ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 79–90 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.79–90
doi:10.15330/cmp.6.1.79-90

Лопушанський А.О.[1], Лопушанська Г.П.[2]

ОБЕРНЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФУЗІЙНО-ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ПРАВИХ ЧАСТИНАХ

Доведено однозначну розв'язність задач про визначення пари функцій: розв'язку $u(x,t)$ першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x)\cdot g(t), \quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta\in(0,2)$, узагальненими функціями в початкових умовах, а також невідомого неперервного коефіцієнта $a(t)>0$, $t\in[0,T]$ (або невідомої неперервної функції $g(t)$) при відомих значеннях $(a(t)u_x(\cdot,t),\varphi_0(\cdot))$ $\big((u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot))\big)$ відповідної узагальненої функції на заданій основній функції $\varphi_0(x)$.

Ключові слова і фрази: похідна дробового порядку, узагальнена функція, обернена крайова задача, вектор-функція Гріна, операторне рівняння.

[1] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
[2] Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine

Вступ

Задача Коші та крайові задачі для рівняння дифузії чи дифузійно-хвильового рівняння з регуляризованою похідною дробового порядку [2], [4] вивчались у багатьох працях [1], [2], [5], [6], [10]–[15], [20] та інших. Активно вивчаються в останні роки обернені крайові задачі для таких рівнянь (див. [3], [7], [8], [16], [17], [21] та бібліографія там).

У даній статті встановлюємо однозначну розв'язність двох обернених крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах прямої задачі.

ЗАДАЧА 1 полягає в визначенні пари функцій (u,a): розв'язку u першої крайової задачі

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x)\cdot g(t), \quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T], \tag{1}$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=F_1(x), \quad x\in[0,l], \tag{3}$$

$$u_t(x,0)=F_2(x), \quad x\in[0,l], \tag{4}$$

із заданими узагальненими функціями F_j, $j=0,1,2$, неперервною $g(t)$ (у правій частині рівняння (1) крапкою позначено прямий добуток узагальнених функцій), а також невідомого коефіцієнта $a(t)>0$, $t\in[0,T]$, за додаткової умови

$$(a(t)u_x(x,t),\varphi_0(x)) = F_3(t), \quad t\in[0,T], \tag{5}$$

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.

тобто задано значення $F_3(t)$ узагальненої функції $a(t)u_x(x,t)$ на деякій гладкій функції $\varphi_0(x)$, $x \in [0,l]$.

Розглядаємо випадок $\beta \in (0,2)$. Умова (4) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$.

Зауважимо, що при $\beta = 1$ та заданих регулярних функціях у правих частинах такого типу обернені крайові коефіцієнтні задачі з інтегровними умовами перевизначення вивчались, зокрема, у [9].

ЗАДАЧА 2 полягає в визначенні пари функцій (u,g): розв'язку u першої крайової задачі (1)–(4) при заданих узагальнених функціях F_j, $j = 0,1,2$, та невідомої неперервної функції $g(t)$ за додаткової умови

$$(u(x,t), \varphi_0(x)) = F_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

тобто задано значення $F_4(t)$ узагальненої функції $u(x,t)$ на деякій гладкій функції $\varphi_0(x)$, $x \in [0,l]$.

Визначенню регулярної правої частини рівняння (1) при різних умовах перевизначення присвячено найбільше праць. Зокрема, у [7] встановлено однозначну розв'язність задачі про визначення розв'язку u задачі Коші для абстрактного рівняння у гільбертовому просторі X з дробовою похідною за часом порядку $\beta \in (0,1]$ та регулярної (залежної від часової змінної) правої частини цього рівняння за умови перевизначення $(u,\varphi_0) = h$ (φ_0, h — задані), де під дужками розуміють скалярний добуток елементів гільбертового простору X.

1 Основні позначення та формулювання задач

Використовуємо наступні позначення: $Q_0 = (0,l) \times (0,T]$; $C_+[0,T]$ — клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій; $C_+^\infty[0,T] = C^\infty[0,T] \cap C_+[0,T]$; $\mathfrak{D}(R^N)$ $(N = 1,2)$, $\mathfrak{D}(0,l)$, $\mathfrak{D}[0,l]$ — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в R^N, $(0,l)$, $[0,l]$ ([18], с. 13); $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\dots\}$; $\mathfrak{D}'(R^N)$, $\mathfrak{D}'(0,l)$, $\mathfrak{D}'[0,l]$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(R^N)$, $\mathfrak{D}(0,l)$, $\mathfrak{D}[0,l]$, $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$; (F,φ) — значення $F \in \mathfrak{D}'(R^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(R^N)$, а також значення $F \in \mathfrak{D}'(0,l)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(0,l)$, $F \in \mathfrak{D}'[0,l]$ на $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$, $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$; $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T] = \{F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) : (F(x,\cdot), \varphi(x)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,l)\}$ — клас узагальнених функцій із $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, неперервних за змінною $t \in [0,T]$ ([19]).

Позначаємо через $\widehat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ ([18], с. 111): $(g \widehat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$; через $*$ — операцію згортки узагальнених функцій f і g, тобто узагальнену функцію $f * g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$: $(f * g, \varphi) = (f, g \widehat{*} \varphi)$ для кожної основної функції $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$; $f(x) \cdot g(t)$ — прямий добуток узагальнених функцій $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, тобто узагальнену функцію $f \cdot g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$, визначену формулою $(f \cdot g, \varphi) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t)))$ для кожної основної функції $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$.

Зауважимо, що у випадку $g \in L_1(0,T)$ маємо

$$(f \cdot g, \varphi) = \left(f(x), \int_0^T g(t)\varphi(x,t)dt \right) = \int_0^T g(t)(f(x), \varphi(x,t))dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2).$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(R) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція, $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда.

Правильні наступні співвідношення:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \widehat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідну $v_t^{(\beta)}(x,t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначають формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

регуляризовану похідну дробового порядку —

$$\begin{aligned} D_t^\beta v(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \Big[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta} \Big] \\ &= v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t) v(x,0), \quad \beta \in (0,1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t^\beta v(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau \\ &= v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t) v(x,0) - f_{2-\beta}(t) v_t(x,0), \quad \beta \in (1,2). \end{aligned}$$

Нехай $C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(\overline{Q}_0) \mid v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$.

Введемо оператори

$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - a(t) v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$

$L^{reg}: \quad (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - a(t) v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0),$

$\widehat{L}: \quad (\widehat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta} \widehat{*} v(x,t) - a(t) v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$

та функційний простір $X(\overline{Q}_0) = \{v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0) : v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0,\ t \in [0,T]\}$.

Для $v \in C_{2,\beta}(Q_0)$, $\psi \in X(\overline{Q}_0)$ правильна формула Ґріна

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau) dy d\tau &= \int_{Q_0} (L^{reg}v)(y,\tau) \psi(y,\tau) dy d\tau \\ &+ \int_0^T a(\tau)[v(0,\tau)\psi_y(0,\tau) - v(l,\tau)\psi_y(l,\tau)] d\tau \\ &+ \int_0^l v(y,0) dy \int_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau) d\tau + \int_0^l v_\tau(y,0) dy \int_0^T f_{2-\beta}(\tau)\psi(y,\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Припущення:

(F0) $\quad g \in C[0,T]$, $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j = 0,1,2$,

(F1) $\quad F_3 \in C[0,T]$ та $F_3(t) \neq 0$ на $[0,T]$, $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(0,l)$.

Означення 1. *Розв'язком задачі 1 за припущень (F0), (F1) називається пара функцій*

$$(u,a) \in \mathfrak{M}_+ := \big(\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]\big) \times C_+[0,T],$$

що задовольняє умову (5) *та тотожність*

$$(u,\widehat{L}\psi) = \int\limits_0^T g(t)(F_0,\psi(\cdot,t))dt + \sum_{j=1}^{2}(F_j,\int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt) \qquad \forall\psi \in X(\overline{Q}_0). \tag{8}$$

Припущення:
(F2) $a \in C_+[0,T]$, $F_j \in \mathfrak{D}'[0,l]$, $j=0,1,2$, $F_4 \in C^1[0,T]$, $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(0,l)$, $F_4(0) = (F_1,\varphi_0)$.

Означення 2. *Розв'язком задачі 2 за припущення (F2) називається пара функцій*

$$(u,g) \in \mathfrak{M} := \big(\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0,T]\big) \times C[0,T],$$

що задовольняє тотожність (8) *та умову* (6).

Розв'язність обох задач встановлюємо методом функції Ґріна.

2 Спряжені оператори Ґріна першої крайової задачі

Означення 3. *Вектор-функція* $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau), G_2(x,t,y,\tau))$*, така що при достатньо гладких* g_0, g_1, g_2 *функція*

$$v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^l G_j(x,t,y,0)g_j(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0, \tag{9}$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$*) розв'язком першої крайової задачі*

$$D_t^{\beta}u - a(t)u_{xx} = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{10}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad x \in [0,l], t \in [0,T], \tag{11}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \;\; u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{12}$$

(з відомою функцією $a(t)$*), називається вектор-функцією Ґріна цієї задачі.*

З означення випливає, що

$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau)$, $\quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0$, $\;$ де δ — дельта-функція Дірака,

$G_j(0,t,y,\tau) = G_j(l,t,y,\tau) = 0, y \in (0,l), t,\tau \in (0,T], j = 0,1,2,$

$G_1(x,0,y,0) = \delta(x-y)$, $\quad \frac{\partial}{\partial t}G_2(x,0,y,0) = \delta(x-y)$, $\quad x,y \in (0,l)$.

Як при доведенні леми 1 із [12], показуємо, що

$$G_j(x,t,y,0) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x,t,y,0), \quad (x,t) \in Q_0, \quad y \in (0,l), \quad j = 1,2. \tag{13}$$

У [13] доведено існування вектор-функції Ґріна першої крайової задачі (10)–(12) при $a \in C_+[0,T]$.

Використовуємо далі позначення $G_j(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_j(x,t,y,\tau)$, $j=0,1,2$.

Із принципу максимума [14] випливає додатність функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$, $(x,t),(y,\tau)\in Q_0$ та $G_j(x,t,y,0,a)$, $(x,t)\in Q_0$, $y\in(0,l), t>0$, $j=1,2$.

Оцінки компонент вектор-функції Ґріна та їх похідних за змінною x наведено у [13].

Введемо оператори

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)=\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx,$$

$$(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)=\int\limits_0^l G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx,\quad j=1,2,\quad \varphi\in\mathfrak{D}[0,l].$$

За лемою 1 із [13] при $a\in C_+[0,T]$, $\max\limits_{t\in[0,T]}[a(t)]^{-1}\le R$, довільних $0\le\tau<t\le T$ правильні оцінки

$$\begin{aligned}&|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)|\le c_0||\varphi||_{C^k[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\beta/2-1}[\sqrt{R}+(t-\tau)^{\beta/2}],\\ &|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)|\le c_j||\varphi||_{C^k[0,l]}\cdot t^{j-1},\quad j=1,2,\quad k=0,1,2,\dots,\end{aligned}\tag{14}$$

а також

$$\begin{aligned}&|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)|\le c_0^*\sqrt{R}||\varphi||_{C^{k-1}[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\beta/2-1},\\ &|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)|\le c_j^*||\varphi||_{C^{k-1}[0,l]}\cdot[\sqrt{R}t^{j-1-\beta/2}+t^{j-1}],\quad j=1,2,\quad k=1,2,\dots,\end{aligned}\tag{15}$$

c_j, c_j^* $(j=0,1,2)$ — додатні сталі.

3 Розв'язність задачі 1

Нехай виконуються припущення (F0), (F1) та наступне **припущення**

(F) $\varphi_0(x)\ge 0$, $x\in(0,l)$, $g(t)\ge 0$, $t\in[0,T]$,
а також нехай правильна одна з наступних умов:

1. $(F_0(y),\varphi_y(y,t))>0$, $(F_j(y),\varphi_y(y,t))\ge 0$ для всіх $t\in[0,T]$, кожної невід'ємної $\varphi\in\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, $j=1,2$, $F_3(t)<0$, $t\in[0,T]$;

2. $(F_0(y),\varphi_y(y,t))<0$, $(F_j(y),\varphi_y(y,t))\le 0$ для всіх $t\in[0,T]$, кожної невід'ємної $\varphi\in\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, $j=1,2$, $F_3(t)>0$, $t\in[0,T]$.

Згідно з теоремлю 3 із [13], за припущення (F0) при кожній відомій $a\in C_+[0,T]$ існує єдиний розв'язок $u\in\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)\cap C[0,T]$ першої крайової задачі (1)–(4), визначений формулою

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\int\limits_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+\sum_{j=1}^2\big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\tag{16}$$
$$\forall\varphi\in\mathfrak{D}[0,l],\quad t\in[0,T].$$

Підставимо функцію (16) в умову (5). Одержуємо

$$a(t)\Big[\int\limits_0^t g(\tau)(F_0,\widehat{G}_0\varphi_0')(t,\tau)d\tau+\sum_{j=1}^2(F_j,\widehat{G}_j\varphi_0')(t)\Big]=-F_3(t),\quad t\in[0,T],$$

або

$$h(t)=-\Big[\int\limits_0^t g(\tau)(F_0,\widehat{G}_0\varphi_0')(t,\tau)d\tau+\sum_{j=1}^2(F_j,\widehat{G}_j\varphi_0')(t)\Big]\cdot\Big[F_3(t)\Big]^{-1},\quad t\in[0,T],\tag{17}$$

де $h(t)=[a(t)]^{-1}$.

За властивостями компонент вектор-функції Ґріна

$$(\widehat{G}_0\varphi_0')(y,t,\tau)=\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi_0'(x)dx=-\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial x}G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi_0(x)dx$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi_0(x)dx=\frac{\partial}{\partial y}(\widehat{G}_0\varphi_0)(y,t,\tau),$$

так само $(\widehat{G}_j\varphi_0')(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}(\widehat{G}_j\varphi_0)(y,t)$, $j=1,2$.

Тому з додатності функцій $G_j(x,t,y,\tau,a)$, $(x,t),(y,\tau)\in Q_0$, $j=0,1,2$, при невід'ємній φ_0 отримуємо $\widehat{G}_j\varphi_0\ge 0$, $j=0,1,2$, а тоді, згідно з припущенням (F) (при $\varphi=\widehat{G}_j\varphi_0$, $j=0,1,2$), права частина рівняння (17) додатна. Наслідком цього та теореми 3 із [13] є наступна теорема.

Теорема 1. *За припущень (F0), (F1), (F) пара функцій $(u,a)\in\mathfrak{M}_+$ є розв'язком задачі 1 тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція $h(t)=[a(t)]^{-1}$, $t\in[0,T]$ є розв'язком рівняння* (17), *функція $u(x,t)$ визначена формулою* (16).

Теорема 2. *За припущень (F0), (F1), (F) розв'язок $(u,a)\in\mathfrak{M}_+$ задачі 1 існує: функція $u(x,t)$ визначена формулою* (16), *$a(t)=[h(t)]^{-1}$, де $h(t)$ — розв'язок операторного рівняння* (17).

Доведення. Враховуючи наведені вище міркування, перетворення, теорему 1, для доведення існування розв'язку задачі залишається довести розв'язність рівняння (17) у класі додатних неперервних функцій $h(t)$, $t\in[0,T]$. Доведемо спочатку його розв'язність у класі

$$M_R=\{h\in C[0,T]\ :\ \|h\|_{C[0,T]}\le R\}.$$

Це — банахів простір, як замкнений підпростір банахового простору $C[0,T]$ з нормою

$$\|h\|_{C[0,T]}=\max_{t\in[0,T]}|h(t)|.$$

Використаємо принцип Шаудера. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t):=-\Big[(F,\widehat{G}_0\varphi_0')(t)+\sum_{j=1}^2(F_j,\widehat{G}_j\varphi_0')(t)\Big]\cdot\Big[F_3(t)\Big]^{-1},\quad t\in[0,T].$$

Узагальнені функції в обмеженій області мають скінченний порядок сингулярності [18]: існують такі цілі числа k_0, k_1, k_2 та функції $g_{0k}, g_{1k}, g_{2k} \in L_1(0,l)$, що

$$(F_j(y), \varphi(y)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k \varphi(y) dy \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}[0,l], \quad j = 0,1,2. \tag{18}$$

Використовуючи зображення (18) та оцінки (14), (15), переконуємося, що для довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0,l]$ функції

$$\int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau = \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^t g(\tau) \Big[\int_0^l g_{0k}(y) \big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau) dy \Big] d\tau,$$

$$(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k (\widehat{G_j}\varphi)(y,t) dy, \quad j = 1,2,$$

неперервні на $[0,T]$, і при цьому правильні оцінки

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau \right| \\ &\leq c_0 \|\varphi\|_{C[0,l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)| \Big[\int_0^l |g_{00}(y)| dy \Big] \Big[(t-\tau)^{\beta-1} + \sqrt{R}(t-\tau)^{\beta/2-1} \Big] d\tau \\ &+ c_0\sqrt{R} \sum_{k=1}^{k_0} \|\varphi\|_{C^{k-1}[0,l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)| \Big[\int_0^l |g_{0k}(y)| dy \Big] (t-\tau)^{\beta/2-1} d\tau \leq b_0 t^{\beta/2}(t^{\beta/2} + \sqrt{R}), \end{aligned} \tag{19}$$

$$|(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t))| \leq c_j \sum_{k=0}^{k_j} \|\varphi\|_{C^k[0,l]} \cdot t^{j-1} \int_0^l |g_{jk}(y)| dy = b_j t^{j-1}, \quad j = 1,2, \tag{20}$$

а також

$$\begin{aligned} &|(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t))| \leq c_j^* \|\varphi\|_{C[0,l]} \cdot t^{j-1} \int_0^l |g_{j0}(y)| dy \\ &+ c_j^* \sum_{k=1}^{k_j} \|\varphi\|_{C^{k-1}[0,l]} \cdot [\sqrt{R} t^{j-1-\beta/2} + t^{j-1}] \int_0^l |g_{jk}(y)| dy \leq b_j^* [\sqrt{R} t^{j-1-\beta/2} + t^{j-1}], \quad j = 1,2, \end{aligned} \tag{21}$$

де b_j, b_j^* $(j = 0,1,2)$ — певні додатні сталі. Тоді при $h \in M_R$, $t \in [0,T]$ одержуємо

$$|(Ph)(t)| \leq \Big[b_0 \sqrt{R} t^{\beta/2} + b_0 t^\beta + b_1 + b_2 t \Big] \cdot \Big[F_3(t) \Big]^{-1} \leq A\sqrt{R} + B,$$

де $A = b_0 T^{\beta/2} / \inf_{t \in [0,T]} |F_3(t)|$, $B = [b_0 T^\beta + b_1 + b_2 T] / \inf_{t \in [0,T]} |F_3(t)|$. За властивістю функції $A\sqrt{R} +\ B$ при довільних додатних числах A, B існує таке $R_0 = R_0(A,B) > 0$, що для всіх $R > R_0$ виконується нерівність $A\sqrt{R} + B < R$. Ми показали, що для всіх $R > R_0$, $h \in M_R$

$$\|Ph\|_{C[0,T]} < R, \text{ а, отже, } P : M_R \to M_R.$$

Оператор P неперервний на M_R. Справді, при $h_1, h_2 \in M_R$

$$\begin{aligned}
&(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)\\
&= -[F_3(t)]^{-1}\Big(F_0(y), \int\limits_0^T g(\tau)\int\limits_0^l [G_0(x,t,y,\tau,1/h_1) - G_0(x,t,y,\tau,1/h_2)]\varphi_0(x)dxd\tau\Big)\\
&- \sum_{j=1}^{2}[F_3(t)]^{-1}\Big(F_j(y), \int\limits_0^l [G_j(x,t,y,1/h_1) - G_j(x,t,y,1/h_2)]\varphi_0(x)dx\Big).
\end{aligned}$$

Використовуючи зображення (18) узагальнених функцій та властивості спряжених операторів Ґріна, одержуємо, що значення $|(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)|$ малі для всіх $t \in [0,T]$ при малих значеннях $|h_1(t) - h_2(t)|$, $t \in [0,T]$.

Подібно одержуємо, що оператор P компактний на M_R: вище було встановлено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t), t \in [0,T]\}$ при $h \in M_R$, її одностайна неперервність випливає з рівномірної збіжності інтегралів у виразі $(Ph)(t+\Delta t) - (Ph)(t)$ при $h \in M_R$, якщо використати формули (18), оцінки (14) та наслідок 1 із [13], за яким

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_i(x,t,y,\tau,a)| \le M_i(x,t,y,\tau,a)|\Delta t|^{\gamma}, \quad (x,t),(y,\tau) \in \overline{Q}_0,$$

де $0 < \gamma < 1$, невід'ємні функції $M_i(x,t,y,\tau,a)$ мають такі ж оцінки, як $G_i(x,t,y,\tau,a)$, $i = 0,1,2$ відповідно із заміною β на $\beta - \gamma$.

Було показано неперервність правої частини в (17) для всіх $t \in [0,T]$. Також із оцінок (14) та додатності функцій $G_j(x,t,y,\tau,1/h)$, $(x,t) \in Q_0$, $y \in (0,l)$, $0 \le \tau < t \le T$ випливає, що за умов (F) функції $\int\limits_0^T g(\tau)\big(F_0, \widehat{G}_0\varphi_0'\big)d\tau$, $\big(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0'\big)$, $j = 1,2$, та $-F_3(t)$ одного знаку для всіх $t \in [0,T]$, обидва множники у (17) відмінні від нуля. Звідси одержуємо, що $(Ph)(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $h \in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (17), одержуємо додатність його розв'язку $h(t)$. □

Теорема 3. *За умови (F1) розв'язок $(u,a) \in \mathfrak{M}_+$ задачі 1 єдиний.*

Доведення. Якщо $(u_1,a_1), (u_2,a_2) \in \mathfrak{M}_+$ — два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $a = a_1 - a_2$, то

$$v_t^{(\beta)} - a_1(t)v_{xx} = a(t)u_{2_{xx}}, \quad (x,t) \in Q_0, \tag{22}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v_{|t=0} = 0, \quad x \in [0,l], \tag{23}$$

$$a_1 v = a_1 v_1 - a_1 v_2 = a_1 v_1 - a_2 v_2 - (a_1 - a_2)v,$$

$$\begin{aligned}
a_1(t)(v_x(x,t),\varphi_0(x)) &= -a_1(t)(v(x,t),\varphi_0'(x)) = \frac{a(t)}{a_2(t)}(a_2(t)v_2(x,t),\varphi_0'(x))\\
&= -\frac{a(t)}{a_2(t)}(a_2(t)v_{2_x}(x,t),\varphi_0(x)) = -\frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)}, \quad t \in [0,T],
\end{aligned}$$

а, отже,

$$a_1(t)(v(x,t),\varphi_0'(x)) = \frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)}, \ \ t \in [0,T] \quad \forall \varphi_0 \in \mathfrak{D}(0,l). \tag{24}$$

За теоремою 3 із [13] для функції v, як розв'язку першої крайової задачі (22), (23), правильне зображення

$$(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)) = \int\limits_0^t a(\tau)\Big(u_{2_{yy}}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau \quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}[0,l], \quad t\in[0,T]. \tag{25}$$

Підставляючи функцію (25) в умову (24), одержуємо

$$a_1(t)\int\limits_0^t a(\tau)\Big(u_{2_{yy}}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau = \frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)},$$

тобто

$$a(t) - \int\limits_0^t a(\tau)\frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\cdot\Big(u_{2_{yy}}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau = 0, \quad t\in[0,T], \tag{26}$$

де в підінтегральному виразі є значення узагальненої функції $u_{2_{yy}}(\cdot,\tau)$ на $(\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)$ для фіксованих $t,\tau\in[0,T]$.

За теоремою 3 та наслідком 2 із [13] $u_2(y,\tau)$ та $u_{2_{yy}}(y,\tau)$ — неперервні узагальнені функції змінної τ. Як узагальнена функція в обмеженій області $\overline{Q}_0$, $u_{2_{yy}}(y,\tau)$ має скінченний порядок s та c-сингулярності. Тому правильне зображення вигляду (18)

$$(u_{2_{yy}}(y,\tau),\varphi(y)) = \sum_{k=0}^{p}\int\limits_0^l r_k(y,\tau)\big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k\varphi(y)dy \quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}[0,l],$$

де $r_k\in C(\overline{Q}_0)$, $k=0,1,\ldots p$, звідки ядро інтегрального рівняння (26) $K(t,\tau) = \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\cdot\Big(u_{2_{yy}}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)\Big) = \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\cdot\sum\limits_{k=0}^{p}\int\limits_0^l r_k(y,\tau)\big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k(\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)dy$ на підставі (14) має оцінку $|K(t,\tau)|\le C(t-\tau)^{\beta/2-1}$, C — додатна стала. Ми одержали, що функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з інтегровним ядром, яке однозначно розв'язне. Отже, $a(t)=0$, $t\in[0,T]$. Тоді з (25) одержуємо $v(x,t)=0$, $(x,t)\in\overline{Q}_0$. □

Зауваження. З доведення теореми 2 випливає існування розв'язку задачі (1)–(5) і тоді, коли $F_0(x)\equiv 0$ на $[0,l]$, але хоч одна з функцій $F_j\in\mathfrak{D}'[0,l]$, $j=1,2$, нетривіальна та має порядок сингулярності $s(F_j)\ge 1$, однак у випадку $s(F_1)\ge 1$ та регулярних або тривіальних F_0,F_2 у припущенні (F1) треба вважати $F_3\in C_{\beta/2}[0,T] = \{v\in C(0,T] | t^{\beta/2}v\in C[0,T],\ \inf\limits_{t\in(0,T]} t^{\beta/2}|v(t)|>0\}$, оскільки тепер замість (20) при $j=1$ потрібно використовувати оцінку (21).

За припущення $F_3\in C_{\beta/2}(0,T]$ також одержуємо єдиність розв'язку цієї задачі.

З доведення теореми 2 бачимо, що достатньо вважати $\varphi_0\in C_0^m(0,l)$, де $m=\max\limits_{j=0,1,2}s(F_j)$.

4 Розв'язність задачі 2

Підставимо функцію (16) (розв'язок першої крайової задачі (1)–(4)) в умову (6). Маємо

$$\int\limits_0^t (F_0,\widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)g(\tau)d\tau = F_4(t) - \sum_{j=1}^{2}(F_j,\widehat{G}_j\varphi_0)(t), \quad t\in[0,T]. \tag{27}$$

Ми одержали лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду, ядро якого $K_0(t,\tau) = (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)$, згідно з (19), має оцінку $|K_0(t,\tau)| \le C(t-\tau)^{\beta/2-1}$, C — додатна стала. Умова $F_4(0) = \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(0) = (F_1, \varphi_0)$ є необхідною умовою розв'язності рівняння (27) у $C[0,T]$. Подамо рівняння (27) у вигляді

$$f_{1-\beta/2}(t) * \int_0^t (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)g(\tau)d\tau = g_4(t),$$

де $g_4(t) = f_{1-\beta/2}(t) * [F_4(t) - \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(t)]$. Після перетворень одержуємо рівнозначне рівнянню (27) лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^t K_1(t,\tau)g(\tau)d\tau = g_4(t), \tag{28}$$

ядро якого $K_1(t,\tau) = f_{1-\beta/2}(t-\tau) * (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t-\tau,\tau)$ неперервне та має, згідно з (19), оцінку

$$|K_1(t,\tau)| \le \hat{C}f_{1-\beta/2}(t-\tau) * f_{\beta/2}(t-\tau)] = \hat{C}f_1(t-\tau),$$

$\hat{C}$ – додатна стала. При неперервній диференційовності правої частини $g_4(t)$ матимемо єдиний неперервний розв'язок рівняння (28). Із одержаних у розділі 2 оцінок (20) випливає, що

$$|f_{1-\beta/2}(t) * (F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(t)| \le P_j t^{-\beta/2+j}, \quad P_j = const > 0, \quad j = 1,2,$$

та $f_{1-\beta/2} * (F_j, \widehat{G}_j\varphi_0) \in C^1[0,T]$. Тоді за умови $f_{1-\beta/2} * F_4 \in C^1[0,T]$ (яка виконується при $F_4 \in C^1[0,T]$) одержуємо розв'язність рівняння (28) у класі неперервних функцій на $[0,T]$. Ми довели наступну теорему.

Теорема 4. *За припущення (F2) існує розв'язок $(u,g) \in \mathfrak{M}$ задачі 2: функція u задана формулою* (16), $g(t)$ *— розв'язок інтегрального рівняння* (27), *рівнозначного рівнянню*

$$\int_0^t f_{1-\beta/2}(t-\tau) * (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t-\tau,\tau)g(\tau)d\tau = f_{1-\beta/2}(t) * [F_4(t) - \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(t)], \quad t \in [0,T].$$

Теорема 5. *Розв'язок $(u,g) \in \mathfrak{M}$ задачі 2 єдиний.*

Доведення. Якщо $(u_1, g_1), (u_2, g_2) \in \mathfrak{M}$ — два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$, то

$$v_t^{(\beta)} - a(t)v_{xx} = F_0(x) \cdot (g_1(t) - g_2(t)), \quad (x,t) \in Q_0, \tag{29}$$

$$v_{|Q_1} = 0, \quad v_{|t=0} = 0, \tag{30}$$

$$(v(x,t), \varphi_0(x)) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{31}$$

та для функції v, як розв'язку першої крайової задачі (29)–(30), правильне зображення

$$(v,\varphi) = \int_0^t \Big(F_0, \widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi\Big)(t,\tau)\Big(g_1(\tau) - g_2(\tau)\Big)d\tau, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0). \tag{32}$$

Підставляючи функцію (32) в умову (31), одержуємо

$$\int_0^t \Big(F_0, \widehat{G}_0\varphi_0\Big)(t,\tau)\Big(g_1(\tau)-g_2(\tau)\Big)d\tau = 0.$$

Це однорідне лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду відносно функції $z = g_1 - g_2$. При доведенні попередньої теореми було показано, що воно рівнозначне лінійному однорідному інтегральному рівнянню Вольтерри першого роду з неперервним ядром, а тому $z(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Тоді з (32) одержуємо $v(x,t) = 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_0$. □

Зауваження. Розглянуто задачі в одновимірному просторовому випадку. Результати поширюються на випадок $Q_0 = \Omega \times (0, T]$, де Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

References

[1] Anh V.V., Leonenko N.N. *Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas*. J. Stat. Phys. 2001, **104** (5/6), 1349–1387.

[2] Caputo M. *Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent, II*. Geofis. J. R. Astr. Soc. 1967, **13**, 529–539.

[3] Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T. *Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation*. Inverse problems 2009, **25**, 1–16.

[4] Djrbashian M.M. Integral transformations and representations of functions in complex domain. Nauka, Moskow, 1999. (in Russian)

[5] Duan Jun-Sheng. *Time- and space-fractional partial differential equations*. J. Math. Phys. 2005, **46** (1), 13504-13511.

[6] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[7] El-Borai M. M. *On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem*. Intern. J. Research Rev. Appl. Sci. 2010, **4**, 411–415.

[8] Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh., Yamamoto M. *Determination of order in fractional diffusion equation*. J. Math. Ind. 2013, **5A**, 51–57.

[9] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. In: Math. Studies, Monograph Ser., 10, VNTL Publ., Lviv, 2003.

[10] Kochubei A.N. *Fractional-order diffusion*. Differential Equations 1990, **26**, 485-492.

[11] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Equations of one-dimentional fractional-order diffusion*. Reports NAS of Ukraine 2002, (12), 11-16. (in Ukrainian)

[12] Lopushanska H.P., Lopushanskyj A.O. *Space–time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions*. Ukr. Math. J. 2013 **64** (8), 1215–1230. doi:10.1007/s11253-013-0711-z (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 2012, **64** (8), 1067-1080. (in Ukrainian))

[13] Lopushanskyj A.O. *Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 279–289. doi:10.15330/cmp.5.2.279-289 (in Ukrainian)

[14] Luchko Yu. *Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order*. Fract. Calc. Appl. Anal. 2009, **12**, 409–422.

[15] Meerschaert M.M., Nane Erkan, Vallaisamy P. *Fractional Cauchy problems on bounded domains*. Ann. Probab. 2009, **37**, 979–1007.

[16] Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M. *Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration*. J. Math. Ind. 2010, **2A**, 99–108.

[17] Rundell W., Xu X., Zuo L. *The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation*. Appl. Anal. 2012, **1**, 1–16.

[18] Shilov G.E. Mathimatical Analysis. Second special course. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)

[19] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Marcel Dekker, New York, 1971. (translation of Nauka, Moscow, 1967. (in Russian))

[20] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative*. Dokl. Ak. Nauk 2007, **414** (4), 1-4. (in Russian)

[21] Zhang Y., Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation*. Inverse problems 2011, **27**, 1–12.

Надійшло 18.09.2013

Lopushanskyj A., Lopushanska H. *Inverse boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 79–90.

We prove the unique solvability of the problem on determination of the solution $u(x,t)$ of the first boundary value problem for equation

$$u_t^{(\beta)} - a(t)\Delta u = F_0(x) \cdot g(t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

with fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (0,2)$, generalized functions in initial conditions, and also determination of unknown continuous coefficient $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$ $\big($or unknown continuous function $g(t)\big)$ under given the values $(a(t)u_x(\cdot,t), \varphi_0(\cdot))$ $\big((u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot))$, respectively$\big)$ of according generalized function onto some test function $\varphi_0(x)$.

Key words and phrases: fractional derivative, inverse boundary value problem, Green vector-function, operator equation.

Лопушанский А.О., Лопушанская Г.П. *Обратные краевые задачи для диффузионно-волнового уравнения с обобщенными функциями в правых частях* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 79–90.

Доказана однозначная разрешимость задач об определении решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для уравнения

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x) \cdot g(t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

с дробной производной $u_t^{(\beta)}$ порядка $\beta \in (0,2)$, обобщенными функциями в начальных условиях, а также неизвестного непрерывного коэффициента $a(t) > 0, t \in [0,T]$ $\big($или неизвестной непрерывной функции $g(t)\big)$ при дополнительно заданных значениях $(a(t)u_x(x,t), \varphi_0(x))$ $\big((u(x,t), \varphi_0(x))\big)$ соответствующей обобщенной функции на некоторой основной функции $\varphi_0(x)$.

Ключевые слова и фразы: производная дробного порядка, обобщенная функция, обратная краевая задача, вектор-функция Грина, операторное уравнение.