrencia de un terremoto, sino que indica que más probable que haya algún terremoto que no haya ninguno.

Por último, ha sabido descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven.

Dado 1 = 3 puntos abajo
Dado 2 = 9 puntos arriba - 5 abajo
Dado 3 = 2 puntos arriba - 5 abajo

No lleva a cabo la solución, ya que se les pide la suma de los números de las cinco caras que no se ven, sin embargo, consideramos la solución válida.

13. Informe de análisis de E13

El estudiante E13 ha sido capaz de realizar con éxito 12 ítems de la prueba. **La mayoría de ellos son ítems sencillos que requieren movilizar procesos cognitivos del grupo de reproducción y unos cuantos más complejos.**

Este estudiante ha tenido dificultad desde el primer ítem de la prueba, Caminar 1.

NO LO ENTIENDO

Lo ha dejado claro con esta frase que refleja la dificultad que le ha presentado entender el enunciado de este ítem.

Este estudiante, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, realizando la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo. Asimismo, ha sido capaz de realizar el cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1) y en el ítem 6 (Crecer 3) ha sabido expresarse por escrito acerca de los asuntos matemáticos sencillos, así ha indicado correctamente el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

Entre los 11 y 13 años

E13 ha abordado el ítem 11 (El tipo de cambio1), calculando correctamente cuántos ZAR corresponden a 3000 SGD a partir del tipo de cambio dado (1SGD=4,2 ZAR). No obstante, en el ítem 12, no ha sido capaz de calcular cuántos SGD corresponde a 3.900 ZAR. En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), elige la opción errónea (25%). Asimismo, en el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes, realiza el procedimiento erróneo para su cálculo. En el ítem 24, que requiere utilizando la tabla, determinar cuál es la talla de zapatos que debe probar Marina (el pie mide 163mm), tampoco ha sido capaz de realizarlo correctamente.

E13, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Sin embargo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes, así como en el ítem 27 (Monopatín 3), no ha sabido estimar correctamente la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín y determinar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad de dinero que dispone Marcos.

Este estudiante, en el ítem 33, mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera. También ha sido capaz de calcular la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3×S) + C + D + H en el ítem 37 (El mejor coche 1). Y en el ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, ha sido capaz de deducir el número de cuadrados que necesita Roberto para construir el Nivel 4.

En lo que se refiere a la ejecución de los ítems más complejos, E13 ha intentado hacer algunos de ellos.

Así, en el ítem 7 (Robos), ha sido capaz de dar una razón por la que la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos representado mediante un gráfico no es razonable:

No, ya que tampoco hay una diferencia de 6 y 7 robos entre un año y otro.

Su explicación se basa en que una diferencia de 6-7 robos no es un aumento enorme, sin embargo, no específica nada respecto a la cantidad total.

En el ítem 8 (Carpintero), E13 menciona correctamente la posibilidad de construir el parterre con el diseño A, C y D.

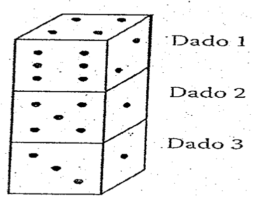
Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Sin embargo, no ha sido capaz de estimarla correctamente para el diseño B, que es un romboide y tiene un perímetro distinto del de un rectángulo con la misma base y altura.

E13 ha sabido calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney).

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad); en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén, no ha sido capaz de encontrar correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería; tampoco ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones en el ítem 22 (Selección). En el ítem 34 (Dados 1), no ha sido capaz de deducir los números de las caras que no se ven a partir de los de las que se ven.

Sólo se puede saber el 1º que es 3
y 7º que los demás no te dan ninguna pista



Explica que solo se puede saber el número de la cara de abajo del Dado 1 y no se puede saber los números de las caras de arriba y abajo de los demás dados.

E13 ha sabido realizar correctamente el ítem 35 (Dados 2), identificando y reconociendo la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

En el ítem 36, menciona erróneamente que los resultados del periódico 4 hacen mejor predicción acerca del nivel del respaldo al presidente, sin embargo, aún así no ha sido capaz dar dos argumentos que justifiquen su elección.

El Periódico 4.

Por último, en el ítem 20 (Basura), da una razón que justifica la inadecuación de un diagrama de barras para los datos que se dan:

Porque hay mucha diferencia entre unos tipos
y otros.

No hace mención explícita acerca de en qué consiste la diferencia, pero suponemos que se refiere a la variedad de los datos (desde unos días hasta más de un siglo).

14. Informe de análisis de E14

Este estudiante ha sido capaz de ejecutar correctamente 11 ítems de la prueba. **Ha realizado principalmente algunos ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción y unos más complejos.**

En el ítem 1 (Caminar 1) ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada, ha sido capaz de despejar la incógnita *P*.

$\frac{n}{P} = 140$; $\frac{70}{P} = 140$; $70 = 140 \cdot P$; $\frac{70}{140} \approx P$. $P = 2$ m.

Sin embargo, la operación de la división la realiza al revés por lo que obtiene P=2. Aunque ha despejado correctamente P, no consideramos la solución como válida, ya que creemos que ha demostrado un acercamiento mecánico a la resolución y no ha sido capaz de interpretar el resultado obtenido a la luz del enunciado del ítem.

E14 ha sido capaz de realizar cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1) y en el ítem 6 (Crecer 3) ha sabido expresarse por escrito acerca de los asuntos matemáticos sencillos, así ha indicado correctamente el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

Desde los 11 hasta los 13 años de edad

Este estudiante ha abordado el ítem 11 (El tipo de cambio1), ha encontrado correctamente cuántos ZAR corresponden a 3000 SGD a partir del tipo de cambio dado (1SGD=4,2 ZAR). Sin embargo, en el ítem 12, no ha sido capaz de calcular cuántos SGD corresponde a 3.900 ZAR. Asimismo, en el ítem 14 (Exportaciones 1) no ha sido capaz de identificar correctamente el valor total de las exportaciones en un año determinado, representado mediante el diagrama de barras.

En el ítem 16 (Caramelos de color), ha sabido descodificar correctamente el diagrama de barras (6 caramelos rojos de 30) y calcular la probabilidad de sacar un caramelo rojo (20%). Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24).

E14 ha intentado realizar el ítem 26 (Monopatín 2), pero, no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido; asimismo, en el ítem 33, mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

Este estudiante no ha sido capaz de calcular la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3×S) + C + D + H en el ítem 37 (El mejor coche 1).

Coche	**Seguridad (S)**	**Ahorro de combustible (C)**	**Diseño exterior (D)**	**Habitáculo interior (H)**
Ca	**3**	**1**	**2**	**3**
M2	**2**	**2**	**2**	**2**
Sp	**3**	**1**	**3**	**2**
N1	**1**	**3**	**3**	**3**
XK	**3**	**2**	**3**	**2**

Puntuación total de *Ca*: ..33puntos........

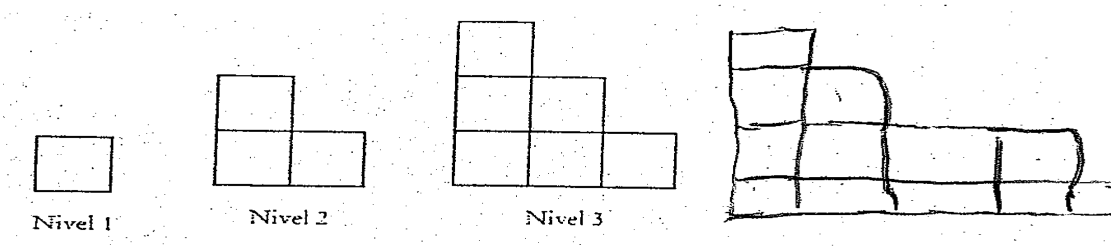
La única conjetura que tenemos acerca de este fallo, es que quizás haya elevado 3 a S y luego ha sumado el resto de los valores (3^3+1+2+3=33). Sin embargo, este símbolo de multiplicación (x) les es familiar desde la educación primaria, por lo que puede que haya seguido otro razonamiento distinto.

E14 en el ítem 38 (El mejor coche 2) intenta inventar una regla para convertir el coche Ca en el ganador.

Puntuación total = .4X. S + 2+. C + ...3+. D + .4..X.. H.

Ha mostrado no comprender que se trata de rellenar los espacios de la ecuación con los números que resultan de los coeficientes para las cuatro variables y la operación que se requiere es la multiplicación.

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, no ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitará Roberto para construir el Nivel 4:



Respuesta: ....12.................cuadrados.

Incluso ayudándose del dibujo, aunque erróneamente, parece no captar la idea de cómo se llega a construir el esquema de una escalera. Asimismo, es posible que primero haya deducido la regla incorrecta (sumar 6 cuadrados) y luego haya hecho el dibujo, ya que parece haber acomodado estos 6 cuadrados como sea.

En cuanto a los ítems más complejos, en el ítem 2 (Caminar 2), ha sabido realizar los procedimientos de tipo reproducción:

$$\frac{n}{p} = 140 ; \frac{n}{0'80} = 140 ; n = 140 \cdot 0'80 ;$$

$n = 112$ pasos x minuto.

Y no ha sido capaz de seguir el problema para encontrar la velocidad en m/min y km/h, razonando que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, que sería la velocidad en m/min.

En el ítem 5 (Crecer 2), da una explicación no válida de cómo se refleja que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas desminuye a partir de los 12 años:

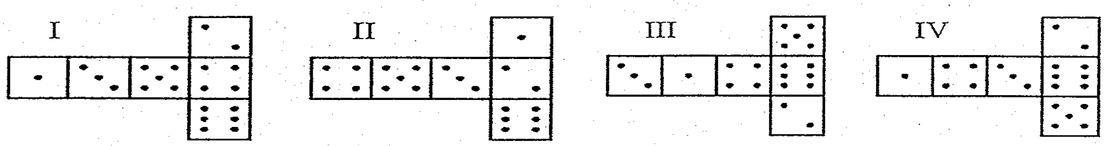
Con una curva ascendente.

Su explicación se basa en que el gráfico de la función sigue siendo creciente, demostrando de este modo no comprender que se refiere a la velocidad del crecimiento.

No ha sido capaz de realizar con éxito el ítem 8 (Carpintero), ha razonado correctamente acerca de la posibilidad de construir el parterre con el diseño D (rectángulo), sin embargo, para los demás diseños no ha sido capaz de estimar sus perímetros. En el ítem 15 (Exportaciones 2), que requería a partir de la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados), elegir una de las opciones dadas, elige la opción incorrecta. Parece aplicar el porcentaje a otra cantidad errónea.

E14 en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane, demostrando de este modo las CM asociadas a este ítem y en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha encontrado correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

Ahora, en el ítem 35 (Dados 2), no ha sido capaz de interpretar y reconocer la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.



Foma	¿Cumple la regla de que la suma de las caras opuestas es 7?
I	Sí / No
II	Sí / No
III	Sí / No
IV	Sí / No

Tan solo ha sido capaz de hacerlo correctamente para la forma II.

En el ítem 7 (Robos) ha sabido dar una razón por la cual la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos representado mediante un gráfico no es razonable:

No, porque sólo ha aumentado 12 más

No explicita que solo 12 más no es un número enorme respecto al número total.

En el ítem 21 (Terremoto) no ha sido capaz de valorar y criticar correctamente las opciones dadas para elegir la que mejor describe la predicción del geólogo que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*. La opción que elige es errónea:

B $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

Parece no entender que una posibilidad “dos de tres” no asegura la ocurrencia de un terremoto, sino que indica mayor probabilidad que haya algún terremoto de que no haya ninguno.

15. Informe de análisis de E15

Esta estudiante ha sido capaz de abordar con éxito tan solo 6 ítems de la prueba. **Cinco de ellos son ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción, y un ítem las del de conexión.**

Así, en el ítem 1 (Caminar 1), ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada, pero no de despejar la incógnita.

$$\frac{m}{p} = 140 \ ; \ \frac{70}{p} = 140 \ ; \ p =$$

E15 abandona el problema sin resolver.

Esta estudiante, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen. Ha sabido realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo.

Intenta resolver el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), elige la opción errónea (50%). Parece no entender que en caso de la probabilidad de 50% habría de tener 15 de 30.

En el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes, realiza el procedimiento erróneo para su cálculo.

Media: ...70...............

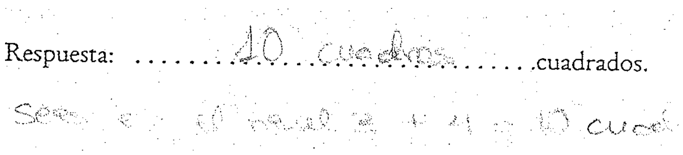
$$\frac{80+60}{2} \ ; \ \frac{140}{2} = \boxed{70}$$

En el ítem 33 mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

Altura: 18

$$\frac{252}{14} = 18$$

Asimismo, en el ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4:


Respuesta: ......10 cuadros........cuadrados.

Explica que será 6 del Nivel 3 más 4 igual a 10 cuadrados.

Por último, E15 realiza correctamente el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha de encontrar el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

IV. 2.1.2. Síntesis de los resultados sobre CM (Caso 1)

Según lo expuesto, **resaltan por su excelencia las competencias matemáticas del estudiante E1** y **las de los tres estudiantes consecuentes (E2, E3, E4)**, **por poseer las competencias matemáticas avanzadas**. Estos estudiantes se han sentido cómodos a la hora de resolver problemas realistas complejos, aplicando sus conocimientos, pensamiento y razonamientos matemáticos avanzados, sentido común, intuición, fluidez en técnicas y procedimientos. **Los siguientes tres estudiantes (E5, E6, E7) presentan un nivel de dominio más inferior**, han sabido ejecutar procedimientos descritos con claridad, en situaciones familiares. **Otros siete estudiantes (E8-E14), han mostrando carencias importantes de carácter conceptual, procedimental, de razonamiento y de uso del lenguaje simbólico**, y por último, **la estudiante E15 está más despegada y su dominio es de muy bajo nivel**.

Respecto al conocimiento matemático activado durante la resolución de los ítems, cabe destacar que **las dificultades y carencias que han tenido los estudiantes a la hora de resolver problemas realistas, en principio, reflejan o bien un vacío importante en los conocimientos matemáticos básicos o bien la incapacidad de aplicarlos en situaciones de la vida rea**l. Como consecuencia, **los procedimientos y operaciones respectivas se han llevado a cabo erróneamente o no han llegado a realizarse. Asimismo, han mostrado dificultades en el uso del lenguaje simbólico,** esto es, en identificar los datos con las variables de una fórmula dada o traducir el lenguaje simbólico al lenguaje coloquial. Del mismo modo, **han sabido hacer inferencias**

directas y explicar asuntos matemáticos sencillos, sin llegar a formular supuestos o explicar asuntos matemáticos complejos que implican relaciones. **Gran parte de los estudiantes ha sabido resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos rutinarios o estándar**.

Por otra parte, **se ha notado un acercamiento mecánico a la resolución de problemas por la mayoría de los estudiantes**, hasta los más competentes, en el sentido evaluado, parecen caer en la tentación de realizar operaciones mecánicamente sin interpretación matemática adecuada (como por ejemplo, en el ítem 1). Asimismo, **los estudiantes han tenido dificultades en entender el enunciado de algunos problemas**, durante la prueba en varias ocasiones se dirigían a la investigadora para aclarar sus dudas al respecto, en otros casos, lo expresaban en el papel mismo.

Algunas observaciones realizadas en sus clases de matemáticas manifiestan que incluso la actuación competente en la prueba de los primeros cuatro estudiantes (E1-E4) tiene poco que ver con sus actuaciones durante las clases de matemáticas asistidas y grabadas en video. Estos cuatro estudiantes, igual que los demás, se portaban pasivamente, no se sentían seguros en sus respuestas o al ejecutar operaciones de las tareas propuestas. Parece que, **en el caso de los problemas realistas, los estudiantes han tenido incluso más éxito que a la hora de resolver problemas escolares, ayudándose del conocimiento no matemático, de sentido común o de la familiaridad con ciertos contextos y situaciones, lo que, en algún modo, ha compensando las carencias en el conocimiento matemático**.

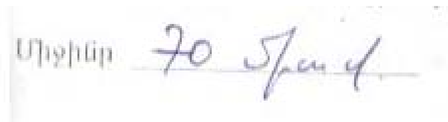
Asimismo, por un lado, **se ha observado la correlación entre el rendimiento curricular y las competencias matemáticas de los estudiantes solo en casos extremos**, es decir, la estudiante E15 con la menor puntuación ha tenido la nota media más baja (SF) durante sus estudios en Secundaria, y el estudiante E1 con la puntuación más alta, durante sus estudios en la ESO, ha tenido una de las notas más altas (NT) en el rendimiento curricular. Sin embargo, por otro lado, el estudiante E3 es el que una vez ha repetido curso en Secundaria y en aquel momento ha tenido suspenso en matemáticas, y la estudiante E10 con la nota media más alta (NT) ha mostrado dominio de bajo nivel.

IV.2.1.3. Análisis de las competencias matemáticas de los estudiantes (Caso 2)

En este subapartado presentamos los informes de análisis de los protocolos de resoluciones de los ítems de la prueba de los 25 estudiantes del Caso 2. De este modo, los informes para este Caso siguen el orden siguiente: Informe de análisis de F1, de F2, de F3,…, de F25, enumerando así a los 25 estudiantes.

1. Informe de análisis de F1

La estudiante F1 ha realizado correctamente 30 de los 39 ítems propuestos, **demostrando poseer competencias matemáticas avanzadas**. **Ha realizado con éxito todos los ítems que han requerido reproducción y aplicación directa de los conocimientos y destrezas matemáticos, mostrando dificultad tan solo en un ítem de este grupo (ítem 17)**, donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes.



E1 obtiene 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja aproximación mecánica a la resolución y/o que tan solo ha tenido experiencias en hallar la media aritmética en situaciones cuando están presentes todos los números cuya media aritmética se pide.

Los demás 15 ítems de este grupo, los resuelve correctamente, manifestando las competencias matemáticas asociadas correspondientes.

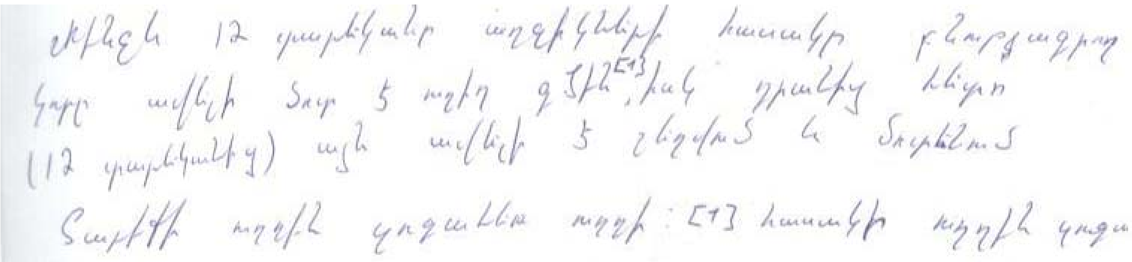
En lo que se refiere a las preguntas que invitan activar procesos cognitivos del grupo de conexión, F1 ha sido capaz de llevar a cabo con éxito la mayoría de ellas.

En el ítem 2 (Caminar 2), ha sabido identificar correctamente los datos con las variables de la fórmula dada, despeja la incógnita *n* de la misma fórmula $\frac{n}{P} = 140$ y realiza los cálculos correctamente.

$$P = 0{,}8\ 5$$
$$\frac{n}{P} = 140$$
$$n = P \cdot 140 = \underline{112}$$

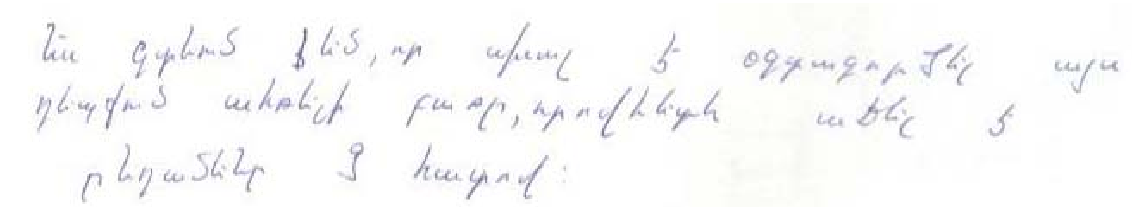
Obtiene, de este modo, el número de pasos por minuto, sin embargo, no ha sido capaz de razonar que si en un minuto Bernardo realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m (112 x 0,8), que es la velocidad en m/min.

E1 da una explicación adecuada a la pregunta planteada en el ítem 5 (Crecer 2).



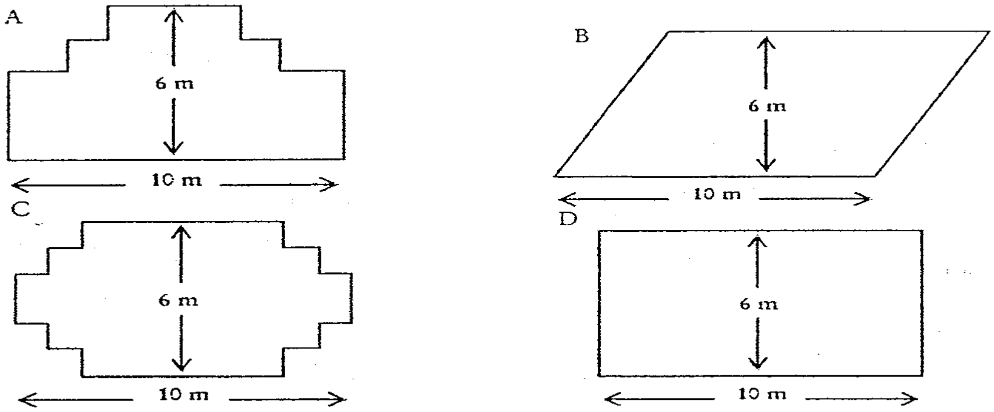
Con la explicación: "*Antes de 12 años la curva que caracteriza el crecimiento de las chicas es más vertical, sin embargo, después (a partir de 12 años) se inclina y se acerca más a la línea horizontal hasta quedarse paralela al eje de la edad*", manifiesta las CM asociadas a este ítem, particularmente, comprende y sabe emplear el concepto del cambio de la gradiente del gráfico, interpretar el gráfico y argumentar.

Asimismo, en el ítem 7 (Robos) del mismo grupo, F1 ha mostrado comprender y saber emplear el concepto de aumento de una cantidad, pensar y razonar acerca de la información presentada en el gráfico, cuestionar la afirmación acerca del aumento enorme de robos que hace el presentador interpretando el gráfico.



F1 ha sabido expresarse por escrito acerca de la cuestión: *"Creo que en este caso no es correcto usar la palabra enorme, ya que tan solo se ha aumentado 9 robos"*, y explicar la razón por la cual no es adecuada la interpretación del presentador.

En el ítem 8 (Carpintero), según las opciones propuestas por F1 para la construcción del parterre, no ha sido capaz de establecer correctamente conexiones ente el perímetro de los cuatro diseños dados y la cantidad de madera que dispone el carpintero.



Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հետևյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	Այո / Ոչ

Parece que esta estudiante no ha sabido relacionar el perímetro de las figuras dadas con los 32m de la madera disponible, ya que no se decide respecto a los tres primeros diseños y respecto al diseño D que es un rectángulo con dimensiones 6x10 y da un perímetro exactamente 32m, no le pareció razonable.

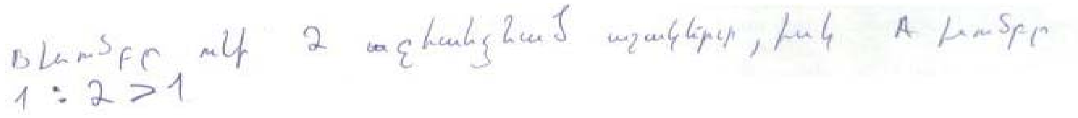
En el ítem 9 (Chatear 1), F1 ha sido capaz de relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de dos países (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney).

Պատասխան առավոտյան 10:00

Contesta correctamente 10:00 de la mañana.

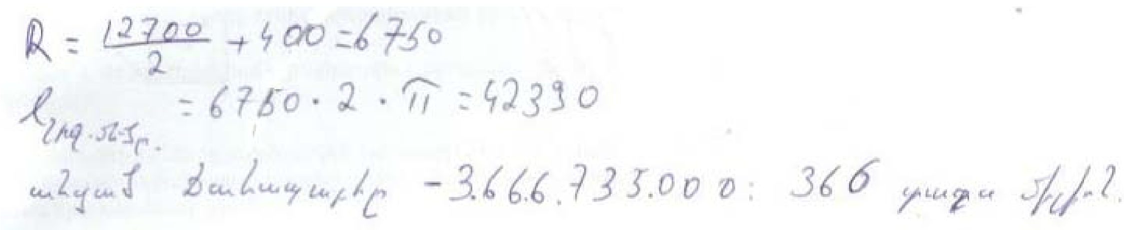
F1, en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada. Asimismo, aborda correctamente el ítem 18 (Feria), indicando la poca probabilidad de que Daniela gane, demostrando de este modo las CM asociadas a este ítem. F1 realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) que requiere cálculos mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada. En el ítem 22 (Selección), ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles.

F1 aborda con éxito el ítem 23 (Puntuaciones en un examen), mostrando CM asociadas al ítem: sabe descodificar e interpretar la representación de la situación mediante el diagrama, sabe expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones y sabe seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos a partir de los datos:



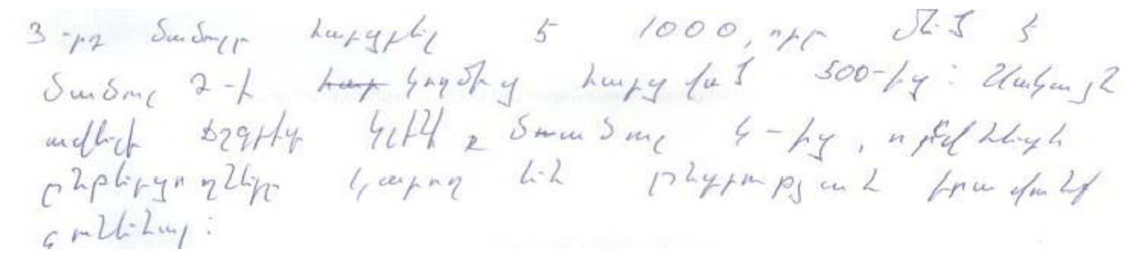
"Porque el Grupo B tiene 2 alumnos que han suspendido, sin embargo el Grupo A, 1. 2>1". De este modo, da un argumento matemático válido.

Asimismo, en el ítem 32 (Vuelo espacial), ha sido capaz de modelizar adecuadamente el campo y razonar correctamente que el radio de la órbita de la Mir es el de la Tierra (d=12 700 km) más la distancia de la Mir a la Tierra (400 km):



Después, encuentra la longitud de la circunferencia (42 390 km) y multiplicando por el número de vueltas (86 500), halla correctamente la distancia total recorrida por la Mir.

F1 ha sido capaz de llevar a cabo los ítems 34 (Dados 1) y 35 (Dados 2), ambos presentan diferentes formas de representación de los objetos matemáticos conocidos (cubos). En el ítem 36 (Respaldo al presidente), F1 ha sabido expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones lógicas:

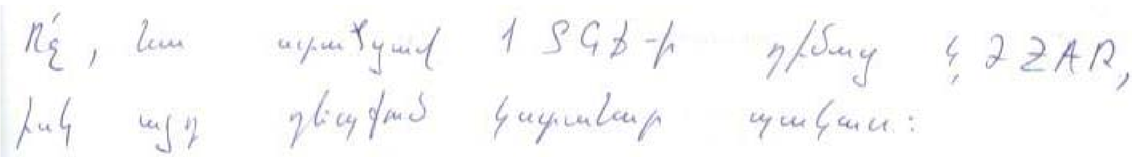


Entre los cuatro periódicos ha sabido elegir el que propone mejores predicciones, dando dos argumentos matemáticos a partir de los datos: *"Periódico 3, porque han preguntado a 1000 personas con derecho a voto que es más que las 500 del periódico 2, asimismo, es mejor que el periódico 4, ya que todas las personas preguntadas tienen derecho a voto mientras acerca de las del periódico 4 no se sabe"*. Ha tenido en cuenta la muestra y el derecho a voto de los ciudadanos.

En cuanto a los ítems que requieren activar los procesos cognitivos del grupo de reflexión, F1 ha sabido abordar con éxito, el ítem 10 (Chatear 2), en el cual ha sido capaz de calcular correctamente el intervalo en el cual podrían chatear dos chicos, siendo uno en Sidney y el otro en Berlín.

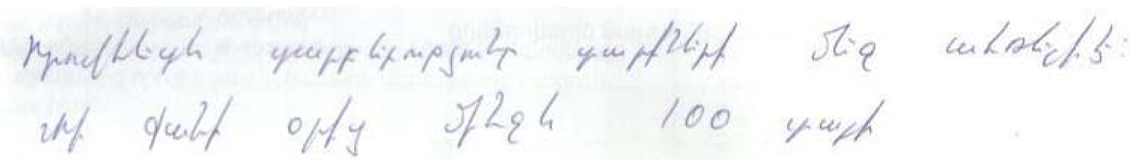
Քաղաքը	Ժամը
Սիդնեյ	7:30 - 8:00
Բեռլին	22:30 - 23:00

Sin embargo, en el ítem 13 (El tipo de cambio 3) da un argumento no válido, explicando que no le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD.



"No, porque recibía por 1 SGD 4,2 ZAR, y así recibirá menos". La razón que da sería válida en caso si cambiara SGD a ZAR.

En el ítem 20 (Basura), F1 ha sabido interpretar correctamente la información presentada mediante una tabla y razonar sobre la inadecuación de presentarla mediante un diagrama de barras:



Su argumento se basa en la variedad de los datos: *"Porque la diferencia entre los periodos de descomposición es enorme de unos días hasta 100 años"*.

En el ítem 21 (Terremoto) de este grupo, F1 no ha sido capaz de razonar sobre la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*. La opción que elige sugiere que no se puede predecir cuándo ocurrirá un terremoto.

Esta estudiante ha intentado realizar el ítem 38 (El mejor coche 2), en el cual, inventa una regla para convertir el coche Ca en el ganador, sin embargo, no válida.

2. Informe de análisis de F2

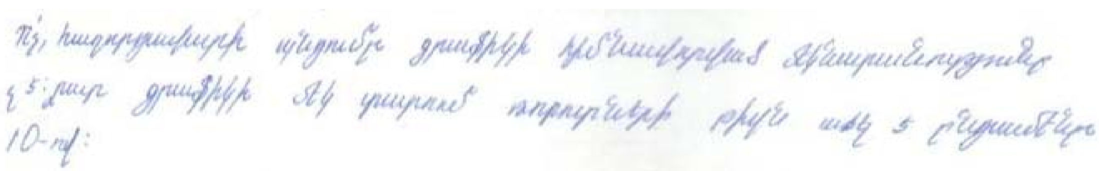
Esta estudiante ha sido capaz de realizar correctamente 24 ítems de la prueba. **Ha ejecutado con éxito gran parte de los ítems del grupo de reproducción sin realizar tres de ellos.**

Uno de ellos, es el ítem 17. F2 lo ha resuelto erróneamente, aplicando de una manera mecánica el concepto de media aritmética. Para hallar la media de las notas tras los cinco exámenes (la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos)), F2 ha realizado las siguientes cálculos $\frac{60+80}{2}$=70 y ha obtenido una respuesta incorrecta. Otros dos ítems (26 y 28) no los ha llegado a abordar, dejando el espacio en blanco. En el ítem 26 (Monopatín 2), había que calcular el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes y en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) formar correctamente parejas de jugadores para cada partido. Más que le resultaran difíciles, parece que no le ha dado tiempo para realizarlas.

Los demás 13 ítems de este grupo, F2 los resuelve correctamente.

En lo que se refiere a los ítems que invitan a activar las CM del grupo de conexión, ha actuado de la siguiente manera.

En el ítem 7 (Robos), ha sido capaz de dar una razón por la que la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos, representado mediante un gráfico, no es razonable:

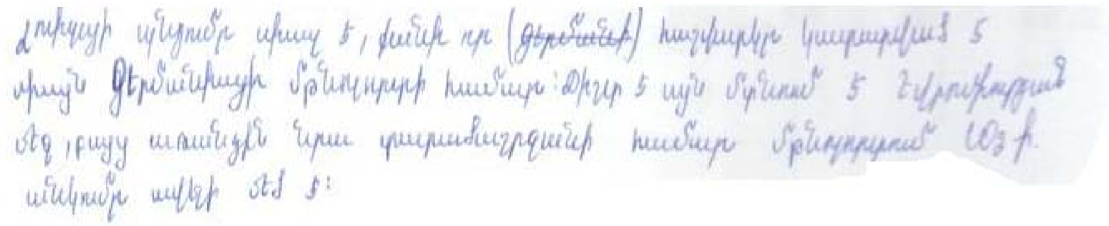


Explica que: "*No, la afirmación del presentador no está fundamentada, ya que según el gráfico, en un año el número de robos ha crecido en 10*". No hace mención explícita a que un aumento en 10 robos no es enorme respecto al número total de robos, no obstante se sobreentiende que se refiere a eso.

En el ítem 8 (Carpintero), F2 menciona correctamente la posibilidad de construir el parterre con el diseño A y la no posibilidad con el B. Sin embargo, para los diseños C y D, lo deduce erróneamente.

Esta estudiante ha sabido calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney), en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente porcentaje directo a la cantidad dada; asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada y en el ítem 22 (Selección), sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada.

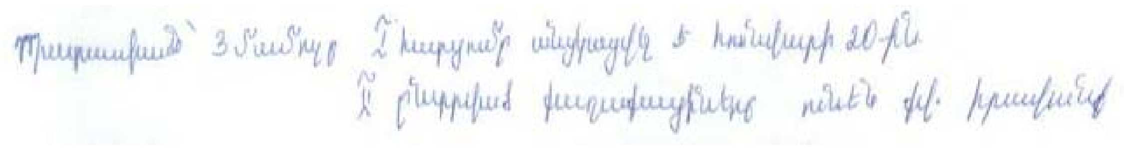
En el ítem 30 (Los niveles de CO_2 2) ha sido capaz de razonar y de fundamentar su argumento respecto a la cuestión planteada.



Se expresa de la siguiente manera: "*La afirmación de Luisa es errónea, ya que es posible que Alemania tenga más descenso en emisiones de CO_2 y forme parte de UE, aunque ésta tenga menos descenso*". No explicita su idea, explicando claramente que otros países miembros pueden tener más descenso, entonces el total de UE puede ser menor que el de Alemania.

Esta estudiante resuelve correctamente los ítems 34 y 35 (Dados 1 y Dados 2). En el 34 ha sido capaz de deducir los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las caras que se ven. Asimismo, en el ítem 35 sabe identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

En el ítem 36 (Respaldo al presidente), F2 ha sabido expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones lógicas:

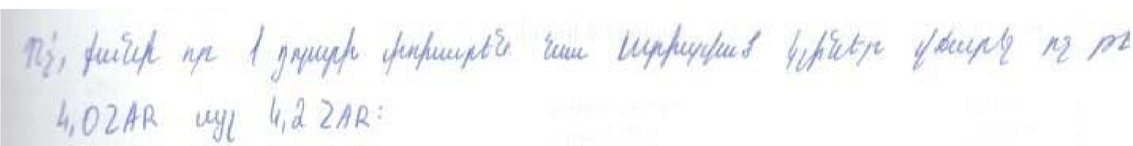


Dos argumentos que propone para justificar su elección son: "*Periódico 3, primero, el sondeo realizaron el día 20 de enero* (más próximo a las elecciones)*, segundo, todos los ciudadanos han tenido derecho a voto*". De este modo, entre los cuatro periódicos ha sabido elegir el que propone mejores predicciones, dando dos argumentos matemáticos a partir de los datos para justificar su respuesta.

En cuanto a los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión ha realizado correctamente el ítem 20 (Basura). En este ítem, F2 ha sido capaz de dar una razón por la que no es adecuado presentar los datos dados mediante un diagrama de barras:

Su argumento se basa en la gran variabilidad de los datos de algunas categorías (la longitud de la barra para los vasos de plástico es indeterminada y no se puede hacer una barra para 1-3 años o 20-25 años).

En el ítem 13 (El tipo de cambio 3), da una razón inadecuada respecto a la pregunta si favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD.



Explica que "*No, porque por 1 SGD ya no pagaría 4,0 ZAR sino 4,2 ZAR*". En primer lugar, el cambio es al revés, de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD, y en segundo lugar, eso sería cierto si hubiese cambiado los SGD a ZAR.

Finalmente, en el ítem 21 no ha sabido elegir la opción que refleje mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*.

La opción que elige sugiere la imposibilidad de predecir la ocurrencia de un terremoto.

3. Informe de análisis de F3

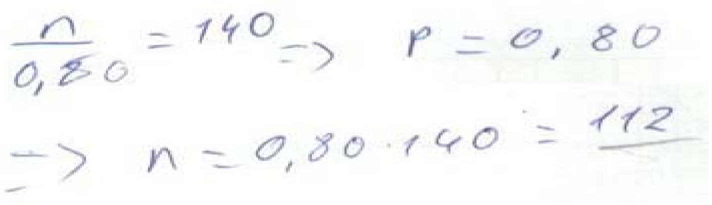
El estudiante F3 ha abordado con éxito 24 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de realizar la gran parte de los ítems que movilizan los procesos cognitivos del grupo de reproducción.** Deja sin resolver tres ítems de este grupo.

No ha contestado la pregunta planteada en el ítem 6 (Crecer 3), que requería indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad; tampoco ha formado el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) parejas de jugadores para cada partido; y resuelve erróneamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha encontrado la media de las notas tras los cinco exámenes igual a 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja aproximación mecánica a la resolución.

Los restantes 13 ítems de este grupo, F3 los resuelve correctamente.

En lo que se refiere a los ítems que requieren poner en marcha las CM del grupo de conexión, F3 ha sido capaz de abordar la mayoría de ellos.

Así, en el ítem 2 (Caminar 2), F3 realiza la primera parte del problema, identificando variables y aplicando la fórmula dada.

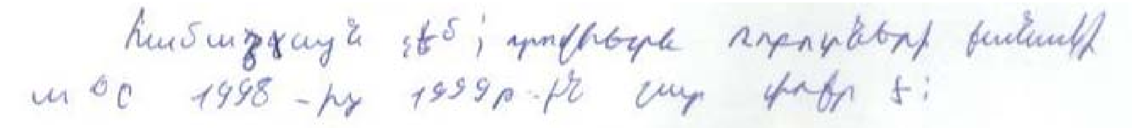


Sin embargo, no ha sido capaz de seguir el problema para hallar la velocidad en m/min y km/h, razonando que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de

0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, que sería la velocidad en m/min.

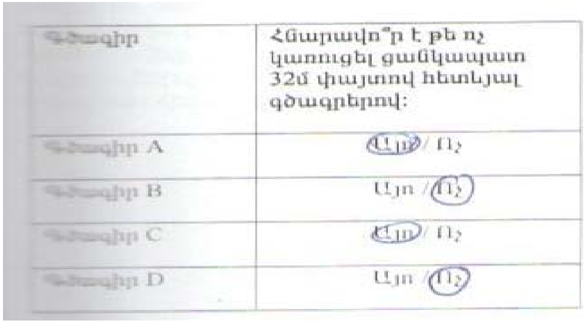
En el ítem 5 (Crecer 2) no da ninguna explicación respecto a la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas.

Este estudiante, en el ítem 7 (Robos) ha sabido emplear el concepto de aumento de una cantidad y expresarse por escrito al respecto:



"*No estoy de acuerdo, ya que el número de robos desde 1998 a 1999 se ha aumentado en poca cantidad*". De este modo, ha sabido dar un argumento que justifica su respuesta.

F3, no ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 8 (Carpintero). Ha indicado correctamente como válidos los diseños A y C, y como no válido el diseño B.



Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հետևյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	Այո / Ոչ

Sin embargo, para el diseño D lo ha hecho erróneamente, y eso que es el diseño más familiar y sencillo (rectángulo).

En el ítem 9 (Chatear 1), F3 ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato, relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín. Asimismo, en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada; aborda correctamente el ítem 18 (Feria), indicando la poca probabilidad de que Daniela gane; realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) que requiere cálculos mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada; así como, ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles.

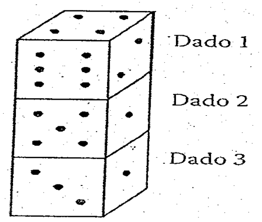
Ha empezado a resolver el ítem 32, calculando el radio de la Tierra:

$$R = \frac{12700}{2} = 6350$$

Sin embargo, no ha sido capaz de llevar el problema a cabo.

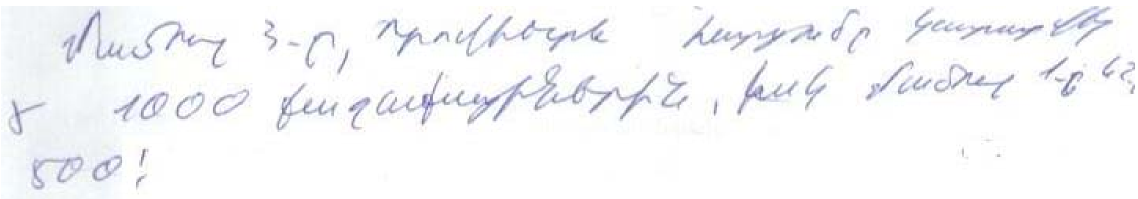
F3 realiza correctamente los ítems 34 y 35 (Dados 1 y 2). En el ítem 34 usa una estrategia estándar para encontrar la suma de los números de las cinco caras horizontales de los tres dados:

Պատասխան $3+5+2=10+5+2=17$



Deduce los números de las caras que no se ven y los suma. Asimismo, en el ítem 35 sabe identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

En el ítem 36, ha sabido elegir entre los cuatro periódicos el que propone mejores predicciones, da solo un argumento matemático a partir de los datos.



De este modo, indica al periódico 3, justificando que han aplicado el sondeo a 1000 ciudadanos, mientras los periódicos 1 y 2 tan solo a los 500. Sin embargo, no especifica que se sabe que todos los 1000 ciudadanos han tenido derecho a voto.

En cuanto a los ítems que requieren activar las CM del grupo de reflexión, F3 ha sido capaz realizar correctamente el ítem 10 (Chatear 2), en el cual menciona el intervalo en el cual podrían chatear dos chicos, siendo uno en Sidney y el otro en Berlín.

4. Informe de análisis de F4

Esta estudiante ha realizado correctamente 22 ítems de la prueba. **Ha sido capaz ejecutar la gran parte de los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción.** No ha realizado correctamente tres de ellos.

El primer fallo lo ha tenido en el ítem 1 (Caminar 1), en el cual ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada, sin embargo, no ha sido capaz de despejar correctamente la incógnita *P*:

$$\frac{n}{p} = 140$$
$$\frac{70}{p} = 140$$
$$p = 2$$

Parece que tiene dificultad a la hora de despejar la incógnita cuando ésta es el divisor del cociente, ya que en el ítem 2, sabe despejar correctamente n de la misma fórmula, o se debe a una aproximación mecánica a la resolución.

F4 en el ítem 17, realiza cálculos incorrectos para hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. F4 obtiene como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en la comprensión del concepto de media aritmética.

Los demás 13 ítems de este grupo los ha realizado correctamente.

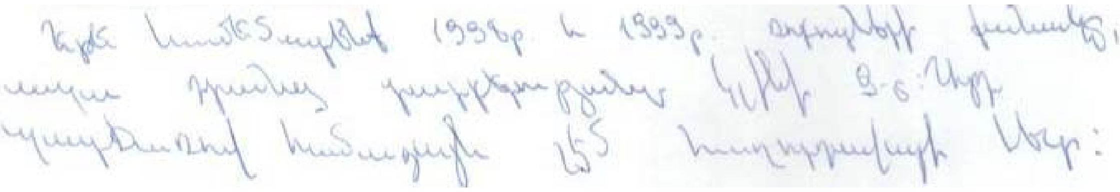
De los ítems que requieren activar los procesos cognitivos del grupo de conexión, F4 ha sido capaz de abordar los siguientes.

En el ítem 2 (Caminar 2), esta estudiante ha sabido identificar las variables y aplicar la fórmula dada.

$$\frac{n}{0,8} = 140$$
$$p = 0,8$$
$$n = 0,8 \cdot 140 = 112$$

Ha tenido dificultad en seguir el problema para encontrar la velocidad en m/min y km/h.

En el ítem 7 (Robos) ha sido capaz de razonar acerca de la información presentada en el gráfico, cuestionar la afirmación acerca del aumento enorme de robos que hace el presentador interpretando el gráfico.



Con la explicación: "*Si comparamos el número de robos en 1998 y 1999, la diferencia es de 9 robos. Por lo tanto, no estoy de acuerdo con la afirmación del presentador*", manifiesta las CM asociadas al ítem.

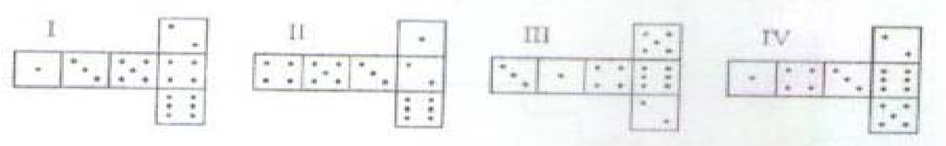
No ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 8 (Carpintero). Ha indicado correctamente como válidos los diseños A y C, y como no válido el diseño B.

Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հենվյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	Այո / Ոչ

Sin embargo, para el diseño D, más familiar y sencillo (rectángulo), no ha sido capaz de hacerlo.

F4 ha sabido relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de los dos países (Chatear 1); en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente porcentaje directo a la cantidad dada; asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada; y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada.

Aborda correctamente el ítem 34 (Dados 1), calculando la suma de los números de las caras que no se ven. Sin embargo, en el ítem 35 (Dados 2), no es capaz interpretar la representación bidimensional de las figuras tridimensionales.



Պատկեր	Գործու՞մ է կանոնը, որ երկու հակադիր կողմերի թվերի գումարը 7 է:
Պատկեր I	Այո / Ոչ
Պատկեր II	Այո / Ոչ
Պատկեր III	Այո / Ոչ
Պատկեր IV	Այո / Ոչ

Menciona erróneamente todas las formas como correctas, mientras en el caso que las formas I y IV no lo son.

De los ítems que requieren las CM del grupo de reflexión, F4 realiza el ítem 10, en el cual ha sido capaz de calcular correctamente el intervalo en el cual podrían chatear dos chicos, siendo uno en Sidney y el otro en Berlín.

5. Informe de análisis de F5

El estudiante F5 ha sido capaz de resolver 20 ítems de la prueba. **Entre ellos, ha sabido abordar la mayor parte de los ítems que invitan a movilizar los procesos cognitivos del grupo de reproducción**. No realiza correctamente cuatro de éstos.

Lleva un procedimiento erróneo para proceder en el ítem 17, obtiene como resultado 16 puntos al hallar la media de las notas tras los cinco exámenes (cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos)).

Միջինը 16 միավոր

Parece que no ha entendido el enunciado y ha tomado 80 como la nota tras de los cinco exámenes y ha dividido entre 5, y así llega a la media 16.

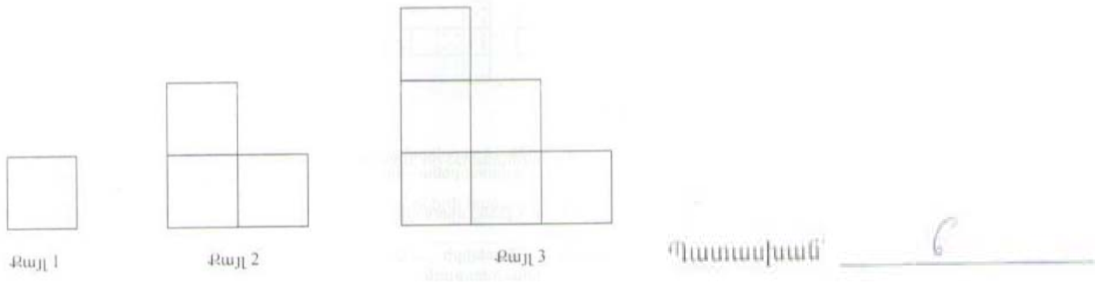
No realiza el ítem 33, en el cual mediante un procedimiento rutinario de división, tenía que calcular la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera. Otro fallo lo ha cometido en el cálculo de la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3xA) + B + C + D en el ítem 37 (El mejor coche 1).

Մեքենա	Անվտանգություն (A)	Վառելիքի խնայողություն (B)	Արտաքին տեսքը (C)	Սալոն (D)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
XK	3	2	3	2

Ca ավտոմեքենայի հանրագումարային միավորը՝ ......9....

Parece que tan solo ha sumado las puntuaciones de Ca (3+1+2+3=9), sin realizar la operación 3xA. Este hecho refleja más bien el acercamiento mecánico y la falta de atención a los componentes de la fórmula.

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, no ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitará Roberto para construir el Nivel 4:



Parece que se refiere erróneamente a que Roberto necesitará otros 6 cuadrados más y no ha entendido cómo se construye el Nivel 4.

En cuanto a los ítems que requieren poner en marcha las CM del grupo de conexión, F5 ha sabido realizar los siguientes.

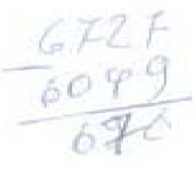
Este estudiante intenta realizar el ítem 8 (Carpintero). Ha razonado correctamente que los diseños A y D son válidos y que el diseño B no es válido, sin embargo, parece no notar la analogía entre el diseño A y el diseño C para deducir también su adecuación.

Ahora, este estudiante ha sido capaz de realizar con éxito los siguientes ítems, poniendo en marcha las CM asociadas a cada uno: relaciona las 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de los dos países (Chatear 1); en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente porcentaje directo a la cantidad dada; asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; y realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada.

Sin embargo, en el ítem 22 (Selección) no ha sabido formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada (da la respuesta 5 en lugar de 6).

En el ítem 27 (Monopatín 3), F5 ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y a través de estrategias no triviales elegir entre los diferentes precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible.

Ha empezado a resolver el ítem 29, en el cual ha de explicar cómo se obtiene 11% a partir de los dos diagramas.

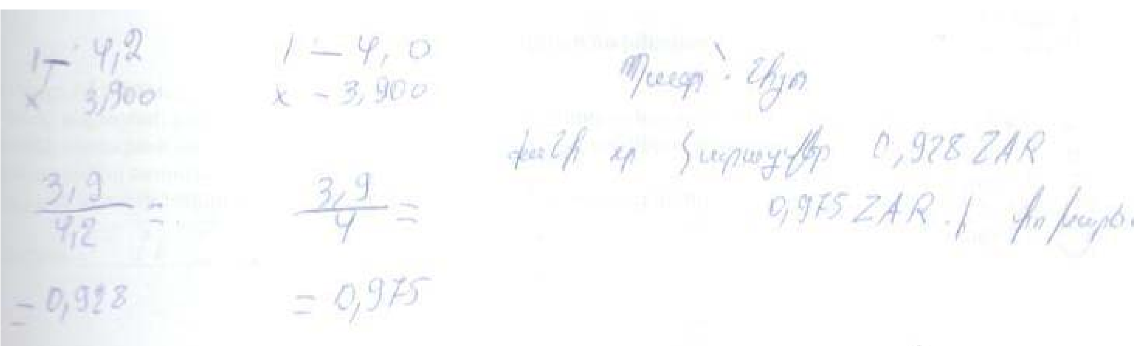


Parece intuir el procedimiento, no obstante, abandona el problema sin llevarlo a cabo.

F5 ha sido capaz de realizar correctamente los ítems 34 y 35 (Dados 1 y Dados 2). En el ítem 34, mediante una estrategia más estándar, encuentra los números de las caras que no se ven y sumando los cinco números, obtiene el resultado correcto, 17.

Asimismo, en el ítem 35 sabe identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

De los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión, F5 ha realizado con éxito el ítem 13 (El tipo de cambio 3). En este ítem, F5 ha sido capaz de razonar acerca de cuál de los dos tipos de cambio ha favorecido a Mei-Ling:



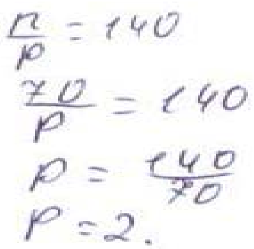
Realiza las operaciones empleando la regla de tres y presenta sus cálculos para comprobar cómo se refleja el tipo de cambio en la cantidad de dinero a recibir.

Finalmente, concluye que sí le favoreció, ya que recibirá más dinero. Comete un fallo al tomar 3, 9 en vez de 3.900, sin embargo, los cálculos y el razonamiento son correctos.

6. Informe de análisis de F6

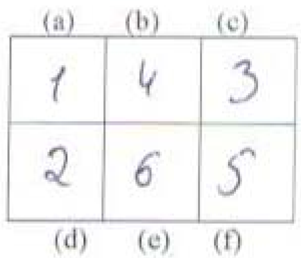
Este estudiante ha realizado correctamente los 20 ítems de la prueba, **entre ellos, ha sabido resolver nueve ítems que invitan a activar las CM del grupo de reproducción y los demás son los que movilizan las CM del grupo de conexión y un ítem del de reflexión.**

Así, al abordar el ítem 1 (Caminar 1), ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada, sin embargo, no ha sido capaz de despejar la incógnita *P*.



Como hemos mencionado este hecho puede ser resultado de una aproximación mecánica a la resolución, en cierto modo debida a los números 140 y 70, que parece que sugieren la operación que ha realizado, también puede que le resulte difícil despejar una incógnita en el divisor del cociente, ya que despeja correctamente la n de la misma fórmula en el ítem 2.

F6 se equivoca en el ítem 3 (Cubos), al descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen. No ha sabido realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo.



Lo hace correctamente para a, d, e, f, sin embargo, parece que por despiste, para b y c los números suman 6 en vez de 7.

F6 ha sido capaz de realizar cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1); ha abordado el ítem 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; el ítem 16 (Caramelos de colores), calculando correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo.

Su acercamiento a la resolución en el ítem 17 es erróneo: ha encontrado la media de las notas tras los cinco exámenes igual a 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$).

F6, sabe descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad; en el ítem 26 (Monopatín 2) calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes, asimismo, en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

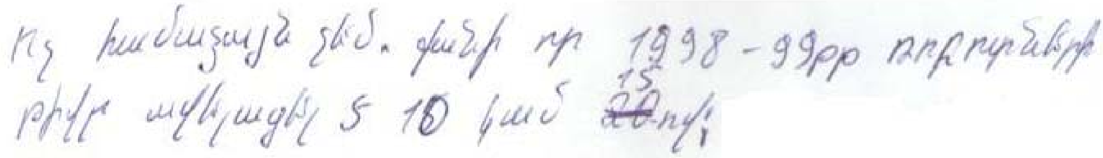
En cuanto a los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de conexión, ha realizado la mayoría de ellos.

F6, en el ítem 2 (Caminar 2), ha sabido realizar los procedimientos de tipo reproducción: identificar variables y aplicar la fórmula.

$$\frac{n}{0{,}80} = 140$$
$$n = 0{,}80 \cdot 140 = 112.$$

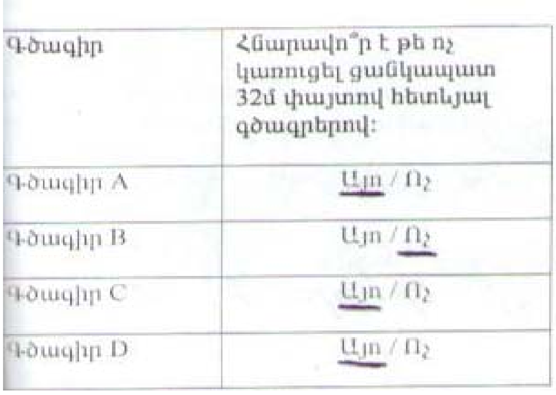
De este modo, encuentra el número de pasos, sin embargo, no ha sido capaz de seguir el problema para encontrar la velocidad en m/min y km/h.

F6 realiza correctamente el ítem 7 (Robos), dando una razón por la cual la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos representado mediante un gráfico no es razonable:



Su argumento: "*No estoy de acuerdo, ya que de 1998-99 el número de robos ha aumentado 10 o 15*", se basa en que el aumento no es grande respecto al total.

Este estudiante ha sabido contestar correctamente la pregunta del ítem 8 (Carpintero). Ha sido capaz de establecer correctamente conexiones ente el perímetro de los cuatro diseños dados y la cantidad de madera que dispone el carpintero.



Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հետևյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	Այո / Ոչ

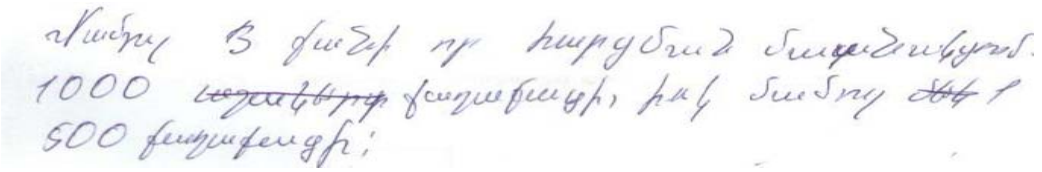
De este modo, ha indicado los diseños A, C y D cómo válidos y el diseño B no válido para la construcción del parterre.

F6 ha sabido relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de los dos países (Chatear 1), en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente el porcentaje directo a la cantidad dada, asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada; y en el ítem 27 (Monopatín 3), ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y a través de estrategias no triviales elegir entre los precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible.

No ha sido capaz de formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada (obtiene 2 en lugar de 6 combinaciones).

F6 resuelve correctamente los ítems 34 y 35 (Dados 1 y Dados 2). En el ítem 34 sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven y escribe la respuesta sumando los cinco números. Asimismo, ha sabido realizar correctamente el ítem 35, identificando y reconociendo la posición de las caras de figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

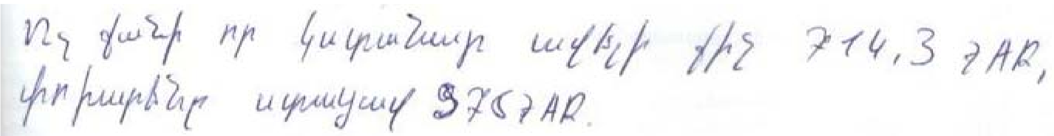
Intenta resolver el ítem 36 (Respaldo al presidente): indica correctamente el periódico 3.



Sin embargo, da sólo un argumento para justificar su respuesta que se basa en que han preguntado a 1000 ciudadanos, mientras el periódico 1 solo a 500.

Por último, de los ítems que requieren activar las CM del grupo de reflexión, ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 10, en el cual ha calculado correctamente el intervalo en el cual podrían chatear dos chicos, siendo uno en Sidney y el otro en Berlín.

Ha intentado realizar el ítem 13 (El tipo de cambio 3), aparte que ha razonado como si el cambio fuese de 4,0 ZAR a 4,2 ZAR por un 1 SGD, lo hace a partir de sus cálculos erróneos.



Según sus cálculos, ha dividido 3.000 SGD entre el tipo de cambio 4,2 y ha obtenido 714, 3 ZAR, mientras que la segunda cantidad la obtiene dividiendo 3.900 entre 4,0 y obtiene 975 ZAR. Por tanto expresa que "*No le favoreció el tipo de cambio ya que recibiría menos dinero 714, 3 ZAR, en cambio ha recibido más 975 ZAR*".

7. Informe de análisis de F7

El estudiante F7 ha realizado correctamente los 20 ítems de la prueba. **Doce de ellos son los ítems que requieren las CM del grupo de reproducción y otros ocho los que activan las CM del grupo de conexión.**

Este estudiante ha sabido realizar correctamente el ítem 1 (Caminar 1), mostrando los siguientes cálculos:

$$\frac{n}{p}=140$$

$$p=\frac{n}{140}$$

$$p=\frac{\cancel{70}}{\cancel{140}}=\frac{1}{2}\,s=0{,}5\,s$$

De este modo, ha sabido identificar las variables, despejar la incógnita y calcular su valor.

En el ítem 3 (Cubos), ha sido capaz de descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y calcular los valores de las caras que no se pueden ver. Asimismo, ha realizado correctamente la operación sencilla de resta, en el ítem 4 (Crecer 1).

En el ítem 6 (Crecer 3), F7 ha indicando el intervalo donde los chicos son más altos, sin embargo se les pedía al revés, donde las chicas son más altas que chicos.

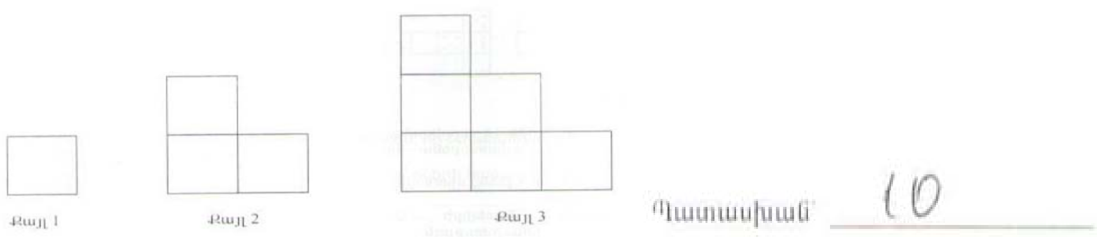
En los ítems 11 y 12 que se refieren al cálculo de la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dado, ha realizado correctamente aplicando procedimientos estándares; asimismo ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de sacar un caramelo rojo (6 de 30), ha elegido la opción errónea (25%). Asimismo, procede erróneamente en el ítem 17, calculando la nota media tras cinco exámenes.

Este estudiante ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. No obstante, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido. Mediante un procedimiento rutinario de división, en el ítem 33, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera. Asimismo, ha sabido calcular la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3xA) + B + C + D en el ítem 37 (El mejor coche 1).

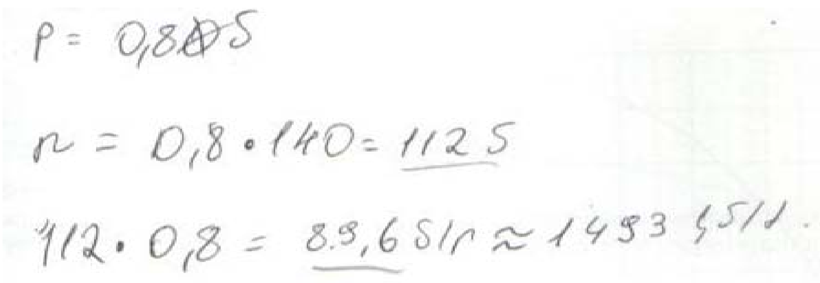
En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4:



De este modo, ha sabido construir el Nivel 4 del esquema de Roberto, indicando correctamente el número de cuadrados necesarios para ello.

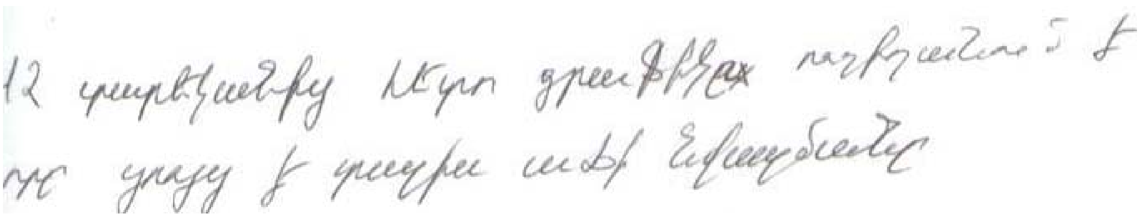
En cuanto a los ítems que movilizan las CM del grupo de conexión, F7 ha realizado los siguientes.

Así, en el ítem 2, ha sabido identificar las variables y ha sido capaz de despejar correctamente la incógnita.



Ha calculado correctamente el número de pasos y ha sabido razonar que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, de este modo determina la velocidad en m/min. F7 ha intentado pasar de m/min a km/h, sin embargo, ha hecho el procedimiento al revés: 89,6 ha dividido entre 60 y ha multiplicado por 1000.

En el ítem 5 (Crecer 2), da una explicación válida acerca de cómo se refleja que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas desminuye a partir de los 12 años:



Con la explicación: "*A partir de los 12 años la línea se hace horizontal, lo que indica que la tasa de crecimiento disminuye*", manifiesta entender el concepto de cambio de la gradiente del gráfico.

No ha sido capaz de realizar con éxito el ítem 8 (Carpintero), ha razonado correctamente acerca de la posibilidad de construir el parterre con el diseño D y que no se puede construir con el diseño B, sin embargo, para los demás diseños no ha sido capaz de estimar sus perímetros.

En el ítem 9 (Chatear 1), F7 se equivoca al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney):

Siendo 9 horas delante la hora en Sidney, el estudiante, en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea.

F7 en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente porcentaje directo a la cantidad dada; asimismo en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; así como, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada.

En el ítem 22 (Selección) no ha sabido formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada. Da como respuesta 2 combinaciones en vez de correctas 6.

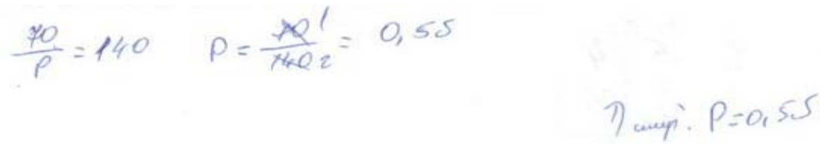
En el ítem 27 (Monopatín 3), F7 ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y a través de estrategias no triviales elegir entre los diferentes precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible.

Este estudiante resuelve correctamente el ítem 34 (Dados 1), en el cual calcula los puntos de las caras que no se pueden ver, deduciendo de los puntos de las que se ven y sumándolos llega a la respuesta correcta 17. En el ítem 35 (Dados 2) ha sabido identificar y descodificar las representaciones bidimensionales de los dados.

8. Informe de análisis de F8

Este estudiante ha realizado correctamente 19 ítems de la prueba. **Entre ellos, ha resuelto la mayor parte de los ítems que requieren las CM del grupo de reproducción y otros que activan las CM del grupo de conexión y de reflexión.**

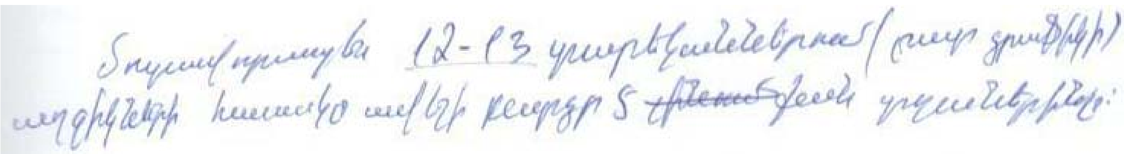
Así, F8 ha abordado correctamente el ítem 1 (Caminar 1), mostrando los cálculos correspondientes con claridad:



De este modo, ha sido capaz de identificar las variables con la fórmula dada, despejar la incógnita y realizar los cálculos.

F8 ha sido capaz de descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos). No le ha presentado ninguna dificultad realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente.

En el ítem 6 (Crecer 3), ha sido capaz de interpretar la representación gráfica de dos funciones e indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:



"*Aproximadamente entre 12-13 años (según el gráfico) las chicas son más altas que los chicos*". Con esta respuesta indica solo una parte del intervalo que es más amplio de 11-13 años.

En los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), F8 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, realizando procedimientos estándares; asimismo, realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

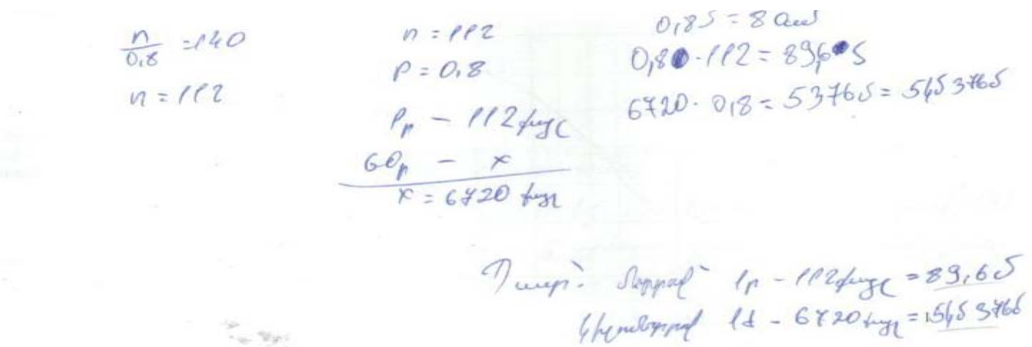
En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de sacar un caramelo rojo (6 de 30), ha elegido la opción errónea (25%).

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

Finalmente, ha realizado el ítem 39 (Esquema de la escalera), indicando correctamente el número de los cuadrados necesarios para construir el Nivel 4.

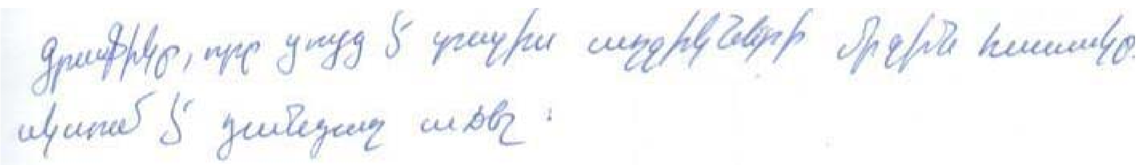
De los ítems que invitan a activar las CM del grupo de conexión, este estudiante ha sido capaz de realizar los siguientes.

Realiza correctamente el ítem 2 (Caminar 2), atendiendo a todas las exigencias del problema. En primer lugar, ha sabido identificar correctamente los datos con las variables de la fórmula dada, despeja la incógnita *n* de la misma, encontrando el número de pasos por minuto.



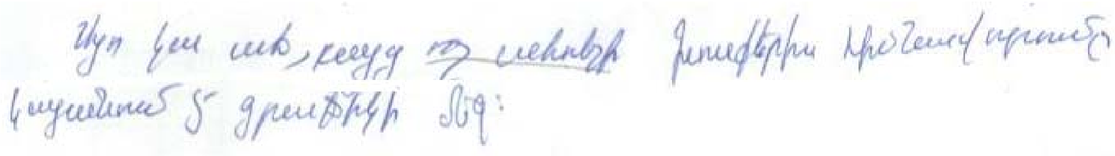
En el siguiente paso ha sabido encontrar la velocidad a la que anda Bernardo en m/min. Para eso ha multiplicado el número de pasos (112) por la longitud de un paso de Bernardo (0,8m), obteniendo 89,6m por minuto. Emplea la regla de tres para pasar de los pasos por minuto a pasos por hora y vuelve a multiplicar por la longitud del paso de Bernardo (0,8m). Halla, de este modo, que Bernardo hace 5376 m por hora y finalmente, pasa a 5,376 km/h.

Con la explicación que F8 ha dado a la pregunta planteada en el ítem 5 (Crecer 2), ha manifestado comprender y saber emplear el concepto del cambio de la gradiente del gráfico, interpretar el gráfico y explicar.



"*El gráfico que representa la media de la edad de las chicas empieza a ser horizontal*". No hace mención explícita a la pendiente, usa más bien el lenguaje cotidiano.

Asimismo, en el ítem 7 (Robos), F8 ha mostrado comprender y saber emplear el concepto de aumento de una cantidad, pensar y razonar acerca de la información presentada en el gráfico, cuestionar la afirmación acerca del aumento enorme de robos que hace el presentador interpretando el gráfico.



"*Sí, hay aumento, pero no es enorme, el gráfico lo fundamenta*". Su argumento se basa en que aunque visualmente el gráfico hace ver un aumento grande, sin embargo, según los valores hay un aumento insignificante respecto al total.

En el ítem 8 (Carpintero), ha sido capaz de establecer correctamente conexiones entre el perímetro de los diseños C y D y la cantidad de madera que dispone el carpintero.

Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հետևյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	Այո / Ոչ

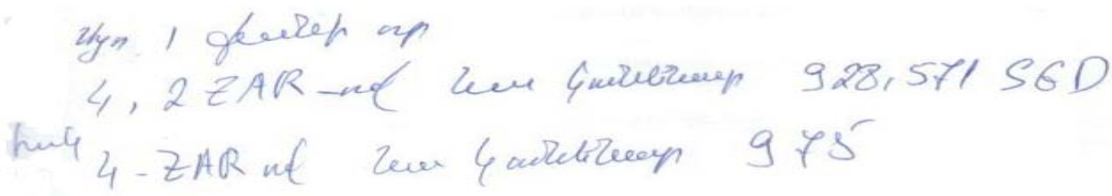
Para los diseños A y B, no ha contestado la pregunta.

En el ítem 9 (Chatear 1), F8 ha sido capaz de relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de dos países; así como en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente el porcentaje directo a una cantidad dada.

A la hora de abordar el ítem 18 (Feria), no ha sido capaz de razonar correctamente que como hay solo un número impar, es muy probable que la ruleta pare en un número par, sin embargo, al haber solo 6 canicas negras, es poco probable que Daniela gane (responde: muy probable), asimismo, da una respuesta errónea en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén, no ha sido capaz de encontrar correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven y sumando los cinco números encontrados, responde la respuesta. Asimismo, ha llevado a cabo el ítem 35 (Dados 2), identificando correctamente formas de las figuras tridimensionales en la representación bidimensional.

Ahora, **de los ítems del grupo de reflexión**, F8 ha realizado con éxito el ítem 13 (El tipo de cambio 3), explicando cómo favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD.



Con la explicación:"*Si, porque con el cambio 4, 2 ZAR recibiría 928 SGD mientras con 4.0 recibe 975*", justifica por qué le favoreció a Mei-Ling el tipo de cambio, razonando a partir de los cálculos realizados.

9. Informe de análisis de F9

La estudiante F9 ha resuelto correctamente 16 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de ejecutar los ítems que requieren movilizar los procesos cognitivos del grupo de reproducción y de conexión.**

Entre los del grupo de reproducción ha realizado los siguientes.

Esta estudiante ha tenido dificultad a la hora de abordar el ítem 1 (Caminar 1).

Como lo muestra en el espacio para la solución, no ha sido capaz de identificar las variables con la fórmula dada y ha abandonado el problema.

F9 ha sabido identificar las variables con la fórmula dada, despejar la incógnita y realizar los cálculos. Asimismo, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas; asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente.

F9 ha abordado el ítem 11 (El tipo de cambio1), calculando correctamente cuántos ZAR corresponden a 3000 SGD a partir del tipo de cambio dado (1SGD=4,2 ZAR). Sin embargo, en el ítem 12, ha realizado cálculos erróneos para saber cuántos SGD corresponde a 3.900 ZAR.

Asimismo, realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

No ha sido capaz de calcular correctamente la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30 caramelos de diferentes colores), en el ítem 16, elige la opción de 25%. Asimismo, ejecuta erróneamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. La respuesta que da es 95. Para obtener esta respuesta, es posible que haya seguido un razonamiento erróneo y haya dividido 60 entre cuatro, obteniendo 15 y lo haya sumado a la puntuación del quinto examen (80+15=95).

Esta estudiante ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad y en el ítem 26 (Monopatín 2) calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes. En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

Por último, en el ítem 39, ha sabido deducir el número de cuadrados que necesitará Roberto para construir el Nivel 4.

En cuanto a los ítems más complejos, esta estudiante ha realizado los siguientes.

En el ítem 15 (Exportaciones 2), que requería la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraerlos de los diagramas dados), elige la opción correcta; en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha encontrado correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería; y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta.

F9 no ha sido capaz llevar a cabo correctamente el ítem 27 (Monopatín 3), donde había que estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

En el ítem 34 (Dados 1), ha sido capaz de deducir los números de las caras que no se ven a partir de los de las que se ven y sumándolos dar respuesta correcta; asimismo, ha sabido realizar correctamente el ítem 35 (Dados 2), identificando y reconociendo la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

10. Informe de análisis de F10

La estudiante F10 ha resuelto correctamente 16 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de ejecutar los ítems que requieren activar los procesos cognitivos del grupo de reproducción y de conexión.**

Esta estudiante, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas; asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente.

F10 ha abordado el ítem 11 (El tipo de cambio1), calculando correctamente cuántos ZAR corresponden a 3000 SGD a partir del tipo de cambio dado (1SGD=4,2 ZAR). Sin embargo, en el ítem 12, ha realizado cálculos erróneos para saber cuántos SGD corresponde a 3.900 ZAR.

Asimismo, realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

No ha sido capaz de calcular correctamente la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30 caramelos de diferentes colores), en el ítem 16, elige la opción de 25%. Asimismo, ejecuta erróneamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. La respuesta que da es 95. Para obtener esta respuesta, es posible que haya seguido un razonamiento erróneo y haya dividido 60 entre cuatro, obteniendo 15 y lo haya sumado a la puntuación del quinto examen (80+15=95).

Esta estudiante ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad y en el ítem 26 (Monopatín 2) calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes. En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

Por último, en el ítem 39, ha sabido deducir el número de cuadrados que necesitará Roberto para construir el Nivel 4.

Entre los ítems más complejos, esta estudiante ha abordado los siguientes.

En el ítem 15 (Exportaciones 2) que requería la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados), elige la opción correcta; en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha encontrado correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería; y en el ítem 22 (Selección) sabe formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta.

F10 no ha sido capaz llevar a cabo correctamente el ítem 27 (Monopatín 3), donde había que estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

En el ítem 34 (Dados 1), ha sido capaz de deducir los números de las caras que no se ven a partir de los de las que se ven y sumándolos dar respuesta correcta; asimismo, ha sabido realizar correctamente el ítem 35 (Dados 2), identificando y reconociendo la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

11. Informe de análisis de F11

El estudiante F11 ha sabido abordar los 15 ítems de la prueba. **Ha ejecutado principalmente los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción y algunos ítems más complejos.**

Así, ha sido capaz de ejecutar el ítem 3 (Cubos) que requiere descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos, como dados, mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas; ha sido capaz de realizar cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1); en los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados. Ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

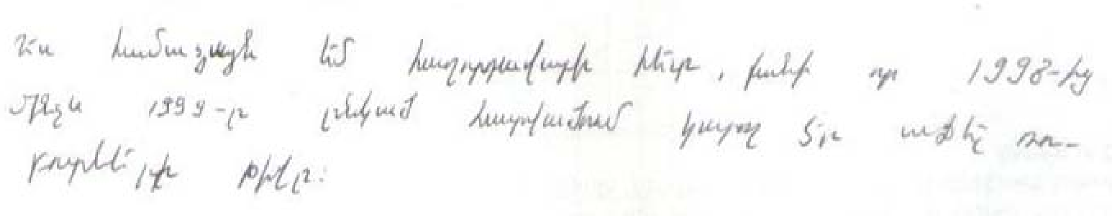
En el ítem 16 (Caramelos de color), F11 no ha sabido relacionar correctamente la cantidad de caramelos rojos del total (6 de 30) con la probabilidad de sacarlo. Ha contestado que la probabilidad de que Roberto coja un caramelo rojo es de 50%. De este modo, demuestra no entender el concepto de probabilidad de la ocurrencia de un suceso.

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Sin embargo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido. Asimismo, ha sabido hacer el cálculo de la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada $(3\times A) + B + C + D$ en el ítem 37 (El mejor coche 1). Por último, realiza correctamente el ítem 39, infiriendo correctamente el número de cuadrados necesarios para Nivel 4.

De los ítems más complejos, esta estudiante ha intentado resolver varios de ellos, algunos con éxito otros erróneamente.

Así, a la hora de abordar el ítem 7 (Robos), confirma su acuerdo con la afirmación no razonable del presentador, argumentando que es posible que desde 1998 a 1999 el número de robos aumentara.



No se fija en que la afirmación se cuestiona por mencionar un aumento enorme, mientras la representación gráfica muestra aumento en tan solo 10-15 robos en un año, que es un aumento insignificante respecto al total de robos.

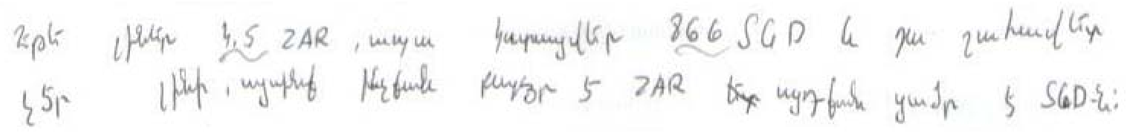
En el ítem 8 (Carpintero), menciona opciones erróneas para la construcción del parterre. Estima correctamente los diseños Ay D como válidos, sin embargo, se equivoca en el diseño B que no es válido y el C que es válido, contestando lo contrario.

En el ítem 9 (Chatear 1), F11 se equivoca al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney). Siendo 9 horas delante la hora en Sidney, la estudiante, en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea 16:00 en Berlín.

Este estudiante, en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente el porcentaje directo a una cantidad dada. Asimismo, F11 en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada. Sin embargo, en el ítem 22 (Selección) no ha sabido formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada (da respuesta 2 en lugar de 6).

En el ítem 27 (Monopatín 3), F11 ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y a través de estrategias no triviales elegir entre los diferentes precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible. F11 ha sido capaz de llevar a cabo los ítems 34 (Dados 1), no obstante, en el 35 (Dados 2) no ha sido capaz de interpretar y reconocer la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional, para todas las cuatro formas.

Entre los ítems que invitan a activar las CM del grupo de reflexión, ha realizado el ítem 13 (El tipo de cambio 3). En ello da un argumento válido, explicando que le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD.



"*Si hubiese 4,5 ZAR recibiría 866 SGD y eso no le favorecería, o sea, cuanto sube ZAR tanto baja SGD*". Ha cometido un fallo al tomar 4,5 en vez de 4,2, sin embargo, ha sabido razonar y generalizar cuándo es favorable el tipo de cambio.

Este estudiante intenta realizar el ítem 21 (Terremoto) de este grupo, sin embargo, elige la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres,* de manera equivocada.

12. Informe de análisis de F12

Este estudiante ha abordado 15 ítems de la prueba. **Ha ejecutado mayormente los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción y algunos ítems más complejos.**

Ha sido capaz de ejecutar el ítem 3 (Cubos) que requiere descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos, como dados, mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas; ha sido capaz de realizar cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1); en los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados. Ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

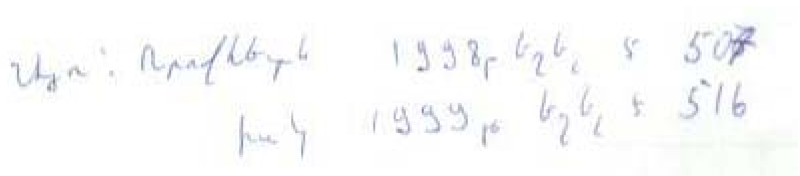
No ha sabido realizar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. Obtiene como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en la comprensión del concepto de media aritmética.

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Sin embargo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido. En el ítem 33, mediante un procedimiento rutinario de división, F12 ha sabido calcular correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

En cuanto a los ítems más complejos, esta estudiante ha intentado resolver varios de ellos, algunos con éxito y otros erróneamente.

Así, a la hora de abordar el ítem 7 (Robos), confirma su acuerdo con la afirmación no razonable del presentador, argumentando que en 1998 había 507 robos y en el 1999 516.



De este modo considera que un aumento de 9 robos es enorme respecto al total.

En el ítem 8 (Carpintero), menciona opciones erróneas para la construcción del parterre. Estima correctamente los diseños C y D como válidos y el diseño B como no válido y se equivoca al estimar el diseño A.

Esta estudiante, en el ítem 9 (Chatear 1), ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín; en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada.

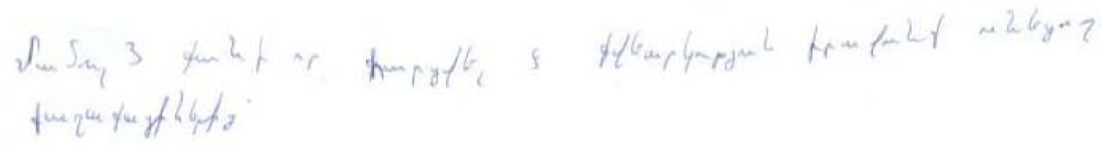
En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad).

Asimismo, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada.

Sin embargo, en el ítem 22 (Selección) no ha sabido formar las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera adecuada (da respuesta 2 en lugar de 6); en el ítem 27 (Monopatín 3), F12 no ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y a través de estrategias no triviales elegir entre los diferentes precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible.

F12 ha sido capaz de llevar a cabo los ítems 34 (Dados 1), no obstante, en el 35 (Dados 2) no ha sido capaz de interpretar y reconocer la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional, para todas las cuatro formas.

En el ítem 36, da la respuesta correcta, y solo un argumento matemático.



El periódico 3, ya que pregunta a los ciudadanos con derecho a voto.

Entre los ítems que invitan a activar las CM del grupo de reflexión, ha realizado el ítem 13 (El tipo de cambio 3). En ello da un argumento válido, explicando que le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD.

"*Sí, porque por 4.0 =975 SGD, mientras por 4,2=928 SGD*". Razona a partir de los cálculos realizados.

13. Informe de análisis de F13

Esta estudiante ha sido capaz de resolver correctamente 14 ítems de la prueba, **entre ellos la mayoría son ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción y algunos más complejos.**

Ha sabido realizar correctamente el ítem 3 (Cubos), descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo. Asimismo, ha sido capaz de realizar cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1). Lleva a cabo los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), en los cuales F13 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados y realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

En el ítem 17, no sido capaz de calcular correctamente la media de las notas tras cinco exámenes: un examen con la puntuación 80 y otros cuatro con una media de 60 puntos. Obtiene 20 puntos. Tampoco en el ítem 26 (Monopatín 2) ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), y en el ítem 25 (Monopatín 1), F13 ha sabido elegir correctamente los precios adecuados de varias componentes de un monopatín para formar su precio total máximo y mínimo; así como, en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido; y en el ítem 33, mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

En cuanto a los ítems más complejos, F13 ha intentado resolver el ítem 8 (Carpintero), sin embargo, no ha sido capaz estimar correctamente todos los diseños para la construcción del parterre con 32m de madera disponibles.

En el ítem 9 (Chatear 1), F13 ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato, relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín. Asimismo, en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada.

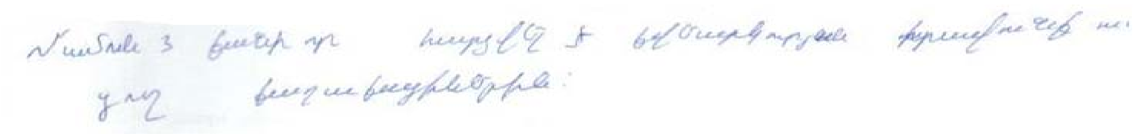
Aborda erróneamente el ítem 18 (Feria), indicando primero la poca probabilidad de que Daniela gane, después borra esa opción y elige que tiene 50% de la probabilidad.

F13 realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) que requiere cálculos mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada.

No ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles. F13 no ha sido capaz llevar a cabo correctamente el ítem 27 (Monopatín 3), donde había que estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

Esta estudiante en el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven. Sin embargo, no ha sabido realizar correctamente el ítem 35 (Dados 2), identificando y reconociendo la posición de las caras de figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

En el ítem 36 (Respaldo al presidente), esta estudiante ha mencionado correctamente el periódico que hace la mejor predicción, sin embargo, da solo un argumento para fundamentar su respuesta.

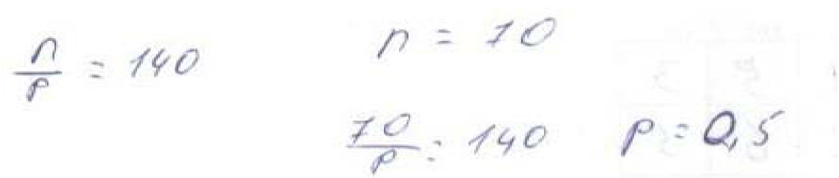


Su argumento se basa en que el periódico 3 ha preguntado a los ciudadanos con el derecho a voto. Sin embargo, no ha sido capaz razonar acerca de la fecha más cerca de las elecciones o de la muestra para proponer el segundo argumento.

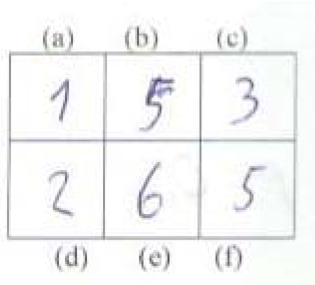
14. Informe de análisis de F14

El estudiante F14 ha sabido llevar a cabo con éxito 15 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de ejecutar sobre todo los ítems sencillos y otros más complejos.**

Este estudiante ha sido capaz de identificar los datos con las variables de la fórmula dada, despejar la incógnita *P* y calcular correctamente su valor.



Comete un fallo en el ítem 3 (Cubos) al calcular el número de la cara de abajo del dado (c).



F14 ha sido capaz de realizar un cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1) y ha abordado el ítem 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados. Asimismo, ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de sacar un caramelo rojo (6 de 30), ha elegido la opción errónea (25%), asimismo, no ha sido capaz de abordar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), calculando la nota media tras cinco exámenes (obtiene 70 puntos).

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido encontrar el valor máximo de los distintos precios, pero se equivoca a la hora de hallar el mínimo. En el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido; asimismo, mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera (ítem 33). Ha sabido calcular la puntuación total de un coche, siguiendo una simple sustitución de los valores dados en la fórmula indicada (3xA) + B + C + D en el ítem 37 (El mejor coche 1).

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4 (da como respuesta 10 cuadrados).

Entre los ítems más complejos, este estudiante ha abordado los siguientes.

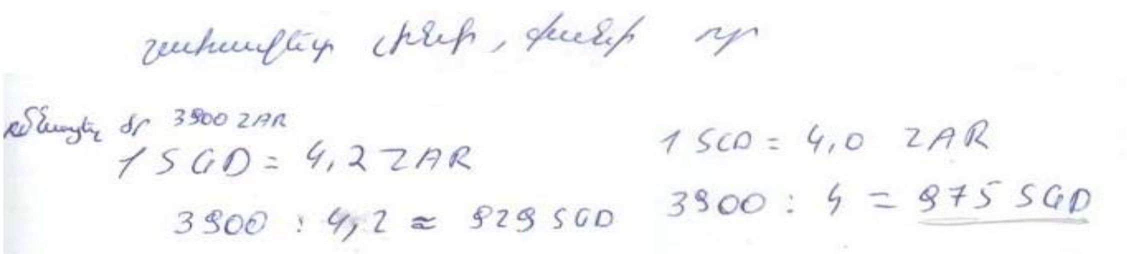
En el ítem 9 (Chatear 1), F14 ha sido capaz de relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de dos países dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney).

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad); en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén, no ha sido capaz de encontrar correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería; tampoco ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones en el ítem 22 (Selección).

En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven. Asimismo, ha llevado a cabo el ítem 35 (Dados 2), identificando correctamente formas de las figuras tridimensionales en la representación bidimensional.

En el ítem 36 (Respaldo al presidente) ha sido capaz de razonar correctamente acerca de las opciones de los periódicos, elige la opción errónea (el periódico 1), basándose en el hecho de que ha realizado el sondeo antes que los otros tres y se fija en el porcentaje predicho y no en la muestra o en el derecho a voto.

De los ítems del grupo de reflexión, en el ítem 13 (El tipo de cambio 3), ha sido capaz de explicar la razón por la que un tipo de cambio ha sido más favorable que el otro:



De este modo, a partir de los cálculos, razona que le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 a 4,0 por un 1 SGD.

En el ítem 21 (Terremoto), no ha sido capaz de valorar y criticar correctamente las opciones dadas para elegir la que mejor describe la predicción del geólogo que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*. La opción que elige es errónea:

B✓ 2/3 մեծ է 1/2. Հետևաբար կարող ենք վստահ լինել, որ Զեդ քաղաքում, երկրաշարժ տեղի կունենա մի անգամ, մոտակա 20 տարիների ընթացքում:

Parece no razonar que con una posibilidad “dos de tres” aunque sea mayor de 50%, no se puede estar seguro de que ocurra un terremoto, sino que tiene mayor probabilidad que haya algún terremoto de que no haya ninguno.

15. Informe de análisis de F15

Este estudiante ha sido capaz de realizar correctamente 14 ítems de la prueba. **Entre ellos ha abordado, principalmente, los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción, y unos ítems más complejos.**

El estudiante F15, ha sabido identificar los datos con las variables de la fórmula dada, despejar la incógnita P y calcular correctamente su valor.

$$\frac{n}{p}=140$$
$$\frac{70}{p}=140$$
$$p=\frac{\cancel{70}^{1}}{\cancel{140}_{2}}=\frac{1}{2}\ ,5$$

F15, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo.

Sin embargo, en el ítem 4 (Crecer 1), no ha sido capaz de encontrar correctamente la estatura media de chicas de 20 años en el 1980, sabiendo que desde 1980 ha aumentado 2,3 cm hasta alcanzar 170,6 cm. Ha tenido que utilizar el procedimiento rutinario de resta.

Պատասխան՝ 87,6

Según la respuesta que obtiene este estudiante, ha seguido un razonamiento erróneo para su proceder y, además, no se ha preocupado por interpretar el resultado obtenido que da la estatura media de chicas de 20 años.

En los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dado, realizando procedimientos estándares; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

En el ítem 17 realiza cálculos incorrectos para hallar la media de las notas tras los cinco exámenes, obteniendo como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en la comprensión del concepto de media aritmética.

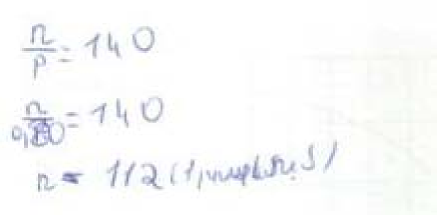
Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad.

Y en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

F15, en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido. Asimismo, ha realizado el ítem 33 mediante un procedimiento rutinario de división, calculando correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera; y por último, el ítem 39 de este grupo lo ha sabido abordar correctamente.

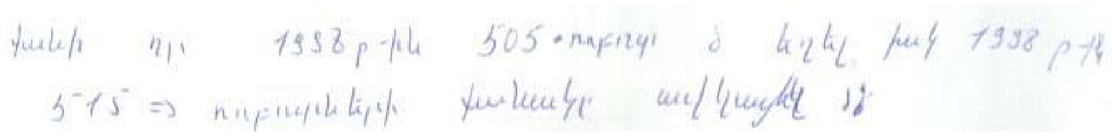
En lo que se refiere a los ítems más complejos, presentamos los que ha intentado resolver y los que ha llevado a cabo con éxito.

Así, en el ítem 2 (Caminar 2), ha sabido realizar los procedimientos de tipo reproducción: ha identificado las variables, ha despejado la incógnita y la ha calculado correctamente.



No ha sido capaz de seguir el problema para hallar la velocidad en m/min y km/h, razonando que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, que sería la velocidad en m/min.

En el ítem 7 (Robos), F15 no menciona si está de acuerdo con la afirmación del presentador, sin embargo, la razón que da más bien confirma que refuta esa afirmación.



"*Dado que en 1998 había 505 robos y en el 1999 había 515=> el número de robos ha aumentado*". Parece no darse cuenta de que lo que se cuestiona no es el aumento sino el "enorme" aumento.

En el ítem 15 (Exportaciones 2) que requería la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados), elige la opción correcta.

En el ítem 9 (Chatear 1), F15 se equivoca al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney). Siendo 9 horas delante la hora en Sidney, este estudiante, suma 9 horas y obtiene 4:00 de la tarde en Berlín, en vez de restar. Asimismo, en el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad); en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén, no ha sido capaz de encontrar correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería; tampoco ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones en el ítem 22 (Selección).

Este estudiante, en el ítem 23 (Puntuaciones en un examen), intenta dar un argumento matemático que podrían utilizar los alumnos del Grupo A, mencionando que había menos estudiantes:

Es posible que se refiera al menor número de alumnos que han suspendido, sin embargo, no termina con claridad su pensamiento.

F15 no ha sido capaz llevar a cabo correctamente el ítem 27 (Monopatín 3), donde había que estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven. Sin embargo, en el ítem 35 (Dados 2), ha sido capaz de interpretar y reconocer la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

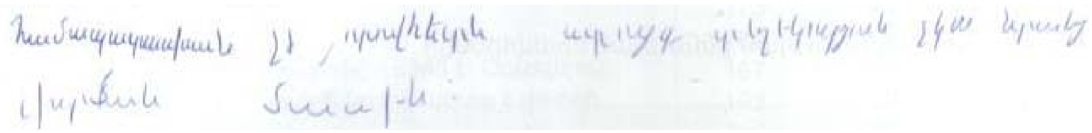
Պատկեր	Գործու՞մ է կանոնը, որ երկու հակադիր կողմերի թվերի գումարը 7 է:
Պատկեր I	Այո / Ոչ
Պատկեր II	Այո / Ոչ
Պատկեր III	Այո / Ոչ
Պատկեր IV	Այո / Ոչ

Tan solo menciona la forma IV como correcta y dejando las demás formas sin especificar.

En el ítem 36 (Respaldo al presidente), menciona correctamente el periódico 3 como el que hace mejores predicciones.

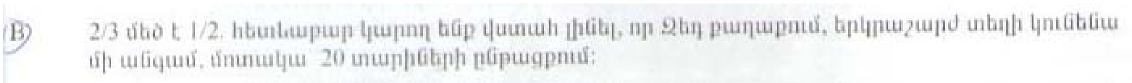
No obstante, no ha sido capaz de dar dos argumentos para justificar su respuesta.

Entre los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión, este estudiante ha realizado el ítem 20 (Basura). En este ítem, F15 ha sido capaz de razonar sobre la inadecuación de presentar los datos mediante un diagrama de barras



Su argumento: "*No es adecuado, porque no se dispone de una información precisa para el tiempo de la descomposición*", se basa en la gran variabilidad de los datos de algunas categorías (la longitud de la barra para los vasos de plástico es indeterminada o no se puede hacer una barra para 1-3 años o 20-25 años).

Asimismo, F15 intenta abordar el ítem 21 (Terremoto), sin embargo, no ha sabido razonar sobre la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*.


B) 2/3 մեծ է 1/2. հետևաբար կարող ենք վստահ լինել, որ Զեդ քաղաքում, երկրաշարժ տեղի կունենա մի անգամ, մոտակա 20 տարիների ընթացքում:

16. Informe de análisis de F16

Este estudiante ha realizado con éxito 12 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de ejecutar principalmente los ítems sencillos y unos más complejos.**

F16, en el ítem 3 (Cubos), ha sido capaz de descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y calcular los valores de las caras que no se pueden ver. Asimismo, hace correctamente la operación sencilla de resta, en el ítem 4 (Crecer 1). En los ítems 11 y 12 que se refieren al cálculo de la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dado, los ha realizado correctamente aplicando procedimientos estándares. F16 ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; y en el ítem 16 (Caramelos de colores), ha calculado correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo.

Su acercamiento a la resolución en el ítem 17 es erróneo: ha encontrado la media de las notas tras los cinco exámenes igual a 16 puntos. Parece no entender el problema y dividir los 80 puntos del quinto examen entre el número de los 5 exámenes y así obtiene 16.

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Sin embargo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En cuanto a los ítems más complejos, F16 ha abordado los siguientes.

Ha intentado resolver el ítem 8 (Carpintero), ha estimado correctamente los diseños A y D como válidos para la construcción del parterre y el diseño B como no válido, sin embargo, no ha sido capaz de estimar correctamente el diseño C.

En el ítem 9 (Chatear 1), F16 ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín. Realiza correctamente el ítem 15 (Exportaciones 2), donde a partir de los datos de dos diagramas habría que realizar la aplicación directa del porcentaje a una cantidad.

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad).

F16, en el ítem 19, a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha encontrado correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

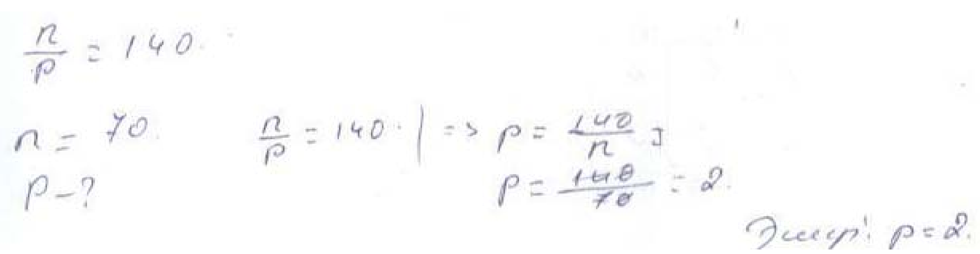
En el ítem 22 (Selección), sin embargo, no ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles (da respuesta 2 en vez de 6 combinaciones). Asimismo, en el ítem 27 (Monopatín 3), no ha sabido estimar la cantidad que suman los precios de las distintas partes de monopatín e indicar el precio total más caro posible que se ajuste con la cantidad del dinero que dispone Marcos.

En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven y dar la respuesta correcta sumando estos números. Ahora bien, en el ítem 35 (Dados 2), no ha sido capaz de interpretar y reconocer la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional.

17. Informe de análisis de F17

La estudiante F17 ha sido capaz de realizar correctamente 12 ítems de la prueba. **Entre ellos, la mayoría son los ítems sencillos y unos más complejos.**

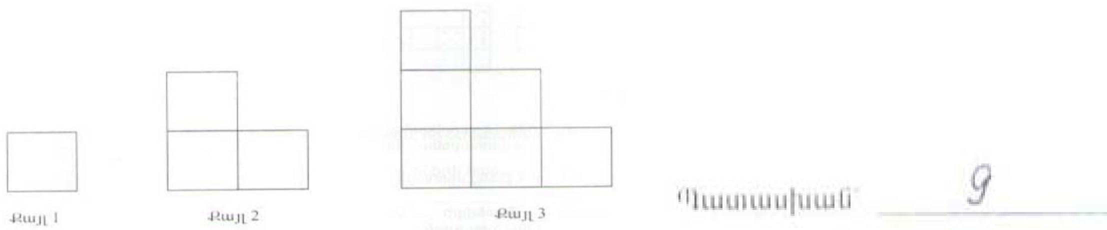
Así, esta estudiante ha intentado resolver el ítem 1 (Caminar1), según los cálculos que muestra, ha sabido identificar las variables de la fórmula sin llegar a despejar correctamente la incógnita:



Es posible que haya actuado mecánicamente debido a la comodidad de manejo los números 140 y 70 en esta operación, o bien le ha resultado difícil despejar la incógnita cuando ésta es divisor de un cociente, ya que en el ítem 2 ha sabido despejar n de la misma fórmula.

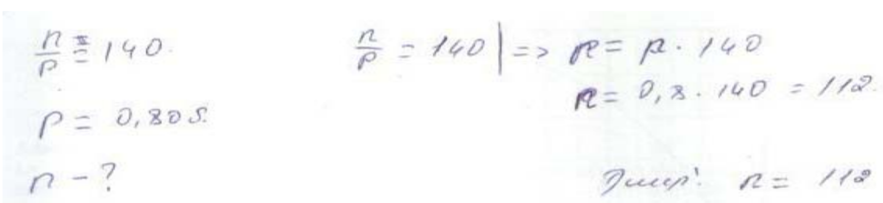
F17 ha sabido descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos) y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, ha abordado el ítem 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados. Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. En el ítem 26 (Monopatín 2), ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes, y en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, no ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitará Roberto para construir el Nivel 4:



Ha inferido erróneamente el número de cuadrados, más bien ha sumado 3 cuadrados a los del Nivel 3 debido a que el paso del Nivel 2 a Nivel 3 ha supuesto 3 cuadrados más.

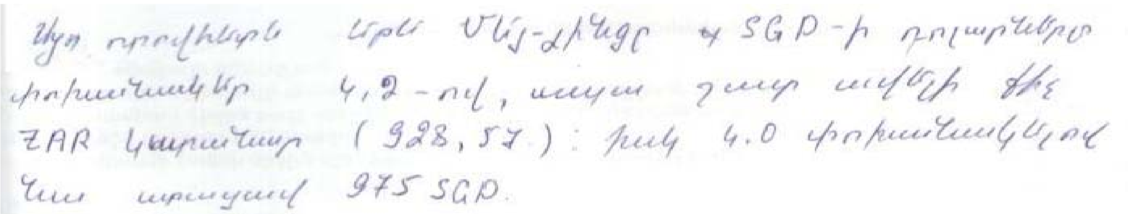
En cuanto a los ítems más complejos, esta estudiante ha intentado realizar algunos de ellos. Así, en el ítem 2 (Caminar 2), ha sabido identificar las variables, despejar correctamente la incógnita y calcular su valor.



Sin embargo, no ha sido capaz de seguir el problema para encontrar la velocidad en m/min y km/h, razonando que si en un minuto una persona realiza 112 pasos y cada paso es de 0,80m, entonces, en un minuto hace un recorrido de 89,6m, que sería la velocidad en m/min.

En el ítem 9 (Chatear 1), E17 ha sabido calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney); y en el ítem 27 (Monopatín 3), ha sabido emplear el concepto de valor máximo de una cantidad y a través de estrategias no triviales elegir entre los precios tales que siendo el monopatín más caro no supere la cantidad del dinero disponible. En el ítem 34 (Dados 1), sabe descodificar e identificar los números de las caras que no se pueden ver a partir de los de las que se ven. Sin embargo, en el ítem 35 (Dados 2), no sido capaz de identificar correctamente formas de las figuras tridimensionales en la representación bidimensional.

De los ítems que invitan a movilizar las CM del grupo de reflexión, F17 ha sabido abordar el ítem 13 (El tipo de cambio), explica que le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD.



Su argumento se basa en los cálculos realizados que demuestran que cuando el cambio es 4,0 ZAR por 1 SGD, le favorece a Mei-Ling.

18. Informe de análisis de F18

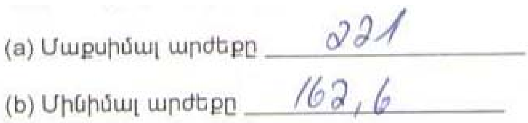
Esta estudiante ha realizado tan solo 10 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de ejecutar algunos ítems sencillos y otros más complejos.**

F18, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, realizando la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo. Asimismo, ha sido capaz de realizar el cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1) y ha abordado el ítem 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados.

Para hallar la media de las notas tras los cinco exámenes (la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos)), E18 ha realizado las siguientes cálculos $\frac{60+80}{2}$=70 y ha obtenido una respuesta incorrecta (ítem 17).

En el ítem 24, ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular.

A la hora de abordar el ítem 25 (Monopatín 1), ha utilizado datos que no correspondían a la solución del problema.


(a) Մաքսիմալ արժեքը 221

(b) Մինիմալ արժեքը 162,6

Parece que este fallo se debe al proceder mecánico, ya que tuvo que sumar los precios máximos, en un caso, y mínimos en el otro, de las diferentes partes de monopatín para montarlo uno mismo, sin embargo, F18 suma también el precio de los monopatines completos, sin fijarse bien en la cuestión planteada. Asimismo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4 (da respuesta 10 cuadrados).

De los ítems más complejos, esta estudiante aborda los siguientes.

Ha intentado realizar el ítem 8 (Carpintero), pero sin éxito. Tan solo elige una opción y es errónea.

En el ítem 9 (Chatear 1), F18 ha sido capaz de calcular la diferencia horaria de dos países y a partir de este dato relacionar las 7 de la tarde de Sidney con las 10 de la mañana en Berlín. Y en el ítem 15 (Exportaciones 2), ha sido capaz de aplicar correctamente el porcentaje directo a una cantidad.

En el ítem 18 (Feria) elige incorrectamente la opción que es imposible que Daniela gane. Parece no ser capaz de razonar que esta opción sería válida en el caso cuando en la bolsa no hubiese ninguna canica negra o en la ruleta ningún número par, sin embargo, no fue el caso.

Esta estudiante realiza correctamente el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha de encontrar el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

En el ítem 22 (Selección) no sabe formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta (da respuesta 12 en vez de 6 combinaciones posibles).

Es capaz de realizar correctamente el ítem 34 (Dados 1), calculando la suma de los números de las caras que no se ven. Sin embargo, en el ítem 35 (Dados 2), no es capaz de interpretar la representación bidimensional de las figuras tridimensionales, (dados).

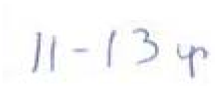
De los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión, F18 ha intentado resolver el ítem 13 (El tipo de cambio 3), razonando acerca de si le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD o no, sin embargo, da una razón válida si hubiese cambiado 3.900 SGD a ZAR.

19. Informe de análisis de F19

Esta estudiante ha realizado correctamente 10 ítems de la prueba. **Ha sido capaz de ejecutar algunos ítems sencillos y otros más complejos.**

Así, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, realizando la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo.

En el ítem 6 (Crecer 3), ha sido capaz de interpretar la representación gráfica de dos funciones e indicar el intervalo en el cual las chicas son más altas que los chicos de su misma edad:

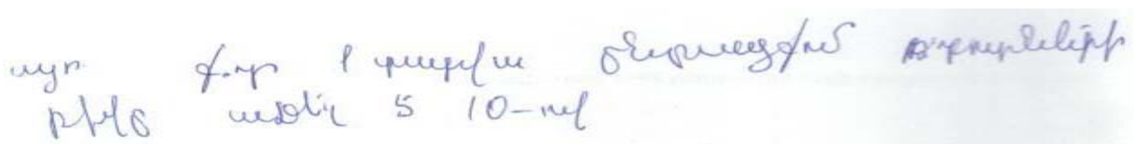


Asimismo, ha abordado los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados. Y el ítem 16 (Caramelos de colores), ha calculado correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo; sabe descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24) y en el ítem 39 (Esquema de escalera), ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4 (da respuesta 10 cuadrados).

A la hora de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes (la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos)), F19 ha realizado las siguientes cálculos $\frac{60+80}{2}$=70 y ha obtenido una respuesta incorrecta (ítem 17). Asimismo, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha utilizado datos que no correspondían a la solución del problema; así como, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes y en el ítem 28 forma erróneamente las parejas de jugadores para cada partido.

En cuanto a los ítems más complejos, esta estudiante ha intentado realizar unos de ellos, algunos con éxito, otros sin lograr llevarlos a cabo correctamente.

De este modo, ha intentado responder a la pregunta planteada en el ítem 7 (Robos), confirmando su acuerdo con la afirmación del presentador.



Su argumento se basa en que en un año el número de robos ha aumentado en 10, considerando éste último como un aumento enorme respecto al total de robos.

En el ítem 8 (Carpintero), F19 indica tan solo una opción, el diseño D (rectángulo), como válida para la construcción del parterre, las demás opciones las deja sin abordar.

Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հետևյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	Այո / Ոչ

En el ítem 9 (Chatear 1), E19 al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney) primero escribe la respuesta correcta, pero luego la borra.

Siendo 9 horas antes de la hora en Sidney, la estudiante, en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea las 4:00 de la tarde.

F19 ha sido capaz de elegir una opción correcta en el ítem 15 (Exportaciones 2) a partir de la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados).

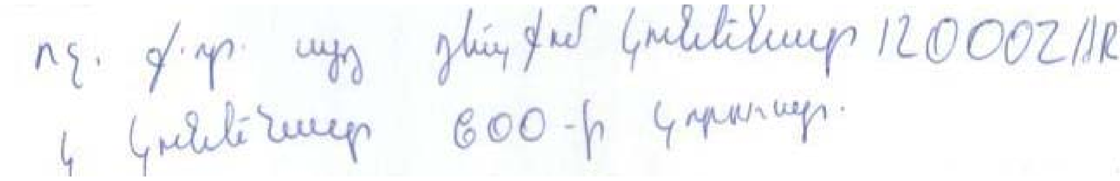
En el ítem 18 (Feria) elige la opción errónea que es imposible que Daniela gane. Parece no ser capaz de razonar que esta opción sería válida en el caso cuando en la bolsa no hubiese ninguna canica negra o en la ruleta ningún número par, sin embargo, no fue el caso.

Esta estudiante realiza correctamente el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén ha de encontrar el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

En el ítem 22 (Selección) no sabe formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta (da respuesta 12 en vez de 6 combinaciones posibles).

Ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 34 (Dados 1), calculando la suma de los números de las caras que no se ven. Sin embargo, en el ítem 35 (Dados 2), no es capaz de interpretar la representación bidimensional de las figuras tridimensionales (dados).

Entre los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión, F19 ha intentado resolver el ítem 13 (El tipo de cambio 3).

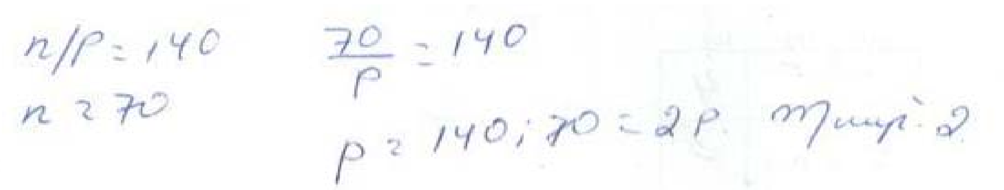


Ha razonado acerca de si le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD para cambiar los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD o no, sin embargo, da una razón válida si hubiese cambiado 3.900 SGD a ZAR.

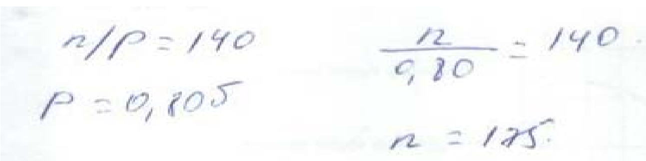
20. Informe de análisis de F20

La estudiante F20 ha realizado correctamente 10 ítems de la prueba. **Entre ellos ha sido capaz de abordar, principalmente, los ítems sencillos y dos ítems más complejos.**

Entre los ítems que requieren activar las CM del grupo de reproducción, esta estudiante ha intentado realizar el ítem 1 (Caminar 1). Según los cálculos que ha mostrado, no ha sabido despejar correctamente la incógnita P, por lo que ha obtenido un resultado erróneo.



F20 tampoco ha sido capaz de despejar el ítem 2 (Caminar 2) la incógnita n de la misma fórmula.



F20, en el ítem 3 (Cubos), ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar los números de las caras de abajo. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta lleva a cabo su solución correctamente. Esta estudiante ha abordado los ítem 11 y 12 (El tipo de cambio), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico.

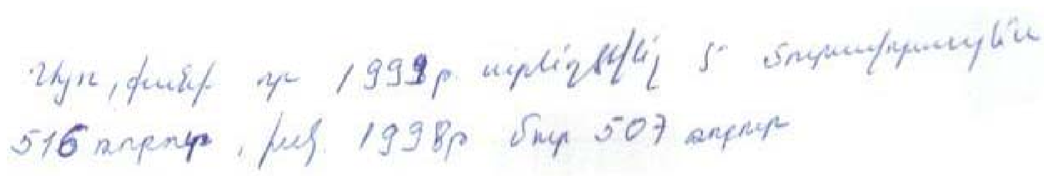
En el ítem 16 (Caramelos de colores), no ha sabido calcular correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo (6 de 30) (elige la opción errónea 25%). Asimismo, no ha sabido realizar correctamente el ítem 17 (Examen de ciencias), donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), ha de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes. F20 obtiene 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$), que refleja la aplicación mecánica y la carencia en el entendimiento del concepto de media aritmética.

F20 sabe descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24), así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad. Sin embargo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sido capaz de calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes.

En el ítem 33 mediante un procedimiento rutinario de división, calcula correctamente la altura de cada uno de los 14 peldaños a partir de la altura total 252 cm de una escalera.

Entre los ítems más complejos, esta estudiante ha intentado resolver algunos, aunque no todos con éxito.

Así, en el ítem 7 (Robos), confirma estar de acuerdo con la afirmación del presentador acerca del aumento enorme de robos.



Argumenta su respuesta basándose en el hecho de que en el 1999 se produjeron aproximadamente 516 robos, mientras en el 1998 había alrededor de 507 robos. De este modo, considera el aumento en 9 robos como enorme en relación con el número total de robos.

En el ítem 8 (Carpintero) no ha sabido estimar correctamente los diseños dados para la construcción del parterre. Lo hace correctamente tan solo para el diseño D (rectángulo). Asimismo, en el ítem 9 (Chatear 1), al calcular la hora en Berlín correspondiente a las

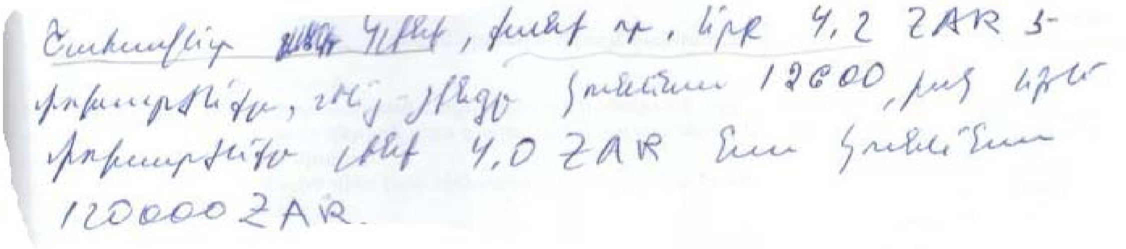
7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney) en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea las 4:00 de la tarde.

F20, en el ítem 15 (Exportaciones 2), ha sabido identificar los datos de los dos diagramas y aplicar correctamente el porcentaje.

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar correctamente que como hay solo un número impar, es muy probable que la ruleta pare en un número par, sin embargo, al haber solo 6 canicas negras, es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad); asimismo, en el ítem 22 (Selección) no sabe formar correctamente las diferentes combinaciones con dos ingredientes de los cuatro posibles de manera correcta (da respuesta 7 en vez de 6 combinaciones posibles).

Ha sido capaz de realizar correctamente el ítem 34 (Dados 1), calculando la suma de los números de las caras que no se ven. Sin embargo, en el ítem 35 (Dados 2), no es capaz de interpretar la representación bidimensional de las figuras tridimensionales (dados).

Esta estudiante intenta contestar la pregunta del ítem 13 (El tipo de cambio 3), sin embargo, parece no entender el problema, ya que explica que sí le favoreció a Mei-Ling el cambio de 4,2 ZAR a 4,0 ZAR por 1 SGD, pero los cálculos que muestra se refieren, no cuando cambia los 3.900 ZAR que le quedaban a SGD, sino cuando ha tenido 3.000 SGD para cambiar a ZAR.



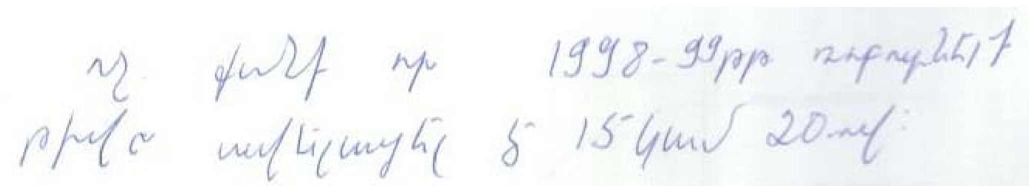
Aun así, tal como explica le favorecería si hubiese quedado 4,2 ZAR por 1 SGD y no 4,0 ZAR.

21. Informe de análisis de F21

El estudiante F21 ha realizado correctamente 10 ítems de la prueba. **Ha sabido ejecutar los ítems sencillos y cuatro ítems más complejos.**

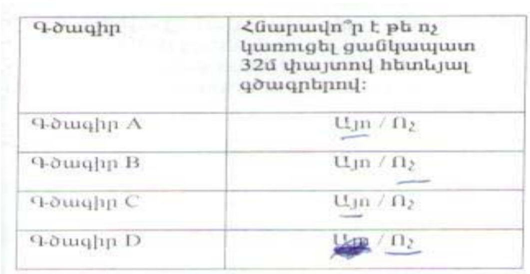
Este estudiante ha sabido descodificar e interpretar representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos) y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta, lleva a cabo su solución correctamente. En los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), F21 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; y ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24).

Entre los ítems más complejos, ha intentado resolver los siguientes. En el ítem 7 (Robos) ha sido capaz de dar una razón por la que la afirmación del presentador respecto al aumento enorme de robos representado mediante un gráfico no es razonable:



"No, porque de 1998 a 1999 el número de robos tan solo ha aumentado en 15 o 20". De este modo se argumento se basa en que el número de robos producido no es un aumento enorme, aunque no explicita que respecto al total.

En el ítem 8 (Carpintero), este estudiante cambia su respuesta relativa al diseño D, en la que al principio elige la opción que SÍ es válido para la construcción del parterre, sin embargo, luego tacha y elige la opción NO.



Գծագիր	Հնարավո՞ր է թե ոչ կառուցել ցանկապատ 32մ փայտով հետևյալ գծագրերով:
Գծագիր A	Այո / Ոչ
Գծագիր B	Այո / Ոչ
Գծագիր C	Այո / Ոչ
Գծագիր D	~~Այո~~ / Ոչ

Las demás opciones las ha razonado correctamente. Es sorprendente que el diseño D, más familiar (rectángulo), le haya hecho dudar, mientras respecto a otros diseños parece tener la idea más clara.

F21 ha sabido calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney); en el ítem 18 (Feria) elige correctamente la poca probabilidad de que Daniela gane; y en el ítem 19, ha sabido, a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén, encontrar correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería.

En el ítem 35 (Dados 2), no ha sido capaz de interpretar y reconocer la posición de las caras de las figuras tridimensionales (cubos) en una representación bidimensional para todas las formas dadas.

22. Informe de análisis de F22

Esta estudiante ha sido capaz de abordar 10 ítems de la prueba. **Ha ejecutado con éxito unos ítems sencillos y unos más complejos.**

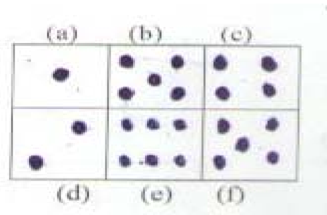
Así, ha intentado resolver el ítem 1 (Caminar 1), ha sido capaz de identificar los datos con las variables de la fórmula dada, sin embargo, ha despejado erróneamente la incógnita P:

$$p = \frac{140}{n} = \frac{140}{70} = 2 \qquad \frac{n}{P} = 140 \quad P = 0,50 \quad n-?$$

Es posible que haya tenido dificultad en despejar la incógnita cuando es el divisor de cociente, ya que ha sabido despejar correctamente la incógnita n de la misma fórmula en el ítem 2.

$$\frac{n}{P} = 140 \Rightarrow n = 140\,p$$
$$n = 140 \cdot 0,8 = 112.$$

Esta estudiante ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos).



De este modo, realiza la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas.

Asimismo, ha sido capaz de realizar el cálculo sencillo de resta en el ítem 4 (Crecer 1). F22 ha abordado el ítem 11 (El tipo de cambio1), calculando correctamente cuántos ZAR corresponden a 3000 SGD a partir del tipo de cambio dado (1SGD=4,2 ZAR).

No obstante, en el ítem 12, a la hora de calcular cuántos SGD corresponde a 3.900 ZAR (1SGD=4,0 ZAR) parece que se equivoca al copiar 975 y escribe 575 SGD. En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), elige la opción errónea (25%).

Ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) ha sabido formar correctamente parejas de jugadores para cada partido; y el último ítem 39 (Esquema de escalera) de este grupo, ha sido capaz de deducir cuántos cuadrados necesitaría Roberto para construir el Nivel 4 (da respuesta 10 cuadrados).

En lo que se refiere a los ítems más complejos esta estudiante ha intentado realizar los siguientes.

En el ítem 8 (Carpintero), F22 menciona correctamente la posibilidad de construir el parterre con el diseño D y los demás tres diseños, los estima erróneamente.

Esta estudiante ha sabido calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney), en el ítem 15 (Exportación 2), ha sido capaz de interpretar la información presentada en dos diagramas y de aplicar correctamente el porcentaje directo a la cantidad dada.

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar correctamente que como hay solo un número impar, es muy probable que la ruleta pare en un número par, sin embargo, al haber solo 6 canicas negras, es poco probable que Daniela gane (responde: es muy probable). Asimismo, ha llevado a cabo erróneamente el ítem 35 (Dados 2), no ha sabido identificar correctamente formas de las figuras tridimensionales en la representación bidimensional.

Entre los ítems que requieren movilizar las CM del grupo de reflexión, F22 ha realizado el ítem 21 (Terremoto). De este modo a la pregunta cuál de las cuatro opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*, elige la opción válida:


C Հավանականությունը, որ Զեդ քաղաքում, երկրաշարժ տեղի կունենա մի անգամ մոտակա 20 տարիների ընթացքում ավելի մեծ է, քան որ այն տեղի չի ունենա:

La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

23. Informe de análisis de F23

Este estudiante ha sido capaz de abordar 9 ítems de la prueba. **Ha realizado los ítems más sencillos y otros dos relativamente complejos.**

F23 ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos) y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta lleva a cabo su solución correctamente. Este estudiante, en el ítem 11 (El tipo de cambio 1), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, realizando procedimientos estándares; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; el ítem 16 (Caramelos de colores), calculando correctamente la probabilidad de sacar un caramelo rojo; así como, ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24) y ha realizado el ítem 39 (Esquema de la escalera), indicando correctamente el número de cuadrados necesarios para construir el Nivel 4.

En el ítem 9 (Chatear 1), F23 se equivoca al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney). Siendo 9 horas antes de la hora en

Sidney, la estudiante, en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea. 4 de la tarde.

F23 ha sido capaz de elegir una opción correcta en el ítem 15 (Exportaciones 2) a partir de la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados).

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: es imposible); en el ítem 21 (Terremoto), no ha sido capaz de valorar y criticar las opciones dadas que describen la probabilidad la ocurrencia de un terremoto, y elegir la opción correcta; tampoco ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones en el ítem 22 (Selección) (da respuesta 12 en vez de 6 combinaciones posibles).

Por otro lado, realiza correctamente el ítem 19 (Estantería) mediante procedimientos familiares, empleando estrategias no triviales para llegar a contestar a la pregunta planteada.

24. Informe de análisis de F24

El estudiante F24 ha realizado correctamente 8 ítems de la prueba. **Ha sabido ejecutar los ítems sencillos y dos ítems más complejos.**

Este estudiante ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos) y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en los ítems 11 y 12 (El tipo de cambio), F24 ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24); así como, en el ítem 25 (Monopatín 1), ha sabido emplear el concepto de valor máximo y mínimo de una cantidad.

Lleva un procedimiento erróneo para proceder en el ítem 17, obtiene como resultado 70 puntos al hallar la media de las notas tras los cinco exámenes (cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos)).

A la hora de abordar el ítem 7 (Robos), no ha sabido razonar correctamente sobre la afirmación del presentador, se fija en que hay aumento, pero no es capaz de ver que no es un aumento enorme respecto al número total de robos. Asimismo, en el ítem 9 (Chatear 1), F24 al calcular la hora en Berlín correspondiente a las 7:00 de la tarde en Sidney a partir de la diferencia horaria dada (cuando es 1:00 de la noche en Berlín, son las 10 de la mañana en Sidney) en vez de restarle 9 horas y obtener 10:00 de la mañana en Berlín, suma y llega a la respuesta errónea las 4:00 de la tarde.

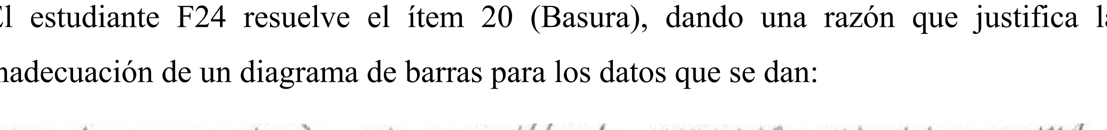
F24 ha sido capaz de elegir una opción correcta en el ítem 15 (Exportaciones 2) a partir de la aplicación directa del porcentaje a una cantidad (los dos valores, el porcentaje y la cantidad había que extraer de los diagramas dados).

En el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: tiene aproximadamente 50% de probabilidad); en el ítem 19, en el cual a partir de las diferentes cantidades de piezas que dispone carpintero en su almacén, no ha sido capaz de encontrar correctamente el número de estanterías que puede construir el carpintero, sabiendo la cantidad de piezas necesarias para una estantería; tampoco ha sido capaz de formar correctamente las diferentes combinaciones en el ítem 22 (da respuesta 2 en vez de 6 combinaciones posibles).

Este estudiante, en el ítem 23 (Puntuaciones en un examen), intenta dar un argumento matemático que podrían utilizar los alumnos del Grupo A, mencionando que había menos estudiantes:

Parece que se refiere al menor número de alumnos que han suspendido, sin embargo, no termina con claridad su razonamiento.

El estudiante F24 resuelve el ítem 20 (Basura), dando una razón que justifica la inadecuación de un diagrama de barras para los datos que se dan:



Su argumento: *"Es imposible, porque no hay una información precisa acerca del tiempo de descomposición"*, se basa en la gran variabilidad de los datos de algunas categorías (la longitud de la barra para los vasos de plástico es indeterminada o no se puede hacer una barra para 1-3 años o 20-25 años).

25. Informe de análisis de F25

La estudiante F25 ha sido capaz de abordar 8 ítems de la prueba. **Ha realizado los ítems más sencillos y otros tres más complejos.**

Esta estudiante ha sabido descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos (dados) mediante una imagen, en el ítem 3 (Cubos) y realizar la operación sencilla de resta o suma a partir de los datos dados para encontrar las variables desconocidas. Asimismo, en el ítem 4 (Crecer 1), utilizando el procedimiento rutinario de resta lleva a cabo su solución correctamente; en el ítem 11 (El tipo de cambio 1), ha sabido encontrar correctamente la cantidad de dinero en una moneda a partir del dinero en otra moneda y del tipo de cambio dados, realizando procedimientos estándares; realiza correctamente el ítem 14 (Exportaciones 1), identificando un valor en el gráfico; así como ha sabido descodificar e identificar un valor dado mediante una representación tabular (ítem 24) y ha realizado el ítem 39 (Esquema de la escalera), indicando correctamente el número de cuadrados necesarios para construir el Nivel 4.

En el ítem 16 (Caramelos de colores), en el cual, a partir de una representación gráfica de los caramelos de diferente color ha de calcular la probabilidad de coger un caramelo rojo (6 de 30), elige la opción errónea (25%). Asimismo, en el ítem 26 (Monopatín 2), no ha sabido calcular correctamente el número de monopatines que se podría montar a partir del número dado de sus diferentes partes y en el ítem 28 (Campeonato de ping-pong) no ha sido capaz de formar correctamente parejas de jugadores para cada partido.

Entre los ítems más complejos, F25 en el ítem 9 (Chatear 1), ha sido capaz de relacionar 7:00 de la tarde en Sydney con la hora de Berlín, partiendo de la diferencia horaria de dos países; así como en el ítem 15, ha sabido interpretar la información presentada en dos diagramas y aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada.

En el ítem 8 (Carpintero), F25 menciona correctamente la posibilidad de construir el parterre con el diseño D y los demás tres diseños los estima erróneamente; así como, en el ítem 18 (Feria) no ha sido capaz de razonar que es poco probable que Daniela gane (responde: es muy probable).

En el ítem 21 (Terremoto) **que requiere activar las CM del grupo de reflexión**, F25 ha sabido razonar sobre la opción que refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo de que e*n los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres.*


C Հավանականությունը, որ Զեդ քաղաքում, երկրաշարժ տեղի կունենա մի անգամ մոտակա 20 տարիների ընթացքում ավելի մեծ է, քան որ այն տեղի չի ունենա:

IV. 2.1.4. Síntesis de los resultados sobre CM (Caso 2)

Como podemos observar, se destaca **la estudiante F1 por poseer las competencias matemáticas avanzadas** y los **tres siguientes estudiantes (F2, F3, F4), por las competencias bien desarrolladas**. Estos estudiantes se han sentido cómodos a la hora de resolver problemas realistas complejos, aplicando sus conocimientos, pensamiento y razonamientos matemáticos avanzados, sentido común, intuición, fluidez en técnicas y procedimientos. **Otros cuatro estudiantes (F5-F8), de nivel medio de dominio**, han sabido realizar procedimientos descritos con claridad, interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas, elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos. **Los estudiantes F9-F16 presentan un nivel de dominio inferior**, mostrando carencias importantes de carácter conceptual, procedimental, de razonamiento y de uso del lenguaje simbólico, y por último, **los diez restantes F16-F25 se caracterizan por el nivel bajo de dominio en sus actuaciones .**

En lo que se refiere al conocimiento matemático puesto en marcha, cabe mencionar que **las dificultades y carencias que han tenido los estudiantes a la hora de resolver los problemas, en principio, se deben o bien a lagunas en los conocimientos matemáticos básicos o bien a la incapacidad de aplicarlos en situaciones de la vida real.** Como consecuencia, **los procedimientos y operaciones respectivas se han llevado a cabo erróneamente o no han llegado a realizarse**. En lo que se refiere a los ítems del contenido matemático *Incertidumbre*, los estudiantes **no han tenido la oportunidad de obtener conocimientos formales al respecto**, debido a la ausencia de este bloque en la Programación. No obstante, han ejecutado algunos de estos ítems con éxito, más bien, poniendo en marcha su lógica y sentido común.

Del mismo modo, **la mayoría de los estudiantes ha sabido hacer inferencias directas y explicar asuntos matemáticos sencillos, sin llegar a formular supuestos o explicar asuntos matemáticos complejos que implican relaciones**. **Gran parte de los estudiantes ha sabido resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos rutinarios o estánda**r. Hay una clara preferencia mostrada por los estudiantes a la hora de abordar los ítems de la prueba: **han buscado los ítems en los cuales haya sido explicita la operación o procedimiento matemático requerido, evitando abordar los ítems donde había que interpretar un diagrama y explicar o argumentar su respuesta, lo que refleja la seguridad y familiaridad en unos y inseguridad en otros tipos de exigencias del enunciado**. Asimismo, **los estudiantes han tenido dificultad en entender el enunciado de los ítems**, lo expresaban sus caras y los espacios que han dejado en blanco.

No obstante, durante las observaciones que realizamos en sus clases de matemáticas, vemos a estudiantes más implicados, la mayoría sabe abordar las tareas propuestas y encomendadas para casa; se sienten más seguros a la hora de manejar los símbolos, operaciones y procedimientos matemáticos, así como que saben razonar acerca de asuntos matemáticos, justifican su respuesta haciendo referencia a un teorema, axioma o propiedad. **Estos estudiantes han tenido más éxito a la hora de resolver problemas puramente matemáticos incluso complejos, que al abordar los ítems de la prueba más sencillos**.

En el Caso 2, **igualmente se ha observado la correlación entre el rendimiento curricular y las competencias matemáticas de los estudiantes**. Por ejemplo, la estudiante F1 con la puntuación más alta es la mejor estudiante de su clase con la nota más alta (SB) y el estudiante F24 con una de las menores puntuaciones ha tenido la nota media más baja (SF) durante sus estudios en Secundaria.

IV.2.2. Análisis global de las actuaciones de los estudiantes

En este apartado vamos a presentar el análisis cualitativo de los resultados de los estudiantes de 4º de ESO (Caso 1) y los de IX grado (Caso 2) en la prueba. Mencionaremos las soluciones de los ítems más destacados, atendiendo las tres variables de éstos: procesos cognitivos, contenido, y situaciones y contextos. Subrayaremos las competencias matemáticas puestas en marcha y las que no se han podido activar, la familiaridad con los contenidos y con las situaciones y los contextos en los cuales han sido planteados los ítems y finalmente, destacaremos hasta qué punto los estudiantes han sido capaces de abordar las cinco fases de la matematización.

IV.2.1. Análisis global de las actuaciones de los estudiantes a la luz de las tres variables consideradas (Caso 1)

En este apartado exponemos el análisis de los resultados de los estudiantes de 4º de ESO (Caso 1).

La variable *procesos cognitivos*

En primer lugar nos ocuparemos en analizar los procesos cognitivos activados por los estudiantes al ejecutar los ítems de complejidad diferente propuestos, y seguiremos el orden de crecimiento de ésa, **empezando por los ítems del *grupo de reproducción*.**

Los 16 ítems de este grupo han sido presentados mayormente en formatos de respuesta corta (1, 11, 12, 17, 25, 33, 37, 39) o cerrada (3, 4, 14, 24, 28), uno de ellos de respuesta abierta (6) y otros dos de elección múltiple (16, 26).

Los ítems de respuesta corta, cerrada o elección múltiple nos informan simplemente sobre si el estudiante ha sido capaz o no de llevar acabo con éxito la tarea. En el caso de los ítems del grupo de reproducción podemos constatar que la mayoría de los estudiantes ha sido capaz de ejecutar operaciones de un solo paso o identificar un valor en el gráfico. Por ejemplo, trece de los quince estudiantes contestaron la siguiente pregunta:

Pregunta 11: EL TIPO DE CAMBIO
Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de: 1 SGD = 4,2 ZAR
Mei-Ling cambió 3.000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de

cambio. ¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

Las preguntas de este tipo proporcionan toda la información pertinente con claridad, requieren reconocer equivalencias, aplicar procedimientos estándar y realizar cálculos sencillos, es decir se activan las competencias del grupo de reproducción y éstas han sido demostradas por los estudiantes. Sin embargo, más de la mitad de los estudiantes no ha sabido ejecutar correctamente la tarea que sigue a continuación.

Para los hombres, la fórmula n/P= 140 da una relación aproximada entre *n* y *P* donde:

n = número de pasos por minuto, y

P = longitud del paso en metros.

Pregunta 1: CAMINAR

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

Dado que en este ítem se les pedía a los estudiantes mostrar sus cálculos, se ha observado un error común (P=140/n) en despejar la incógnita de la fórmula dada. Aparte de la carencia en la técnica de cálculo, este hecho subraya el acercamiento mecánico a la resolución, sin entrar en detalles y sin una interpretación adecuada de los resultados, ya que en caso contrario, al obtener una longitud del paso de dos metros, según sus cálculos, los estudiantes podrían cuestionar el resultado y volver a repensar la solución. Además, este ítem ha resultado difícil para entender su enunciado: uno de los estudiantes lo dejo evidente poniendo en el espacio para la solución “no lo entiendo”. Otro ítem de este grupo que ha tenido menos éxito y ha sido resuelto por siete estudiantes, es el 17.

Pregunta 17: EXAMEN DE CIENCIAS

En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 puntos. ¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias tras los cinco exámenes?

El análisis de las soluciones de los estudiantes a este ítem, planteado en una situación bastante familiar para ellos, ha destacado un error común que ha consistido en sumar 60 y 80 dividiendo el resultado entre dos. Parece que los estudiantes intuyen la solución, sin embargo, no son capaces de deducir razonadamente la puntuación total de los primeros cuatro exámenes.

Los demás ítems de este grupo, como habíamos mencionado, han sido abordados con éxito por la mayoría de los estudiantes. A continuación pasamos al análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems del grupo de conexión.

Los 17 ítems del *grupo de conexión* han sido representados mayormente en el formato de respuesta abierta (2, 7, 23, 29, 30, 32, 34, 36), cuatro ítems de respuesta corta (9, 19, 22, 27), otros cuatro de elección (8, 15, 18, 35) y un ítem (5) de respuesta cerrada.

Nos detendremos más detalladamente en algunos ítems de este grupo. La mayoría de los estudiantes ha sido capaz de afrontar los ítems 9 y 19 de respuesta corta de este grupo. Por ejemplo, el ítem 19 ha sido contestado correctamente por once estudiantes.

Pregunta 19: ESTANTERIAS

Para construir una estantería un carpintero necesita lo siguiente:

4 tablas largas de madera,

6 tablas cortas de madera,

12 ganchos pequeños,

2 ganchos grandes,

14 tornillos.

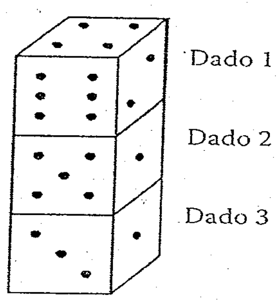
El carpintero tiene en el almacén 26 tablas largas de madera, 33 tablas cortas de madera, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos. ¿Cuántas estanterías completas puede construir este carpintero?

Esta tarea, que requiere la resolución mediante el uso adecuado de datos numéricos, implica la búsqueda de una estrategia no trivial. Los estudiantes han tenido que comprobar cuántas estanterías podría construir el carpintero con cada tipo de material y seleccionar entre ellos el menor dato. Los estudiantes han sabido encontrar la estrategia adecuada para llevar la tarea a cabo con éxito.

Aproximadamente la mitad de los estudiantes ha sido capaz de relacionar las propiedades de diferentes objetos matemáticos. Es el caso de los ítems relacionados con las diferentes representaciones de unos dados (ítems 34 y 35).

Pregunta 34: DADOS

A la derecha se pueden ver tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba.



¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y de abajo de los dados 2 y 3)?

En el ítem 34, los estudiantes podrían llegar a la solución siguiendo dos estrategias diferentes: calculando los puntos de las caras que no se pueden ver, deduciendo de los puntos de las que se ven y sumándolos o bien razonando que si la suma de las caras opuestas es siete y hay tres cubos, en total dan 21 puntos y restándole los cuatro puntos de la cara de arriba obtendrían el resultado. Seis estudiantes han realizado esta tarea empleando la primera estrategia, más estándar, y un estudiante aplico la segunda.

Seis estudiantes, en el ítem 5 de respuesta abierta, han sabido explicar la cuestión planteada.

Pregunta 5: CRECER

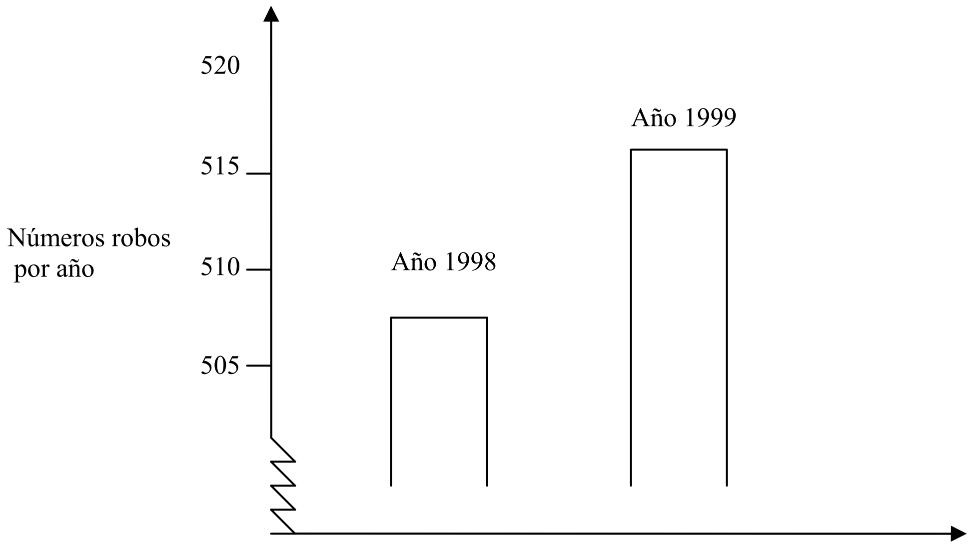
Explica cómo está reflejado en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante.

Un estudiante ha utilizado lenguaje matemático explicando que *“a partir de 12 años la pendiente de la curva de las chicas se reduce”*; los demás estudiantes lo explicaron utilizando el lenguaje cotidiano como *“la curva de las chicas se hace más plana y la de los chicos, más grande”*. Estos estudiantes han sido capaces de interpretar el gráfico, de pensar y razonar acerca del cambio de la gradiente de las chicas, de expresarse por escrito sobre cuestiones que implican relaciones y argumentar.

Otros seis estudiantes han sido capaces de dar una explicación que se les pedía en el ítem 7.

Pregunta 7: ROBOS

Un presentador de TV mostró este gráfico y dijo: "El gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos comparando 1998 con 1999".



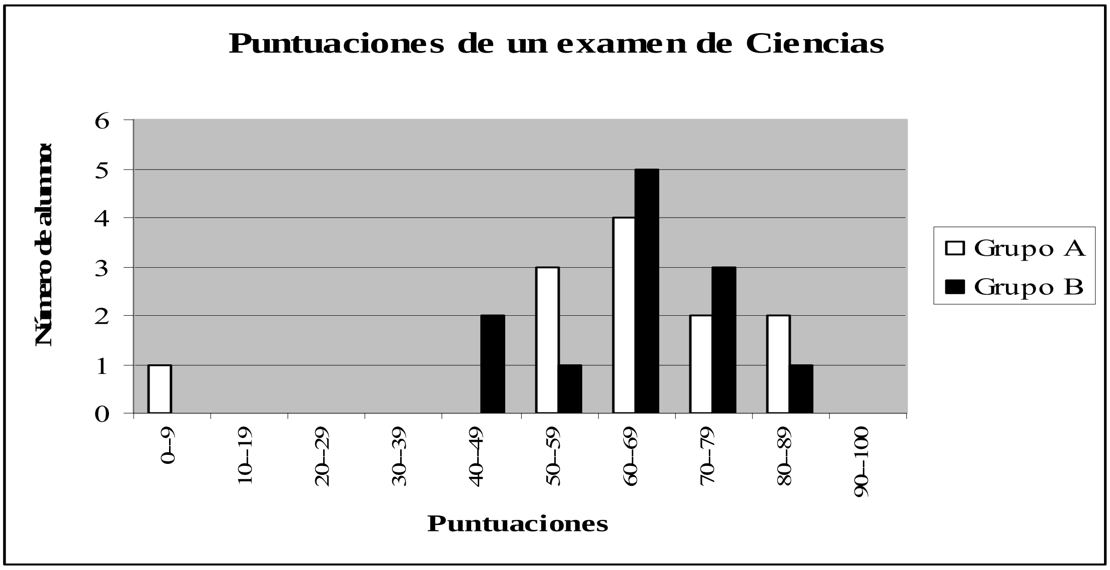
¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta.

Los estudiantes han sido capaces de activar las competencias como pensar y razonar sobre la cuestión planteada, comprender y saber expresarse por escrito sobre asuntos matemáticos que implican relaciones y argumentar su respuesta. Los estudiantes han fundamentado sus respuestas sobre todo ofreciendo las siguientes explicaciones: *"No, porque el aumento no ha sido significativo, pero han cogido una medida muy pequeña para hacer la gráfica y la diferencia parece mucha", "No, solo aumenta en unos 8 robos, es algo insignificante comparando con el número total de robos",* y los otros cinco estudiantes lo han explicado dando la siguiente razón: *"No es razonable, porque tan solo hay una diferencia de 6-10 robos entre un año y otro"*. Los que han considerado que sí es razonable, lo han fundamentado basándose en el hecho de que *"la columna de 1999 es mucho más elevada que la de 1998"* o en que 8-10 robos en un año es un gran aumento.

Tres estudiantes han llevado a cabo el ítem 23 de respuesta abierta que requería, a partir de la interpretación correcta del diagrama, dar un argumento matemático.

Pregunta 23: PUNTUACIONES EN UN EXAMEN

El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B. La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.



Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A. Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo A.

La mayoría de los estudiantes no ha sido capaz de proporcionar un argumento válido. Uno de los tres estudiantes que han abordado el problema ha dado dos argumentos: *"Porque han aprobado más alumnos [Grupo A] y han sacado más alumnos la mejor nota"*, otros dos estudiantes han propuesto el argumento con el cual el Grupo A podría convencer al profesor de que más alumnos de Grupo B han suspendido el examen. Solamente tres estudiantes han sido capaces de activar competencias de comprender y saber expresarse por escrito sobre cuestiones matemáticas que implican explicación de relaciones lógicas, descodificar e interpretar formas de representación de los valores dados, pensar y razonar sobre el posible argumento y argumentar.

El ítem 29 no ha sido resuelto por la mayor parte de los estudiantes. Solo dos estudiantes han sido capaces de interpretar el diagrama correspondiente, extraer la información necesaria, razonar sobre cálculos pertinentes y comunicarlos correctamente. La mayoría ni se ha acercado a la resolución de este problema. Asimismo, el ítem 30 que es la continuación del ítem anterior, ha sido contestado por los mismos dos estudiantes.

Pregunta 30: LOS NIVELES DE CO_2 Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea". ¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Estos estudiantes han sabido razonar de manera que han llegado a justificar que *"no, porque Alemania puede haber reducido niveles de sus emisiones, pero si el resto de los países no lo han hecho, así la media puede ser 4%"* y *"no, porque los emisiones de la total de la UE representa un 4% de todos los países-miembros y las de Alemania se incluyen en las de la UE"* respectivamente.

En el ítem 36, de respuesta abierta, los estudiantes tenían que entender la información enunciada, pensar y razonar sobre posibles opciones, dar argumentos y justificarlos.

Pregunta 36: RESPALDO AL PRESIDENTE En Zedlandia, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo al Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en toda la nación. Los resultados de los sondeos de los cuatro periódicos se muestran a continuación: Periódico 1: 36,5% (sondeo realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto). Periódico 2: 41,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto). Periódico 3: 39,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto). Periódico 4: 44,5% (sondeo realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar). Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos

sería la mejor predicción del nivel de apoyo al presidente? Da dos razones que justifiquen tu respuesta.

La mayor parte de los estudiantes no ha sido capaz de abordar este ítem, tan solo dos estudiantes la llevaron a cabo correctamente. Uno de ellos ha dado las siguientes dos razones: *"periódico 3, porque se sabe seguro que tienen derecho a voto y se sondea con más votantes, por lo que el resultado es más significante"* y el otro lo razona de la siguiente manera: *"el tercero, porque al ser elegidos al azar puede haber distintas opiniones ya que si llaman pueden llamar solo los que lo apoyan y es muy cercano al día de las elecciones"*.

El ítem 32, con el cual concluimos el análisis de las resoluciones de los ítems del grupo de conexión, no ha sido abordado por ninguno de los estudiantes.

La estación espacial Mir permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio alrededor de 86.500 vueltas a la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la Mir fue de 680 días.

Pregunta 32: VUELO ESPACIAL

La Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 kilómetros. El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12.700 km y su circunferencia es de alrededor de 40.000 km ($\pi \times 12.700$).

Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la Mir durante sus 86.500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

En este ítem se requería de los estudiantes elegir la información pertinente, relacionar los diámetros de las dos circunferencias que se obtienen, razonar que una vuelta equivale a la longitud de la circunferencia y comunicar correctamente los cálculos y el resultado. Solamente dos estudiantes han intentado resolver el problema, mostrando sus cálculos, según los cuales uno de ellos ha multiplicado la circunferencia de la Tierra por el número de las vueltas (40.000×86.500) y al producto le ha sumado la distancia de Mir a la Tierra (3.460.000+400). Perece intuir la idea, sin embargo, no ha sido capaz de modelar correctamente el campo. El otro estudiante simplemente ejecuta el procedimiento de la multiplicación arriba mencionado.

Como se puede observar, solo unos pocos estudiantes han sido capaces de abordar la mayor parte de los ítems del grupo de conexión.

Por último, los seis ítems del *grupo de reflexión* han sido presentados en el formato de respuesta abierta (13, 20, 31, 38), respuesta corta (10) y de elección (21).

El ítem 20 de respuesta abierta de este grupo ha sido resuelto por el mayor número de los estudiantes (10 de los 15).

Los estudiantes han sabido dar razones satisfactorias para justificar la no adecuación de un diagrama de barras. Las razones se desarrollan alrededor de las siguientes ideas, que son las respuestas de algunos de los estudiantes: *"Porque los tiempos de descomposición son muy diferentes, por ejemplo, las cajas de cartón tardan 0,5 años y los vasos de plástico más de 100", "Porque la información que se quiere dar no es suficientemente cierta", "Porque no son todos los datos precisos, hay aproximaciones y así no se puede representar un diagrama de barras", "Porque estamos hablando de muchas cantidades: días (que no lo específica), meses, años, siglos y además, no especifica para algunos de los tipos de la basura"*.

Nueve estudiantes han sido capaces de dar una explicación adecuada a la pregunta planteada en el ítem 13, cuyo enunciado es la continuación lógica de los ítems 11 y 12.

Pregunta 13: EL TIPO DE CAMBIO
Al cabo de estos 3 meses el tipo de cambio había cambiado de 4,2 a 4,0 ZAR por 1 SGD. ¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio fuese de 4,0 ZAR en lugar de 4,2 ZAR cuando cambió los rands sudafricanos que le quedaban por dólares de Singapur? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Las explicaciones de los estudiantes siguen un razonamiento lógico para justificar su respuesta, como por ejemplo: *"Sí, porque el rands sudafricano bajó su valor respecto a los dólares de Singapur lo que hizo que se le devolviese más dinero", "Si, porque como bajó el precio de rands, gana 0,2 ZAR por cada dólar, por lo que le favorece", "Sí, le favoreció porque así recibe un dólar por menos cantidad de ZAR"*, etc. Algunos de los estudiantes muestran sus cálculos para llegar a la conclusión, otros parecen captar la idea y razonar directamente a partir del enunciado.

Pregunta 21: TERREMOTO
Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.
Un geólogo dijo: *En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres*.

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

A. $\frac{2}{3}$ x 20 =13,3 por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.

B. $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C. La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D. No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Cinco estudiantes han sido capaces de pensar y razonar sobre la probabilidad de la ocurrencia del terremoto, comprender y valorar las opciones dadas proponiendo argumentos para cada caso. Solamente cuatro estudiantes han abordado el ítem 10 de respuesta corta.

Pregunta 10: CHATEAR

Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo.

¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans? Escribe las respectivas horas locales en la tabla.

A diferencia del ítem 9 de esta misma serie, donde se les dan a los estudiantes las horas locales de Mark y Hans y han de calcular la hora del uno a partir de la hora del otro, y que han sabido realizar la mayoría de los estudiantes, este ítem ha resultado bastante difícil, ya no han sido capaces de razonar y calcular el intervalo correspondiente.

Dos estudiantes han sabido llevar a cabo el ítem 31 de respuesta abierta que sigue la serie de los ítems “Los niveles de CO_2”.

Pregunta 31: LOS NIVELES DE CO_2
Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO_2. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama.
Da dos posibles respuestas "correctas" a esta pregunta y explica cómo se puede obtener cada una de estas respuestas.

Para contestar esta pregunta los estudiantes han de saber interpretar el diagrama y reconocer que se trata de dos aproximaciones matemáticas al problema: el aumento absoluto más grande y aumento relativo más grande. Las respuestas de los dos estudiantes hacen referencia a estas dos aproximaciones. Uno de ellos lo ha explicado de este modo: *"Australia, porque es el que más ha aumentado el porcentaje y EE.UU. porque es el que en más cantidad ha incrementado su emisión"*, otro estudiante explica igualmente, sin embargo, no menciona los países: *"Puede ser el que más haya subido según el porcentaje o según la cantidad real de CO_2 emitido"*.

Y finalmente, solo un estudiante ha sido capaz de resolver el ítem 38 de respuesta abierta.

Resumiendo lo expuesto, **la mayor parte de los estudiantes es capaz de activar las competencias del grupo de reproducción**, es decir, **son buenos en la ejecución de procedimientos rutinarios, en la aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, en el manejo de fórmulas establecidas y realización de cálculos sencillos. Hay pocos estudiantes capaces de abordar preguntas donde tienen que activar las competencias del grupo de conexión**, es decir, saber reconocer las relaciones entre diferentes objetos matemáticos o sus propiedades, interpretar correctamente gráficos, diagramas, tablas, etc., aplicar algoritmos y fórmulas ya no de mera rutina y realizar cálculos más complejos de dos o más pasos. **Igualmente, hay un número reducido de estudiantes capaces de afrontar problemas de demanda cognitiva superior**, o sea, saber razonar sobre los procesos necesarios y ser capaz de elegir estrategias adecuadas para llevar a cabo el problema, seguir y desarrollar encadenamientos de argumentos matemáticos, justificar y generalizar.

La variable *contenido*

Otra variable considerada para los ítems ha sido el *contenido,* que atiende a cuatro sub-áreas. **Según las sub-áreas los 39 ítems presentan la siguiente distribución: 13 ítems**

de cantidad, 10 de cambio y relaciones, 5 de espacio y forma y 11 de incertidumbre.

En los problemas de sub-área *cantidad* se requerían de los estudiantes habilidades del razonamiento cuantitativo, es decir, conocer representaciones de números en diferentes maneras, la percepción de la magnitud de números, los cálculos matemáticamente elegantes, la estimación y el cálculo mental.

Los estudiantes no han tenido dificultades en hacer cálculos directos, como, por ejemplo, calcular el cambio de un tipo de moneda al convertirla en el otro, conociendo el tipo de cambio entre monedas (ítems 11 y 12), o entre los distintos precios de diferentes objetos elegir los que completan el precio máximo o mínimo calculándolo mediante procedimientos sencillos de suma (ítem 25). Sin embargo, decrece el número de estudiantes que han sabido ejecutar problemas de cálculos combinados (ítems 22, 26, 27) y todavía menos los que han abordado problemas que presentan situaciones de cálculo y comparación de porcentajes, estimación (ítems 29-32).

Para resolver problemas de sub-área *cambio y relaciones*, los estudiantes han de reconocer las relaciones dadas en variedad de representaciones diferentes, entre ellas la simbólica, la algebraica, la tabular y la geométrica, así como conocer las funciones matemáticas simples que describen algunos procesos de cambio.

Los estudiantes han sido capaces de identificar valores de una función dada por intervalos y representada mediante tabla (ítem 4, 6, 24), de relacionar una hora concreta a horarios de diferentes puntos geográficos (ítem 9), sin embargo, no han sabido ejecutar correctamente la tarea de relacionar los diferentes intervalos de horarios (ítem 10). La mayoría de los estudiantes no ha sido capaz de interpretar y explicar diagramas, gráficos o relaciones funcionales (ítems 1, 2, 5), o de realizar la evaluación numérica de formulas dadas (ítems 37, 38).

Los problemas de e*spacio y forma* requerían de los estudiantes entender las relaciones entre formas e imágenes o representaciones visuales, distinguir entre perímetro y superficie de figuras geométricas y saber calcularlos; también entender las representaciones en dos dimensiones de los objetos tridimensionales.

Los estudiantes han mostrado la capacidad de percibir objetos tridimensionales (cubos en este caso) en las representaciones en dos dimensiones (ítems 2, 34 y 35), sin embargo, no han sabido abordar problemas donde tenían que mostrar la intuición en reconocer los elementos comunes de diferentes figuras, encontrar analogías y diferencias y mediante el razonamiento lógico llevar acabo la resolución (ítem 8).

Por último, las actividades y los conceptos matemáticos importantes de la sub-área *incertidumbre* han sido la recolección de datos, el análisis y la presentación /visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción.

Los estudiantes han sido capaces de razonar sobre por qué no es adecuado representar mediante un diagrama de barras una variedad de datos dados (ítem 7), de formar posibles emparejamientos de los cuatro jugadores (ítem 28), interpretar información procedente de una grafica (ítem 14). La mayoría de los estudiantes ha tenido dificultad en valorar juicios a partir del uso de la noción de probabilidad y argumentar su elección (ítems 21, 23 y 36).

El análisis de los resultados de los estudiantes ha mostrado la familiaridad con las cuatro sub-áreas en el siguiente orden: *cantidad, incertidumbre, cambio y relaciones, espacio y forma*.

La variable *situaciones y contextos*

Los ítems de la prueba han sido planteados en las siguientes cuatro situaciones: *personal* (12 ítems), *educativa/laboral* (9 ítems), *pública* (9 ítems) y *científica* (9 ítems).

Siguiendo exactamente el orden arriba mencionado, de la cercanía de estas situaciones al estudiante, estos han abordado con mayor éxito las tareas presentadas en situaciones *personales*, con menor éxito les siguen los ítems planteados en situaciones *educacional/profesional*, con una diferencia poco significativa han realizado los ítems presentados en situaciones *públicas* y por último, han fallado más en los ítems en situaciones *científicas*.

Todos los ítems planteados han requerido de los estudiantes las habilidades de la matematización, desde las más simples, en el caso de los ítems sencillos, hasta las más complejas al abordar los problemas del grupo de reflexión. Respecto a las habilidades de la matematización de los estudiantes cabe destacar que en los ítems sencillos han sabido identificar los elementos matemáticos pertinentes, encontrar equivalencias entre el lenguaje en el que se ha descrito el problema y el lenguaje matemático (matematización horizontal) y ejecutar las operaciones simbólicas adecuadas (matematización vertical), sin embargo, han tenido dificultades en los ítems donde se requería una interpretación de los resultados en términos de la vida real, la fase en la que concluye el ciclo de la matematización. En los problemas más complejos, la mayoría no ha llegado a traducir el problema al lenguaje matemático por lo que ha resultado imposible llevarlo a cabo. Unos pocos estudiantes han sido capaces de completar con éxito todo el ciclo de la matematización.

IV.2.2. Análisis global de las actuaciones de los estudiantes a la luz de las tres variables consideradas (Caso 2)

En este apartado vamos a presentar el análisis cualitativo de los resultados de los estudiantes de IX grado (Caso 2) en la prueba, atendiendo las mismas variables del subapartado anterior.

La variable *procesos cognitivos*

Tal como hemos analizado en el caso anterior, empezaremos por el análisis de los procesos cognitivos activados por los estudiantes al ejecutar los **ítems del *grupo de reproducción*.**

En el caso de los ítems del grupo de reproducción podemos constatar que la mayoría de los estudiantes ha sido capaz de ejecutar operaciones de un solo paso o identificar un valor en el gráfico. Por ejemplo, los vente cinco estudiantes contestaron la siguiente pregunta:

Pregunta 11: EL TIPO DE CAMBIO Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de: 1 SGD = 4,2 ZAR Mei-Ling cambió 3.000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de cambio. ¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

Las preguntas de este tipo proporcionan toda la información pertinente con claridad, requieren reconocer equivalencias, aplicar procedimientos estándar y realizar cálculos sencillos, es decir se activan las competencias del grupo de reproducción y éstas han sido demostradas por los estudiantes. Sin embargo, nadie ha sido llevar a cabo correctamente el ítem 17 (Examen de Ciencias).

Pregunta 17: EXAMEN DE CIENCIAS

En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 puntos. ¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias tras los cinco exámenes?

La mayoría de los estudiantes que han intentado resolver este ítem, ha cometido un error común que ha consistido en sumar 60 y 80 dividiendo el resultado entre dos. Parecen intuir la solución, sin embargo, no han percibido la diferencia entre el valor medio de dos números y el valor medio de cinco números a partir de dos cantidades.

A continuación pasamos al análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems del grupo de conexión. Nos detendremos más detalladamente en algunos ítems de este grupo. El mayor número de estudiantes (22 de los 25) ha sido capaz de ejecutar el ítem 15 de elección múltiple.

Pregunta 15: EXPORTACIONES

¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

A 1,8 millones de zeds.

B 2,3 millones de zeds.

C 2,4 millones de zeds.

D 3,4 millones de zeds.

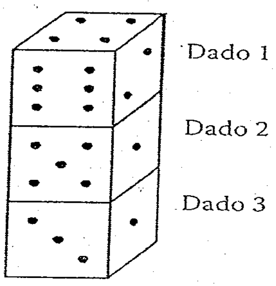
E 3,8 millones de zeds.

En este ítem los estudiantes han de saber interpretar datos de dos diagramas dados (en el primero se da el total de las exportaciones anuales 1996-2000 y en el segundo, la distribución de las exportaciones en porcentajes de varios productos) y saber aplicar correctamente el porcentaje al total correspondiente.

La mayoría de los estudiantes ha sido capaz de relacionar las propiedades de diferentes objetos matemáticos (ítem 34).

Pregunta 34: DADOS

A la derecha se pueden ver tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba.



¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y de abajo de los dados 2 y 3)?

En el ítem 34 los estudiantes podrían llegar a la solución siguiendo dos estrategias diferentes: calculando los puntos de las caras que no se pueden ver deduciendo de los puntos de las que se ven y sumándolos o bien razonando que si la suma de las caras opuestas es siete y hay tres cubos, en total dan 21 puntos y restándole los cuatro puntos de la cara de arriba obtendrían el resultado. Diecisiete estudiantes han realizado esta tarea aplicando la primera estrategia, más estándar, y dos estudiantes han empleado la segunda estrategia.

Tan solo cinco estudiantes, en el ítem 5 de respuesta abierta, han sabido dar explicación a la cuestión planteada.

Pregunta 5: CRECER

Explica cómo está reflejado en el gráfico que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante.

Dos estudiantes han utilizado lenguaje matemático refiriéndose a la pendiente reducida de la curva de las chicas a partir de los 12 años; los demás estudiantes lo explicaron utilizando el lenguaje cotidiano como “la curva de las chicas se hace uniforme y la de los chicos, más grande”.

Un estudiante ha llevado a cabo el ítem 23 de respuesta abierta que requería a partir de la interpretación correcta del diagrama dar un argumento matemático. La mayoría de los estudiantes no ha sido capaz de proporcionar un argumento válido. El ítem 29 ha resultado imposible resolver para todos los estudiantes.

Pregunta 29: LOS NIVELES DE CO_2

En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO_2 en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%. Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%.

Asimismo, el ítem 30 que es la continuación del ítem anterior, solo ha sido contestado por un estudiante.

Pregunta 30: LOS NIVELES DE CO_2

Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".

¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

En el ítem 32, de los estudiantes se requería elegir la información pertinente, relacionar los diámetros de las dos circunferencias que se obtienen, razonar que una vuelta equivale a la longitud de la circunferencia y comunicar correctamente los cálculos y el resultado.

La estación espacial Mir permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio alrededor de 86.500 vueltas a la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la Mir fue de 680 días.

Pregunta 32: VUELO ESPACIAL

La Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 kilómetros. El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12.700 km y su circunferencia es de alrededor de 40.000 km ($\pi \times 12.700$).

Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la Mir durante sus 86.500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

Este ítem ha sido abordado por un estudiante. En el ítem 36, de respuesta abierta, los estudiantes tenían que entender la información enunciada, pensar y razonar sobre posibles opciones, dar argumentos y justificarlos.

Pregunta 36: RESPALDO AL PRESIDENTE

En Zedlandia, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo al Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en toda la nación. Los resultados de los sondeos de los cuatro periódicos se muestran a continuación:

Periódico 1: 36,5% (sondeo realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

Periódico 2: 41,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
Periódico 3: 39,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

Periódico 4: 44,5% (sondeo realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar).

Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al presidente? Da dos razones que justifiquen tu respuesta.

La mayor parte de los estudiantes no ha sido capaz de abordar esta tarea, tal solo cinco estudiantes la llevaron a cabo correctamente.

Como se puede observar solo unos pocos estudiantes han sido capaces de abordar la mayor parte de los ítems del grupo de conexión.

Por último, los estudiantes han abordado los siguientes ítems del *grupo de reflexión*. El ítem 20 de respuesta abierta de este grupo ha sido resuelto por cuatro estudiantes. Cinco estudiantes han sido capaces de dar explicación adecuada a la pregunta planteada en el ítem 13, cuyo enunciado es la continuación lógica de los ítems 11 y 12.

Pregunta 13: EL TIPO DE CAMBIO
Al cabo de estos 3 meses el tipo de cambio había cambiado de 4,2 a 4,0 ZAR por 1 SGD.
¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio fuese de 4,0 ZAR en lugar de 4,2 ZAR cuando cambió los rands sudafricanos que le quedaban por dólares de Singapur? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Las explicaciones que han dado los estudiantes han sido las siguientes: *"Sí, le favoreció, porque en vez de 928 ZAR pagaría 975 ZAR"*, *"Sí, porque en cuanto más es ZAR, menos SGD recibe", "Sí, porque si hubiese cambiado por 4.0 ZAR= 975 dólares y por 4,2= 928 dólares"*. La mayoría de los estudiantes ha confundido la pregunta planteada, ya que justificaban su respuesta como si el cambió fuese de 4,0 a 4,2 ZAR.

Dos estudiantes han sido capaces de razonar la pregunta planteada en el ítem 21 (Terremoto), los demás se inclinaron a la opción D.

Solamente cinco estudiantes han abordado el ítem 10 de respuesta corta.

Pregunta 10: CHATEAR

Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo. ¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans? Escribe las respectivas horas locales en la tabla.

Este ítem es también la continuación del otro donde se dan las diferencias entre las horas locales de Mark y Hans.

Ninguno de los estudiantes ha sabido llevar acabo el ítem 31 de respuesta abierta que sigue la serie de los ítems “Los niveles de CO_2”.

Pregunta 31: LOS NIVELES DE CO_2

Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO_2. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama. Da dos posibles respuestas "correctas" a esta pregunta y explica cómo se puede obtener cada una de estas respuestas.

Para contestar esta pregunta los estudiantes han de saber interpretar el diagrama y reconocer que se trata de dos aproximaciones matemáticas al problema: el aumento absoluto más grande y aumento relativo más grande.

Y finalmente, los estudiantes no han sido capaces de resolver el ítem 38 de respuesta abierta.

De este modo, **la mayor parte de los estudiantes es capaz de activar las competencias del grupo de reproducción**, es decir, son buenos en la ejecución de procedimientos rutinarios, en la aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, en el manejo de fórmulas establecidas y realización de cálculos sencillos. **Hay pocos estudiantes capaces de abordar preguntas donde tienen que activar las competencias del grupo de conexión**, es decir, saber reconocer las relaciones entre diferentes objetos matemáticos o sus propiedades, interpretar correctamente gráficos, diagramas, tablas, etc., aplicar algoritmos y fórmulas ya no de mera rutina y realizar cálculos más complejos de dos o más pasos. Igualmente, **hay un número reducido de estudiantes capaces de afrontar problemas de demanda cognitiva superior**, o sea, saber razonar sobre los procesos necesarios y ser capaz de elegir estrategias adecuadas para llevar acabo el problema, seguir y desarrollar encadenamientos de argumentos matemáticos, justificar y generalizar.

La variable *contenido*

Otra variable considerada para los ítems ha sido el *contenido* que atiende a cuatro sub-áreas.

En los problemas de sub-área *cantidad,* de los estudiantes se requerían habilidades del razonamiento cuantitativo, es decir, conocer representaciones de números en diferentes maneras, la percepción de la magnitud de números, los cálculos matemáticamente elegantes, la estimación y el cálculo mental.

Los estudiantes no han tenido dificultades en hacer cálculos directos como, por ejemplo, calcular el cambio de un tipo de moneda al convertirla en el otro, conociendo el tipo de cambio entre monedas o de la proporción inversa; elegir entre los varios precios de diferentes objetos los que completan el precio máximo o mínimo calculándolo mediante procedimientos sencillos de suma; calcular la media aritmética. Sin embargo, decrece el número de estudiantes que han sabido ejecutar problemas de cálculos combinados y todavía menos los que han abordado problemas que presentaban situaciones de comparación de porcentajes, estimación.

Para resolver problemas de sub-área *cambio y relaciones*, los estudiantes tenían que reconocer las relaciones dadas en variedad de representaciones diferentes, entre ellas la simbólica, la algebraica, la tabular y la geométrica, así como conocer las funciones matemáticas simples que describen algunos procesos de cambio.

Los estudiantes han sido capaces de identificar valores de una función dada por intervalos y representada mediante tabla, de relacionar una hora concreta a horarios de diferentes puntos geográficos, sin embargo, relacionar los diferentes intervalos de horarios ya no lo han sabido ejecutar correctamente. La mayoría de los estudiantes no ha sido capaz de interpretar y explicar diagramas, gráficos o relaciones funcionales, realizar la evaluación numérica de formulas dadas.

Los problemas de e*spacio y forma* requerían de los estudiantes entender las relaciones entre formas e imágenes o representaciones visuales, distinguir entre perímetro y superficie de figuras geométricas y saber calcularlos; también entender las representaciones en dos dimensiones de los objetos tridimensionales.

Los estudiantes han demostrado la percepción de los objetos tridimensionales (cubos en este caso) en las representaciones en dos dimensiones, sin embargo, no han sabido abordar problemas donde tenían que mostrar la intuición en reconocer los elementos comunes de diferentes figuras, encontrar analogías y diferencias y mediante el razonamiento lógico llevar acabo la resolución.

Por último, las actividades y los conceptos matemáticos importantes de sub-área *incertidumbre*[70] han sido la recolección de datos, el análisis y la presentación /visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción.

Los estudiantes han sido capaces de razonar sobre por qué no es adecuado representar mediante un diagrama de barras una variedad de datos dados, de formar posibles emparejamientos de los cuatro jugadores, interpretar información procedente de una grafica. La mayoría de los estudiantes ha tenido dificultad en valorar juicios a partir del uso de la noción de probabilidad y argumentar su elección.

El análisis de los resultados de los estudiantes ha mostrado la mayor familiaridad con la sub-área *cantidad,* relativamente menos éxito los estudiantes han tenido en los ítems de la sub-área *cambio y relaciones,* les siguen los de la sub-área *incertidumbre,* y por último, *espacio y forma*.

La variable *situaciones y contextos*

Los ítems de la prueba han sido planteados en las siguientes cuatro situaciones: personal, educativa/laboral, pública y científica.

Los estudiantes han abordado con mayor éxito las tareas presentadas en situaciones *personales*, con menor éxito los ítems planteados en situaciones *educacional/profesional*, con una diferencia poco significativa han realizado los ítems presentados en situaciones *públicas* y por último, han fallado más en los ítems en situaciones *científicas*.

Respecto a las habilidades de la matematización de los estudiantes es similar a las características del Caso 1, o sea, en los ítems sencillos han sabido identificar los elementos matemáticos pertinentes, encontrar equivalencias entre el lenguaje en el que se ha descrito el problema y el lenguaje matemático (matematización horizontal) y

[70] Tal como mencionamos esta sub-área no ha sido incluida en la Programación.

ejecutar las operaciones simbólicas adecuadas (matematización vertical), sin embargo, han tenido dificultades en los ítems donde se requería una interpretación de los resultados en términos de la vida real, la fase que concluye el ciclo de matematización. En los problemas más complejos, la mayoría no ha llegado a traducir el problema al lenguaje matemático por lo que les ha resultado imposible llevarlo acabo. Unos pocos estudiantes hayan sido capaces de completar con éxito todo el ciclo de la matematización.

IV.2.3. Análisis cuantitativo de las actuaciones de los estudiantes (según niveles de dominio)

El análisis de los datos a través del programa Winsteps (Anexo X y XI), nos ha permitido establecer los niveles de dominio de los estudiantes en dos casos estudiados según los niveles de PISA 2003.

De este modo, el siguiente gráfico refleja el número de estudiantes por niveles de dominio para el Caso 1.

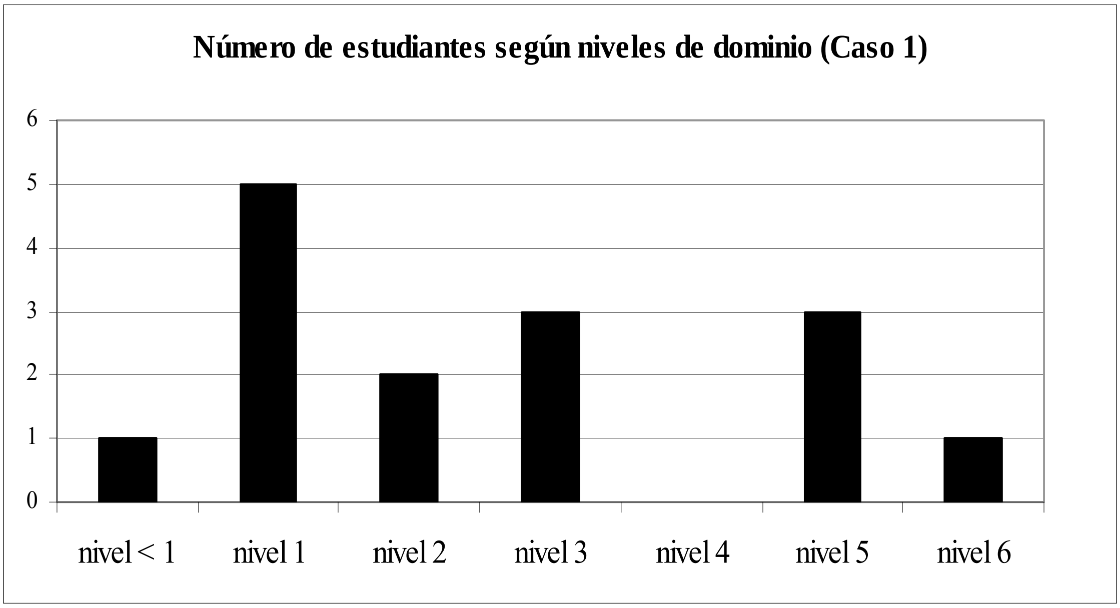


Gráfico 9: Número de estudiantes según niveles de dominio (Caso 1)

Como se puede apreciar, para el Caso 1, el gráfico muestra que **cuatro estudiantes han demostrado poseer competencias matemáticas avanzadas** (nivel 5 y 6), han sido capaces de abordar problemas que requieren aproximaciones originales en situaciones nuevas, de razonar matemáticamente, de evaluar, seguir y desarrollar encadenamientos de argumentos matemáticos, justificar y generalizar; otros **tres estudiantes tienen el**

nivel medio de dominio (nivel 3), han sabido ejecutar procedimientos descritos con claridad, interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas, asimismo han sido capaz de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos. **Siete estudiantes han mostrado nivel bajo de dominio** (nivel 1 y 2), son capaces de resolver problemas elementales que requieren cálculos mecánicos, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales. Finalmente, **un estudiante tiene el nivel del rendimiento insuficiente y la falta de desarrollo de destrezas matemáticas** (nivel <1).

De igual manera, el gráfico que sigue, refleja el número de estudiantes por niveles de dominio para el Caso 2.

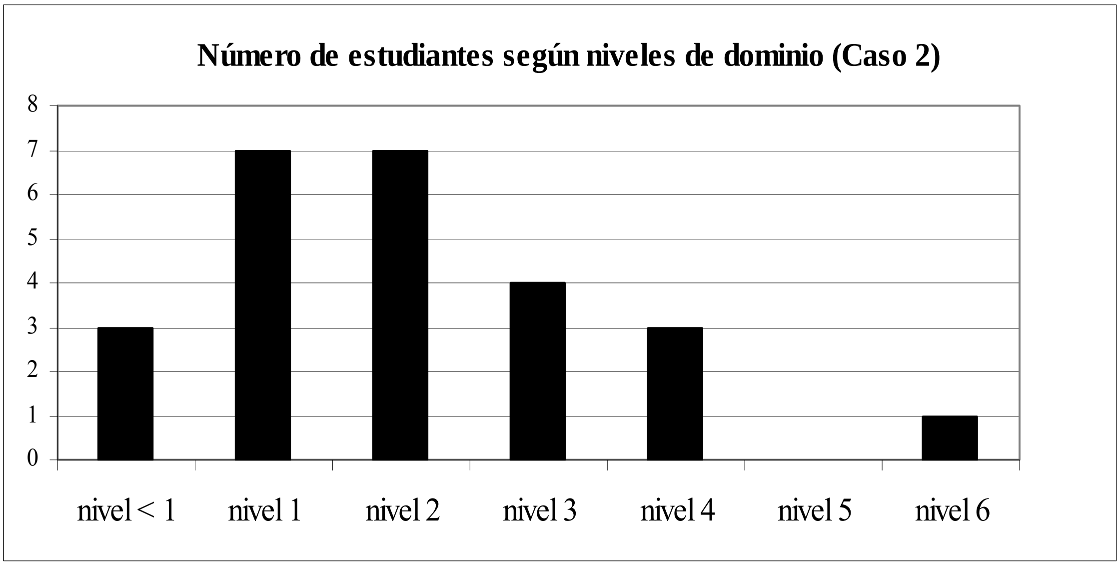


Gráfico 10: Número de estudiantes según niveles de dominio (Caso 2)

En el Caso 2 observamos que **un estudiante posee competencias matemáticas avanzadas** (nivel 6), ha sido capaz de abordar problemas que requieren aproximaciones originales en situaciones nuevas, de razonar matemáticamente, de evaluar, seguir y desarrollar encadenamientos de argumentos matemáticos, justificar y generalizar; otros **siete estudiantes tienen nivel medio de dominio** (nivel 3 y 4), han sabido trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y ejecutar procedimientos descritos con claridad, interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas, asimismo ha sido capaz de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos. Hay **catorce estudiantes que han presentado nivel bajo de dominio** (nivel 1 y 2), son capaces de resolver problemas elementales que requieren cálculos mecánicos, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales. Finalmente, **tres estudiantes ha demostrado tener el nivel del rendimiento insuficiente y la falta de desarrollo de destrezas matemáticas** (nivel <1).

Estos hechos dan lugar a la discusión acerca de las oportunidades de aprender matemáticas que han tenido estos estudiantes. En el siguiente capítulo presentamos nuestras reflexiones al respecto.

CAPÍTULO V:
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Dedicamos este capitulo a los resultados de la investigación y su discusión. Los resultados se basan en el análisis de la información, que presentamos en el Capitulo IV. Cuando nos acercamos al fenómeno objeto de interés a través del estudio de casos, reducimos su extensión en favor de una comprensión profunda en su contexto natural. Luego, para fijar nuestra atención en lo relevante para nuestro estudio, nos abstraemos de los demás factores del contexto y analizamos lo preciso. Ahora es el momento en el que necesitamos volver a ubicarnos en el determinado lugar y tiempo de nuestros casos para que los resultados y las interpretaciones que inferimos tengan sentido.

En los siguientes subapartados exponemos los resultados y nuestro discurso al respecto para el Caso 1 y Caso 2. Destacaremos en negrita las ideas más relevantes para facilitar la lectura.

V.1. Resultados y discusión (Caso 1)

En este subapartado presentamos los resultados sobre las relaciones entre las OTL y las CM de los estudiantes relativos al Caso 1.

Para este Caso, el análisis de la información ha revelado, por un lado, **las oportunidades de aprendizaje enfocadas en técnicas y operaciones, centradas en el profesor y en la ejecución de tareas planteadas, mayormente, en situaciones matemáticas, mediante enfoques rutinarios,** y, por otro lado, **el bajo nivel de dominio de los estudiantes.**

De este modo, de acuerdo con el modelo de OTL-CM elaborado, las oportunidades de aprendizaje proporcionadas a los estudiantes corresponden a las del *primer nivel de la THE* que, según las relaciones consideradas, no favorecen a la formación de las competencias matemáticas avanzadas.

En las siguientes líneas, con el fin de entender las relaciones entre OTL y CM en el Caso 1, tratamos de completar nuestra visión acerca de las OTL proporcionadas durante las experiencias anteriores de los estudiantes, combinando ejemplos y nuestras reflexiones acerca de las actividades de Pablo en el aula con las de las actuaciones de los estudiantes durante sus clases de matemáticas y de los aciertos, dificultades o carencias presentados por éstos a la hora de resolver problemas realistas de la prueba. De esta manera, comprobamos el modelo OTL-CM y discutimos su adecuación en cuanto a las relaciones entre las oportunidades de aprendizaje proporcionadas por el tipo de enseñanza experimentada y la actuación competente de los estudiantes. De acuerdo con el modelo OTL-CM, desglosamos los resultados en relación con las OTL consideradas: el foco matemático, las estrategias didácticas y el tipo de tareas.

a) Resultados relativos al foco matemático

Como se puede ver en el análisis de las clases grabadas, en las sesiones de Pablo se ha destacado **un mayor énfasis en los focos *procedural* y *conceptual*:** se trabaja mucho en los procedimientos y técnicas de cálculo y en el desarrollo conceptual de los estudiantes. Sin embargo, este último tiene más bien carácter formal, ya que como destacamos en el análisis, los conceptos abordados durante las sesiones se presentan como hechos acabados y unidades de información aisladas. De este modo, por ejemplo, a pesar de que los conceptos relacionados con la semejanza y el teorema de Thales están presentes en numerosas situaciones del mundo real, tales como fotografías, proyecciones de imágenes o máquinas fotocopiadoras o proyección de sombras a distintas horas del día, excepto el ejemplo de escala ilustrado en el libro de texto, Pablo no había puesto ningún otro, ni había invitado a los estudiantes a que pensaran y dieran sus ejemplos relacionados con la vida cotidiana o encontraran en la realidad los campos de aplicación que resultarían oportunos para el mejor entendimiento de estos conceptos y establecimiento de conexiones con su experiencia. De la misma manera formal se trata la proporcionalidad de áreas y volúmenes de figuras geométricas: se constata como hecho que la razón de semejanza para estas medidas es, respectivamente, el cuadrado y el cubo de la razón de semejanza.

P: *…estamos hablando de superficie, acabamos de decir que cuando estamos comparando lados, o alturas o perímetros son longitudes y nos da una constante y si yo comparo superficie me da, no la razón de semejanza, sino el cuadrado de la razón de semejanza. […] No sé si vendrá algún ejercicio de volumen, pues si habrá volumen, los volúmenes serían igual, estamos hablando de figuras en espacio, pues los de volúmenes es igual al cubo de la razón de semejanza* [918-931].

Sin embargo, no se da la oportunidad de que los estudiantes lo comprueben o deduzcan y siguen sin entenderlo, ya que ante el siguiente problema, donde se les da la razón entre áreas de dos círculos y han de encontrar la razón ente sus radios, se quedan igual, sin saber hacerlo, aunque el profesor parece creer que después de su explicación sabrían hacerlo sin problemas:

P: ***Hacemos el N15, con este ya me imagino que deberíais saber hacer perfectamente el 15***. *Nos dice, halla el tipo de la relación entre los radios de circunferencias si la razón entre sus áreas es* $\frac{16}{9}$. *Entonces tenemos* $\frac{S}{S_1}=\frac{16}{9}$, $\frac{r}{r_1}$ *= ¿? ¿Cómo hacemos?* (Intentan razonar, pero lo que dicen no es correcto). ***A ver, aquí me da ahora la razón de las áreas, entonces yo elevo*** $\frac{r}{r_1}$ ***al cuadrado, me da*** $\frac{16}{9}$***. Acabo de decir***. *Entonces* $\frac{r}{r_1}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ [932-939].

La parte teórica se pasa como un recorrido rápido, debido al hecho de que Pablo tiende a considerar la teoría principalmente como herramienta o recurso para la parte práctica y la importancia que atribuye al foco *procedural* se refleja durante sus sesiones, sobre todo, cuando los estudiantes no son capaces de ejecutar alguna actividad. Pablo repite las técnicas y los procedimientos, y en varias ocasiones le sorprende que los estudiantes no sean capaces de aplicar fórmulas después de que haya explicado el procedimiento una y otra vez.

P: La regla siempre sigue la misma, yo lo que no entiendo es que una vez sale bien y otra vez sale mal, no lo entiendo, o sale todo mal o todo bien porque la aplicación es siempre igual [725-727].

Por otra parte, **las carencias en los conocimientos de sus estudiantes de índole conceptual y procedimental, y el uso limitado del lenguaje simbólico** también impedían la comprensión y dificultaban la ejecución de tareas. Durante las sesiones, en varias ocasiones, observamos que los estudiantes presentaron dificultades al traducir los datos del enunciado e identificarlos con la fórmula dada. Así, en el episodio que sigue, el profesor, al escribir las fórmulas, propone realizar una tarea en la cual en un triángulo rectángulo (se da el dibujo con los catetos dados 7 y 10, la altura h y las proyecciones m y n de los catetos sobre la hipotenusa), han de calcular las longitudes h, m y n.

P: (escribe en la pizarra las fórmulas: $b^2=an$, $c^2=am$, $b^2+c^2=a^2$*)* ***aquí tenemos la herramienta, la fórmula que va a repetir a teorema****, pues en esta actividad tenemos un triángulo rectángulo, altura, este cateto vale 7, este vale 10 y nos pide hallar h, m y n,*

¿vale? ¿Quién quiere salir a la pizarra? … (Los estudiantes hablan entre sí, nadie se atreve a salir a la pizarra). *Las letras que yo puse ahí dependen de la figura, eso es un caso particular, se varían en distinta manera […]* (Después de esperar varios minutos que los estudiantes resuelvan la actividad). ***Aquí, en este triángulo, si queréis ponemos letras y vamos a identificar, entonces todo esto sería la hipotenusa a, este cateto es b y el otro es c, lo que quiero es que veáis que este es un cateto, este es el otro*** [394-410].

En el caso de haber comprendido los correspondientes teoremas expuestos[71], el procedimiento para su resolución se habría reducido a traducir el enunciado e identificar los datos con las variables de las fórmulas y a la elección de la fórmula apropiada. Sin embargo, su falta de compresión hizo imposible llevarlo a cabo sin la intervención de Pablo. Aun así, después de que los identificaran con su ayuda, resulta coherente que tampoco hayan sabido cuál de las tres fórmulas han de aplicar.

P: *…Y m+n sería igual a a-hipotenusa, bien, hemos identificado.* ***¿Qué hacemos ahora? ¿Qué ocurre? ¿Qué yo veo en la lista?*** (Se refiere a la lista de fórmulas que ha escrito en la pizarra). ***¿Cuál aplico?***

E: ***El primero***.

P: ***¿Para qué? Vamos a ver, si por ejemplo, intento aplicar teorema del cateto, digo b^2=am, b^2-conozco, aquí me pasa lo mismo conozco c^2, pero necesito la hipotenusa, entonces aplico primero el teorema de Pitágoras, calculo la hipotenusa***, *¿vale o no?* [417-424].

Asimismo, los estudiantes han mostrado dificultades de la misma naturaleza al resolver el ítem "Caminar 1" de la prueba, en el cual se da la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ que describe la relación aproximada entre *n* y *P* donde: *n* = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros, y le sigue el enunciado del problema donde se da el número de pasos por minuto y han de calcular la longitud del paso. En este ítem, planteado en una situación personal, cercana a los estudiantes y distinta del contexto matemático, de manera similar, han tenido la dificultad en traducir el enunciado e identificar los datos con las variables de la fórmula. En el ítem 37 "El mejor coche 1", igualmente se les hace difícil traducir el lenguaje formal y simbólico (puntuación total de un coche dada

[71] Según recuerda Mialaret (1984), la razón de que los estudiantes no asimilan un teorema, a menudo se debe al hecho de que éste se presenta sin ningún apoyo en experiencias concretas previas.

mediante una expresión simbólica: (3 × S) + C + D + H) e identificar los datos correspondientes.

El hecho de no entender el significado de las fórmulas ha llevado a los estudiantes a situaciones confusas, ya que solo parecen fijarse en las letras que éstas contienen. El siguiente fragmento es un ejemplo de tal confusión:

Durante la resolución de una actividad de tipo hallar la ecuación de la recta con el punto y el vector director dados, el profesor escribe en la pizarra la ecuación de la recta $y = y_0 + \underline{\mathbf{m}}(x - x_0)$.

E: Maestro, decimos anteriormente la ecuación $b^2 = a\underline{\mathbf{m}}$*, ¿es otra cosa?* (Se refiere al m que ha visto en ambas fórmulas). [516].

Este tipo de limitaciones en el uso del lenguaje simbólico y formal refleja la comprensión superficial de los conceptos e ideas matemáticas[72].

Por otra parte, algunos de los estudiantes que han sabido traducir el enunciado e identificar los datos, sin embargo, en ese mismo ítem "Caminar 1", han tenido la dificultad en despejar correctamente la incógnita. Hasta los estudiantes más competentes (particularmente, E1 la despeja como $P = \frac{140}{n}$), parecen caer en la tentación de realizar operaciones mecánicamente sin interpretación matemática adecuada del resultado obtenido (longitud del paso de un hombre igual a dos metros).

Además, para los estudiantes de Pablo, **"despejar" supone un problema bastante arraigado**. Durante sus sesiones, Pablo ha tenido que advertir cómo despejar una proporción, ya que les ha costado hacerlo.

P:…Yo digo 3 x 10 =30, 5 x 6=30, entonces es una proporción. Una proporción, quiero que recordéis, es muy fácil despejar. ***Yo no sé por qué os cuesta mucho trabajo despejar una proporción, es muy fácil****.* ***Un extremo es igual al producto de dos medios partido por el otro extremo, y un medio exactamente lo mismo, es igual al producto de dos extremos partido por el otro medio****. Es muy facilito*. [188-193]

En otra ocasión, los estudiantes muestran dificultades al despejar *y* de la ecuación general de la recta $5x - 6y + 14 = 0$.

[72] En la misma línea, Mialaret (1984) destaca que "*el desmenuzamiento de una noción matemática se hace a la par de la adquisición del lenguaje adecuado*" (p.84).

P: ***Hay que despejar y, vamos a ver, tu puedes despejar como tu quieras, yo te digo como hago yo, no sé si te valdría***. ***Yo lo hago de esta manera: mentalmente, como la y es negativa la paso mentalmente a otro lado cambiando el signo, ya es positiva***, *¿vale o no? En caso que sea negativa, la paso allá, entonces sería* $y=\frac{5x+14}{6}$ [757-761].

Las dificultades que presentan los estudiantes al identificar variables y despejar incógnitas reflejan la falta de dominio significativo del concepto de igualdad y sus correspondientes procedimientos, lo que seguramente proviene aún de los cursos anteriores. Es posible que los estudiantes no hayan tenido la oportunidad de aprender a despejar de una manera que tenga significado para ellos, más bien se les haya enseñado de la misma forma que explica Pablo, que es apropiada para los estudiantes que dominan alto nivel de abstracción. Sin embargo, incluso si se les hubiera enseñado a hacer transposición de términos y aplicar las propiedades del inverso multiplicativo o aditivo al despejar la incógnita, es sabido que el uso únicamente de la representación simbólica no permite que los estudiantes interpreten y analicen otras representaciones más concretas en las cuales se revela el papel que juega cada una de las variables dentro de la igualdad (Moreno y Castellanos, 1997). Dado que los estudiantes han tenido, precisamente, este tipo de dificultades y errores es un reflejo de **haber experimentado una enseñanza mecánica del tema y haber aprendido a aplicar procedimientos sin significado**.

Asimismo, como también lo comenta Pablo, **los estudiantes presentan una inseguridad y lentitud bastante notable al manejar números o expresiones matemáticas**.

E: $m=\frac{3}{4}$

P: *Entonces, ¿cómo será la pendiente de la recta perpendicular a esta?*

E: *Inversa y cambiada de signo.*

P: *Entonces, ¿cuál sería?*

E: $-\frac{3}{4}$

P: $-\frac{3}{4}$ ***, no***

E: $-\frac{4}{3}$

P: ¿Y la ecuación? ***Tenéis mucha duda al operar con números****, eh* [1049-1056].

O, en [7.1], los estudiantes tienen muchas dudas al hallar coordenadas del centro y radio de la ecuación de la circunferencia dada $(x-2)^2+(y+3)^2=16$, y a algunos les resulta imposible encontrar el radio cuando éste no se presenta como cuadrado de un número natural[73], como, por ejemplo, en el caso $x^2+y^2=10$, $r=\sqrt{10}$. En este último ejemplo, una opción para las coordenadas del centro, que pronuncian los estudiantes, es (-1, -1). La sustitución de cero por uno puede ser debida a la confusión de la operación de restar o sumar cero con la operación de multiplicación de una variable por uno.

El no dominio de resultados numéricos, que probablemente procede de la formación previa de los estudiantes[74], ha creado un estado de inseguridad que no ha favorecido su formación matemática.

Por otra parte, **las dificultades que han tenido los estudiantes a la hora de resolver problemas realistas también reflejan carencias en los conocimientos matemáticos básicos y destrezas o bien la incapacidad de aplicar sus conocimientos, por lo que los procedimientos y operaciones respectivas se han llevado a cabo erróneamente o no han llegado a realizarse**.

Así, en el ítem 15 "Exportaciones 2", los estudiantes han presentado dificultades en aplicar correctamente porcentaje directo a una cantidad dada, más bien porque no han sabido traducir y interpretar la información representada mediante dos diagramas, o porque han realizado la operación erróneamente.

En el ítem "Los niveles de CO_2 1" ha resultado todavía más problemático escribir cálculos para demostrar cómo se obtiene 11% a partir de los datos dados. **Las dificultades que han tenido los estudiantes en aplicar el concepto de porcentaje directo en el ítem 15, hace esperable la incapacidad de explicar los cálculos de obtención del porcentaje, ya que en este caso se requiere un pensamiento más**

[73] Este tipo de dificultades tiene su origen en el hecho de que no se comprende suficientemente bien la significación del signo $\sqrt{\ }$, o sea, que por la definición $(\sqrt[n]{a})^n=a$ (Mialaret, 1984).

[74] Según Mialaret (1984), la seguridad y rapidez del cálculo son elementos imprescindibles para garantizar una evolución rápida posterior de los estudiantes y como factores que favorecen al aumento de la rapidez intelectual menciona los conocimientos asimilados íntegramente, acompañados de un abanico de asociaciones y el cálculo mental. En la misma línea, Kilpatrick et al. (2001) destacan la importancia de la comprensión conceptual a la hora de realizar los procedimientos con fluidez.

avanzado: partir de un punto (cálculo de porcentaje directo), tomar conciencia del camino que recorren y vías que utilizan para ello y volver a él, o sea, se trata de la reversibilidad del pensamiento[75]. Teniendo en cuenta lo expuesto, y a pesar de que el contexto en el que se ha presentado este ítem ha resultado bastante complejo para los estudiantes, hecho que podría jugar un papel negativo, **asociamos esta carencia, además, con la falta de experiencia en establecer relaciones en todos los sentidos y a la aplicación automatizada de los procedimientos.**

Otro ejemplo que exponemos evidencia la adquisición sin significado del concepto de media aritmética. Así, en el ítem 17 “Examen de Ciencias”, donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), han de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes, la mitad de los estudiantes obtienen como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$). El hecho de no percibir la diferencia entre el valor medio de dos números y el valor medio de cinco números a partir de dos cantidades muestra **que los estudiantes han comprendido vagamente el concepto de media aritmética y/o tan solo han tenido experiencias en hallar la media aritmética en situaciones cuando están presentes todos los números cuya media aritmética se pide. Esto concuerda con evidencias en la aplicación mecánica de fórmulas de Pablo en sus clases.**

En otra ocasión, en un contexto más complejo, en el ítem 30 “Los niveles de CO_2 2”, no han sabido explicar cómo es posible que el descenso del porcentaje de emisión de Alemania (16%) sea mayor que el de la media de todos los países de UE (4%), en caso que Alemania forma parte de UE. **Se trata de saber generalizar el concepto de media aritmética y de aplicarlo a situaciones nuevas, hecho que se consigue cuando a los estudiantes se les lleva a percibir, descubrir, encontrar, a través de problemas muy diferentes, los mismos procesos matemáticos.**

Análogamente, hay que destacar **la deficiencia que presentan los estudiantes en el uso del razonamiento lógico-formal**, **de argumentación o justificación**, aunque **tampoco han sido frecuentes situaciones que requerían estas habilidades, que**

[75] Tal como recuerda Mialaret (1984), apoyándose en los trabajos de Piaget, la capacidad de reversibilidad tiene lugar cuando el niño domina las relaciones para manejarlas en todos los sentidos y para hallar la recíproca de cada una de estas relaciones, que normalmente, hacia los 14 años de edad, no presenta dificultades serias.

identificamos con el foco *reasoning*. Tan solo en un caso Pablo les dirige la pregunta "por qué", que queda contestada por él mismo. Y en el ejemplo que sigue, los estudiantes no son capaces de ir más allá de reproducir la caracterización de los triángulos semejantes:

P: *Vamos a hacer la figura, nos dice el segmento* $AB \parallel CD$, ***¿Por qué son semejantes los*** **Δ *ABO* y Δ *CDO?*** *Halla los lados.*

E: ***Porque los ángulos son iguales y los lados proporcionales***.

P: ***No me digáis así, tenéis que demostrarlo***, ***luego no hace falta que cumplan las dos, si cumple una es bastante***. *Bien, los ángulos se ven mejor, son iguales, entonces los Δ-os son semejantes, entonces los lados son proporcionales* [869-875].

Sin embargo, para los estudiantes, la explicación de Pablo parece ser un fárrago de palabras que tiene poco sentido. Aunque Pablo ha demostrado los tres criterios de semejanza, **es difícil esperar que los estudiantes fuesen capaces de seguir el mismo razonamiento siendo nada más que agentes pasivos de este proceso**:

P: ***Vamos a ver los criterios de semejanza de triángulos,*** *¿de acuerdo?* ***Eso viene en la página 157,*** *a ver* ***¿quién lee esto?***

E: (**Lee del libro el 1er criterio**).

P: ***Un momentito, es decir hay que comprobar, si dos ángulos son iguales, el tercer ángulo ya es igual***, *¿vale? Es una cosa que sabemos que suma de los ángulos es 180º grados y ya tenemos dos iguales, entonces el tercero que es la diferencia, tiene que ser igual, ¿de acuerdo? Entonces ya vemos que comprobando que dos ángulos son iguales, el tercero es igual y los triángulos son semejantes.* ***El segundo dice…*** [254-262].

Por otra parte, **es notable la inseguridad y la falta de experiencia en el manejo de expresiones y demostraciones matemáticas por parte de los estudiantes**, a pesar de que es de esperar que en el último curso de la Secundaría los estudiantes dominen los procesos de abstracción, formalización o razonamiento deductivo.

Asimismo, en el cuarto episodio de la tercera sesión [3.4], a la pregunta del profesor sobre cuánto ha de medir la suma de dos ángulos de un triángulo si el tercero es un ángulo recto, tienen la dificultad en deducir el valor de la suma de dos ángulos, probablemente por la falta del conocimiento acerca de la suma de los ángulos de un triángulo, ya que después de un silencio de unos segundos, la respuesta que da una estudiante es ”trescientos”, a la que posteriormente corrige otro estudiante contestando correctamente “noventa”.

De manera análoga, a la hora de resolver problemas de la prueba, la mayoría de los estudiantes **no ha sabido formular supuestos o explicar asuntos matemáticos complejos que implican relaciones lógicas, pero sí, han sabido hacer inferencias directas y explicar asuntos matemáticos sencillos**. Aquí cabe destacar, sin embargo, que la mayoría ha sido capaz de explicar, por ejemplo, en el ítem “El tipo de cambio 3”, por qué un tipo de cambio ha sido más favorable respecto al otro o en el ítem “Basura” de dar una razón por la que es inadecuado representar una tabla de datos muy variados y inexactos mediante un diagrama de barras. Probablemente, este hecho se debe, en el primer caso, a la situación bastante familiar para ellos, y en el segundo, se habrán ayudado de su sentido común, o al contenido matemático relativamente más accesible (*cantidad*, *incertidumbre*).

Asimismo, por una parte, la mayoría de los estudiantes ha sabido **resolver problemas realistas utilizando enfoques y procedimientos rutinarios o estándar** y por otra, en las sesiones de Pablo, no hemos observado **el foco *problem solving*.** De este modo, **no se ha dado la oportunidad de resolver problemas no rutinarios y no triviales**. Este aspecto lo analizaremos más detalladamente tratando las relaciones relativas al tipo de tareas.

Estas dificultades y carencias de los estudiantes, tanto a la hora de trabajar en el aula como al resolver problemas realistas, reflejan **un vacío importante en los conocimientos matemáticos básicos y destrezas**, **resultado plausible de una enseñanza en la cual los estudiantes han tenido la oportunidad de aprender formalmente los conceptos como unidades de informaciones carentes de significado, sin una profundidad debida, ausente de conexiones entre diferentes entes matemáticos o bien sin una fijación adecuada de lo aprendido; de aplicar procedimientos y operaciones de una manera mecánica; de resolver ejercicios tipo o principalmente utilizando enfoques estándar, o sea, han tenido escasas oportunidades para el aprendizaje significativo de las matemáticas**.

b) Resultados relativos a las estrategias didácticas

Como podemos notar del análisis de las sesiones de Pablo, se trata de una enseñanza basada en la exposición magistral de los temas sucesivos del libro de texto a grupo-clase, prioritariamente, mediante las estrategias didáctica **entrenamiento y explicación.** El papel de Pablo en el aula es central: protagoniza todo el proceso casi en modo exclusivo, principalmente, explicando los tópicos, procedimientos y soluciones; su intervención se observa constantemente durante el trabajo en las tareas propuestas: muchas veces lee su enunciado, organiza los datos en la pizarra, representa el dibujo correspondiente, da pistas y consejos directos para su proceder, y en varias ocasiones termina resolviendo él. **Este tipo de protagonismo limita las oportunidades de los estudiantes para aprender a traducir el enunciado de las tareas, a plantear y resolver problemas, a representar los objetos matemáticos, a expresar sus ideas.**

A su vez, el papel del estudiante, en general, se reduce a escuchar, leer del libro de texto las definiciones, teoremas y criterios, y seguir las indicaciones del profesor. **Hemos mencionado en el apartado anterior la incapacidad de los estudiantes de aplicar los conceptos y teoremas impartidos, subrayando como una de las razones de ello su papel pasivo en la adquisición de los conocimientos. Es sabido que el papel pasivo del estudiante conlleva una comprensión pasiva, o sea, reconocimiento y reproducción de los hechos**, frente a una comprensión activa cuando es capaz de evocar y utilizar lo aprendido (Piaget, 1973; Mialaret, 1984).

Es cierto que en el estudio de este Caso observamos la intervención de otros factores, como el conocimiento previo insuficiente de los estudiantes, y es difícil establecer relaciones muy destacadas entre sus competencias y las estrategias didácticas utilizadas por Pablo: parece que el nivel del aprovechamiento de los estudiantes no permitía a Pablo salir del margen de los focos y estrategias usados, ya que una y otra vez tenía que abordar los procedimientos y los conceptos impartidos, explicando y dándoles indicaciones directas. Asimismo, la ya señalada limitación en el uso del lenguaje formal impedía la comunicación efectiva y el intercambio de significados entre profesor y estudiante.

Sin embargo, por una parte, **estas mismas carencias de los estudiantes reflejan la falta de experiencias anteriores en declarar en voz alta sus ideas o soluciones, razonar, dialogar, compartir, argumentar o contrastar sus pensamientos, es decir, reflejan su papel pasivo durante las experiencias previas.**

Y por otra parte, **no se ha observado que Pablo cambie sus estrategias**, excepto en un caso puntual, cuando al no conseguir que uno de los estudiantes proceda en la resolución de la tarea propuesta por un método, intenta que lo haga por el otro, guiándole mediante preguntas orientadoras. No obstante, en general, **las preguntas que plantea durante sus sesiones invitan a los estudiantes a identificar la información y reproducirla** (por ejemplo, ¿Qué es?, ¿Cuál aplico?, ¿Cómo sería?, ¿Cuál será?).

De este modo, los estudiantes **han tenido escasas oportunidades para explorar sus ideas y soluciones, pensar y razonar, comunicar, argumentar, y no han tenido oportunidades para compartir sus pensamientos públicamente, participar en discusiones o trabajar en grupo**. Tal como indicamos en nuestro modelo, **la ausencia de tales estrategias como *exploración, participación, cuestionamiento* impide el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas.**

En lo que se refiere al uso de las estrategias didácticas que promueven la actitud positiva de los estudiantes hacia las Matemáticas, cabe destacar su poco provecho.

La estrategia *evaluación* para Pablo ha tenido carácter sumativo: para evaluar los conocimientos de sus estudiantes, Pablo se ha basado, sobre todo, en los resultados del examen, tras impartir un determinado tema.

Pablo ha usado la estrategia *diferenciación* mostrando acercamiento individualizado respecto a una estudiante, debido a la dificultad que manifestaba a la hora de entender sus explicaciones.

Por otra parte, *la activación y ejercitación de los conocimientos previos* podrían favorecer a la fijación y retención de los conocimientos adquiridos y preparar el paso de lo aprendido anteriormente al aprendizaje de nuevos temas; sin embargo, al ser aplicadas estas estrategias, principalmente, de una manera recordatoria y informativa, creemos que no se les ha sacado partido.

Además, Pablo es un profesor pendiente de la motivación de sus estudiantes y se siente en desventaja a la hora de motivarles e interesarles, relacionándolo con su formación o mejor dicho, con la falta de formación específica como docente. Ciertamente, como mencionamos en el análisis, en las sesiones de Pablo, no es frecuente la estrategia didáctica *motivación*. A su vez, los estudiantes se han pronunciado acerca de su desmotivación y frustración respecto a las matemáticas, hecho que otorgan a sus experiencias previas relacionadas con sus profesores de matemáticas.

Respecto al material didáctico cabe mencionar que Pablo ha utilizado únicamente el libro de texto, privando, de esta manera, el acceso a otras fuentes de información, a otras representaciones de los objetos matemáticos mediante, por ejemplo, programas educativos, lo que creemos que podría favorecer a aprender a buscar esa información, motivar a los estudiantes y ampliar su visión acerca de los objetos matemáticos y su aplicación fuera del contexto escolar.

De este modo, la falta de la motivación tanto intrínseca como extrínseca, ha creado un ambiente bastante complicado para la formación de una actitud positiva de los estudiantes hacia las Matemáticas, que a su vez ha inducido inseguridad, desconfianza en sí mismo, desinterés por la asignatura y no ha favorecido al desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas.

c) Resultados relativos al tipo de tareas

Según el análisis del tipo de tareas propuestas por el profesor en sus sesiones, Pablo **ha proporcionado la oportunidad de trabajar, mayormente, en tareas del grupo de reproducción, planteadas en situaciones científicas (matemáticas) y contextos hipotéticos. No se ha dado la oportunidad de resolver problemas con demanda cognitiva de alto nivel, experimentar sus habilidades en varias situaciones y contextos**. Esto implica que los procesos de pensamiento, que utilizan los estudiantes durante la resolución de este tipo de tareas, abarcan tan solo la elección de los datos, la aplicación de fórmulas y algoritmos estándar, el uso de una sola estrategia de solución, la identificación de representaciones sencillas y de una única manera, y la comunicación de los resultados de forma cerrada.

Tal como mencionamos en el modelo OTL-CM, **si los estudiantes han tenido la oportunidad de realizar, principalmente, tareas de demanda cognitiva inferior (reproducción), es poco probable que adquieran procesos propios a la actividad matemática tales como observación, análisis y síntesis, generalización, abstracción, verificación; por tanto, encuentran dificultad a la hora de abordar tareas matemáticas más complejas, distintas de las que resuelven en el aula, aquellas que no les resultan familiares y que requieren unos procedimientos diferentes de los usados.**

Cabe recordar que, aún siendo tareas que requerían movilizar procesos cognitivos no muy avanzados, a los estudiantes les costaba ejecutarlas y en muchas ocasiones las llevaba a cabo el profesor.

N21 (Reproducción). Halla la ecuación de las siguientes rectas: a) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

Para que el estudiante que ha salido a resolver esta tarea pueda proceder a su solución Pablo le ofrece las siguientes indicaciones:

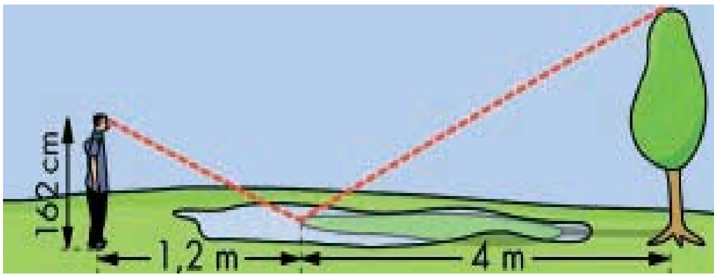
P: *¿Qué en común tienen estas dos rectas? Por favor, pensad un poquito. Si es una recta y ésta es la paralela, el ángulo de la inclinación es el mismo, es decir la pendiente es igual, ¿de acuerdo? Luego, tienes la ecuación de la recta, calcula la pendiente. ¿Cuál será la pendiente?*

E1: *m=2*

P: *Vamos a ver, hemos dicho que la pendiente de una recta es igual a m que es el coeficiente de x cuando y está despejada. ¿Qué ocurre aquí? Que hay que despejar la y,* $y=\frac{2x}{4}+\frac{3}{4}$*, entonces la pendiente sería* $m=\frac{1}{2}$*. Entonces la ecuación de la recta que pasa por el dicho punto es* $y=\frac{1}{2}(x-4)$*, esta sería la ecuación, si quiero puedo poner en la forma general, sería x-2y-2=0. Es que todo es igual, yo no entiendo* [942-954].

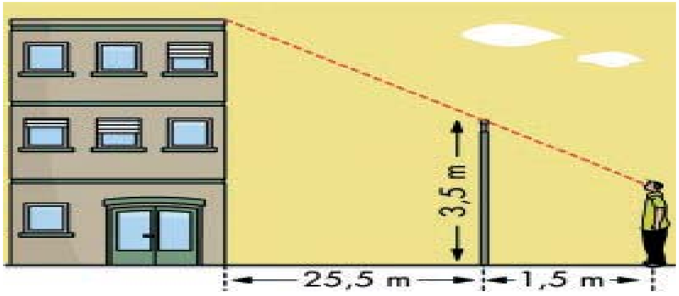
Por otra parte, **las tareas son planteadas, prioritariamente, en situaciones matemáticas**, aunque como regla se presentan unas cuantas actividades en situaciones de la vida real en contextos hipotéticos, o sea, “camufladas” con el pretexto de realizar alguna operación matemática. Los dos ejemplos que siguen, han sido los únicos planteados en situaciones de la vida real, que Pablo ha propuesto para resolver durante sus sesiones dedicadas al bloque “Elementos de Geometría”.

N40 (Reproducción). Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?



Pablo mismo traduce esta imagen al lenguaje matemático, o sea, representa dos triángulos sobre la pizarra, e invita a una estudiante resolver la tarea. La proporción que forma la estudiante es $\frac{162}{120} = \frac{h}{4}$, de ahí obtiene h=5,4 **cm**; no cuestiona el resultado ni se da cuenta de que es difícil que la altura de un árbol sea poco más de cinco centímetros, sobre todo cuando en el dibujo es más alto que la estatura de una persona, bien porque en la primera proporción ha pasado a centímetros y se ha fijado en ello, dejando en la segunda proporción los valores en metros y porque no interpreta el resultado[76]. Tras el comentario de Pablo, corrige la respuesta.

N41 (Conexión). Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165cm de altura, se situó a 1,5m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?



En esta tarea, igualmente, Pablo realiza la representación matemática de la imagen sobre la pizarra. Esta tarea, que es más compleja que la anterior y no se limita a la aplicación directa, ya ha resultado imposible de resolver para los estudiantes. Pablo pregunta si alguien ha sabido hacerla:

[76] Este hecho confirma los resultados de varios estudios que han indicado que una vez elegida la operación a realizar, los estudiantes la aplican mecánicamente sin volver al enunciado para verificar si la respuesta tiene sentido en el contexto de la pregunta planteada (Verschaffel et al., 2000; Vicente et al., 2008).

E: *Yo he puesto* $\frac{1{,}65}{1{,}5}=\frac{25{,}5}{h}$

P: *No, ¿alguien lo ha hecho?* [1019-1020].

Deja unos minutos para que piensen; los estudiantes hacen sus supuestos, sin embargo, son erróneos, entonces Pablo resuelve la tarea explicando la solución.

Siendo únicamente éstas las tareas planteadas en situaciones de la vida real en contextos hipotéticos, **no se ha dado la oportunidad de desarrollar habilidades de la matematización, las que precisamente necesitaban los estudiantes para abordar problemas realistas de la prueba.**

A su vez, los estudiantes **han tenido dificultades en entender los enunciados de problemas realistas**. Durante la prueba, en varias ocasiones, se dirigían a la investigadora para aclarar sus dudas al respecto, en otros casos, lo expresaban en el papel mismo, **así como se han sentido inseguros con algunos ítems de la prueba que contenían información irrelevante para la solución, que se debe a que los ejercicios y problemas del libro de texto presentan todos los datos necesarios para su resolución y normalmente se usan todos los que están, y indica a la falta de familiaridad con este tipo de problemas**.

Asimismo, los estudiantes, en general, **han sido capaces de abordar con éxito los ítems del grupo de reproducción de la prueba y la mayoría de ellos no ha sabido conectar varios pasos de un problema, explicar cálculos, interpretar representaciones más sofisticadas, razonar, comunicar y argumentar sobre asuntos matemáticos que implican relaciones lógicas y complejas.**

Así, por ejemplo, de la sub- área *espacio y forma*, la mayoría de los estudiantes (13 de los 15) ha sabido realizar el ítem siguiente, que requería descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar y realizar la operación sencilla de resta o suma para encontrar las variables desconocidas:

Pregunta 3: **CUBOS** *(Reproducción)*

En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados:

La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.

Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos que tiene la cara inferior del dado correspondiente que aparece en la foto.

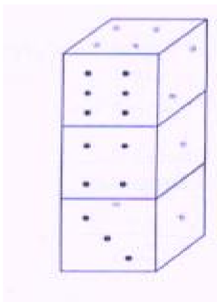
(a)	(b)	(c)

(d) (e) (f)

Sin embargo, el ítem 34 igualmente relacionado con los dados pero más complejo, ya solo ha sido capaz de realizarla la mitad de ellos (7 de los 15).

Pregunta 34: **DADOS 1** *(Conexión)*

A la derecha se pueden ver tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba.



¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y de abajo de los dados 2 y 3)?

En este ítem los estudiantes podrían llegar a la solución siguiendo dos estrategias diferentes: calculando los puntos de las caras que no se pueden ver, deduciendo de los puntos de las que se ven y sumándolos o bien razonando que si la suma de las caras opuestas es siete y hay tres cubos, en total dan 21 puntos y restándole los cuatro puntos de la cara de arriba obtendrían el resultado. Seis estudiantes han realizado esta tarea empleando la primera estrategia, más estándar, y un estudiante aplicó la segunda.

Es cierto que **las oportunidades de aprendizaje, observadas e inferidas en el Caso 1, no han favorecido al desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas, sino que éstas han resultado limitadas, reducidas a la reproducción, memorización y aplicación mecánica**. A pesar de que, según la programación, los estudiantes conocían los contenidos matemáticos de la prueba, **la adquisición superficial de los conocimientos y destrezas**, **la falta de experiencias en movilizar y aplicar sus conocimientos en una variedad de situaciones y contextos, mediante resolución de problemas de demanda cognitiva cada vez más alta, no ha favorecido a la actuación competente de los estudiantes**. Por otra parte, ya que el objetivo de la formación matemática no ha sido, precisamente, que los estudiantes supieran abordar problemas realistas, este hecho quizás no preocuparía demasiado, sin embargo, al terminar la Educación Secundaria, los estudiantes tampoco dominan los conocimientos y destrezas matemáticos básicos. Incluso parece que, en el caso de los problemas realistas, los estudiantes han tenido más éxito que a la hora de resolver problemas escolares, ayudándose del conocimiento no matemático, de sentido común o de la familiaridad con ciertos contextos y situaciones, lo que, en algún modo, ha compensando las carencias en el conocimiento matemático.

Sin ánimo de generalizar los resultados de la prueba de los estudiantes del Caso 1, nos gustaría hacer notar la coherencia de éstos con los resultados de los estudiantes españoles en las pruebas PISA en cuanto a la capacidad de aplicar sus conocimientos y destrezas a los problemas del mundo real, y cierta relación con los resultados de las pruebas de TIMSS, en cuanto a los conocimientos y destrezas matemáticos curriculares.

V.2. Resultados y discusión (Caso 2)

En este subapartado presentamos los resultados sobre las relaciones entre las OTL y las CM de los estudiantes relativos al Caso 2.

A partir del análisis de la información del Caso 2, observamos, por un lado, **las oportunidades de aprendizaje relativamente equilibradas en cuanto a los objetivos del aprendizaje, centradas parcialmente en el profesor y en la ejecución de tareas**

planteadas, exclusivamente, en situaciones matemáticas, mediante enfoques diferentes, y, por otro lado, **bajo nivel de dominio de los estudiantes**.

Según el modelo de OTL-CM elaborado, las oportunidades de aprendizaje proporcionadas a los estudiantes corresponden a las del *segundo nivel de la THE,* con la excepción de que no se han observado conexiones entre las Matemáticas y el mundo real, que según las relaciones consideradas podrían favorecer a la formación de las competencias matemáticas más avanzadas.

Con el fin de entender las relaciones entre OTL y CM en el Caso 2, presentamos nuestras reflexiones acerca de las actividades de Mery en el aula y las actuaciones de los estudiantes durante sus clases de Matemáticas y a la hora de resolver problemas realistas. De tal manera, comprobamos el modelo OTL-CM y discutimos su ajuste en cuanto a las relaciones entre las oportunidades de aprendizaje proporcionadas por el tipo de enseñanza experimentada y el nivel de dominio de los estudiantes. Tal como realizamos en el caso anterior, desglosamos los resultados en relación con las OTL consideradas: el foco matemático, las estrategias didácticas y el tipo de tareas.

a) Resultados relativos al foco matemático

Como se puede notar en el análisis de las clases grabadas, las sesiones de Mery se caracterizan por el cierto equilibrio de los focos matemáticos: la superioridad relativa del foco *conceptual y procedural*, acompañados con los focos *reasoning, structural y problem solving*, y la presencia de *efficiency y derivational*. Siendo así, **los estudiantes han tenido la oportunidad de conocer las diferentes facetas del conocimiento matemático.**

En cuanto al foco *conceptual y structural*, Mery presenta **los hechos y conceptos como parte de un todo, subrayando las conexiones entre diferentes nociones y entes matemáticos e infiriendo sus propiedades**. Así, por ejemplo, Mery introduce el concepto de logaritmo como la solución de ecuaciones exponenciales, partiendo de un caso particular, y a continuación lo generaliza para cualquier ecuación exponencial.

P: ***¿Qué es logaritmo? Cuando hemos estudiado ecuaciones exponenciales, hemos dicho que ecuaciones de tipo a^x=b donde a>0, a≠1 y b>0 son exponenciales*** *[...]* ***En particular, ¿cuál es la solución de la ecuación 2^x=8?*** (3). ***x=3.*** *¿Qué nos muestra el x este? x es aquel número al elevar 2 al el, nos da 8. Ahora, la ecuación tipo 2^x=7 también tiene solución, además x es un número al elevar 2 nos tiene que dar 7. Si* *queremos resolver la ecuación hemos de pensar a qué numero elevar 2 para obtener 7. Este mismo número se llama logaritmo con la base 2 de 7, $x=log_2 7$, es la solución de la ecuación nuestra, es decir si elevamos 2 al $log_2 7$ vamos a tener 7.* ***Logaritmo se llama la solución de la ecuación exponencial. En la ecuación anterior también podemos escribir como logaritmo, es decir $x=log_2 8$, $x=3$*** [30-45].

A continuación, Mery lo asocia con otras nociones matemáticas para facilitar la comprensión de los estudiantes.

P: ***Simplemente, en algunos casos podemos encontrar este número, y en otros no podemos acordarlos,*** *pero existen tablas logarítmicas donde se puede encontrar el valor aproximado, tal como,* ***por ejemplo, sabemos seno o coseno de 30^o, 45^o, 60^o son más conocidos que los demás, los sabemos de memoria, pero eso no significa que no exista sen 15^o o cos 33^o.*** *Existen tablas donde se puede consultar estos valores* [45-51].

Por último, de las condiciones que cumple la función exponencial hace inferencias para la función logarítmica y deducen sus propiedades, comprobándolas con algunos ejemplos.

P: Ahora en el caso general $x= log_a b$ […] *Ahora,* ***ya que el logaritmo tiene la relación directa con la función exponencial, entonces aquí también se cumplen las mismas condiciones. Es decir, la base del logaritmo es $a>0$, $a\neq 1$ y de aquí $b>0$****. Es decir, que $log_{-3} 4$ no existe, $log_1 10$ no existe ya que uno elevado a ningún número nos da 10, y $log_5 -25$ no existe* [52-57].

No obstante, **los lazos y relaciones se establecen, exclusivamente, dentro del área de la Matemática**, por ejemplo, **en ningún momento se menciona dónde y cómo se puede aplicar la función logarítmica (ni cualquier otra función que habían tratado) en las situaciones de la vida real o qué procesos permite describir**.

Análogamente, al introducir el concepto de vectores en el espacio, Mery pone ejemplos de Física de los vectores en el plano y en el espacio **para enfatizar los lazos entre los conceptos matemáticos y los de Física**.

P: … Por ejemplo, ***de los vectores en el plano, vosotros habíais pasado valores vectoriales de física tales como la velocidad, fuerza****. . ¿Y del espacio qué vectores habéis pasado?*

Por ejemplo, ***partícula cargadas de tensión*** *(electricidad),* ***E*** *¿no? […]*

P: *Bueno,* ***¿todas esas cargas qué crean?***

Es: *Campos.*

P: *Eso.* ***¿Qué hacen las cargas en sus campos? Se mueven, ¿no? Se mueven por las direcciones diferentes. Es decir, los trayectos de sus movimientos ¿qué son?***

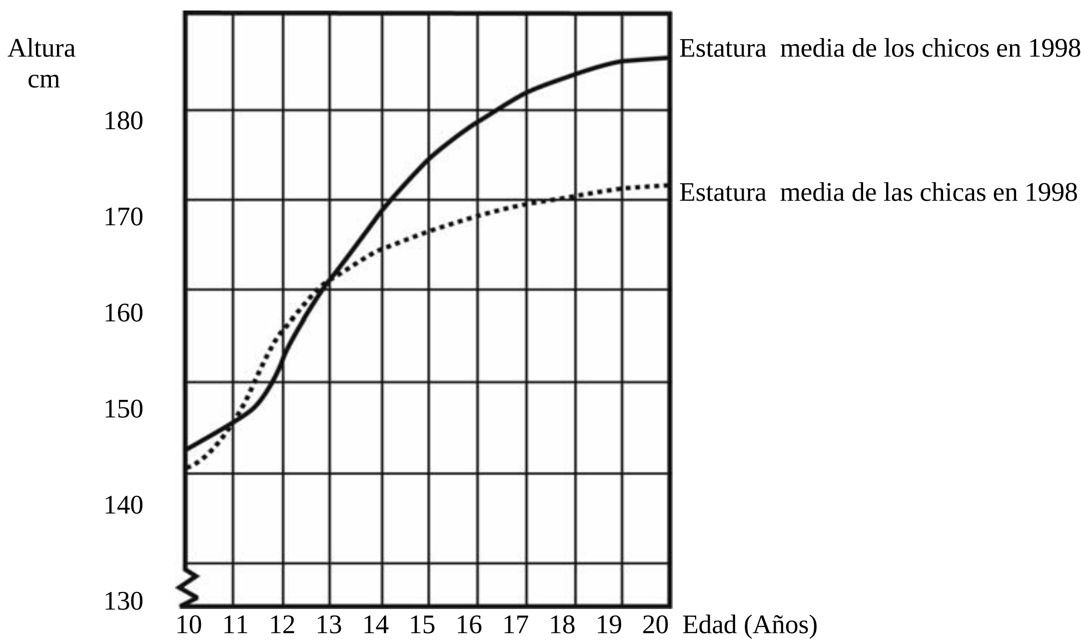
Es: *Son vectores*

P: *Si, son vectores.* **Esa sería la idea de un vector en el espacio***. Ya no es en el plano, ¿claro? Sino en el espacio* [330-346].

De este modo, **los hechos y conceptos se manejan y tienen sentido, exclusivamente, en el marco de la asignatura o en el de las materias afines**.

Esta presentación puramente formal de las Matemáticas ha limitado las oportunidades de los estudiantes para reconocer e identificar los conceptos y objetos matemáticos en otros contextos distintos, encontrar relaciones entre las Matemáticas y su entorno, y ampliar su visión acerca del aspecto funcional de las Matemáticas.

La dificultad que han tenido los estudiantes en resolver problemas realistas, incluso algunos sencillos, puede deberse a ese formalismo. Así, por ejemplo, el ítem “Crecer 3”, en el que a partir de la representación gráfica de dos funciones que describen la estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 han de señalar durante qué periodo de su vida son las chicas más altas que los chicos de su misma edad, la mayoría de los estudiantes no lo ha sabido abordar.



La incapacidad de descodificar e interpretar la representación gráfica refleja la falta de experiencia en establecer relaciones entre el fenómeno y la función que permite describir su cambio. ¿Será que todo un curso de la asignatura "Álgebra y Elementos de Análisis Matemático 9" dedicado a las funciones (función, gráfico de la función y su transformación, monotonía y extremos, periodicidad, etc.; funciones trigonométricas, potenciales, exponenciales y logarítmicas) ha sido estéril? **Resulta que el hecho de que los estudiantes puedan construir gráficos de las funciones más sofisticadas, determinar su dominio, intervalos de monotonía, etc., no implica que sepan aplicar sus conocimientos a una situación contextualizada mucho más sencilla**.

En cuanto al foco ***procedural***, cuando Mery explica **los procedimientos y operaciones, suele invitar a los estudiantes a que deduzcan las propiedades que usan y llama su atención hacia las condiciones que deben cumplir**.

E: (Calcula $log_{1/3} \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{81}} = -\frac{7}{6}$ con la ayuda de sus compañeros y de la profesora).

P: *Bien,* ***atención aquí a diferencia de la expresión que está bajo del signo de log, logaritmo sí puede tener valores negativos, como hemos visto. ¿Por qué es así? ¿De qué se deduce? De a^x =b…***

Es: *Del dominio de la función a^x =b.*

P: ***De que x puede tener cualquier valor de R*** [97-103].

O, en el otro ejemplo,

E: (Sale a la pizarra, escribe la expresión dada: $\frac{0,1\sqrt{b^3}}{c^3b^2}$ *a, b, c>0,* calcula su *lg*).

P: ***Tened en cuenta que podemos pasar de*** $\sqrt{b^3}$ ***a*** $b^{\frac{1}{3}}$ ***porque b>0*** [223-225].

Por su parte, **los estudiantes manejan con cierta soltura el lenguaje formal y simbólico, las operaciones y expresiones matemáticas**.

Así, por ejemplo, en el siguiente fragmento, en el marco de la ejercitación de conocimiento previo, resuelven una expresión trigonométrica con algunas sugerencias de la profesora.

E: (Escribe: *encontrar sen α si se da 2cos^2 (π-α)+5senα+2=0*).

Es: *Esto hemos pasado hace tiempo, ¿no?*

P: *Si. Vamos a ver, ¿que hacíamos aquí? Primero nos libramos de π, aplicando la fórmula de reducción, ¿no? Olvidaos por un momento del cuadrado de coseno, entonces cos (π-α), ¿qué nos da? Restamos de π alfa, ¿a qué cuarto pasa? Al segundo. En el segundo cuarto coseno no se cambia, se queda coseno y es negativo, pero tenemos coseno al cuadrado, entonces es positivo.*

E: (**Escribe la ecuación ya reducida** $2\cos^2\alpha+5\operatorname{sen}\alpha+2=0$ **y piensa cambiar sen por cos**).

Es: ***No, mejor poner en vez de*** $\cos^2\alpha$ ***la expresión*** $1-\operatorname{sen}^2\alpha$.

E: (Lo sustituye y sigue resolviendo).

P: *Entonces, ¿qué hemos usado aquí? La igualdad trigonométrica fundamental. ¿Cuál es, Ani?*

E: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha=1$

P: *Bien. ¿Qué hacemos? Designamos sen α = a, ¿qué condición ponemos sobre a?*

Es: $a \in [-1, 1]$ [166-182].

En otro ejemplo uno de los estudiantes resuelve una desigualdad exponencial: realiza un cambio de la variable, forma el sistema del conjunto de soluciones; mientras, Mery llama la atención de los demás estudiantes sobre el error que han cometido en el examen del tema.

E: (Sale a la pizarra, escribe: $9\cdot3^{2x}- 82\cdot3^x+9\geq0$, designa $3^x=t$ y resuelve la ecuación cuadrática $9t^2-82t+9=0$, encuentra las raíces: $t_1=\frac{1}{9}$, $t_2=9$).

P: *Atención, de aquí empezáis a cometer errores. ¿Dónde se encuentra el conjunto de soluciones, Tigrán?*

E: $(-\infty, \frac{1}{9}] \cup [9, +\infty)$

P: *Eso. Mirad aquí.* (Dibuja el intervalo mencionado). *¿Qué significa esto? Esto significa que* $t \leq \frac{1}{9} \cup t\geq9$.

E: (Escribe el sistema, sustituye t por 3^x y resuelve correctamente). $3^x\leq \frac{1}{9} \cup 3^x\geq9$

$\Rightarrow x\in(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ [116-124].

Los estudiantes suelen escribir los procedimientos y las operaciones de una manera ordenada y rigurosa, empleando el lenguaje formal y simbólico donde sea preciso. De esta manera, **usan con facilidad y entienden, cuando los emplea la profesora, los símbolos** como, por ejemplo, $\Rightarrow, \in, \notin, \cap, \cup, \exists, \varnothing$ y **expresiones matemáticas. Es evidente que los estudiantes están familiarizados con tal uso y han tenido la oportunidad de aprender a manejar y comunicarlos**, como se constata con **la notable importancia que Mery da al hecho de que los estudiantes aprendan el lenguaje formal, y sepan relacionar la expresión lingüística de una noción matemática con su expresión simbólica o representación matemática.**

Este hecho puede observarse en el siguiente fragmento, extraído de la sesión 5, en la cual la profesora hace revisión del tema impartido en la clase anterior.

P: ***¿Qué entendemos por la longitud de un vector?***

E1: *Es la longitud del segmento AB.*

P: ***¿Cómo se escribe?***

E1: $|AB|$ *[...]*

P: *Entre los colineales ¿qué vectores distinguimos?*

E4: *Unidireccionales y con direcciones diferentes.*

P: *Levón,* ***ven representa aquí vectores colineales***. (Sale a la pizarra, dibuja dos vectores paralelos).

P: *¿Por qué crees que son colineales?*

E5: *Porque se encuentran en dos rectas paralelas.*

P: *¿Pueden estar en la misma recta?*

E5: *Si.*

P: ***Pues represéntalos***. (Los representa).

P: *¿Cuáles son unidireccionales, Narek?*

E6: *Los colineales que tienen la misma dirección.*

P: *Araxia,* ***ven enséñanos en el dibujo que ha hecho Levón los unidireccionales y como los escribimos****...* [420-444].

P: *...* ***La palabra misma te da pistas, no unidireccionales, es decir tienen dirección contraria***. (Ahora sí, lo hace). ***Y ahora matemáticamente, ¿cómo lo escribirías? Mira a tu dibujo y lógicamente deduce el signo***.

E10: **(Escribe a ↑↓ b)** [463-468].

Cabe destacar que a la hora de resolver los problemas realistas de la prueba no han sido frecuentes los errores de carácter procedimental, más bien son de índole conceptual.

Por ejemplo, ninguno de los estudiantes ha realizado correctamente el ítem 17 "Examen de Ciencias", donde a partir de la nota media de los cuatro exámenes anteriores (60 puntos) y la nota del quinto examen (80 puntos), han de hallar la media de las notas tras los cinco exámenes, la mayoría ha obtenido como resultado 70 puntos ($\frac{60+80}{2}$). El hecho de no percibir la diferencia entre el valor medio de dos números y el valor medio de cinco números a partir de dos cantidades **muestra que los estudiantes no han comprendido en profundidad el concepto de media aritmética y/o no han tenido experiencias en hallar la media aritmética en otras situaciones.**

O, en el ítem "Caminar 1" y "Caminar 2"de la prueba, en el cual se da la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ que describe la relación aproximada entre n y P donde: n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros, y han de calcular, en primer caso, la longitud del paso y en el segundo, número de pasos, de los que han intentado resolver la tarea, la mayoría, ha despejado la incógnita en ambos casos y ha realizado los cálculos correctamente.

Durante sus clases, Mery **presta especial atención al hecho de que los estudiantes organicen bien los datos del problema y procedan en su resolución paso por paso**; **que al dibujar los cuerpos geométricos traten de visualizar todos sus elementos y utilicen diferentes estrategias (*efficiency*), entre ellas las del cálculo mental, para facilitar rapidez de las operaciones**.

Los dos fragmentos que siguen son ejemplos de tales actividades de la profesora. En el primer ejemplo, Mery invita a los estudiantes a realizar la operación de multiplicación a través de cálculo mental.

E: (Sale a la pizarra, escribe: $11 \cdot 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{1-x} < 5$).

P: *Primero qué hacemos, separamos los exponentes con variables.*

E: ($11 \cdot 25 \cdot 5^{x} - 10 \cdot 5^{-x} < 5$).

P: ***¿Cómo os he enseñado multiplicar 11 por un número de dos cifras?***

Es: (**Lo hacen mentalmente 11·25=275**).

P: ***Correcto. Dejamos estas dos cifras y entre ellos escribimos lo que nos de su suma*** [188-194].

Y en el segundo ejemplo, sugiere proceder en la solución de diferentes maneras y hace recordar la estrategia para simplificar una expresión de suma:

P: *…simplificar la expresión.* ***Quienes pueden simplificar sin dibujo, que lo hagan, quienes no, que dibujen los vectores****.* ***Cuando simplificamos una expresión de suma, ¿Qué hacemos, qué buscamos?***

E2: ***Miramos si hay componentes opuestos para reducirlos*** [542-545].

En las sesiones de Mery se da la oportunidad de activar y articular el razonamiento lógico-formal. **Los estudiantes, a su vez, son capaces de razonar matemáticamente, seguir encadenamientos de argumentos, articular axiomas, manejar demostraciones matemáticas**.

Los fragmentos que siguen ejemplifican cómo Mery promueve el desarrollo de la argumentación y razonamiento en sus estudiantes y cómo los estudiantes se defienden:

P: *¿Cuál sería el vector colineal al vector nulo?*

Es: *Cualquiera*

P: ***¿Por qué?***

E: ***Porque en el plano por el punto que no pertenece a la recta dada siempre se puede pasar una recta paralela a la dada*** [481-486].

Otro ejemplo:

P: *n. 324: ¿Es correcta la afirmación que vectores colineales al vector no nulo son colineales entre si? Si dos vectores son colineales con un vector no nulo, ¿podemos decir que son colineales entre si?* (Las opiniones de los estudiantes respecto a la afirmación se difieren)*. A ver, es una afirmación, entonces tenemos que confirmar que si es siempre así o no.* (Dibuja en la pizarra tres vectores). ***¿Por qué es correcto?***

E: ***Por la propiedad de las rectas que dice que si dos rectas son paralelas a la tercera son paralelas entre si*** [398-408].

De este modo, **los estudiantes son capaces de llevar discursos matemáticos cortos, a veces no suficientemente rigurosos**, **sin embargo, no manifiestan incomodidad o inseguridad en el plano matemático**. No obstante, **no ocurre lo mismo a la hora de**

resolver los problemas realistas. Los estudiantes han tenido dificultad en explicar o argumentar relaciones matemáticas en situaciones de la vida real. Este hecho probablemente se debe, por una parte, a que los estudiantes no están familiarizados con el modo en que se presentan los problemas: casi todos estos ítems van acompañados con alguna representación gráfica (diagramas de barras, de flechas, circular) y para su proceder han de saber descodificar e interpretarla; por otra parte, ya no se trata de deducir encadenamientos de los axiomas o teoremas matemáticos aprendidos a lo que están acostumbrados los estudiantes, sino de saber generalizar los formalismos a casos concretos.

Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes (22 de 25) ha realizado correctamente el ítem 15 "Exportaciones 2", en el que han tenido que aplicar el porcentaje directo a una cantidad dada, sin embargo, no han sabido explicar cálculos para demostrar cómo se obtiene 11% a partir de los datos dados, en el ítem "Los niveles de CO_2 1".

Asimismo, **los estudiantes han tenido la oportunidad de resolver problemas no rutinarios y no triviales, lo que se justifica por la presencia en las sesiones de Mery del foco *problem solving***. No obstante, **la mayoría de ellos no ha sido capaz de llevar a cabo problemas no rutinarios de la prueba**. Volveremos a este aspecto al tratar el tipo de tareas propuestas.

De este modo, **los estudiantes han tenido la oportunidad de aprender los conceptos y hechos matemáticos como unidades de información interconectados e interrelacionados entre sí, que tienen sentido solamente dentro del cuerpo matemático; de aprender a manejar y comunicar el lenguaje formal y simbólico, y las operaciones; de elaborar y seguir encadenamientos de axiomas y teoremas; de resolver problemas no rutinarios y no triviales**. **Esta manera de presentar las Matemáticas está totalmente desconectada y alejada de la experiencia y de la realidad del estudiante que, a pesar de que le permite actuar con cierta seguridad en el campo puramente matemático, le hace sentir impotente y confuso ante los problemas contextualizados y no familiares**.

b) Resultados relativos a las estrategias didácticas

Las estrategias didácticas que emplea Mery en sus clases determinan una enseñanza en la cual su papel se modifica según el propósito. En general, se la puede ver en dos patrones de actuación. **El primer patrón es cuando tiene protagonismo principal en**

cuanto a la exposición de los tópicos, procedimientos y soluciones mediante la estrategia explicación o entrenamiento. **Y en el segundo**, **hace participar a los estudiantes, planteándoles preguntas, invitando a trabajar en tareas, y les da la oportunidad de explorar y llegar a alguna idea o solución, compartir sus pensamientos**, empleando las estrategias didácticas **cuestionamiento, exploración y participación**.

El papel del estudiante, a su vez, también **es doble: atiende a las explicaciones de la profesora o contesta, explora, resuelve**. Por tradición, los propios estudiantes leen el enunciado de la tarea, organizan los datos en la pizarra, realizan el dibujo correspondiente, con la ayuda de la profesora cuando sea preciso. **Se les da la oportunidad de plantear el problema, pensar sobre las estrategias de resolución y elegir entre las posibles, pronunciar sus ideas al respecto y proceder en ello de modo autónomo, aunque siempre sancionado por la profesora.**

No obstante**, a pesar de que se les da la oportunidad de realizar ciertas actividades, ese papel activo no es exactamente el que, según Mialaret (1984), permite al estudiante mismo, a partir de su experiencia real, *descubrir el edificio matemático*, siendo la profesora quien conduce este descubrimiento, lo que conlleva el peligro de caer en una forma de enseñanza dogmática.** Este tipo de interrelaciones, donde no se debe dudar acerca de la autoridad intelectual de los Clásicos, del Profesor o del Libro (Ammosov, 2005), no favorece el desarrollo de las habilidades de discutir, criticar, oponer su opinión, impide un ambiente relajado para la discusión o cuestionamiento: cualquier intervención o respuesta del estudiante suele ser sancionada o evaluada. **La dificultad que han tenido los estudiantes en justificar y expresar sus argumentos fuera del contexto escolar, en parte, puede deberse a la falta de experiencia en estas habilidades**.

Durante las clases, Mery evalúa a sus estudiantes según cómo trabajan en alguna tarea en la pizarra y les hace preguntas de teoría, así como tiene en cuenta las notas de exámenes. Todas las tareas y las preguntas teóricas que plantea están relacionadas con el material impartido, aunque algunas pueden ser bastante complejas, sin embargo, no salen del contexto matemático, hecho que condiciona a los estudiantes a aprender a desenvolverse tan solo en este contexto.

Mery hace *diferenciación* en el tipo de preguntas o tareas planteadas a los estudiantes menos preparados y a los que pueden abordar cuestiones más complejas, para satisfacer las necesidades de unos y otros.

La activación y ejercitación de los conocimientos previos Mery las ha usado para la fijación y retención de los conocimientos adquiridos y para preparar el paso de lo aprendido anteriormente al aprendizaje de nuevos temas, de una manera significativa, involucrando a los estudiantes en la discusión o en la realización de las tareas.

Cabe destacar que Mery ha usado las estrategias didácticas anteriores, que pueden favorecer una actitud positiva de los estudiantes hacia las matemáticas, sin embargo, en las sesiones de Mery no hemos observado que emplee la estrategia didáctica *motivación*. A pesar de ello, los estudiantes han expresado su motivación hacia las matemáticas; excepto unos pocos estudiantes, los demás participaban activamente en las clases, se ofrecían salir a trabajar en la pizarra o contestar las preguntas de la profesora y se empeñaban en sacar buenas notas.

Creemos que la motivación de los estudiantes ha tenido un impacto favorable en cuanto al aprecio de las matemáticas, a pesar de que no hayan conocido debidamente su papel funcional.

En lo que se refiere al material didáctico, Mery ha utilizado principalmente el libro de texto, y consultaba problemas del otro libro que consideraba bueno, también utilizaba maquetas para visualizar los cuerpos geométricos. Debido a que el aula no ha dispuesto de ordenadores, no han tenido la oportunidad de acceder a otras fuentes de información o programas educativos.

c) Resultados relativos al tipo de tareas

Como se puede apreciar en el análisis de las sesiones, Mery **ha proporcionado a los estudiantes la oportunidad de trabajar, mayormente, en tareas del grupo de conexión, pero también en las del de reproducción y reflexión. Por tanto, los estudiantes han tenido la oportunidad de resolver problemas con demanda cognitiva diversa.**

De este modo, los estudiantes han sabido resolver en el aula tareas de complejidad creciente, como por ejemplo:

N 340 (Conexión) Se da un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$. Indica el vector X que tiene su origen y extremo en los vértices del prisma y que:

a) $AA_1+B_1C-X=BA$
b) $AC_1-BB_1+X=AB$
c) $AB_1+X=AC-X+BC_1$

Esta tarea se resuelve correctamente por uno de los estudiantes, la profesora se dirige a los demás estudiantes:

P: *¿Qué hacer para que se simplifique la expresión?*

Es: *Pasar x a la derecha, librarse del menos y BA a la izquierda* [696-697].

La siguiente tarea es más compleja y requiere conocer y manejar con cierta fluidez las propiedades de una pirámide, del punto medio, de rectas paralelas y saber justificar sus respuestas basándose en los teoremas correspondientes.

N 323 (Reflexión) Se da una pirámide con un triangulo equilátero en la base. Los puntos M, N, P y Q son puntos medios de las aristas AB, AD, DC, BC.

a) Halla todos los pares de vectores iguales,
b) Determina qué cuadrilátero se ha formado con los puntos MNPQ.

El estudiante lee el enunciado del problema, organiza en la pizarra los datos y dibuja una pirámide (Mery no se contenta con el dibujo y lo corrige para que se vieran mejor los triángulos).

P: *Bueno, ahora se dan cuatro puntos medios de dos aristas de la base y dos de lateral de tal modo que se forma un cuadrilátero. Has de indicar todas las pares de vectores iguales que se han formado. ¿Puedes? Dínoslos.*

E2: *MN y PQ.*

P: *¿Por qué son iguales?*

E2: *Porque tienen la misma dirección.*

P: *¿Por qué?*

E2: *Porque se encuentran en dos rectas paralelas.*

P: *¿Y por qué son paralelas?*

E: *Porque la figura que se ha formado es un paralelogramo.*

P: *Y yo digo, no, que es un trapecio.*

E: *Porque si en un triángulo unimos los puntos medios de dos lados, la línea media es paralela al tercer lado. Y por otro lado, tenemos dos rectas paralelas a la tercera, entonces son paralelas entre si.*

P: *Eso. ¿Y por qué son iguales? Igual por la misma propiedad, línea media es igual al medio del lado opuesto, es decir* $MN = \frac{1}{2} DB$ *y* $PQ = \frac{1}{2} DB$*, entonces son iguales. Muy bien, dinos otras pares.*

E2: *DP y PC.*

P: *¿Por qué?*

E2: *Porque son divididos por el punto medio* [373-393].

Por otra parte, los estudiantes, en general, **han sido capaces de abordar con éxito los ítems del grupo de reproducción de la prueba y la mayoría de ellos no ha sabido conectar varios pasos de un problema, explicar cálculos, interpretar representaciones más sofisticadas, razonar, comunicar y argumentar sobre asuntos matemáticos que implican relaciones lógicas y complejas.**

Así, por ejemplo, de la sub-área *cantidad*, todos los estudiantes han realizado correctamente el ítem "El tipo de cambio 1" y la mayoría de ellos (20 de 25), el ítem "El tipo de cambio 2".

Pregunta 11: **EL TIPO DE CAMBIO 1** *(Reproducción)*

Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de: 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling cambió 3.000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de cambio. ¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

Pregunta 12: **EL TIPO DE CAMBIO 2** *(Reproducción)*

Al volver a Singapur, tres meses después, a Mei-Ling le quedaban 3.900 ZAR. Los cambió en dólares de Singapur, dándose cuenta de que el tipo de cambio había cambiado a: 1 SGD = 4,0 ZAR. ¿Cuánto dinero recibió en dólares de Singapur?

Estas dos preguntas proporcionan toda la información pertinente con claridad, requieren reconocer equivalencias, aplicar procedimientos estándar (regla de tres) y realizar cálculos rutinarios.

Sin embargo, sólo cinco estudiantes han contestado correctamente la pregunta planteada en el ítem "El tipo de cambio 3" y han dado una explicación adecuada.

Pregunta 13: **EL TIPO DE CAMBIO 3** *(Reflexión)*

Al cabo de estos 3 meses el tipo de cambio había cambiado de 4,2 a 4,0 ZAR por 1 SGD. ¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio fuese de 4,0 ZAR en lugar de 4,2 ZAR cuando cambió los rands sudafricanos que le quedaban por dólares de Singapur? Da una explicación que justifique tu respuesta.

La mayoría ha contestado la pregunta erróneamente ya que la ha explicado como si hubiera sido realizado el cambio al revés, los dólares de Singapur a rands sudafricanos, aunque correctamente para este caso; más bien, por el malentendido del enunciado del problema.

Por otra parte, **todas las tareas son planteadas, exclusivamente, en situaciones científicas (matemáticas en este caso) y no sólo las que se relacionan con los tópicos grabados u observados, sino las tareas que manejan durante todo el curso**. Por tanto, **no se ha dado la oportunidad de desarrollar las habilidades de matematización, las que precisamente necesitaban los estudiantes para abordar problemas realistas de la prueba.**

A pesar de que durante la prueba los estudiantes no se dirigieron a la investigadora para aclarar sus dudas respecto a los enunciados o representaciones de los problemas realistas de la prueba, sus caras expresaban curiosidad y confusión al mismo tiempo. No cabe ninguna duda de que veían por primera vez este tipo de problemas, acompañados con imágenes o diagramas y presentados en una variedad de situaciones y contextos. **Los espacios dejados en blanco justifican la dificultad que han tenido en entender los enunciados de los problemas realistas, representaciones gráficas y en aplicar sus conocimientos y destrezas en situaciones no familiares. No es de extrañar, ya que las tareas presentadas en los libros de texto tienen todos los datos necesarios presentes, rara vez se acompañan con alguna representación gráfica y, además, no hace falta pensar en el enunciado sino en la solución.**

Acorde con las tradiciones en la enseñanza de matemáticas en Armenia, descritas en el Capítulo III, **en lo sucedido en las clases de matemáticas es fácil reconocer las**

prioridades y pretensiones que tienen en la formación matemática de los estudiantes y su divergencia con las prioridades del proyecto OCDE/PISA. **Es obvio que las oportunidades de aprendizaje proporcionadas en el Caso 2 no hayan favorecido el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas, evaluadas en este proyecto**. Pues, no se ha enseñado a reconocer regularidades en su vida cotidiana, elegir de los numerosos datos lo más importante, de expresar, defender o criticar su punto de vista utilizando inteligentemente los argumentos matemáticos, de saber extraer información de los gráficos, tablas o diagramas, de aplicar sus conocimientos a situaciones del mundo real. Además, los tópicos de la sub-área *Incertidumbre* relacionados con la probabilidad y estadística no han estado incluidos en la Programación de ninguno de los nueve grados seguidos por estos estudiantes.

De este modo, **los resultados relativos al Caso 2 sugieren que las OTL proporcionadas a los estudiantes les han permitido dominar y manejar los conocimientos y destrezas matemáticos curriculares, sin embargo, han limitado la capacidad de aplicarlos fuera del contexto escolar**.

En el siguiente capítulo presentamos conclusiones de la investigación.

CAPÍTULO VI:

CONCLUSIONES

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

CONCLUSIONES

Al emprender nuestra investigación nos hemos preocupado por comprender acerca de por qué la mayoría de los estudiantes presentan dificultades a la hora de aplicar y de usar matemáticas en situaciones usuales de la vida real, buscando la respuesta a través de las posibles relaciones entre las OTL, desde la perspectiva de las actividades del profesor en el aula, y las CM de los estudiantes, en cuanto a sus capacidades de aplicar la comprensión y conocimiento matemáticos a situaciones de la vida real, con el fin de arrojar alguna luz sobre los procesos de la enseñanza-aprendizaje en los términos expuestos.

Como hemos mencionado en el capítulo III, los dos casos estudiados han tenido un doble interés: particular, por una parte, pues nos interesamos en aprender acerca de dos realidades particulares concretas, y general, dado que estos dos casos nos han servido como instrumentos para generar y validar el modelo teórico.

En los siguientes subapartados presentamos las conclusiones relativas a las relaciones entre OTL y CM para ambos casos, nuestras aportaciones y concluimos acerca de la adecuación del diseño aplicado, las limitaciones de nuestro estudio y cuestiones que han quedado abiertas.

VI.1. Conclusiones relativas a los dos Casos

A partir del estudio realizado es posible delinear las siguientes conclusiones.

En cuanto a los resultados obtenidos en el Caso 1, han mostrado que el proceso de la enseñanza-aprendizaje de matemáticas en el cual se proporcionan unas OTL limitadas en la conjunción con otros factores desfavorables, como el conocimiento previo insuficiente de los estudiantes, la desmotivación del profesor y de los estudiantes, está condenado al fracaso.

Por otra parte, los resultados del Caso 2 revelan que incluso cuando se dan unas OTL relativamente equilibradas, pero sin salir del contexto matemático, la capacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos fuera del contexto escolar sigue siendo insatisfactoria.

La diferencia en los resultados que observamos, es que en el Caso 1 los estudiantes carecen de los conocimientos y destrezas curriculares y, consecuentemente, no son capaces de aplicarlos; mientras en el Caso 2 dominan los conocimientos y destrezas curriculares, sin embargo, no son capaces de aplicarlos a situaciones de la vida real. Este hecho confirma la premisa de que para una actuación competente es imprescindible un amplio abanico de conocimientos matemáticos y destrezas, sin embargo, esto no es suficiente.

Por otro lado, en el Caso 2 es llamativa la ausencia de cualquier conexión de las Matemáticas con el mundo real, lo que convence que aun cuando se movilizan estos conocimientos y destrezas, no obstante, quedando exclusivamente en el plano matemático, impiden a los estudiantes transferirlos a las situaciones diferentes de las aprendidas, o sea, abstraer del contenido matemático y generalizar sus conocimientos a situaciones de la vida real.

Como advertía Freudenthal en su discurso en 1968, la esperanza de que los estudiantes sean capaces de aplicar sus conocimientos siempre cuando lo requiera la situación, sin haberles enseñado previamente ninguna relación con su uso, resulta vana. Este acercamiento puramente matemático tiene su origen en *el esnobismo intelectual* (Ammosov, 2005) o en la pedagogía academista: el desprecio a lo cotidiano y a las habilidades frente a lo elevado y a las ciencias. Por otra parte, por ejemplo, el análisis de los resultados en el estudio PISA 2003 de Holanda, que sigue una instrucción matemática inspirada en los principios de la RME, ha llevado a recomendar poner más énfasis en la matemática formal y abstracta en la educación secundaria (Doorman et al., 2007).

Desde nuestro punto de vista, el equilibrio entre estos dos extremos podría ser una posible solución del problema.

De ahí, podemos conjeturar que si en el Caso 2, junto con las OTL proporcionadas, los estudiantes hubieran tenido la oportunidad de conocer y establecer relaciones entre diferentes entes matemáticos y los fenómenos del mundo real y de aplicar sus conocimientos a los problemas planteados en situaciones de la vida cotidiana, los resultados obtenidos en la prueba habrían sido significativamente mejores.

En lo que se refiere al Caso 1, el problema reside en las experiencias anteriores de los estudiantes, por lo que inferimos que durante su escolaridad han tenido pocas oportunidades para el aprendizaje significativo. En este contexto, creemos que el profesor estudiado, aunque en cierta medida pudiera cambiar sus actividades adaptándolas al rendimiento de sus estudiantes, sin embargo, difícilmente lograría modificar sus competencias matemáticas sobre la base de los vacíos importantes en sus conocimientos básicos.

De este modo, cabe destacar la importancia de atender las diferentes facetas del conocimiento matemático a lo largo de la formación escolar ya desde la enseñanza primaria. Particularmente, la inseguridad y la lentitud en el cálculo y en el manejo de los resultados numéricos que notamos en las actuaciones de los estudiantes, son fruto de escasas oportunidades anteriores para una asimilación íntegra de los conocimientos y para el cálculo mental, que han impedido la evolución rápida posterior de los estudiantes (Mialaret, 1984). Asimismo, por ejemplo, la falta de las habilidades para un procedimiento matemático tan básico como "despejar", reside en las experiencias poco significativas anteriores de los estudiantes al respecto.

Tal como hemos mencionado en el apartado II.3.4, el descuido de alguna de las facetas principales del conocimiento matemático, produce desequilibrios en los conocimientos y destrezas de los estudiantes. Ciertamente, en el Caso 1, la ausencia entre las OTL de focos matemáticos tan importantes como *problem solving* y *reasoning*, e hincapié, a su vez, en los conceptos y procedimientos sin debida conexión entre entes matemáticos, ha provocado graves lagunas en los conocimientos y destrezas de los estudiantes. Es notable la diferencia en el uso del lenguaje simbólico, teoremas y axiomas, la seguridad en el dominio de resultados numéricos, procedimientos y técnicas, en el planteamiento y resolución de problemas en el aula de los estudiantes del Caso 2, que han tenido la oportunidad de experimentar de manera relativamente equilibrada los diferentes procesos y habilidades matemáticos, aunque, como mencionamos, exclusivamente en el plano matemático.

En cuanto a las estrategias didácticas (explicación, entrenamiento, cuestionamiento, participación y exploración) que condicionan la interacción entre el profesor y el estudiante y determinan el papel de cada uno en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el Caso 1, los estudiantes han tenido pocas oportunidades para desempeñar un papel activo, y en el Caso 2 han tenido más oportunidades, sin embargo, su papel no ha sido suficientemente activo, ya que se combinaba con la intervención autoritaria y sancionadora de la profesora. Este hecho sugiere que las escasas oportunidades para una participación activa de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento no han favorecido el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas.

Por otra parte, se ha confirmado una fuerte relación de las CM de los estudiantes con la oportunidad de resolver cierto tipo de tareas. En el Caso 1 observamos la ejercitación, sobre todo, de tareas del grupo de reproducción, planteadas, mayormente, en situaciones matemáticas; en el Caso 2, aunque prioritariamente resuelven tareas del grupo de conexión, sin embargo, tan solo en situaciones matemáticas. De ahí, es evidente la importancia tanto de la demanda cognitiva de la tarea como su presentación en diferentes situaciones y contextos. Además, es importante intentar modificar los sistemas de creencias de los estudiantes acerca de los problemas escolares, rompiendo sus expectativas de que todo problema aritmético se resuelve aplicando las cuatro operaciones o sus diferentes combinaciones, proponiendo problemas cuyo enunciado contiene datos superfluos, problemas sin solución o con múltiples soluciones y potenciando el uso de distintos sistemas de representación (Callejo, 2008).

En esta línea, cabe mencionar que Malaty (2004), en su articulo "*What are the reasons behind the success of Finland in PISA?*", indica que una de las causas del éxito de los estudiantes finlandeses en las pruebas PISA, es que las tareas utilizadas en los estudios PISA se parecen extremadamente a las que se utilizan en las escuelas finlandesas. Mientras, como observamos en nuestro estudio, los estudiantes en ambos casos han tenido dificultades incluso en entender la forma de presentación, el enunciado de los problemas, se han quedado confusos ante los datos irrelevantes, porque no están presentadas de esta manera en el libro de texto y no han practicado en sus clases de matemáticas. Asimismo, estos resultados reflejan una realidad documentada por varios estudios (Greer, 1993; Verschaffel et al., 1994; 2000; Yoshida et al., 1997) acerca de la dificultad que presentan los estudiantes a la hora de resolver problemas realistas semejantes a los de PISA.

Hay que notar que los resultados de nuestro estudio, relacionados con el bajo rendimiento mostrado por los estudiantes del Caso 1 al resolver los problemas de prueba, en general, reflejan los resultados de los estudiantes españoles en las pruebas internacionales PISA[77].

Respecto a este último aspecto, cabe destacar que los resultados del informe PISA son cuestionados y criticados debido a que la noción de CM de este proyecto no coincide

[77] Para los estudiantes armenios no disponemos esa información, debido a que Armenia no ha participado en ninguna de las pruebas PISA.

con las prioridades y objetivos que varios países tienen para la formación matemática de sus estudiantes, por lo que en este tipo de evaluaciones salen beneficiados los países que han adaptado la noción de competencia en los mismos términos y, además, son rara vez capaces de explicar cuestiones culturales y expectativas sociales (Bonnet, 2002; Osborn, 2004). Desde esta perspectiva, los estudiantes de estos países no hacen nada más que aplicar sus conocimientos a las situaciones conocidas y practicadas, en cierto modo, rutinarias para ellos.

Sin entrar en el debate acerca de los resultados de los estudios a gran escala, desde nuestro punto de vista, el propósito principal en la formación matemática sigue siendo conseguir una sincronía entre lo formal y lo cotidiano, o de acuerdo con Schoenfeld (1988), facilitar a los estudiantes a aprender a pensar matemáticamente, lo que implica dominar tanto procedimientos y hechos, como comprender las conexiones entre ellos y ser capaz de aplicar con flexibilidad y significado el conocimiento matemático formal en varias situaciones.

De este modo, los resultados relativos al Caso 1 confirman que las escasas OTL que favorecen el aprendizaje significativo de las matemáticas limitan tanto la adquisición de los conocimientos y destrezas matemáticos básicos como la capacidad de aplicarlos en situaciones de la vida real, estando lejos así del principal propósito de la formación matemática, en este caso no se ha cumplido ni siquiera la condición necesaria. En lo que se refiere al Caso 2, estamos ante un hecho casi universal que "*constituye un dramático fracaso de la instrucción*" (Schoenfeld, 1988, p. 7): cuando los estudiantes capaces de realizar operaciones simbólicas en un contexto del aula, demostrando "dominio" de una materia determinada, no logran conectar los procedimientos formales con los objetos del mundo real. En este Caso, aunque se cumpla la condición necesaria para aprender a pensar matemáticamente, en términos de este autor, la condición suficiente de ser capaz de aplicar con flexibilidad y significado el conocimiento matemático formal en una variedad de situaciones, deja bastante que desear para ser cumplida.

Ahora bien, como hemos visto, el objetivo de aprendizaje, en los dos casos estudiados, no ha sido que los estudiantes adquirieran tales competencias, por lo que, no es de extrañar que las actividades de ambos profesores no fuesen dirigidas especialmente para su desarrollo y parece evidenciarse que, en el caso contrario, las mismas actividades de los profesores no hubieran sido adecuadas.

Los resultados obtenidos sugieren que para promover el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas de los estudiantes, es preciso prestar más atención a las actividades que movilizan estas competencias, particularmente, a los procesos de matematización a través de la resolución de problemas originales y creativos en diferentes situaciones y contextos, con estrategias, procedimientos y soluciones múltiples; al trabajo en los procesos de razonamiento, argumentación y justificación mediante la implicación y participación de los estudiantes en discusiones y debates; a la búsqueda de regularidades entre matemáticas y situaciones del mundo real que atribuya sentido a los conceptos impartidos.

VI.2. Conclusiones relativas al Modelo OTL-CM

Con este estudio hemos pretendido aproximarnos a un problema que preocupa, tanto a los profesores, por sentirse desarmados y desanimados ante las exigencias que parecen cada día más inabordables, como a los investigadores y formadores en Educación Matemática, preocupados por la formación inicial y continua de los profesores. Parece lógico que para un desarrollo integral de los estudiantes haya que repensar el acceso a la formación docente[78], así como, profesionalizar y reorientar la formación de los maestros y de los profesores de matemáticas. Las nuevas tendencias educativas orientadas hacia las competencias obviamente habrán de cambiar aproximaciones tradicionales a la enseñanza que, en una primera instancia, implica a este gremio, el *verdadero gestor del cambio* (Azcárate, 1998).

Nuestra aportación en este sentido es el modelo OTL-CM, que trata de explicar y predecir los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje, en términos de que ciertas OTL con determinadas características, clasificadas según niveles de la THE, pueden favorecer al desarrollo de ciertas CM.

Los dos casos que implícitamente nos han ayudado a generar el modelo teórico, al mismo tiempo han servido para constatar su adecuación. En el Caso 1, hemos observado la coherencia del modelo, ya que, tal como predice, las OTL correspondientes al primer

[78] En esta línea, Contreras et al (2012, en prensa) han documentado la deficiente formación matemática de los futuros maestros, a partir del estudio de sus competencias numéricas; Sáenz (2007), a su vez, ha comparado las competencias PISA de los estudiantes para maestro con los estudiantes de 15 años, y ha registrado los resultados poco satisfactorios de aquellos. Ambos estudios invitan a reflexionar sobre el proceso de acceso a los estudios de magisterio.

nivel de la THE favorecen actuaciones menos competentes de los estudiantes. En el Caso 2, las OTL observadas corresponden al segundo nivel de la THE, excepto la desconexión total entre las Matemáticas y el mundo real, hecho que consideramos como la razón principal por la que los estudiantes no hayan llegado a alcanzar el nivel predicho por el modelo para este nivel de la THE.

No obstante, serán de utilidad estudios posteriores que permitan futuros refinamientos y mejoras del modelo.

Hemos visto que los objetivos del profesor respecto al aprendizaje de las Matemáticas, tienen un papel importante a la hora de determinar las oportunidades de aprendizaje. Aunque es sabido que los objetivos del profesor no son independientes de sus concepciones acerca de la Matemática, su enseñanza y aprendizaje o de su conocimiento profesional, no obstante, al tener presente ciertos objetivos, le podrían ayudar a modificar y mejorar sus recursos para su alcance. El énfasis en qué ha de aprender el alumno hace cambiar la tarea tradicional del profesor que ha consistido en *enseñar* hacia la de *ayudar a aprender* (Morales Vallejo, 2006). Siendo así, es preciso que los futuros profesores vayan aprendiendo a formular objetivos de aprendizaje generales y más concretos para cada unidad didáctica, distinguir entre medios y fines, buscar los recursos y estrategias necesarias y analizar su adecuación para conseguirlos, así como planificar y seleccionar tareas para el desarrollo de las competencias matemáticas concretas. En lo que se refiere a sus formadores, su papel es orientarles, haciendo ejemplares sus clases en cuanto a *ayudar a aprender*, hacerles conocer y familiarizarse con tales recursos y estrategias, y revelar su potencialidad a la hora de facilitar el desarrollo de diferentes procesos cognitivos de los estudiantes.

Al describir y explicar las relaciones implícitas y explicitas entre los tres niveles de la THE y los tres niveles en las actuaciones de los estudiantes, parece obvio que una *buena práctica* (Climent y Carrillo, 2007) es la que considera como objetivo el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas, o sea, la que corresponde al tercer nivel de la THE, que a su vez, supone la diversidad de focos matemáticos con el mayor énfasis en los focos *problem solving*, *reasoning* y *efficiency*, la resolución de problemas que invitan a conectar y reflexionar en situaciones y contextos diferentes; el uso de las estrategias didácticas que potencian la implicación de los estudiantes en la indagación y exploración, les permiten llegar a las ideas, soluciones y respuestas y compartirlas públicamente (exploración y participación) y otras relacionadas con la necesidad de motivar a los estudiantes, tener en cuenta sus conocimientos previos, características y intereses individuales.

Asimismo, en términos de Schoenfeld (2011), que reflexiona sobre el *profesor experto* (*teacher expertise*), si la pericia en la enseñanza es la culminación del proceso del desarrollo, lo que ha de desarrollar y cambiar un profesor, son sus *recursos*, *objetivos y orientación*. En el marco de nuestro trabajo, si tomamos como punto de partida el primer nivel de la THE, entonces cada vez, ampliando y subiendo (complicando) sus objetivos el profesor pasaría al segundo nivel, culminando en el tercer nivel de la THE, lo que supondría el desarrollo y cambio en los objetivos del profesor. Desde esta perspectiva, un profesor experto es el que da más oportunidades para el desarrollo de las competencias matemáticas avanzadas.

Perrenoud (2008), a su vez, entre las *diez nuevas competencias para enseñar* descritas en su homónimo libro -que según el autor no son las habilidades más evidentes que siguen siendo de actualidad para "hacer la clase", sino que se ha hecho hincapié "en *lo que cambia* y, por consiguiente, en las competencias que representan un *horizonte*, más que una experiencia consolidada" (p.8, énfasis en el original)- podemos encontrar: organizar y animar situaciones de aprendizaje, gestionar la progresión de los aprendizajes, implicar a los estudiantes en sus aprendizajes y en su trabajo o utilizar las nuevas tecnologías; son algunas de las competencias que necesitan los profesores para propiciar las oportunidades de aprendizaje que corresponden al tercer nivel de la THE.

De esta manera, el modelo OTL-CM puede ser aplicado a otras prácticas de enseñanza como instrumento que puede ayudar a explicar e interpretarlas, tanto en términos de una buena enseñanza, como de un profesor experto o competente. No obstante, como ya hemos mencionado, asumimos que pueden existir otros modelos que describan, explican y predigan los mismos fenómenos, incluso de otra manera mejor. Asimismo, reconocemos que un modelo, por muy bueno que sea, nunca llegará a explicar e interpretar con exactitud los procesos tan complejos como son la enseñanza y el aprendizaje que consideran tanto factores internos como externos interrelacionados entre sí.

VI.3. Adecuación del diseño de la investigación, limitaciones y futuras perspectivas

Respecto a la adecuación del diseño de la investigación al objetivo propuesto, creemos que *estudio de casos* (Stake, 2007) ha respondido a la necesidad de estudiar en profundidad los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para una primera aproximación a la comprensión de las relaciones entre OTL y CM.

Por otra parte, al elegir dos casos con diferentes tradiciones en la enseñanza de las matemáticas, hemos obtenido datos interesantes y ricos en significado. Asimismo, el instrumento de recogida de información acerca de las OTL nos ha proporcionado datos suficientes para aproximarnos al problema, excepto las limitaciones que exponemos más adelante, y el instrumento de análisis, ha resultado una buena lente para identificar las actividades del profesor en el aula.

En lo que se refiere al instrumento de obtención de los datos sobre CM de los estudiantes, la cantidad de los ítems de la prueba nos ha asegurado la cobertura de los tres grupos de procesos cognitivos que se requerían, los cuatro sub-áreas y diferentes situaciones y contextos, y ha proporcionado datos valiosos y significativos. Es cierto que el análisis cualitativo de los datos ha sido bastante laborioso y con un número más reducido de los ítems, resultaría más factible. Sin embargo, dado que nuestro objetivo ha sido identificar y describir las CM de los estudiantes de un modo más general, y categorizar según los niveles de dominio de PISA 2003, consideramos adecuados los instrumentos que usamos. Creemos que el diseño de nuestra investigación puede ser transferido a otros estudios con objetivos y características similares a los de este estudio con posibles adaptaciones o modificaciones si precisa el caso.

En cuanto a las limitaciones de la investigación, una de ellas que encontramos en nuestro estudio es que en el Caso 1 el profesor estudiado ha impartido clases de matemáticas tan solo en el último año de la Secundaria. Somos concientes de que es difícil extraer conclusiones sobre la relación entre las oportunidades dadas por el profesor y las competencias de los estudiantes partiendo del análisis de las observaciones de un solo profesor, porque tales competencias no son fruto solo de un año académico, sino que se adquieren a lo largo del tiempo. Parece que el funcionamiento mismo del sistema educativo no permite hacerlo de otra forma debido a que, por un lado, en España, los profesores no mantienen el mismo grupo de estudiantes durante todo el proceso de la instrucción, y de otro, no ha sido viable estudiar a los profesores de matemáticas que tuvieron los estudiantes durante los primeros tres años de Secundaria: ninguno de ellos seguía en el mismo centro.

Con el objeto de solventar en parte esta dificultad, hemos tratado de construir el perfil hipotético del profesor vivido por los estudiantes durante sus estudios en la ESO, aunque, al no formar parte de este estudio la variable "tiempo de enseñanza con los mismos alumnos", finalmente decidimos no presentar estos datos en el informe de la investigación.

Una opción para las futuras investigaciones podría ser el estudio longitudinal con el mismo grupo de estudiantes durante sus estudios en la ESO.

La presente investigación se ha limitado al estudio de las relaciones entre las OTL proporcionadas por el profesor, sin preocuparnos acerca de los factores que en parte influyen en estas OTL, como, por ejemplo, el currículo, el libro de texto, horas dedicadas a una materia, creencias y conocimiento profesional del profesor. Algunos de los factores mencionados podrían ser el foco de interés de futuros estudios.

Particularmente, como una de las direcciones principales en la que actualmente se investiga en la Universidad de Huelva desde nuestra área es indagar acerca del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[79]) del profesor y sus correspondientes subdominios para distintos niveles educativos (entre estos trabajos podemos destacar las tesis doctorales de Ribeiro (2010), que ha estudiado el MKT de dos maestras de primaria, y de Sosa (2011) que ha indagado acerca del MKT de dos profesoras de bachillerato; así como, varias publicaciones realizadas por Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2010); Sosa y Carrillo (2010); Carrillo (2011); Figueiras et al. (2011); Ribeiro y Carrillo (2011), al respecto), sería interesante el estudio del MKT desde la perspectiva de las OTL y su vinculación con las competencias matemáticas de los estudiantes, relacionando el MKT del profesor con la demanda cognitiva de las tareas que selecciona y propone o con el énfasis que pone en diferentes habilidades o procesos matemáticos.

Sin duda la presente línea de investigación requiere más estudios que proporcionen conocimientos prácticos imprescindibles para saber cómo se facilita el desarrollo de las competencias matemáticas o cómo se las evalúa y qué herramientas y recursos necesita el profesor para llevarlo a cabo en su aula. Estudios con enfoques más particulares como, por ejemplo, en la resolución de problemas, centrando en el tipo de tareas, contextos, modos de resolver, relacionándolo con una competencia particular como modelización matemática o argumentación, etc. o más bien con los tres grupos de competencias matemáticas, podrían servir de referencia a los profesores en práctica.

[79] De la expresión inglesa Mathematical Knowledge for Teaching.

Además, sería interesante fijarse e indagar en algún área concreta o en unos tópicos matemáticos específicos y estudiar las competencias matemáticas respectivas. Asimismo, reduciendo el número de estudiantes a estudiar, explorar acerca de cómo adquieren tales competencias matemáticas, igualmente presenta gran interés y es de utilidad enorme para mejorar y regular las relaciones entre los procesos de la enseñanza y del aprendizaje.

Por otra parte, es necesario difundir en los centros educativos y hacer conocer a los profesores los resultados de estos estudios que pueden provocar propuestas de mejora o dar lugar a perspectivas innovadoras de la enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics,* 47, pp. 125-143.

Abrantes, P. (2005). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. En A. Miguez (Comp.), *Didáctica de la aritmética* (pp. 82-94). Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Agar, M. (1996). *The Professional Stranger*. San Diego: Academic press.

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Graó.

Alsina, C. (2008). La vuelta al mundo buscando las ocho competencias. En M. Hervás (Coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 9-22). Madrid: MEC.

Alvira, F. (1983). Perspectiva cualitativa – perspectiva cuantitativa en la metodología sociológica. *Revista Española de Investigaciones Sociológicas*, 22, pp. 53-57.

Ammosov, Y. (2005). (Original en ruso)[80]. El fracaso de la educación rusa en las pruebas internacionales. *Asociación Comunicativa de Rusia*. Disponible en http://www.russcomm.ru/rca_news/2005/2005_09_04.shtml [Consulta realizada 28.05.2007].

Andrews, P. (2005). *The mathematics education traditions of Europe (METE) project: methodological perspectives and instrument development.* Presented at the biennial conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI), Nicosia, Chipre, 23 de agosto, 2005.

Andrews, P., Carrillo, J., Climent, N. (2005). *Proyecto "METE": El foco matemático.* Comunicación presentada al IX Simposio de la SEIEM, Córdoba, septiembre, 2005.

Aristóteles (2003). *Ética a Nicómaco*. Colección clásicos en español. Santa Fe: El Cid Editor.

[80] Аммосов, Ю. (2005). Провал российского образования на международном тестировании. *Российская Коммуникативная Ассоциация (РКА).* Доступно на сайте http://www.russcomm.ru/rca_news/2005/2005_09_04.shtml [Консультация реализована 28.05.2007].

Atanasyan, L., Butuzov, V., Kadontsev, S., Kiselyova, L. y Poznyak, E. (2001). (Original en armenio)[81]. Geometría 9. Ereván: Astxik Gratun.

Ausubel, D. (1982). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona. Paidós.

Azcárate, P. (1998). La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. *RELIEVE*, 3 (2).

Azcárate, P. (1999). Metodología de enseñanza. *Cuadernos de pedagogía*, 276, pp. 72-78.

Ball, D. (1988). *Research on Teaching Mathematics: Making Subject Matter Knowledge part of the Equation*. East Lansing, National Center for Research on Teacher Education, Research Report 88-2.

Ball, D. (2003). Mathematical proficiency for all students: toward a strategic research and development program in mathematics education. (DRU-273-OERI) *Rand mathematics study panel for office of educational research and improvement*. Santa Monica, CA.

Ball, D. y Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principle and standards for school mathematics*, pp. 27-44. Reston, VA: NCTM.

Banicky, L. (2000). Opportunity to learn. *Education Policy Brief*, 7. College of Human Resources, Education & Public Policy. University of Delaware.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Barriga, A. (2006). El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles educativos*, 28 (111), pp. 7-36.

Bartolomé, M. (Coord.) (1992). *Investigación cualitativa en educación*. Monográfico Revista de Investigación Educativa, 20 (2).

[81] Աթանեսյան, Լ., Բուտուզով, Վ., Կադոմցեվ, Ս., Կիսելյովա, Լ. և Պոզնյակ, Է. (2001). Երկրաչափություն 9. Երևան: Աստղիկ գրատուն.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Philadelphia: Open University Press.

Bericat, E. (1998). *La integración de los métodos cuantitativos y cualitativos en la investigación social*. Barcelona: Ariel.

Berliner, D. (1976). Impediments to the study of teacher effectiveness. *Journal of Teacher Education,* 27, pp. 5-13.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16 (2), pp. 105-125.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Blanco, B. y Blanco, L. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números*, 71, pp. 75-85.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon*, 25, pp. 49-60.

Blanco, L. (2005). El Informe PISA como instrumento de evaluación del sistema educativo. *Gaceta de la RSME,* 8*(*3), pp. 713-724.

Bloom, B., Engelhart, M., Furst, E., Hill, W., Krathwohl, D. (1972). *Taxonomía de los objetivos de la educación: clasificación de las metas educacionales*. Manual 1. Buenos Aires: El Ateneo.

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: teaching styles, sex and setting*. Buckingham: Open University Press.

Bonnet, G. (2002). Reflections in a critical eye: on the pitfalls of international assessment: knowledge and skills for life: first results from PISA 2000. *Assessment in Education*, 9 (3), pp. 387-401.

Boscardin, C., Aguirre-Muñoz, Z., Stoker, G., Kim, J., Kim, M. y Lee, J. (2005). Relationship between opportunity to learn and student performance on English and Algebra assessments. *Educational Assessment*, 10 (4), pp. 307-332.

Bowden, J. y Marton, F. (1998). *The university of learning: Towards a new paradigm?* Society for research into Higher Education. Londres, UK: Kogan Page.

Branca, N. (1980). Problem Solving as a Goal, Process and Basic Skill. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Brannen, J. (1992). *Mixing methods: qualitative and quantitative research*. Aldershot: Avebury.

Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical reasoning in secondary school classroom*. Nueva York: Springer.

Brophy, J. (1999). *Teaching*. Geneva: International Academy of Education. Disponible en http://www.ibe.unesco.org [Consulta realizada 12.03.2008].

Brophy, J y Good, T. (1986). Teacher behavior and student achievement. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 328-375). 3rd ed. Nueva York: Macmillan.

Bryman, A. (1988). *Quantity and quality in social research*. Londres: Unwin Hyman.

Bryman, A. (2004). *Social Research Methods*. USA: Oxford University Press.

Burgués, C. (2008). La representación de ideas matemáticas. En M. Hervás (Coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 23-39). Madrid: MEC.

Burstein, L. (1993). Prologue: studying learning growth, and instruction cross-nationally: lessons learned about why and why not engage in cross-national studies. In. L.Burstein (Ed.), *The IEA Study of mathematics III: student growth and classroom processes*. Nueva York: Pergamon Press.

Burton, L. (2005). Methodology and methods in mathematics education research: where is "the why?" In S. Goodchild & L. English (Eds.), *Researching mathematics classroom: a critical examination of methodology* (pp. 1-11). Westport: CT, Praeger.

Calleja, F., Ortega, T., Calleja, I., Arias, B. y Crespo, M. (2007). Determinantes Psicológicos del Rendimiento Académico en Matemáticas. En *Estudio de Evaluación de las Matemáticas en Castilla y León.* Dirección General de Coordinación, Inspección y Programas Educativos. Consejería de Educación. Junta de Castilla y León. Valladolid.

Callejo, M. L. (2008). Desarrollo de competencias y resolución de problemas realistas. En M. Hervás (Coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 63-74). Madrid: MEC.

Canto-Sperber, M. y Dupuy, J. P. (2004). Competencias para una buena vida. En D. S. Rychen y L. H. Salganik (Coord.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 128-169). México: Fondo de Cultura Económica.

Cañón, C. (1993). *La Matemática: creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontifica Comillas.

Carrillo, J. (1998a). La Resolución de Problemas en la Enseñanza Secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Epsilon*, 40, pp. 15-26.

Carrillo, J. (1998b). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.

Carrillo, J. y Climent, N. (2005). *The mathematics education traditions of Europe (METE) project: The teaching of polygons in Primary school.* Paper presented as part of a Symposium on "The mathematics education traditions of Europe (METE) project: principles and outcomes", organized at the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) Conference, Nicosia, Chipre, 23-27 de agosto de 2005.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M. y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las ciencias,* 26 (1), pp. 67-76.

Carrillo, J. (2011). Building mathematical knowledge in teaching by means of theorised tools. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 273-287). New York: Springer.

Carroll, J. (1963). A model for school learning. *Teachers College Record*, 64, pp. 723-733.

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, 61, pp. 23-35.

Cohen L. y Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Colera, J., Gaztelu, I., García, R., Oliveira, M. J. y Martínez M. M. (2007). *Matemáticas de 4ESO*, *Opción B*. Madrid: Anaya.

Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar. *Aula de Innovación Educativa*. n. 161, pp. 34-39.

Collie-Patterson, J. (2000). *The effects of four selected components of opportunity to learn on mathematics achievement of Grade 12 students in New Providence, Bahamas*. Annual Meeting of the Mid-South Educational Research Association. KY, USA: Bowling Green.

Contreras L. C. (1987). La resolución de problemas, ¿Una panacea metodológica? *Enseñanza de las ciencias,* 5 (1), pp. 49-52.

Contreras L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva: Universidad de Huelva.

Contreras, L. C. y Carrillo, J. (1997). La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo. *Suma*, 24, pp. 21-25.

Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N., Muñoz-Catalán, M.C. y Zakaryan, D. (2012, en prensa). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro.

Cook, T. y Reichardt, C. (1986). Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos. En T. Cook y C. Reichardt (Eds.), *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa* (pp. 25-58). Madrid: Morata.

Corno, L. (1988). The study of teaching for mathematics learning: Views through two lenses. *Educational Psychologist*, 23 (2), pp. 181-202.

Creswell, J. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

Chamorro, C. (1991). *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas*. Madrid: Alhambra Langman.

Chazan, D. y Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *Learn Math*, 19 (2), pp. 2-10.

Chomsky, N. (1983). *Reglas y Representaciones*. México: Fondo de Cultura Económica.

Del Rincón, D, Latorre, A., Arnal, J. y Sans A. (1995). *Técnicas de investigación en Ciencias Sociales*. Madrid: Dykinson.

Dendaluce, L. (1995). Avances en los métodos de investigación educativa en la intervención psicopedagógica. *Revista de Investigación educativa*, 26 (2), pp. 9-32.

Denyer, M., Furnémont, J., Poulain, R. y Vanloubbeeck, R. (2007). *Las competencias en educación. Un balance*. México: Fondo de Cultura Económica.

Denzin, N. (1970). *The research act.* Chicago: Aldine Publishing.

Denzin, N. (1978). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods*. Nueva York: McGraw-Hill.

Depaepe, F., De Corte, E., Op'Teynde, P. y Verschaffel, L. (2005). *Teaching percentages in the primary school: A four country comparative study.* Paper presented as part of a Symposium on "The mathematics education traditions of Europe (METE) project: principles and outcomes", organized at the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) Conference, Nicosia, Chipre, 23-27 de agosto de 2005.

Devis, Ph. y Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática*. Madrid: MEC y Barcelona: Editorial Labor.

Díaz de Salas, S., Mendoza, V. y Porras, C. (2011). Una guía para la elaboración de estudios de caso. *Razón y Palabra*, 75, febrero-abril 2011. Primera revista electrónica de América Latina en Comunicación. Disponible en www. razonypalabra.org.mx [Consulta realizada 12.05.2011].

Doorman, N., Drijvers, P., Dekker, T., Heuvel-Panhuizen, M., Lange, J., Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM*, 39, pp. 405-418.

Dougherty, K. (1996). Opportunity-to-learn standards: a sociological critique. *Sociology of Education*, 69, pp. 40-65.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of student's thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23 (2), pp. 167-180.

Dunkin, J. y Biddle, B. (1974). *The study of teaching*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston.

Duval, R. (1999a). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999b). Algunas cuestiones relacionadas a la argumentación. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Disponible en http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html [Consulta realizada 19.09.2010].

Eithenhardt, K. (1989). Building Theories from Case Study Research. *Academy of Management Review*, 14 (4), pp. 532-550.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research of teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nueva York: Macmillan.

Fandiño Pinilla, M. (2008). "Ser competente", un desafío con raíces antropológicas. En B. D´Amore, J. Godino y M. Fandiño Pinilla, *Competencias y matemática* (pp. 39-58). 1ª ed. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Fernández González, A. M. (2006). Pensemos en competencias. Disponible en http://www.gestiopolis.com/canales7/rrhh/competencias-competentes-y-competitividad.htm [Consulta realizada 07.04.2010].

Figueiras, L., Ribeiro, C.M., Carrillo, J., Fernández, S. y Deulofeu, J. (2011). Teacher's advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, 31(3), pp. 26-28.

Filmus, D. (1994). *Para qué sirve la escuela*. Buenos Aires: Grupo Editorial Norma.

Filloy, E. y cools. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), pp. 327-342.

Fischer, G., Nakakoji, K., Ostwald, J. Stahl, G. y Sumner, T. (1993). Embedding Critics in Design Environments. *The Knowledge Engineering Review*, 8 (4), pp. 285-307.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. 2ª ed. Madrid: Morata.

Floden, R. (2002). The measurement of opportunity to learn. In. A. Porter & A. Gamoran (Eds.), *Metodological advances in cross-national surveys of education achievement* (pp. 231-266). Washington, DC, USA: National Academies Press.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, 1 (1/2), pp. 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publis Co.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gairín, J. (2001). Sistemas de representación de los números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos*, 4, pp. 137-159.

García, J. y García, F. (1989). *Aprender investigando*. Col. Investigación y Enseñanza. Serie: Práctica. Sevilla: Diada.

Garofalo, J. y Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16(3), pp. 163-176.

Garret, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: aplicaciones para el currículum de ciencias. *Enseñanza de las ciencias,* 6 (3), pp. 224-230.

Gee, J. (1996). *Social Linguistics and Literacies: Ideology in Discourses*. 2nd ed. London: Taylor & Francis.

Gevorgyan, G. y Sahakyan, A. (2001). (Original en armenio)[82]. *Álgebra y elementos de análisis matemático*. *Grado IX*. Ereván: Edit Print.

[82] Գևորգյան,Գ. և Սահակյան, Ա. (2001). *Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր*. Երևան: Էդիթ Պրինտ.

Godino, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Revista Uno*, 29, pp. 9-19.

Godino, J. (2008). Competencia y comprensión matemática. ¿Qué son y cómo se consiguen? En B. D´Amore, J. Godino y M. Fandiño Pinilla, *Competencias y matemática*. 1ª ed. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

González, M. y Lupiáñez, J. (2005). ¿Qué valor social tiene el conocimiento matemático? *Padres y Madres de Alumnos,* 82, pp. 29-33.

Goody, J. (2004). Competencia y educación: diversidad contextual. En D. S. Rychen y L. H. Salganik (Coord.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 302-325). México: Fondo de Cultura Económica.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD –ß.

Greer, B. (1993). The modelling perspective on wor(l)d problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, pp. 239-250.

Guiton, G. y Oakes, J. (1995). Opportunity to learn and conception of educational equality. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17 (3), pp. 323-336.

Gutiérrez, F. (1995). *Razonamiento: de la teoría a la instrucción*. Madrid: UNED.

Hammersley, M. (1992). *What's wrong with ethnography?* Londres: Routledge.

Herman, J., Klein, D. y Abedi, J. (2000). Assessing students' opportunity to learn: Teacher and student perspectives. *Educational Measurement: Issues and Practice,* 19(4), pp. 16-24.

Hernández, F. (2006). El informe PISA: una oportunidad para replantear el sentido del aprender en la escuela secundaria. *Revista de Educación, número extraordinario 2006,* pp. 357-379.

Hiebert, J. y Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Tteaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ARTICULOS_V10_N1_2009/PLANIFICACION_ACTIVIDADES/index.htm), 10 (1). [Descargado 22.12.2010].

Husén, T. (1988). Paradigmas de la investigación en Educación: Un informe del estado de la cuestión. En I. Bartolomé (Coord.), *Aspectos metodológicos de la investigación educativa* (pp. 46-60). Madrid: Narcea.

INECSE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Madrid: MEC.

Instituto de Evaluación (2010). *Evaluación general de diagnóstico 2009*. Informe. Madrid: MEC.

Keitel, Ch. (2004). ¿Para qué necesitan nuestros estudiantes las matemáticas? En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula*, pp. 11-22. Barcelona: Graó.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Kolyaguin, Y., Oganesyan, V., Sanninsky, V. y Lukankin, G. (1975). (Original en ruso)[83]. *Métodos de enseñanza de las matemáticas en escuela secundaria*. *Metodología general*. Moscú: Prosvyashenie.

Lange, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW&OC. Rijksuniversiteit.

Lange, J. de (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Madison: WCER.

[83] Колягин, Ю., Оганесян, В., Саннинский, В., Луканкин, Г. (1975). *Методика преподавания математики в средней школе*. Общая методика. Москва: Просвящение.

Lankshear, C. (1999). Literacy Studies in Education: Disciplined Developments in a Post-Disciplinary Age. En M. Peters, After *the Disciplines*. Greenwood Press.

Latorre, A., Del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Hurtado ediciones.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lesh, R. y Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers, *Mathematical Thinking and Learning,* 5(2/3), pp. 109-130.

Linacre, J. (1991-2006). *A User's Guide to Winstep. Rasch-Model Computer Programs*. Disponible en www.winsteps.com [Consulta realizada 17.09.2009]

Lincoln, Y. y Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. New York: Sage.

Lincoln, Y. y Guba, E. (2000). Paradigmatic controversies, contradictions y emerging confluences. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The handbook of qualitative research* (pp. 163-189). Londres: Sage.

Lo, J. y Wheatly, G. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 27(2), pp. 145-164.

Lupiáñez, J. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática. Capacidades y competencias matemáticas*. Documento presentado en el Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática. Málaga.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Malaty, G. (2004). *What are the reasons behind the success of Finland in PISA?* Finlanda: University of Joensuu.

Marín, A. y Guerrero, S. (2005). Una lectura del informe PISA desde la Secundaria. *Padres y Madres de Alumnos,* 82, pp. 24-28.

Markusievich, A. (1983). Algunos problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En J. Piaget, G. Choquet, J. Dieudonné, R. Thom y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas* (pp. 196-208). Madrid: Alianza.

Matos, J. (1994). Estudios de caso em Educação Matemática-Problemas actuais. *Quadrante*, 3 (1), pp. 19-53.

McDonnell, L. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17 (3), pp. 305-322.

Meirieu, P. (2006). Charla abierta de Philipe Meirieu. Disponible en http://www.me.gov.ar/monitor/nro9/entrevista.htm [Consulta realizada 07.04.2010]

Melgarejo, J. (2006). La selección y formación del profesorado: clave para comprender el excelente nivel de competencia lectora de los alumnos finlandeses. *Revista de Educación, número extraordinario 2006,* pp. 237-262.

Merriam, S. (1995). What can you tell from an N of 1?: Issue of validity and reliability in qualitative research. *Journal of Lifelong Learning*, 4, pp. 51-60.

Meyer, M., Decker, T., y Querelle, N. (2001). Context in mathematics curricula**.** *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(9), pp. 522–527.

Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseña*. Visor Libros. Madrid.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE*, 174, pp. 31680-31828.

Monereo, C. y Castelló, M. (2009). La evaluación como herramienta de cambio educativo: evaluar las evaluaciones. En C. Monereo (Coord.), *PISA como excusa. Repensar la evaluación para cambiar la enseñanza* (pp. 15-32). 1ª ed. Barcelona: Graó.

Morales Vallejo, P (2006). Implicaciones para el profesor de una enseñanza centrada en el alumno. *Miscelánea Comillas,* 64 (124), pp. 11-38. Disponible en: http://www.upcomillas.es/Servicios/serv_publ_revi_misc_revi.aspx [Consulta realizada 14.08.2011]

Morgan, G. (1998). *Beyond method: Strategies for social research*. Beverly Hills, CA: Sage.

Moreno, I. y Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA*, 2 (3), pp. 248-257.

Mrochek, V. y Filippowich, F. (1910). (Original en ruso)[84]. *Pedagogía de la Matemática*. Vol.1. San Petersburgo: Imprenta de Bogdanova.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales National Council of Teachers of Mathematics.

Nisbet, J. y Entwistle, N. (1980). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: Oikos-Tau.

Niss, M. (1998). ¿Por qué enseñar matemáticas en la escuela? En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación Matemática*. Una empresa docente.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, pp. 21-29.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education.* (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.

Noonan, B. (2000). The place of "opportunity to learn" in the standards debate. *Educators´ Notebook*: *Reviews of Research of Interest to Educators*, 12 (1). Descargado 01.02.2011 de http://www.mcle.ca/documents/notebook/vol12iss1.pdf.

Oakes, J. (1989). What education indicators? The case for assessing the school context. *Educational Evaluation and Policy Analysis,* 11*,* pp. 181-199.

[84] Мрочек, П. и Филиппович, Ф. (1910). *Педагогика Математики*. Том 1. Санкт-Петербург: Книгоиздательство Богдановой.

OCDE (2002). *The Definition and Selection of Competencies (DeSeCo): theoretical and conceptual foundations*. Strategy Paper.

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD.

OCDE (2004a). *Learning for tomorrow's world. First Results from PISA 2003*. Paris: OECD.

OCDE (2004b). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: MEC.

OCDE (2005a). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana.* Madrid: Santillana.

OCDE (2005b). *The Definition and Selection of Key Competencies*. Executive Summary. Descargado 17.05.2008 de www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf

OCDE (2007). *PISA 2006. Informe español*. Madrid: MEC.

OCDE (2010). *PISA 2009. Informe español*. Madrid: MEC.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas*. Barcelona: Graó.

Osborn, M., Broadfoot, E., Ravn, B., Planel, C. y Triggs, P. (2003). *A Word of Difference?Comparing Learners across Europe*. Maindehead: Open University Press.

Osborn, M. (2004). New methodologies for comparative research? Establishing "constants" and "contexts" in educational experience. *Oxford Review of Education*, 30 (2), pp. 265-285.

Pajares, R. (2005). *Resultados en España de los resultados PISA 2000*. Madrid: MEC y INECSE.

Pelechano, V. (1995). Habilidades interpersonales: conceptualización y entrenamiento. En M.D. Calero, *Modificación de la inteligencia. Sistemas de evaluación e intervención*. Madrid. Alfaplús.

Perrenoud, P. (2006). *Construir competencias desde la escuela*. Santiago: Sáez Editor.

Perrenoud, P. (2008). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: Graó.

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent: The future of education*. Nueva York: Viking.

Polya, G. (1980). On Solving Mathematical Problem in High School. In S. Krulik. & R. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula*, pp. 25-34. Barcelona: Graó.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, pp. 105-132.

Porter, A. (1991). Creating a system of school process indicators. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 13, pp. 13-29.

Prieto, G. y Días, A. (2003). Uso del modelo de Rasch para poner en la misma escala las puntuaciones de distintos tests. *Actualidades en Psicología*, 19 (106), pp. 5-23. Descargado 13.09.2010 de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1332/133217953001.pdf

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2 (3), 87-107.

Recio, T. y Rico. L. (2005). El Informe PISA 2003 y las matemáticas. *El País* 24.01.2005.

Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo (2006). *Diario oficial de la Unión Europea*. n.962 CE.

Resnick, L. y Ford, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid: MEC- Paidós.

Rey, B. (1999). *Las competencias transversales en cuestión*. Descargado 13.04.2010 de www.philosophia.cl/biblioteca/rey/competencias.

Ribeiro, C. M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de Matemáticas*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Revista Educación Matemática*, 22(2), pp. 93-108.

Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-521). Ciudad Real, España: SEIEM.

Rico, L. (2004). La evaluación de matemáticas en el proyecto PISA. En R Pajares, A. Sanz y L. Rico, *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: MEC.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1 (2), pp. 47-66.

Rico, L. y Lupáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M.C. (2009). Estudio TEDS-M: estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII,* (pp. 425-434). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponible en http://teds.educ.msu.edu [Consulta realizada 15.07.2011]

Rojas, M. (1999). Habilidades sociales. Disponible en http://www.down21.org/educ_psc/educacion/indiceEducacion.asp [Consulta realizada 23.04.2010]

Romberg, T. y Carpenter, T. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. In M.Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 850-873). 3rd ed. Nueva York: Macmillan.

Rosenshine, B. y Stevens, R. (1986). Teaching functions. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 376-391). 3rd ed. Nueva York: Macmillan.

Rubinstein, S. (1958). (Original en ruso)[85]. *Sobre el pensamiento y caminos de su investigación*. Moscú: Prosvyashenie.

Rubinstein, S. (2002) (Original en ruso)[86]. *Principios de psicología general*. San Petersburgo: Piter.

Ruíz Iglesias, M. (2008). *Marco conceptual de la formación basada en competencias*. Material para el 2º Semestre de la Maestría Internacional en Competencias Profesionales. UANL/UCLM.

Russell, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. En L. Stiff (Ed.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12*. Reston, VA: NCTM.

Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias,* 25 (3), pp. 355-366.

Sacristán, J. (2008). *Educar por competencias, ¿Qué hay de nuevo?* Madrid: Morata.

Salganik, L. (2004). Competencias para la vida: un reto conceptual y empírico. En D. S. Rychen y L. H. Salganik (Coord.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 47-73). México: Fondo de Cultura Económica.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Saxe, G., Gearhart, M. y Seltzer, M. (1999). Relations between classroom practices and student learning in the domain of fractions. *Cognition and Instruction,* 17, pp. 1–24.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), pp. 114-145.

Schmidt, W. y McKnight, C. (1995). Surveying educational opportunity in mathematics and science: an international perspective. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17 (3), pp. 337-353.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academy Press.

[85] Рубинштейн, С. (1958). *О мышлении и путях его исследования*. Москва: Просвящение.

[86] Рубинштейн, С. (2002). *Основы общей психологии*. Санкт-Петербург: Питер.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the Fuss about Metacognition? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and mathematics Education*. LEA: Hilsdale.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist,* 23 (2), pp. 145-166.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMilan.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? En P. Abrantes, L. C. Leal, y J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Schoenfeld, A. (1998). On modeling teaching. *Issues in Education, 4*(1), 149 - 162.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour, 18*(3), 243 - 261.

Schoenfeld, A. (2011). Reflections on teacher expertise. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction*. Springer + Business Media. LLC.

Schopenhauer, A. (1987). *El mundo como voluntad y representación*. México: Porrúa.

Schramm, W. (1963-1972). *La ciencia de la comunicación humana*. México: Ed. Roble.

Short, E. (1985). The concept of competence: its use and misuse in education. *Journal of Teacher Education*, n.36 (2), pp. 2-6.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, pp. 20-26.

Snow-Renner, R. (2001). *What is the promise of large-scale classroom practice measures for informing us about equity in student opportunities-to-learn? An example using the Colorado TIMSS*. Trabajo presentado en Annual Meeting of the American Educational Research Association, Seattle, WA.

Sosa, L. y Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida, España: SEIEM.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis Doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509 Huelva: Universidad de Huelva.

Stacey, K. (1991). *The effects on students' problem solving behaviour of long-term teaching a problem solving approach*. Proceedings of the 15th PME Conference, III, pp. 278-285. Asís, Italia.

Stake, R. E. (2000). Case Studies. In N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stein, M., Grover, B, Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: analysis of mathematics tasks used in reform classroom. *American Education Research Journal*, 33 (2), pp. 455-488.

Stein, M., Smitht, M., Henningsen, M., Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.

Stein M., Remillard, J. y Smith M. (2007). How curriculum influences student leaning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Tteaching and Learning* (pp. 319-369). NCTM: Information Age Publishing.

Stevens, F. (1993). Applying an Opportunity-to-Learn Conceptual Framework to the Investigation of the Effects of Teaching Practices via Secondary Analyses of Multiple-Case-Study Summary Data. *Journal of Negro Education*, 62 (3), pp. 232-248.

Stevens, F. y Grymes, J. (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. Nueva York: The Free Press.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O´Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4 (4), pp. 133-142.

Szederi, E. y Török, J. (2005). *Teaching polygons in secondary school: A four country comparative study.* Paper presented as part of a Symposium on "The mathematics education traditions of Europe (METE) project: principles and outcomes", organized at the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) Conference, Nicosia, Chipre, 23-27 de agosto de 2005.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Taylor, S. y Bogdan, R. (2002). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Treffers, A. y Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas program. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 97-121). Utrecht: PME.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Unidad Europea de Eurydice (2002). *Competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Descargado 20.04.2010 de http://www.eurydice.org

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school arithmetic word problem. *Learning and Instruction*, 4, pp. 273-294.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vicente, S. Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación,* 20 (4), pp. 391-406.

Vigotsky, L. (1956). (Original en ruso)[87]. *Investigaciones psicológicas escogidas*. Moscú: Prosvyashenie.

[87] Выготский, Л. (1956). *Избранные психологические исследования*. Москва: Просвящение.

Watson, A, y Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and resources in mathematics teacher education* (pp. 109-135). Rotterdam: Sense Publishers.

Weinert, F. (2004). Concepto de competencia: una aclaración conceptual. En D. S. Rychen y L. H. Salganik (Coord.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 94-127). México: Fondo de Cultura Económica.

Wittrock, M. (1986). Students' thought processes. In M. Wittrock (Ed.). *Handbook of research on teaching* (pp. 297-314). 3rd ed. Nueva York: Macmillan.

Yin, R. (2002). *Case study research. Design and methods.* Vol. 5. Thousand Oaks, CA: Sage.

Yin, R. (2003). *Applications of case study research*. Vol. 34. Thousand Oaks, CA: Sage.

Yoshida, H., Verschaffel, L., y De Corte, E. (1997). Realistic consideration in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, 7, pp. 329-338.

Zabala, A. y Arnau, L. (2007). *Cómo aprender y enseñar competencias*. Barcelona: Graó

Zakaryan, D. (2006). *Informe PISA 2003: Una aproximación en la búsqueda de factores relevantes*. Trabajo de investigación presentado para la obtención del DEA. Inédito. Huelva: Universidad de Huelva.