UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO

COMPLETITUD DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN
Teorema de Completitud de Gödel y Teorema de Löwenheim-Skolem

---

Autora:
Cristina León Muñoz
Directores:
Fernando Barrera Esteban y Fernando Montaner Frutos

4 de septiembre de 2023

Prólogo

Un sistema formal es un conjunto de símbolos, reglas de construcción, reglas de inferencia y axiomas. Estas reglas de construcción permiten producir ciertas fórmulas a partir de los símbolos del sistema, así como los axiomas y las reglas de inferencia permiten deducir fórmulas a partir de las existentes de manera sistemática y precisa. Un sistema lógico es un tipo específico de sistema formal al que se le añaden nociones semánticas. Así, un sistema lógico incluye tanto las reglas sintácticas para construir y manipular fórmulas, como las reglas semánticas para asignar significado y valor de verdad a esas fórmulas en diferentes interpretaciones o modelos.

Aunque la lógica tiene sus principios en la Antigua Grecia de Aristóteles, el paso de la lógica aristotélica a la lógica moderna radica principalmente en dotar a esta de un sistema formal. Esta labor es generalmente atribuida a los matemáticos británicos George Boole y Augustus De Morgan. Boole, en su libro *An Investigation of the Laws of Thought* (en español, *Una Investigación sobre las Leyes del Pensamiento*) publicado en 1854, introduce una forma algebraica de lógica en la que las proposiciones se representan mediante símbolos y se operan como variables algebraicas. Por su lado, De Morgan, en su libro *Formal Logic* (*Lógica formal* en español), publicado en 1847, introduce también un enfoque simbólico para representar proposiciones y argumentos lógicos con el objetivo de tratar de simplificar y clarificar la lógica deductiva. En nuestro primer capítulo del trabajo se repasan las nociones básicas de la lógica proposicional formal que serán extendidas posteriormente a la lógica de primer orden con identidad. Esto nos permitirá formarnos una idea simplificada del problema al que nos enfretaremos en el siguiente capítulo.

Para empezar a hablar de la lógica que a nosotros nos atañe en este trabajo, la lógica de primer orden con igualdad, debemos adelantarnos hasta 1879, año en el que el filósofo y matemático aleman Gottlob Frege publica su primer trabajo importante sobre lógica titulado *Begriffsschrift* (en español, *Conceptografía* o *Escritura de Conceptos*). En esta obra Frege desarrolló una lógica de primer orden más expresiva y sistemática, incorporando los cuantificadores universales ($\forall$) y existenciales ($\exists$), así como el concepto de función. Presentó además una notación más avanzada y precisa que las desarrolladas por Boole y De Morgan, permitiendo una representación rigurosa de las relaciones lógicas. Esta ampliación permitió abordar la estructura lógica y matemática con mayor profundidad. En nuestro segundo capítulo del trabajo procedemos a describir el sistema formal de la lógica de primer orden con igualdad de la manera en que se hace en la actualidad. Así, introducimos primero las nociones de lenguaje y estructura, y nos metemos después con las partes sintáctica y semántica del sistema. En la primera de estas dos partes nos ocupamos de las reglas de formación y manipulación de los símbolos del lenguaje, mientras que en la segunda interpretamos las cadenas de símbolos construidas en ciertas estructuras.

Aunque Frege sentó las bases de la lógica formal, su sistema enfrentó un contratiempo devastador debido a una paradoja que el matemático británico Bertrand Russell descubrió en su trabajo en 1902. Esta paradoja, conocida como la paradoja de Russell, cuestionó la coherencia de las bases lógicas y le motivó, junto al también matemático británico Alfred North Whitehead, a emprender el proyecto monumental de escribir los *Principia Mathematica*. El objetivo de estos estudios era establecer una base lógica para las matemáticas, que en ese momento carecían de rigurosidad. Otro de los intentos por formalizar las matemáticas vino de la mano del matemático alemán David Hilbert y lo que conocemos como el *programa de Hilbert*. El objetivo principal de dicho programa era axiomatizar y formalizar toda la matemática, en particular formar un conjunto de axiomas finito y completo que fuera consistente. Con esto sugirió que la consistencia de sistemas más complicados, como el análisis real, podrían ser probados en términos de sistemas más simples y así la consistencia de toda la matemática podría al final ser reducida a la aritmética básica. Fué el matemático austriaco Kurt Gödel, en la década de 1930, quién demostró que en el sistema formal ZFC (Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección), que se convirtió en el marco predominante para los fundamentos de las matemáticas, siempre habría enunciados verdaderos pero no demostrables, lo que hizo fracasar el programa de Hilbert. Antes de demostrar su famoso Teorema de Incompletitud, entre 1929 y 1930, Gödel estudió el fragmento de primer orden de los *Principia Mathematica*. Fruto de ese estudio fue el Teorema de Completitud para la lógica de primer orden sin identidad, que posteriormente extendería a la lógica de primer orden con identidad (ver Teorema 3.9). El Teorema de Completitud de Gödel establece que cualquier fórmula semánticamente válida (verdadera en todos los modelos) puede ser demostrada a partir de los axiomas y reglas de inferencia dentro del sistema formal de primer orden . Desde Gödel, matemáticos como Hilbert, Bernays o Henkin han dado demostraciones alternativas, siendo la de Henkin las más común en la actualidad.

Durante ese tiempo se empezó a desarrollar lo que se conoce como teoría de modelos. La teoría de modelos nace como una respuesta a la necesidad de comprender más profundamente las relaciones entre las teorías formales y las estructuras matemáticas que representan. A medida que se desarrollaron sistemas formales en el contexto de la lógica y las matemáticas, surgió la pregunta de cómo estos sistemas se relacionaban con el mundo matemático real y cómo se podía caracterizar la validez y la satisfacción en diferentes contextos. Alfred Tarski desempeñó un papel crucial en su desarrollo introduciendo por fin la noción de satisfacción y la relación entre modelos y teorías formales, lo cual permitió establecer conexiones esenciales entre la sintaxis de los sistemas formales y la semántica de los modelos, como es el caso del teorema de Completitud de Gödel. Los matemáticos Leopold Löwenheim y Thoralf Skolem trabajaron en esta rama e ilustraron cómo los modelos podían variar y cómo sus propiedades se relacionaban con las teorías en los teoremas que llevan sus nombres. Uno de estos teoremas, que después fué generalizado por Tarski, establece que si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito, entonces también tiene modelos de todos los tamaños infinitos mayores que la cardinalidad de su lenguaje (ver Corolario 3.16). Aunque estos resultados son previos al Teorema de Completitud de Gödel, se desprenden ahora como corolario del mismo. Y precisamente así es como llegaremos a probar los Teoremas de Löwenheim-Skolem y el Teorema de Compacidad en el tercer capítulo de este trabajo, después de haber demostrado tanto el Teorema de Completitud de Gödel original como una versión extendida del mismo.

Preface

A formal system is a set of symbols, construction rules, inference rules, and axioms. These construction rules allow the production of certain formulas from the symbols of the system, while axioms and inference rules allow the deduction of new formulas from existing ones in a systematic and precise way. A logical system is a specific type of formal system to which semantic notions are added. Thus, a logical system includes both the syntactic rules for constructing and manipulating formulas, as well as the semantic rules for assigning meaning and truth value to those formulas in different interpretations or models.

Although the principles of logic trace back to Aristotle's Ancient Greece, the transition from Aristotelian logic to modern logic is primarily rooted in providing it with a formal system. This effort is generally attributed to British mathematicians George Boole and Augustus De Morgan. Boole, in his book *An Investigation of the Laws of Thought*, published in 1854, introduces an algebraic form of logic in which propositions are represented using symbols and operated on as algebraic variables. On the other hand, in his book *Formal Logic*, published in 1847, De Morgan also introduces a symbolic approach to represent propositions and logical arguments with the aim of simplifying and clarifying deductive logic. In the first chapter of our work, we review the basic notions of formal propositional logic, which will later be extended to first-order logic with identity. This will allow us to form a simplified understanding of the problem we will tackle in the following chapter.

To look into the logic relevant to our work, namely first-order logic with identity, we must fast-forward to 1879, the year in which the German philosopher and mathematician Gottlob Frege publishes his seminal work on logic titled *Begriffsschrift* (*Concept Script* or *Concept Writing* in English). In this work, Frege developed a more expressive and systematic type of logic, incorporating universal ($\forall$) and existential ($\exists$) quantifiers, as well as the concept of function. He also introduced a more advanced and precise notation than those developed by Boole and De Morgan, enabling a rigorous representation of logical relationships. This expansion allowed for a deeper exploration of logical and mathematical structures. In our second chapter, we proceed to describe the formal system of first order logic with equality in the way it is understood today. We first introduce the notions of language and structure, and then get into the syntactic and semantic parts of the system. In the first of these two parts, we address the rules for forming and manipulating language symbols, while in the second part, we interpret the strings of symbols constructed within certain structures.

Although Frege laid the foundations of formal logic, his system faced a devastating setback due to a paradox discovered in his work by the British mathematician Bertrand Russell in 1902. This paradox, known as Russell's paradox, questioned the coherence of the logical foundations and motivated him and the also British mathematician Alfred North Whitehead to undertake the monumental project of writing *Principia Mathematica*. This project aimed to establish a rigorous logical foundation for mathematics. Another attempt to formalize mathematics came from the German mathematician David Hilbert and what we know as *Hilbert's program*. The main objective of this program was to axiomatize and formalize all mathematics, in particular, to create a finite and complete set of axioms that would be consistent. With this, he suggested that the consistency of more complicated systems, such as real analysis, could be tested in terms of simpler systems, and thus the consistency of all mathematics could ultimately be reduced to basic arithmetic. It was the Austrian mathematician Kurt Gödel, who in the 1930s, proved that in the Zermelo-Fraenkel formal system with the axiom of choice (ZFC), which became the predominant framework for the foundations of mathematics, there would always be true but unprovable statements within the system, which led to the failure of Hilbert's program. Before proving his famous Incompleteness Theorems, between 1929 and 1930, Gödel studied the first-order fragment of *Principia Mathematica*. The result of this study was Gödel's Completeness Theorem for first-order logic without identity, which he later extended to first-order logic with identity (see Theorem 3.9). Gödel's Completeness Theorem establishes that any semantically valid formula (true in all models) can be proven from axioms and inference rules within the formal system. Since Gödel's work, mathematicians like Hilbert, Bernays, and Henkin have provided alternative proofs, with Henkin's being the most common nowadays.

During this time, model theory began to develop. Model theory emerged as a response to the need for a deeper understanding of the relationships between formal theories and the mathematical structures they represent. As formal systems developed in the context of logic and mathematics, questions arose about how these systems related to the real mathematical world and how validity and satisfaction could be characterized in different contexts. Alfred Tarski played a crucial role in its development by finally introducing the notion of satisfaction and the relationship between models and formal theories. This allowed for essential connections to be established between the syntax of formal systems and the semantics of models, which is the case in Gödel's Completness Theorem. In the theorems that bear their names, mathematicians Leopold Löwenheim and Thoralf Skolem worked in this field and illustrated how models could vary and how their properties related to theories. One of these results, later generalized by Tarski, states that if a first-order theory has an infinite model, it also has models of all infinite sizes greater than the cardinality of its language (see Corollary 3.16). While these results predate Gödel's Completeness Theorem, they now follow as corollaries from it. This is precisely how we will prove the Löwenheim-Skolem Theorems and the Compactness Theorem in the third chapter of this work, after having proved both the original Gödel Completeness Theorem and an extended version of it.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares: lógica proposicional

El objetivo de este primer capítulo introductorio es presentar el sistema lógico de la lógica proposicional. Aunque se presupone que el lector tiene ya algunas nociones sobre lógica proposicional, se presentarán aquí los conceptos y principales resultados relacionados con la completitud de este sistema. Solo se proporcionarán demostraciones de los resultados principales. Las demostraciones de los resultados relativos a propiedades de los objetos definidos son análogas a sus correspondientes resultados en lógica de primer orden.

El sistema formal de la lógica proposicional se construye con los siguientes símbolos:

- paréntesis),(
- conectores $\wedge$, $\neg$
- variables proposicionales $p_1, p_2, p_3, \ldots$

Definición 1.1. Sea $\mathscr{S}$ un conjunto no vacío de variables proposicionales. Las *sentencias*, o $\mathscr{S}$*-sentencias*, se definen recursivamente de la siguiente manera:

(i) Toda variable proposicional es una sentencia.

(ii) Si A es un sentencia, entonces $\neg A$ también lo es.

(iii) Si A y B son sentencias, entonces $A \wedge B$ también lo es.

(iv) Una secuencia finita de símbolos es una sentencia si y solo si se obtiene aplicando un número finito de veces los apartados (i)-(iii).

Además de los conectores $\wedge$ y $\neg$, introducimos las siguientes abreviaciones:

- $(A \vee B) := (\neg(\neg A) \wedge (\neg B))$
- $(A \rightarrow B) := ((\neg A) \vee B)$
- $(A \leftrightarrow B) := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

A partir de ahora omitiremos los paréntesis cuando estos no sean estrictamente necesarios. Además, usaremos $\mathscr{S}$ para denotar tanto el conjunto de variables proposicionales como el lenguaje construido con estos símbolos. Observemos que no hay peligro de confusión puesto que el lenguaje está determinado de manera unívoca por las variables proposicionales.

Definición 1.2. Una *asignación* es una aplicación s del conjunto de variables proposicionales $\mathscr{S}$ en $\{V, F\}$.

Definición 1.3. Sea A una sentencia y s una asignación. Se define la *extensión de la asignación* s, $\bar{s}$, al conjunto de todas las sentencias de manera recursiva como sigue:

(i) Si A es la variable proposicional p, entonces $\bar{s}(A) = s(p)$.

(ii) Si A es de la forma $\neg B$, entonces $\bar{s}(A) = V$ si y solo si $\bar{s}(B) = F$.

(i) Si A es de la forma $B \wedge C$, entonces $\bar{s}(A) = V$ si y solo si $\bar{s}(B) = V$ y $\bar{s}(C) = V$.

Se define además el valor de verdad de la sentencia A como su imagen por $\bar{s}$.

Dada una asignación s, es fácil ver aplicando las definiciones de los conectores $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ que si A es de la forma $B \vee C$ entonces $\bar{s}(A) = F$ si y solo si $\bar{s}(B) = \bar{s}(C) = F$; si A es de la forma $B \rightarrow C$ entonces $\bar{s}(A) = F$ si y solo si $\bar{s}(B) = V$ y $\bar{s}(C) = F$; y si A es de la forma $B \leftrightarrow C$ entonces $\bar{s}(A) = V$ si y solo si $\bar{s}(B) = \bar{s}(C)$.

De ahora en adelante, si no hay riesgo de confusión, denotaremos $\bar{s}$ simplemente como s.

Definición 1.4. Dado un conjunto de variables proposicionales $\mathscr{S}$, un modelo de $\mathscr{S}$ es un subconjunto $\mathscr{T}$ de $\mathscr{S}$. Por lo tanto, el conjunto de todos los modelos de $\mathscr{S}$ tiene cardinalidad $2^{|\mathscr{S}|}$.

Observación 1.5. *Observemos que puesto que un modelo no es más que un subconjunto de $\mathscr{S}$, toda asignación s está caracterizada por un modelo $\mathscr{T}$, de igual manera que todo modelo $\mathscr{T}$ describe de manera unívoca una asignación s. Observamos además que con la definición de modelo que hemos dado, la función asignación se puede entender como la función característica (donde V se identifica con 1 y F con 0) de las variables proposicionales que son verdaderas. Esto es, si $\mathscr{T}$ es un modelo, entonces $s(A) = V$ si y solo si $A \in \mathscr{T}$ y $s(A) = F$ si y solo si $A \notin \mathscr{T}$.*

Definición 1.6. Se define de manera recursiva la *veracidad de una sentencia A en un modelo $\mathscr{T}$*, lo que denotaremos como $\mathscr{T} \models A$, como sigue:

(i) Si A es una variable proposicional, entonces $\mathscr{T} \models A$ si y solo si $A \in \mathscr{T}$.

(ii) Si A es de la forma $B \wedge C$, entonces $\mathscr{T} \models A$ si y solo si $\mathscr{T} \models B$ y $\mathscr{T} \models C$.

(iii) Si A es de la forma $\neg B$, entonces $\mathscr{T} \models A$ si y solo si no se tiene que $\mathscr{T} \models B$ (lo que denotamos $\mathscr{T} \not\models B$).

Cuando se tiene $\mathscr{T} \models A$ se dice que A es *verdadera en el modelo $\mathscr{T}$*, y si $\mathscr{T} \not\models A$, se dice que A es *falsa en el modelo $\mathscr{T}$*.

Notemos que $\mathscr{S}$ y $\emptyset$ son trivialmente modelos de $\mathscr{S}$ donde las sentencias son todas verdaderas o todas falsas respectivamente.

Definición 1.7. Una sentencia A se dice *válida*, denotado $\models A$, si es cierta en todo modelo $\mathscr{T}$ de $\mathscr{S}$.

Definición 1.8. Una sentencia A es una *tautología*, lo que denotamos $\vdash A$, si y solo si tiene valor de verdad V bajo toda asignación s.

Para obtener el valor de verdad de una sentencia bajo una asignación se usan lo que se conocen como *tablas de verdad*. Estas tablas recogen el valor de verdad de la sentencia bajo todas las asignaciones posibles. En el siguiente ejemplo vamos a ver como se van obtieniendo de manera recursiva los valores de verdad de la sentencia.

Ejemplo 1.9. Veamos la tabla de verdad de la sentencia. $A = \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg)p \vee (\neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg)p \vee (\neg q)$
V	V	F	F	F	V	F	T
V	F	F	V	V	F	V	T
F	V	V	F	V	F	V	T
F	F	V	V	V	F	V	T

Luego como el valor de verdad de A bajo cualquier asignación es V, tenemos que A es una tautología. La tautología de este ejemplo es una de las dos leyes de De Morgan.

A continuación introducimos la noción de demostración o deducción formal, para lo cual definimos la siguiente regla de inferencia conocida como Modus Ponens:

$$\text{de } A \text{ y } (A \to B) \text{ se infiere } B.$$

Definición 1.10. Una sentencia A es *deducible de* $\Sigma \subseteq \mathscr{S}$, lo que denotamos $\Sigma \vdash A$, si existe una secuencia $\{B_0, \ldots, B_n\}$ de sentencias tales que $A = B_n$ y cada sentencia de la secuencia o bien es una tautología, o bien es una hipótesis (esto es, pertenece a Σ) o se infiere por Modus Ponens de dos sentencias previas de la secuencia. A la secuencia $\{B_0, \ldots, B_n\}$ la llamamos deducción o demostración formal.

Observar que A es deducible del conjunto vacío de sentencias si y solo si es una tautología.

Ejemplo 1.11. (i) $\{A, B\} \vdash A \wedge B$.

(ii) $\{A \wedge B\} \vdash A$ y $\{A \wedge B\} \vdash B$.

(iii) $\{\neg\neg A\} \vdash A$.

(iv) $\{A \wedge \neg A\} \vdash B$.

(v) $\{(A \vee B) \wedge (A \vee C)\} \vdash A \vee (B \wedge C)$.

La deducción de (i) es la secuencia $\{A \to (B \to A \wedge B)\,, A\,, B \to A \wedge B\,, B\,, A \wedge B\}$, donde

$A \to (B \to A \wedge B)$	es una tautología,
A	es una hipótesis,
$B \to A \wedge B$	se infiere por Modus Ponens,
B	es hipótesis,
$A \wedge B$	se infiere por Modus Ponens.

El resto de deducciones son muy similares.

Teorema 1.12. ***Teorema de Completitud.*** *Una sentencia A es válida si y solo si es una tautología, esto es,* $\models A$ *si y solo si* $\vdash A$.

Demostración. Sea A una sentencia cuyas variables proposicionales se encuentran entre $\{p_0, \ldots, p_n\}$. Consideremos un modelo arbitrario $\mathscr{T}$ de $\mathscr{S}$. Definimos la asignación s de manera que para $m = 0, \ldots, n$, definimos $s(p_m) = T$ si $p_m \in \mathscr{T}$ y $s(p_m) = F$ si $p_m \notin \mathscr{T}$. Observar que con dicha asignación se tiene que

$$\mathscr{T} \models A \text{ si y solo si el valor de verdad } A \text{ bajo la asignación } s \text{ es V.} \tag{1.1}$$

Es fácil verlo por inducción:

- Si $A = p_m$ para algún $m = 0, \ldots, n$, es obvio.
- Si A es de la forma $B \wedge C$, por definición $\mathscr{T} \models A$ si y solo si $\mathscr{T} \models B$ y $\mathscr{T} \models C$, lo cual por hipótesis de inducción ocurre si y solo si el valor de verdad de B y C bajo la asignación s es V, si y solo si, por definición, el valor de verdad de A bajo dicha asignación es V.
- Si A es de la forma $\neg B$, de nuevo $\mathscr{T} \models A$ si y solo si $\mathscr{T} \not\models B$ si y solo si, por hipótesis de inducción, el valor de verdad de B bajo la asignación s es F, si y solo si el valor de verdad de A bajo dicha asignación es V.

Recordemos que por la Observación 1.5 los modelos y las asignaciones se determinan unívocamente. Así, si A es una tautología, bajo cualquier asignación s toma valor de verdad V, y por (1.1) se tiene que para todo $\mathscr{T}, \mathscr{T} \models A$. Esto es, A es válida. Para el recíproco supongamos que A es válida, por lo que $\mathscr{T} \models A$ para todo $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$. Como de nuevo toda asignación s puede ser obtenida de algún modelo $\mathscr{T}$, por (1.1) tenemos que el valor de verdad bajo cualquier asignación es V, esto es, A es una tautología. $\square$

Definición 1.13. Dado un modelo $\mathscr{T}$ y un conjunto de $\mathscr{S}$-sentencias Σ, entonces diremos que $\mathscr{T}$ es un *modelo de* Σ si toda sentencia de Σ es verdadera en $\mathscr{T}$. Un conjunto de sentencias Σ se dice *satisfacible* si tiene al menos un modelo.

Definición 1.14. Un conjunto de sentencias Σ de $\mathscr{S}$ se dice *finitamente satisfacible* si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Definición 1.15. Una sentencia A es una *consecuencia del conjunto de sentencias* Σ, lo que denotamos como $\Sigma \models A$, si todo modelo de Σ es también un modelo de A.

Definición 1.16. Un conjunto de sentencias Σ se dice *inconsistene* si para toda sentencia A, $\Sigma \vdash A$. Un conjunto de sentencias se dice *consistente* si no es inconsistente. Un conjunto Σ de sentencias se dice *consistente maximal* si es consistente y además ningún otro conjunto consistente le contiene propiamente.

Proposición 1.17. *Sea Σ un conjunto de sentencias.*

(i) *Si Σ es consistente y Γ es el conjunto de todas las sentencias deducibles de Σ, entonces Γ es también consistente.*

(ii) *Sea A es una sentencia. Si Σ es consistente maximal, $\Sigma \vdash A$ si y solo si $A \in \Sigma$.*

(iii) *Σ es inconsistente si y solo si $\Sigma \vdash (p \wedge \neg p)$ para algún $p \in \mathscr{S}$.*

(iv) *(Teorema de Deducción) $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$ si y solo si $\Sigma \vdash (A \to B)$.*

(v) *$\Sigma \vdash \neg A$ si y solo si $\Sigma \cup \{A\}$ es inconsistente.*

Lema 1.18. ***Lema de Lindenbaum.*** *Todo conjunto consistente de sentencias Σ puede ser extendido a un conjunto consistente maximal de sentecias Γ.*

Lema 1.19. *Sea Σ un conjunto de sentencias consistente maximal.*

(i) *Sea A una sentencia, entonces o bien $A \in \Sigma$ o $\neg A \in \Sigma$ (pero no las dos).*

(ii) *Sean A y B sentencias, entonces $A \wedge B \in \Sigma$ si y solo si $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$.*

Teorema 1.20. ***Teorema de Completitud extendido.*** *Un conjunto Σ de sentencias de $\mathscr{S}$ es consistente si y solo si es satisfacible.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Supongamos que Σ es satisfacible y sea $\mathscr{T}$ un modelo para Σ. Puesto que por la Proposición 1.17 Σ es inconsistente si y solo si $\Sigma \vdash (p \wedge \neg p)$ para alguna variable proposicional p, para ver que Σ es consistente debemos ver que $\Sigma \nvdash (p \wedge \neg p)$. Para ver esto probaremos primero que:

$$\text{toda sentencia deducible de } \Sigma \text{ es verdadera en } \mathscr{T}. \tag{1.2}$$

Probemoslo por inducción sobre la longitud de la deducción formal: sea $\{A_0, \ldots, A_n\}$ una deducción formal de $A = A_n$ en Σ. Para todo $m \leq n$, si $A_m \in \Sigma$ o A_m es una tautología, entonces claramente $\mathscr{T} \models A_m$. Si A_m se infiere de A_j y $A_j \to A_m$ para $j < m$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que $\mathscr{T} \models A_j$ y $\mathscr{T} \models A_j \to A_m$. Es fácil ver por definición del conector $\to$ que esto último es equivalente a tener que $\mathscr{T} \nvDash A_j$ o $\mathscr{T} \models A_m$, y como tenemos que $\mathscr{T} \models A_j$, necesariamente se tiene $\mathscr{T} \models A_m$.
Así pues, como $\mathscr{T} \nvDash (p \wedge \neg p)$, por (1.2) $\Sigma \nvdash (p \wedge \neg p)$.

$\Longrightarrow$) Suponemos ahora que Σ es consistente. Por el Lema de Lindenbaum 1.18 podemos ampliar Σ a un conjunto consistente maximal Γ. De esta forma, vamos a construir un modelo para Σ. Definimos el modelo $\mathscr{T}$ como sigue:

$$\mathscr{T} = \{p \in \mathscr{S} : p \in \Gamma\}. \tag{1.3}$$

Veamos por indución sobre la complejidad de las sentencias que este modelo es efectivamente un modelo para Σ, esto es, que para toda sentencia $A \in \Sigma$ se tiene $\mathscr{T} \models A$. Si A es una variable proposicional, como

$A \in \Gamma$ por definición de $\mathscr{T}$, claramente se tiene $\mathscr{T} \models A$. Si A es de la forma $B \wedge C$, si $A \in \Sigma \subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash B \wedge C$. Por el Ejemplo 1.11 se tiene que $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \vdash C$, y como Γ es consistente maximal, por la Proposición 1.17, $C \in \Gamma$ y $B \in \Gamma$, lo cual por hipótesis de inducción resulta en que $\mathscr{T} \vDash B$ y $\mathscr{T} \vDash C$, por lo que $\mathscr{T} \vDash A$. Si A es de la forma $\neg B$ se razona análogamente. Luego efectivamente Σ es satisfacible. $\square$

Corolario 1.21. ***Teorema de Compacidad.*** *Un conjunto de sentencias Σ de $\mathscr{S}$ es finitamente satisfacible si y solo si es satisfacible.*

Demostración. Obviamente si Σ es satisfacible, entonces es también finitamente satisfacible. Para el recíproco supongamos que Σ es finitamente satisfacible pero no satisfacible. Por el Teorema de Completitud extendido 1.20, Σ es inconsistente, por lo que por la Proposición 1.17 $\Sigma \vdash (p \wedge \neg p)$ para alguna variable proposicional p. Como en la deducción de $(p \wedge \neg p)$ de Σ solo aparecen un número finito de sentencias de Σ, digamos el conjunto Σ_0, tenemos que también $\Sigma_0 \vdash (p \wedge \neg p)$, por lo que Σ_0 es también inconsistente, y de nuevo por el Teorema de Completitud extendido tenemos que Σ_0 no es satisfacible, lo cual contradice nuestra hipótesis. $\square$

Corolario 1.22. *Sea A una sentencia y Σ un conjunto de sentencias de $\mathscr{S}$. Entonces*

(i) $\Sigma \vdash A$ *si y solo si* $\Sigma \models A$.

(ii) *Si* $\Sigma \models A$, *entonces existe un subconjunto finito* Σ_0 *de* Σ, *tal que* $\Sigma_0 \models A$.

Capítulo 2

Lógica de primer orden

El objetivo de esta sección es describir el sistema lógico de la lógica de primer orden. Para ello se definirán primero las nociones de lenguaje y estructura. Un lenguaje no es más que la colección de símbolos con los que queremos formar nuestras fórmulas, y una estructura es un par formado por una clase de objetos y una aplicación que interprete los símbolos del lenguaje en la clase. Así, este sistema lógico se puede dividir en dos partes: una parte sintáctica que se corresponde con el sistema formal y en la que se definirán las reglas de construcción y manipulación de los símbolos del lenguaje, y una parte semántica que nos permitirá interpretar las fórmulas del sistema formal en estructuras.

2.1. Lenguajes y estructuras

Definición 2.1. Llamamos *lenguaje* $\mathscr{L}$ a una colección de símbolos, cada uno de los cuales puede ser un símbolo constante, un símbolo funcional de aridad [1] n para algún número natural $n \geq 1$ o un símbolo relacional de aridad m para algún $m \geq 1$. Denotamos los símbolos constantes mediante la letra minúscula c, los símbolos funcionales mediante la letra mayúscula F y los símbolos relacionales mediante la letra mayúscula R, con sus correspondientes subíndices cuando estos sean necesarios.

Observar que los símbolos constantes podrían interpretarse simplemente como símbolos funcionales de aridad 0, de manera que podríamos haber reducido a dos los tipos de símbolos de un lenguaje. Por razones de comodidad lo usaremos de acuerdo a la Definición 2.1. Los símbolos relacionales pueden ser entendidos como n-tuplas.
De esta manera, si α, β, γ son números ordinales, podemos describir $\mathscr{L}$ de la siguiente manera:

$$\mathscr{L} = \{c_0, \ldots, c_\alpha, F_0, \ldots, F_\beta, R_0, \ldots, R_\gamma\}.$$

Ejemplo 2.2.

1. El lenguaje para los grupos es $\{e, *, ^{-1}\}$ donde el símbolo e denota el elemento identidad, la función $*$ representa la operación interna y $^{-1}$ representa relación entre dos elementos de ser uno inverso del otro.

2. Para un cuerpo, el lenguaje es $\{0, 1, +, \cdot\}$, siendo la constante 0 el elemento neutro de la función $+$ y la constante 1 el elemento neutro de la función $\cdot$.

3. El lenguaje de la teoría de conjuntos solo consta del símbolo relacional $\in$, a partir del cual se genera toda la teoría.

Definición 2.3. Sean $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ dos lenguajes tales que $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}'$. Diremos que $\mathscr{L}'$ es una *extensión* de $\mathscr{L}$, así como que $\mathscr{L}$ es una *reducción* de $\mathscr{L}'$.

[1] Recordar que se define la aridad de un operador matemático o de una función como el número de argumentos necesarios para que dicho operador o función se pueda calcular.

Podemos escribir $\mathscr{L}'$ en terminos de su reducción como $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup X$ donde X es el conjunto de símbolos $\mathscr{L}' \setminus \mathscr{L}$.

Definición 2.4. Una *estructura* para un lenguaje $\mathscr{L}$, o $\mathscr{L}$*-estructura*, es en un par $\langle A, \mathscr{F} \rangle$ donde A es una clase no vacía y $\mathscr{F}$ una aplicación enviando:

(i) Cada símbolo constante c de $\mathscr{L}$ a un elemento de A que denotaremos $c^{\mathfrak{A}}$.

(ii) Cada símbolo funcional F de $\mathscr{L}$ de aridad n a una función $F^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.

(iii) Cada símbolo relacional R en $\mathscr{L}$ de aridad m a una relación $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^m$.

Es decir, la aplicación $\mathscr{F}$ lleva símbolos de $\mathscr{L}$ a sus interpretaciones en A. Tal aplicación se denomina *interpretación*, y la clase no vacía A se denomina *universo*.

Denotaremos estas estructuras mediante letras góticas de manera que la letra que denota el modelo se corresponda con la de su universo, por ejemplo $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ o $\mathfrak{B} = \langle B, \mathscr{G} \rangle$.

Si $\mathscr{L}$ es un lenguaje de la forma

$$\mathscr{L} = \{c_0, \dots, c_\alpha, F_0, \dots, F_\beta, R_0, \dots, R_\gamma\},$$

las $\mathscr{L}$-estructuras de $\mathscr{L}$ los podemos escribir como

$$\mathfrak{A} = (A; c_0^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\alpha^{\mathfrak{A}}, F_0^{\mathfrak{A}}, \dots, F_\beta^{\mathfrak{A}}, R_0^{\mathfrak{A}}, \dots, R_\gamma^{\mathfrak{A}})$$

donde los $c_i^{\mathfrak{A}}$ son las interpretaciones de los símbolos constantes c_i para todo $i \leq \alpha$, esto es, $c_i^{\mathfrak{A}} = \mathscr{F}(c_i)$. Análogamente $F_i^{\mathfrak{A}}$ son las interpretaciones de F_i para todo $i \leq \beta$ y $R_i^{\mathfrak{A}}$ las interpretaciones de R_i para $i \leq \gamma$.

El cardinal de una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es el cardinal $|A|$. $\mathfrak{A}$ se dice que es finita, numerable o no numerable según lo sea $|A|$.

Ejemplo 2.5. Consideramos el lenguaje $\mathscr{L} = \{e, *\}$ donde e es un símbolo constante y $*$ un símbolo funcional. Entonces todas las siguientes son $\mathscr{L}$-estructuras: $(\mathbb{Z}; 0, +), (\mathbb{N}; 0, +), (\mathbb{Z}; 1, \cdot)$, donde $\cdot$ denota multiplicación estándar de los enteros.

De igual manera que definíamos la extensión y reducción de un lenguaje, si un lenguaje es una extensión de otro, podemos definir una extensión de la $\mathscr{L}$-estructura (y por lo tanto una reducción de la otra) de la siguiente forma: si $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup X$ con X disjunto de $\mathscr{L}$, y $\mathscr{F}'$ es una interpretación de los símbolos de $\mathscr{L}'$ tal que su restricción a $\mathscr{L}$ coincide con la interpretación de $\mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{A}' = \langle A, \mathscr{F}' \rangle$ es una $\mathscr{L}'$-estructura. $\mathfrak{A}'$ se llama una *expansión de* $\mathfrak{A}$ *a* $\mathscr{L}'$, así como $\mathfrak{A}$ se llama una *reducción de* $\mathfrak{A}'$ a $\mathscr{L}$. Notemos que puesto que ambas estructuras comparten el mismo universo, ambas estructuras tienen la misma cardinalidad.

Notación 2.6. Dada una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y un símbolo relacional R de aridad n de $\mathscr{L}$, usamos la notación $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$ para denotar que $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$, donde $a_1, \dots, a_n \in A$.

Definición 2.7. Dos $\mathscr{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfas* si existe una función biyectiva f de A en B cumpliendo que:

(i) Para cada símbolo constante c de $\mathscr{L}$ se tiene

$$f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

(ii) Para cada símbolo funcional F de $\mathscr{L}$ de aridad n se tiene

$$f(F^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = F^{\mathfrak{B}}(f(a_1) \dots f(a_n)), \quad \text{para todo } a_1, \dots, a_n \in A.$$

(iii) Para cada símbolo relacional R de $\mathscr{L}$ de aridad m se tiene

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_m) \text{ si y solo si } R^{\mathfrak{B}}(f(a_1),\ldots,f(a_m)), \quad \text{para todo } a_1,\ldots,a_m \in A.$$

Una función f satisfaciendo dichas condiciones se llama *isomorfismo de* $\mathfrak{A}$ *en* $\mathfrak{B}$, o *isomorfismo entre* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$, y se denota como $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Dos $\mathscr{L}$-estructuras isomorfas se denotan como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Notemos que $\cong$ es una relación de equivalencia que preserva la cardinalidad, es decir, si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $|A| = |B|$.

2.2. Lógica de primer orden con igualdad

Para poder construir este sistema, a los símbolos de un lenguaje $\mathscr{L}$ necesitamos añadir además los siguientes símbolos lógicos que nos permitirán construir las fórmulas del sistema:

- paréntesis),(
- variables $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$
- conectores $\wedge, \neg$
- cuantificador $\forall$
- identidad $=$

2.2.1. Sintaxis

Vamos a definir a continuación la noción de término y fórmula, con el objetivo de que los primeros representen objetos y los segundos afirmaciones.

Definición 2.8. Las siguientes cadenas de símbolos se llamarán *términos*:

(i) Una variable.

(ii) Un símbolo contante.

(iii) Si F es un símbolo funcional de aridad n y $t_1,\ldots,t_n$ son términos, entonces $F(t_1,\ldots,t_n)$ es un término.

Observemos que también podríamos definir un término de manera conjuntista de la siguiente forma: el conjunto de términos de $\mathscr{L}$ es el menor conjunto T que contiene a todos los símbolos constantes y a todas las variables, con la condición recursiva añadida de que si $t_1,\ldots,t_n \in T$, entonces para un símbolo funcional F de aridad n, se tiene que $F(t_1,\ldots,t_n) \in T$. Denotamos este conjunto T como $Term(\mathscr{L})$.

Definición 2.9. Sean $t_1,\ldots,t_m$ términos y R un símbolo relacional de aridad m. Llamamos *fórmulas atómicas* de $\mathscr{L}$ a las cadenas de la siguiente forma:

(i) $t_1 = t_2$

(ii) $R(t_1,\ldots,t_m)$

Definición 2.10. Llamamos *fórmulas* de $\mathscr{L}$ o $\mathscr{L}$*-fórmulas* a las siguientes cadenas de símbolos :

(i) Una fórmula atómica es una fórmula.

(ii) Si φ y ψ son dos fórmulas, entonces $(\varphi \wedge \psi)$ y $(\neg\varphi)$ son fórmulas.

(iii) Si x es una variable y φ una fórmula, entonces $(\forall x)\varphi$ es una fórmula.

Cuando los paréntesis no sean estrictamente necesarios, lo omitiremos.

Al igual que con la Definción 2.8, podemos reinterpretar esta definción en términos conjuntistas de la siguiente forma: el conjunto de las fórmulas de $\mathscr{L}$ es el menor conjunto Δ tal que contiene a todas las fórmulas atómicas, con la condición recursiva añadida de que si $\varphi, \psi \in \Delta$ y x es una variable, entonces $\varphi \wedge \psi, \neg\varphi, \forall x\varphi \in \Delta$. Denotamos este conjunto como $\mathit{Form}(\mathscr{L})$.

Definición 2.11. Una aparición de una variable x en una fórmula φ es una *aparición no libre* si está dentro de una fórmula de la forma $\forall x\psi$. En otro caso se dice que se trata de una *aparición libre*. Las *variables libres* de una fórmula son las que tienen alguna aparición libre en la fórmula y las *variables no libres* las que tienen todas sus apariciones no libres.

Notemos que todas las variables de una fórmula atómica son por tanto libres.

Definición 2.12. Una *sentencia* es una fórmula sin variables libres.

Sean x una variable, c un símbolo constante, F un símbolo funcional y R un símbolo relacional ambos de aridad m, φ y ψ fórmulas y $t_1,\dots,t_m$ términos. Denotamos por V el conjunto de todas las variables. De nuevo, podemos dar una definición más conjuntista de sentencia a través de las siguientes funciones *var* y *FV*. La primera función obtiene el conjunto de variables de un término dado (que claramente son todas libres) y la segunda extiende esta primera función a todas las fórmulas, dando como resultado sus variables libres.

$$\begin{array}{rrcc}
var: & Term(\mathscr{L}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{V}), \\
& x & \mapsto & \{x\} \\
& c & \mapsto & \emptyset \\
& F(t_1,\dots,t_m) & \mapsto & var(t_1)\cup\ldots\cup var(t_m)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
FV: & Form(\mathscr{L}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{V}) \\
& t_1=t_2 & \mapsto & var(t_1)\cup var(t_2) \\
& R(t_1,\dots,t_m) & \mapsto & var(t_1)\cup\ldots\cup var(t_m) \\
& \varphi\wedge\psi & \mapsto & FV(\varphi)\cup FV(\psi) \\
& \neg\varphi & \mapsto & FV(\varphi) \\
& \forall x\varphi & \mapsto & FV(\varphi)\setminus\{x\}
\end{array}$$

De esta forma φ es una sentencia si $FV(\varphi)=\emptyset$.

Ejemplo 2.13. Sean x,y,z variables, 0 un símbolo constante y $+$ un símbolo funcional, en la fórmula

$$\forall x\,(x+y=0 \wedge \forall z(x+z=y))$$

las variables x,z son variables no libres, mientras que y es una variable libre. Como la fórmula tiene variables libres, no es una sentencia.

Cuando nos interese detallar las varibles presentes en un término t o en una fórmula φ, usaremos $t(x_0,\dots,x_n)$ y $\varphi(x_0,\dots,x_n)$ para denotar que sus variables forman un subconjunto de $\{x_0,\dots,x_n\}$.

Notación 2.14. Dadas φ,ψ dos fórmulas y v una variable, introducimos aquí los símbolos conectores $\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ y el cuantificador $\exists$, que, como vemos, admiten expresiones en función de los conectores $\neg$, $\wedge$ y el cuantificador universal:

- $(\varphi\vee\psi) := (\neg((\neg\varphi)\wedge(\neg\psi)))$
- $(\varphi\rightarrow\psi) := ((\neg\varphi)\vee\psi)$
- $(\varphi\leftrightarrow\psi) := ((\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi))$
- $(\exists x)\varphi := \neg(\forall x)\neg\varphi$

Además, adoptamos las siguientes convenciones acerca del uso de los paréntesis: dadas las fórmulas $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ y las variables $x_1,\dots,x_n$, siempre que no haya lugar a confusión, denotaremos

- $\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_n$ en lugar de $(\varphi_1\wedge(\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_n))$

- $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ en lugar de $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n))$
- $\forall x_1 x_2 \ldots x_n \varphi$ en lugar de $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)\varphi$
- $\exists x_1 x_2 \ldots x_n \varphi$ en lugar de $(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)\varphi$

Notación 2.15. Denotamos la cardinalidad del conjunto de fórmulas de un lenguaje $\mathscr{L}$, $Form(\mathscr{L})$, como

$$||\mathscr{L}|| = |Form(\mathscr{L})| = |\mathscr{L}| + \omega,$$

donde ω denota la cardinalidad de los números naturales.

Observar que la cardinalidad de $Form(\mathscr{L})$ es $|\mathscr{L}| + \omega$ porque el proceso de formación de fórmulas es un proceso recursivo de longitud menor que ω. Así, este proceso no excederá la caldinalidad ω a no ser que lo haga $|\mathscr{L}|$.

Con el objetivo de definir las reglas de inferencia y los axiomas que regirán nuestro sistema formal, debemos introducir antes algunas nociones previas. Recordemos que en lógica proposicional se define una tautología como una sentencia que es siempre cierta (tiene valor de verdad V) bajo cualquier asignación. A partir de esta noción vamos a definir su equivalente en el contexto de la lógica de primer orden.

Definición 2.16. Una $\mathscr{L}$-fórmula φ es *prima* si es una fórmula atómica o su primer símbolo es $\forall$.

Definición 2.17. Una *interpretación proposicional* para la fórmulas de $\mathscr{L}$ es una aplicación v que asigna a cada $\mathscr{L}$-fórmula prima φ un elemento del conjunto $\{0,1\}$. Si v es una interpretación proposicional de $\mathscr{L}$, v se extiende de manera única a una aplicación v^* que asigna a cada $\mathscr{L}$-fórmula un elemento de $\{0,1\}$ cumpliendo:

- $v^*(\neg\varphi) = 1$ si y solo si $v^*(\varphi) = 0$.
- $v^*(\varphi \wedge \psi) = 1$ si y solo si $v^*(\varphi) = v^*(\psi) = 1$.

Así, decimos que v satisface a φ si $v^*(\varphi) = 1$ y decimos que v satisface el conjunto de fórmulas Σ si satisface todas sus fórmulas.

Definición 2.18. Una $\mathscr{L}$-fórmula φ es una *tautología* si todas las interpretaciones proposicionales de $\mathscr{L}$ la satisfacen.

Equivalentemente, una fórmula es una tautología si y solo si se obtiene sustituyendo las variables proposicionales de una tautología de lógica proposicional por fórmulas de primer orden. Para más detalle ver [4, sección 2.4].

Ejemplo 2.19. La fórmula $((\forall x)\varphi(x) \wedge \psi(y)) \vee \neg((\forall x)\varphi(x) \wedge \psi(y))$ es una tautología. Podemos encontrar aquí dos fórmulas, $(\forall x)\varphi(x)$ y $\psi(y)$, y asignando todas las combinaciones de 0 y 1 a estas fórmulas (que nos dan cuatro combinaciones) vemos que efectivamente obtenemos que toda interpretación proposicional satisface la fórmula. Como comentabábamos, en este ejemplo es fácil ver que lo que estamos haciendo realmente es considerar la sentencia proposicional $(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$, donde las variables proposicionales p y q han sido reemplazadas por las fórmulas $(\forall x)\varphi(x)$ y $\psi(y)$, y asegurarnos (mediante una tabla de verdad, por ejemplo) de que esta sentencia proposicional es una tautología (en el sentido proposicional).

Definición 2.20. Dada una variable x, un término t y una fórmula φ, diremos que x es *sustituible por t en φ* en las siguientes situaciones:

1. Si φ es una fórmula atómica, entonces x es siempre susitutible por t en φ.

2. Si φ es de la forma $\neg\psi$ entonces x es sustituible por t en φ si y solo si lo es en ψ. Análogamente, si φ es de la forma $\psi \wedge \theta$ entonces x es sustituible por t en φ si y solo si lo es en ψ y en θ.

3. Si φ es de la forma $\forall y\psi$, entonces x es sustituible por t en φ si y solo si se dan uno de los siguientes casos:

   (i) x no ocurre libre en $\forall y\psi$.

   (ii) y no aparece en t y x es sustituible por t en ψ.

Definición 2.21. Definimos la *sustitución de la variable x por el término t en la fórmula* φ (siempre que x sea sustituible por t en φ), que denotamos φ_t^x, de la siguiente forma:

1. Si φ es una fórmula atómica, entonces φ_t^x es la expresión que se obtiene al reemplazar la variable x por t.

2. Si φ es de la forma $\neg\psi$ o $\psi \wedge \theta$, se define $(\neg\varphi)_t^x$ como $\neg\varphi_t^x$ y $(\varphi \wedge \psi)_t^x$ como $\varphi_t^x \wedge \psi_t^x$.

3. Si φ es de la forma $\forall x\psi$, se define $(\forall y\varphi)_t^x$ como $\forall y\varphi$ si $x = y$ y como $\forall y\varphi_t^x$ si $x \neq y$.

Esta noción también se suele denotar como $\varphi\binom{x}{t}$.

Para el resto de conectores, puesto que se definen a partir de $\neg$ y $\wedge$, se tendrá que un término es sustituible por una variable en la fórmula si y solo si lo es para sus componentes delimitadas por el conector en cuestión. En caso de que sea sustituible, la sustitución en la fórmula se define de manera análoga a $\neg$ y $\wedge$.

Ejemplo 2.22. (i) El resultado de la sustitución $(\psi(x) \to \forall x\varphi(x))_y^x$ es $\psi(y) \to \forall x\varphi(x)$.

(ii) El resultado de $(\neg\psi(y) \vee \forall x\varphi(x,y))_z^y$ es $\neg\psi(z) \vee (\forall x)\varphi(x,z)$.

(iii) Si $t = F(x,y)$ para algún símbolo funcional F y queremos hacer la sustitución de x por t en $(\forall y\varphi(x,y))_t^x$, notemos primero que y no es sustituible por t en dicha fórmula ya que y aparece en t, por lo que no se puede realizar la sustitución.

Definición 2.23. Dadas dos $\mathscr{L}$-fórmulas ψ y φ, se dice que ψ es una *generalización* de φ si para algún $n \geq 0$ y variables $x_1,\ldots,x_n$, se tiene que ψ es de la forma $(\forall x_1 \ldots x_n)\varphi$. Si $\varphi \equiv \varphi(y_1,\ldots,y_m)$, se llama *generalización universal* de φ a $(\forall y_1 \ldots y_m)\varphi$.

Observemos que en particular φ es una generalización de sí misma (tomando $n = 0$). También se tiene que si ψ es una generalización de φ, entonces $\forall x\psi$ es también una generalización de φ.

Sean φ, ψ $\mathscr{L}$-fórmulas y x e y variables. Las generalizaciones de estos cinco grupos de fórmulas conformarán nuestro conjunto de **axiomas**:

(i) Las tautologías.

(ii) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$, donde x es una variable que no es libre en φ.

(iii) $\forall x\varphi \to \varphi_t^x$, si x es sustituible por t en φ.

(iv) $\varphi \to \forall x\varphi$, donde x es una variable que no es libre en φ.

(v) Axiomas de identidad:

- $x = x$,
- $x = y \to t(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n) = t(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$,
- $x = y \to (\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n) \to \varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n))$,

donde x e y son variables, $t(x_1,\dots,x_n)$ es un término y $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ es una fórmula atómica.

Tomamos como única **regla de inferencia**, el *Modus Ponens*:

de las fórmulas $\varphi, \varphi \to \psi$ se infiere ψ.

Definición 2.24. Una *demostación (o deducción o derivación) formal* de una fórmula φ a partir de un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas Σ, que llamaremos conjunto de premisas, es una secuencia de fórmulas $\{\psi_0,\dots,\psi_n\}$ donde $\psi_n = \varphi$ y para cada $m = 0,\dots,n$, ψ_m es un axioma, un elemento de Σ, o bien el resultado de aplicar Modus Ponens sobre ψ_r y $\psi_r \to \psi_m$ con $r < m$.

Observar que las tautologías proposicionales son en particular tautologías de primer orden y por lo tanto axiomas. Por esta razón todas las reglas derivadas de lógica proposicional, como lo son por ejemplo las deducciones del Ejemplo 1.11, siguen siendo válidas en lógica de primer orden.

Definición 2.25. Un *teorema* es una fórmula φ de $\mathscr{L}$ que puede ser demostrada a partir de los axiomas y la regla de inferencia Modus Ponens. Lo denotaremos como $\vdash \varphi$.

Notemos que esto es lo mismo que decir que los teoremas son las fórmulas que se pueden demostrar a partir del conjunto vacío de premisas, esto es, aquellas fórmulas que no necesitan ninguna premisa en su demostración.

Definición 2.26. Un conjunto Σ de $\mathscr{L}$-fórmulas es *inconsistente* si y solo si para toda fórmula de $\mathscr{L}$ existe una demostración en Σ . En caso contrario diremos que Σ es *consistente*. Una fórmula φ es consistente si y solo si $\{\varphi\}$ lo es. Un conjunto Σ de $\mathscr{L}$-fórmulas se dice *consistente maximal* si y solo Σ es consistente y ningún conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas de $\mathscr{L}$ que contenga propiamente a Σ es consistente.

Observar que es equivalente decir que Σ es inconsistente a decir que dada una fórmula φ, $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \neg\varphi$, o equivalentemente que $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Para finalizar este apartado, demostramos a continuación algunas propiedades sobre conjuntos de $\mathscr{L}$-fórmulas consistentes y consistentes maximales:

Proposición 2.27. ***Teorema de Deducción.*** *Sean φ y ψ $\mathscr{L}$-fórmulas. Entonces, $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ si y solo si $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$.*

Demostración. Notar que si $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$ entonces por Modus Ponens claramente $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$. Para el recíproco consideremos una demostración $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ de φ en $\Sigma \cup \{\psi\}$, donde $\psi_n = \varphi$ y el resto de fórmulas o bien son axiomas, o pertenecen a $\Sigma \cup \{\psi\}$ o se han obtenido por Modus Ponens de fórmulas anteriores. Veamos por inducción que $\Sigma \vdash \psi \to \psi_i$ para todo $i = 1,\dots,n$.

Caso 1: Suponer que ψ_i es o bien un axioma o bien un elemento de Σ, entonces por definición $\Sigma \vdash \psi_i$. Así pues, como $\psi_i \to (\psi \to \psi_i)$ es una taulogía (axioma del grupo (i)), se tiene también que $\Sigma \vdash \psi_i \to (\psi \to \psi_i)$ y aplicando Modus Ponens $\Sigma \vdash \psi \to \psi_i$.

Caso 2: Si ψ_i es ψ, entonces como $\psi \to \psi$ es una tautología, $\Sigma \vdash \psi \to \psi$, i.e. $\Sigma \vdash \psi \to \psi_i$.

Caso 3: Suponer que ψ_i se obtiene por Modus Ponens de ψ_j y ψ_k con $j,k < i$ y $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$. Entonces, por hipótesis de inducción $\Sigma \vdash \psi \to \psi_k$ y $\Sigma \vdash \psi \to \psi_j$. Luego como $(\psi \to \psi_j \to \psi_i) \to (\psi \to \psi_j) \to (\psi \to \psi_i)$ es una tautología, tenemos que $\Sigma \vdash (\psi \to \psi_j \to \psi_i) \to (\psi \to \psi_j) \to (\psi \to \psi_i)$, y teniendo en cuenta que $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$ y aplicando Modus Ponens dos veces se tiene que $\Sigma \vdash \psi \to \psi_i$. $\square$

Proposición 2.28. *Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y sean φ, ψ $\mathscr{L}$-fórmulas, entonces:*

(i) Σ es consistente si y solo si todo subconjunto finito de Σ es consistente.

(ii) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente si y solo si* $\Sigma \vdash \neg\varphi$*. Por lo tanto,* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *es consistente si y solo si* $\neg\varphi$ *no es deducible de* Σ*.*

(iii) Si Σ *es consistente maximal, entonces para toda* $\mathscr{L}$*-fórmula* φ, ψ*:*

1. $\Sigma \vdash \varphi$ *si y solo si* $\varphi \in \Sigma$,
2. $\varphi \notin \Sigma$ *si y solo si* $\neg\varphi \in \Sigma$,
3. $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$ *si y solo si* φ *y* ψ *pertenecen a* Σ.

Demostración. (i) Notemos que si un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas es consistente, claralmente todo subconjunto finito de $\mathscr{L}$-fórmulas de él también lo es. Para el recíproco, suponer que Σ es inconsistente, de forma que se puede demostrar una fórmula y su negación, y tomando el conjunto de las $\mathscr{L}$-fórmulas de Σ que se usan en su demostración (que es un conjunto finito por definición de demostración), tenemos un subconjunto finito de $\mathscr{L}$-fórmulas que es inconsistente, lo cual contradice nuestra hipótesis.

(ii) Observar que si $\Sigma \vdash \neg\varphi$, entonces claramente también $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ y puesto que también $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, se tiene que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente. Para el recíproco, si tenemos que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, entonces para una fórmula cualquiera θ se tiene que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\theta$, luego por el Teorema de Deducción 2.27 tenemos que $\Sigma \vdash \varphi \to \theta$ y $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\theta$, luego $\Sigma \vdash (\varphi \to \theta) \wedge (\varphi \to \neg\theta)$, lo que es equivalente a $\Sigma \vdash (\neg\varphi \vee \theta) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\theta)$. Aplicando la distribución del operador $\vee$, tenemos que $\Sigma \vdash \neg\varphi \vee (\theta \wedge \neg\theta)$. Así, se tiene que o bien $\Sigma \vdash \neg\varphi$ ó $\Sigma \vdash (\theta \wedge \neg\theta)$, lo cual, puesto que Σ es consistente, implica que necesariamente $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

La segunda afirmación del enunciado se sigue de la primera que acabamos de probar.

(iii) Suponemos ahora Σ consistente maximal, y sean φ y ψ $\mathscr{L}$-fórmulas.

1. Si $\varphi \in \Sigma$ es obvio que $\Sigma \vdash \varphi$. Para el recíproco, sea $\Delta = \Sigma \cup \{\varphi\}$. Como por hipotésis $\Sigma \vdash \varphi$ y Σ es consistente, por (ii) Δ es consistente. Pero Σ es consistente maximal, luego $\Delta = \Sigma$, es decir, $\varphi \in \Sigma$.
2. Por (iii).1 tenemos que $\varphi \notin \Sigma$ si y solo si φ no se deduce de Σ, lo que por (ii) ocurre si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente. Como estamos suponiendo Σ consistente maximal y $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ esto sucede si y solo si $\{\neg\varphi\} \subseteq \Sigma$, esto es, $\neg\varphi \in \Sigma$.
3. $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$ si y solo si (por 1) $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \psi$, si y solo si (de nuevo por 1) $\varphi \in \Sigma$ y $\psi \in \Sigma$.

□

Observación 2.29. *Notemos que decir que un conjunto* Σ *de* $\mathscr{L}$*-fórmulas es consistente maximal es equivalente a decir que es consistente y que para toda* $\mathscr{L}$*-fórmula* φ *o bien* $\varphi \in \Sigma$ *o bien* $\neg\varphi \in \Sigma$*, ya que si* $\varphi \notin \Sigma$*, por el apartado (iii)-2 de la proposición anterior se tiene que* $\neg\varphi \in \Sigma$ *y por (iii)-1 ambas no pueden suceder a la vez.*

Proposición 2.30. ***Teorema de Lindenbaum.*** *Todo conjunto consistente de* $\mathscr{L}$*-fórmulas se puede extender a un conjunto consistente maximal de* $\mathscr{L}$*-fórmulas.*

Demostración. Veamos primero que si Σ es consistente y φ es una $\mathscr{L}$-fórmula, entonces o bien $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es consistente, o bien $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ lo es. Suponer que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ no es consistente. Por la proposición anterior tenemos que $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Si suponemos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente también, entonces tendríamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ y $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ para alguna $\mathscr{L}$-fórmula ψ, de manera que por el teorema de deducción se tiene que $\Sigma \vdash (\neg\varphi \to \psi)$ y $\Sigma \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi)$. Y finalmente, como teníamos que $\Sigma \vdash \neg\varphi$, entonces por Modus Ponens tenemos que $\Sigma \vdash \psi$ y $\Sigma \vdash \neg\psi$, lo cual es una contracción si Σ es consistente.

Sea ahora $|||\mathscr{L}|| = \alpha$, $\{\varphi_\kappa\}_{\kappa<\alpha}$ una enumeración de las fórmulas de $\mathscr{L}$ y $\Sigma_0 = \Sigma$. Si $\Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$ es consistente, entonces cogemos $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$, y en caso contrario cogemos $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\neg\varphi_0\}$. Aplicamos este procedimiento de manera recursiva, de modo que si suponemos que Σ_κ es consistente, entonces o bien $\Sigma_\kappa \cup \{\varphi_\kappa\}$ es también consistente o bien $\Sigma_\kappa \cup \{\neg\varphi_\kappa\}$ lo es, y cogemos como $\Sigma_{\kappa+1}$ el que sea consistente de los dos. Si κ es un ordinal límite, entonces tomamos $\Sigma_\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} \Sigma_\xi$, y se tiene que si los Σ_ξ son consistentes para todo $\xi < \kappa$, por la Proposición 2.28 (i) también Σ_κ es consistente.
De esta forma, es claro que el conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas $\hat{\Sigma} = \bigcup_{\kappa<\alpha} \Sigma_\kappa$ es una extensión consistente maximal de $\Sigma = \Sigma_0$. Que sea consistente es directo de la Proposición 2.28 (i) y que sea también maximal se sigue de que para toda $\mathscr{L}$-fórmula φ, existe $\kappa < \alpha$ tal que $\varphi = \varphi_\kappa$ por lo que necesariamente o bien $\varphi \in \hat{\Sigma}$ o bien $\neg\varphi \in \hat{\Sigma}$.

□

Proposición 2.31. ***Teorema de Generalización.*** *Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y φ otra $\mathscr{L}$-fórmula. Si $\Sigma \vdash \varphi$ y x no es una variable libre en ninguna fórmula de Σ, entonces $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi$.*

Demostración. Probaremos el resultado por inducción:

1. Si φ es un axioma lógico, $(\forall x)\varphi$ es también un axioma lógico, luego $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi$.
2. Si $\varphi \in \Sigma$, entonces x no es una variable libre en φ, luego $\varphi \to (\forall x)\varphi$ es un axioma del grupo (iv). Aplicando Modus Ponens se tiene que $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi$.
3. Si φ se obtiene por Modus Ponens de ψ y $\psi \to \varphi$, entonces tenemos que $\Sigma \vdash \psi$ y por hipótesis de inducción tenemos que $\Sigma \vdash \forall x(\psi \to \varphi)$. Por lo tanto, como $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall x\varphi)$ es un axioma del grupo (ii), aplicando Modus Ponens dos veces tenemos que $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi$.

□

2.2.2. Semántica

Para obtener el sistema lógico deseado, solo nos queda dotarlo de semántica. Para ello buscamos proporcionar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿qué significa que una fórmula sea cierta en una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ cuando los términos de nuestro sistema son interpretados en el universo A?

Definición 2.32. Una *asignación* en una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es una aplicación parcial s cuyo dominio es el conjunto de las variables y cuyo codominio es el universo A de $\mathfrak{A}$.

Observar que esto significa que el dominio de s es un subconjunto del conjuto de todas las variables, quizá incluso finito.

Definición 2.33. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura y sea s una asignación en $\mathfrak{A}$. Definimos el *valor de un término* t (cuyas variables pertenecen al dominio de s) *bajo la interpretación* s en $\mathfrak{A}$, lo que denotaremos $t^{\mathfrak{A}}[s]$, de la siguiente manera:

(i) Si $t = x$ es una variable, entonces $t^{\mathfrak{A}}[s] = s(x)$.

(ii) Si $t = c$ es un símbolo constante, entonces $t^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$.

(iii) Si $t = F(t_1,\dots,t_r)$ para F un símbolo funcional y $t_1,\dots,t_r$ términos, entonces $t^{\mathfrak{A}}[s] = F^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s],\dots,t_r^{\mathfrak{A}}[s])$.

Cuando sea clara la $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ donde estamos interpretando, escribirémos simplemente $t[s]$ en lugar de $t^{\mathfrak{A}}[s]$.

Con el objetivo de definir la satisfacción de una fórmula en una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, definimos primero la asignación s_a^x. Sea x es una variable, s una asignación en $\mathfrak{A}$ con dominio S (donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in S$) y $a \in A$, entonces denotaremos como s_a^x la asignación en $\mathfrak{A}$ cuyo dominio es S y cumple que $s_a^x(x) = a$ y $s_a^x(y) = s(y)$ para toda variable $y \in S \setminus \{x\}$.

A continuación definimos de manera recursiva la satisfacción de una fórmula cualquiera.

Definición 2.34. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura. Se define la satisfacción de una fórmula φ de $\mathscr{L}$ bajo la asignación s en $\mathfrak{A}$ (donde las variables de φ están en el dominio de s), lo que denotaremos como $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, de la siguiente manera:

(i) Si φ es la fórmula atómica $t_1 = t_2$ donde t_1 y t_2 son términos, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s].$$

(ii) Si φ es la fórmula atómica $R(t_1,\dots,t_r)$ donde R es un símbolo relacional y $t_1,\dots,t_r$ son términos, entonces

$$\mathfrak{A} \models R(t_1,\dots,t_r) \text{ si y solo si } R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s],\dots,t_r^{\mathfrak{A}}[s]).$$

(iii) Si φ es $\psi_1 \wedge \psi_2$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \psi_1[s] \text{ y } \mathfrak{A} \models \psi_2[s].$$

(iv) Si φ es $\neg\psi$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \not\models \psi[s],$$

donde $\mathfrak{A} \not\models \psi[s]$ denota que no se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi[s]$.

(v) Si φ es $\forall x\psi$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \psi[s_a^x] \text{ para todo } a \in A.$$

Observación 2.35. *Siempre que escribimos $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ asumimos implicitamente que las variables de φ pertenecen al dominio de s. En concreto, sólo necesitamos estar asumiendo que las variables libres de φ pertenecen al dominio de s, como quedará justificado con la Proposición 2.36.*

Si $\varphi \equiv \varphi(x_1,\dots,x_n)$ y $a_1,\dots,a_n \in A$, denotamos como $\varphi[x_1/a_1,\dots,x_n/a_n]$ el valor $\varphi[s]$ donde s es una asignación que a cada variable x_i le hace corresponder el elemento a_i de A. Cuando se sobreentiendan las variables, se escribirá simplemente $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$.
Por ejemplo, con esta notación la satisfacción de la fórmula $\forall x\psi$, donde $\psi \equiv \psi(x_1,\dots,x_n)$ y $x = x_i$ para algún $i = 1\dots,n$, queda como sigue: $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[a_1,\dots,a_n]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \psi[a_1,\dots,a_{i-1},a,a_{i+1},\dots,a_n]$ para todo $a \in A$.

Proposición 2.36. *(i) Sean s y $\hat{s}$ dos asignaciones en $\mathfrak{A}$ coincidentes en todas las variables del término t. Entonces*

$$t^{\mathfrak{A}}[s] = t^{\mathfrak{A}}[\hat{s}].$$

(ii) Sean s y $\hat{s}$ dos asignaciones en $\mathfrak{A}$ coincidentes en todas las variables libres de la fórmula φ de $\mathscr{L}$. Entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \quad \textit{si y solo si} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\hat{s}].$$

Demostración. Puesto que las definiciones de valor de un término y de satisfacción de una fórmula son recursivas, la demostración va a ser por inducción sobre la complejidad de la fórmula:

(i)
- Si $t \equiv t(x_1,\dots,x_n) = x_i$ para algún $i = 1,\dots,n$, entonces puesto que ambas asignaciones coinciden en las variables de t:

$$t^{\mathfrak{A}}[s] = t^{\mathfrak{A}}[x_1/a_1,\dots,x_n/a_n] = a_i = t^{\mathfrak{A}}[x_1/a_1,\dots,x_n/a_n] = t^{\mathfrak{A}}[\hat{s}].$$

- Si $t = c$ es un símbolo constante, entonces independientemente de la asignación, su valor es $c^{\mathfrak{A}}$.

- Si t es de la forma $F(t_1,\ldots,t_r)$ donde F es un símbolo constante y $t_1,\ldots,t_r$ son términos, entonces por hipótesis de inducción:

$$t^{\mathfrak{A}}[s] = F^{\mathfrak{A}}(t_1[s],\ldots,t_r[s]) = F^{\mathfrak{A}}(t_1[\hat{s}],\ldots,t_r[\hat{s}]) = t^{\mathfrak{A}}[\hat{s}].$$

(ii)

- Si φ es una fórmula atómica de la forma $t_1 = t_2$ con t_1,t_2 términos, entonces por el apartado anterior tenemos que
$$t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_1^{\mathfrak{A}}[\hat{s}] \text{ y } t_2^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[\hat{s}],$$
por lo que
$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s] \text{ si y solo si } t_1^{\mathfrak{A}}[\hat{s}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\hat{s}] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[\hat{s}].$$

- Si φ es una fórmula atómica de la forma $R(t_1,\ldots,t_r)$ para R un símbolo relacional y $t_1,\ldots,t_r$ términos, puesto que por (i) se tiene que $t_i^{\mathfrak{A}}[s] = t_i^{\mathfrak{A}}[\hat{s}]$ para todo $i = 1,\ldots,r$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } (t_1^{\mathfrak{A}}[s],\ldots,t_r^{\mathfrak{A}}[s]) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si y solo si}$$

$$(t_1^{\mathfrak{A}}[\hat{s}],\ldots,t_r^{\mathfrak{A}}[\hat{s}]) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[\hat{s}].$$

(iii)

- Si φ es de la forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces teniendo en cuenta que por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \varphi_i[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi_i[\hat{s}]$ para $i = 1,2$ se tiene:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi_1[s] \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_2[s] \text{ si y solo si}$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1[\hat{s}] \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\hat{s}] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[\hat{s}].$$

- Si φ es de la forma $\neg\psi$, puesto que por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \psi[\hat{s}]$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \not\models \psi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \not\models \psi[\hat{s}] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[\hat{s}].$$

- Si finalmente φ es de la forma $\forall x\psi$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \psi[s_a^x] \text{ para todo } a \in A$$

$$\text{si y solo si } \mathfrak{A} \models \psi[\hat{s}_a^x] \text{ para todo } a \in A \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[\hat{s}],$$

ya que las asignaciones s_a^x y $\hat{s}_a^x$ coinciden en las variables libres de ψ.

□

Corolario 2.37. *Dada una sentencia σ de $\mathscr{L}$, una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

(a) $\mathfrak{A} \models \sigma[s]$ *para toda asignación s en $\mathfrak{A}$.*

(b) $\mathfrak{A} \not\models \sigma[s]$ *para toda asignación s en $\mathfrak{A}$.*

Así pues, cuando hablamos de términos sin variables (esto es, o bien constantes o bien términos formados por símbolos relacionales cuyos argumentos son constantes), podemos escribir simplemente $t^{\mathfrak{A}}$ para denotar el valor del término en el modelo $\mathfrak{A}$, ya que este será el mismo bajo cualquier asignación en $\mathfrak{A}$. Análogamente, cuando se trate de sentencias podemos escribir simplemente $\mathfrak{A} \models \sigma$ o $\mathfrak{A} \not\models \sigma$.

Lema 2.38. *Dados dos términos u y t, x una variable y s una asignación en $\mathfrak{A}$, se tiene*

$$u_t^x[s] = u[s_{t[s]}^x].$$

Demostración.

- Si u es una constante, entonces tanto $u[s]$ como $u[s_{t[s]}^x]$ toman el valor de la interpretación de la constante u en $\mathfrak{A}$.

- Si $u=y$ es una variable distinta de x, entonces $u=u_t^x$ y por definición de $s_{t[s]}^x$, $u[s_{t[s]}^x]=s_{t[s]}^x(y)=s(y)=u[s]=u_t^x[s]$.
- Si $u=x$, entonces $u_t^x=t$ y por lo tanto $u_t^x[s]=t[s]=s_{t[s]}^x(x)=x[s_{t[s]}^x]=u[s_{t[s]}^x]$.
- Aplicamos en este paso la hipótesis de inducción. Si ahora $u=F(t_1,\ldots,t_r)$ con $t_1,\ldots,t_r$ términos para los que se cumple la igualad, tenemos que

$$u_t^x[s]=F^{\mathfrak{A}}((t_1)_t^x[s],\ldots,(t_r)_t^x[s])=F^{\mathfrak{A}}(t_1[s_{t[s]}^x],\ldots,t_r[s_{t[s]}^x])=u[s_{t[s]}^x].$$

$\square$

Lema 2.39. ***Lema de sustitución.*** *Sea x una varible sustituible por el término t en la $\mathscr{L}$-fórmula φ. Entonces, dada una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, se tiene:*

$$\mathfrak{A}\models\varphi_t^x[s] \textit{ si y solo si } \mathfrak{A}\models\varphi[s_{t[s]}^x].$$

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura y s una asignación en $\mathfrak{A}$ cualesquiera.

1. Si φ es una fórmula atómica:
   - Si φ es de la forma $t_1=t_2$ con t_1,t_2 términos, entonces

     $$\mathfrak{A}\models(t_1=t_2)_t^x[s] \text{ si y solo si } (t_1)_t^x[s]=(t_2)_t^x[s].$$

     Por el lema anterior la segunda expresión equivale a $t_1[s_{t[s]}^x]=t_2[s_{t[s]}^x]$, lo cual sucede si y solo si $\mathfrak{A}\models(t_1=t_2)[s_{t[s]}^x]$.
   - Si φ es de la forma $R(t_1,\ldots,t_r)$ para $t_1,\ldots,t_r$ términos, entonces

     $$\mathfrak{A}\models R(t_1,\ldots,t_r)_t^x[s] \text{ si y solo si } ((t_1)_t^x[s],\ldots,(t_r)_t^x[s])\in R^{\mathfrak{A}}.$$

     De nuevo por el lema anterior, la segunda expresión es igual a $(t_1[s_{t[s]}^x],\ldots,t_r[s_{t[s]}^x])\in R^{\mathfrak{A}}$, lo cual de nuevo sucede si y solo si $\mathfrak{A}\models R(t_1,\ldots,t_r)[s_{t[s]}^x]$.
2. Si φ es de la forma $\neg\psi$ o $\psi\wedge\theta$, entonces el resultado se sigue de la definición de satisfacción de una fórmula bajo una asignación en un modelo como hemos hecho en el caso anterior, aplicando hipótesis de inducción sobre ψ y θ.
3. Si φ es de la forma $\forall y\psi$:
   - Si x no es libre en ψ entonces tampoco lo es en φ y $\varphi_t^x=\varphi$. Como además s y $s_{t[s]}^x$ coinciden en todas las variables libres de φ, claramente

     $$\mathfrak{A}\models\varphi_t^x[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A}\models\varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A}\models\varphi[s_{t[s]}^x].$$

   - Si x es libre en ψ, como x es sustituible por t en φ, por la Definición 2.20 necesariamente y no ocurre en t y x es sustituible por t en ψ. Se tiene entonces que $t[s]=t[s_a^y]$ para todo $a\in A$, y como $x\neq y$, $\varphi_t^x=\forall y\psi_t^x$. Así

     $$\mathfrak{A}\models\varphi_t^x[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A}\models\psi_t^x[s_a^y] \text{ para todo } a\in A.$$

     Aplicando ahora la hipótesis de inducción sobre ψ tenemos que esto ocurre si y solo si

     $$\mathfrak{A}\models\psi[(s_a^y)_{t[s]}^x] \text{ para todo } a\in A, \text{ si y solo si } \mathfrak{A}\models(\forall y\psi)[s_{t[s]}^x], \text{ esto es, } \mathfrak{A}\models\varphi[s_{t[s]}^x].$$

$\square$

Definición 2.40. Dada una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, una asignación s en $\mathfrak{A}$ y un conjunto de fórmulas Σ de $\mathscr{L}$, por

$$\mathfrak{A} \models \Sigma[s]$$

se entiende que $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ para toda $\psi \in \Sigma$. Si se tiene que $\mathfrak{A} \models \Sigma[s]$ para toda asignación s, entonces escribimos $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Si Γ es un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \Gamma$$

denota que $\mathfrak{A} \models \tau$ para todo $\tau \in \Gamma$. En este caso decimos que $\mathfrak{A}$ es un modelo de Γ.

Definición 2.41. Dada una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas Σ y una $\mathscr{L}$-fórmula φ, decimos que φ es *consecuencia lógica* de Σ si para toda asignación s en $\mathfrak{A}$ se tiene que, si $\mathfrak{A} \models \Sigma[s]$ entonces también $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$. Denotamos esta relación como

$$\Sigma \models \varphi$$

y decimos que Σ *implica* φ. Si $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ entonces escribimos simplemente $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$, y si $\Sigma = \emptyset$, escribimos $\models \varphi$.

Si Γ es un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$ y τ es una sentencia, entonces se tiene que $\Gamma \models \tau$ si y solo si para toda $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ se tiene $\mathfrak{A} \models \tau$, esto es, si todo modelo de Γ es también modelo de τ .

Definición 2.42. Un conjunto de fórmulas Σ de $\mathscr{L}$ se dice satisfacible si $\mathfrak{A} \models \Sigma[s]$ para alguna $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y alguna asignación s en $\mathfrak{A}$. De lo contrario decimos que Σ es insatisfacible. De manera análoga, un conjunto de sentencias Γ de $\mathscr{L}$ es satisfacible si y solo si tiene un modelo. Decimos que una fórmula φ es satisfacible si lo es $\{\varphi\}$.

Definición 2.43. Una fórmula φ de $\mathscr{L}$ se dice válida, $\models \varphi$, si para toda $\mathscr{L}$-estrucutura $\mathfrak{A}$ y toda asignación s en $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$.Notemos que en el caso en que φ es una sentencia, entonces esta es válida si y solo si toda $\mathscr{L}$-estructura es un modelo para φ.

Así, una fórmula es válida si y solo si es consecuencia lógica del conjunto vacío de fórmulas, i.e. si $\emptyset \models \varphi$.

Observación 2.44. *Observemos que aunque hayamos definido la validez para fórmulas en general, podríamos haberla definido únicamente para sentencias, puesto que cuando decimos que una fórmula es válida, esto se corresponde con que su generalización universal sea válida.*

Capítulo 3

Teoremas de Completitud y de Löwenheim-Skolem

En esta sección se demuestra primero uno de los principales resultados de este trabajo, el Teorema de Completitud, y a raíz del mismo se demuestran otros resultados importantes cuya aplicación es de gran relevancia en múltiples áreas de las matemáticas, como son el Teorema de Compacidad y los Teoremas de Löwenheim-Skolem ascendente y descendente.

3.1. Algunos resultados previos

Lema 3.1. *Todo axioma lógico es válido.*

Demostración. Notemos que si una fórmula es válida, también lo es cualquier generalización de la misma, ya que si una fórmula es válida, es cierta en toda estructura y bajo cualquier asignación, por lo cual lo es en particular para las asignaciones de la forma s_a^x con $a \in A$. Luego para ver que todos los axiomas son válidos basta ver que los siguientes grupos de fórmulas son válidos:

Grupo (i): Sea φ una tautología y sean $\mathfrak{A}$ un estructura y s una asignación cualesquiera. Nuestro objetivo es ver que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$. Para ello, observar primero que si φ es una tautología, entonces φ se corresponde con $C(\psi_1/p_1,\ldots,\psi_k/p_k)$, donde C denota una tautología proposicional y $\psi_1,\ldots,\psi_k$ son fórmulas de primer order que toman el lugar de las variables proposicionales $p_1,\ldots,p_k$. Podemos entonces definir una asignación proposicional Φ de la siguiente forma:

$$\Phi(p_i) = \begin{cases} V & \text{si } \mathfrak{A} \models \psi_i[s], \\ F & \text{si } \mathfrak{A} \not\models \psi_i[s]. \end{cases}$$

Veamos que esta definición se puede extender de manera inductiva a toda subfórmula D de C de la siguiente forma:

$$\Phi(D) = V \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models D(\psi_1/p_1,\ldots,\psi_k/p_k)[s].$$

El caso inicial para variables p_i es el ofrecido en la primera definición de Φ. El paso de inducción pasa por reducir el problema al conector principal de D: $\neg,\wedge,\vee,\to$ ó $\leftrightarrow$. Pero observemos que puesto que la definición inductiva de verdad en lógica proposicional es análoga a la de lógica de primer orden, este argumento es trivial (por ejemplo si D_i y D_j son dos subfórmulas de C, $\Phi(D_i \wedge D_j) = T$ si y solo si $\Phi(D_i) = T$ y $\Phi(D_j) = T$, de igual forma que $\mathfrak{A} \models (D_i \wedge D_j)(\psi_1/p_1,\ldots,\psi_k/p_k)[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models D_i(\psi_1/p_1,\ldots,\psi_k/p_k)[s]$ y $\mathfrak{A} \models D_j(\psi_1/p_1,\ldots,\psi_k/p_k)[s]$, y análogamente para el resto de conectores).

Así, tomando como D la fórmula proposicional completa C, nuestra definición de Φ para C queda como:

$$\Phi(C) = V \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models C(\psi_1/p_1,\ldots,\psi_k/p_k)[s].$$

Y como C es una tautología necesariamente $\Phi(C) = V$, y por lo tanto tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$.

Grupo (ii): Para probar que el axioma $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$ es válido, donde x es una variable que no ocurre libre en φ vale con ver que

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \varphi\} \models \forall x\psi. \tag{3.1}$$

Observemos que si tenemos un modelo $\mathfrak{B}$ y una asignación s tal que $\mathfrak{B} \models \psi[s]$ y $\mathfrak{B} \models \forall x(\varphi \to \varphi)[s]$, donde esto último es $\forall b \in B, \mathfrak{B} \models (\varphi \to \psi)[s^x_b]$, tenemos que $\forall b \in B$, o bien $\mathfrak{B} \not\models \varphi[s^x_b]$ o $\mathfrak{B} \models \psi[s^x_b]$, y por otro lado tenemos que $\mathfrak{B} \models \varphi[s]$, por lo que necesariamente se tiene que $\forall b \in B, \mathfrak{B} \models \psi[s^x_b]$, esto es, $\mathfrak{B} \models (\forall x\psi)[s]$.
Con esto visto tenemos que dado un modelo cualquiera $\mathfrak{A}$ y una asignación s en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi))[s]$ si y solo si, por definición, $\mathfrak{A} \not\models (\forall x(\varphi \to \psi))[s]$ o bien $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \forall x\psi)[s]$. Así pues, si $\mathfrak{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)[s]$, $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \forall x\psi)[s]$ si y solo si o $\mathfrak{A} \not\models \varphi[s]$ o $\mathfrak{A} \models (\forall x\psi)[s]$, y como si $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ entonces por (3.1) se tiene $\mathfrak{A} \models (\forall x\psi)[s]$, en cualquier caso se tiene que $\mathfrak{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi))[s]$.

Grupo (iii): De nuevo buscamos ver que dado un modelo $\mathfrak{A}$ y una asignación s en $\mathfrak{A}$ cualesquiera, $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi \to \varphi^x_t$, lo cual sucede si $\mathfrak{A} \not\models (\forall x\varphi)[s]$ o bien $\mathfrak{A} \models \varphi^x_t[s]$.
Notemos entonces que si $\mathfrak{A} \models (\forall x\varphi)[s]$, se tiene que para todo $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[s^x_a]$, y tomando en particular $a = t[s]$ tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi[s^x_{t[s]}]$. Por el lema de sustitución, $\mathfrak{A} \models \varphi^x_t[s]$.
Así pues, necesariamente $\mathfrak{A} \models (\forall x\varphi \to \varphi^x_t)[s]$ y tenemos que el axioma es válido.

Grupo (iv): Argumentando como en los apartados anteriores, para ver que dado una estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación s en $\mathfrak{A}$ cualesquiera $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \forall x\varphi)[s]$, basta notar que $\varphi \models \forall x\varphi$ si x no es libre en φ.

Grupo (v): Sean x e y variables, $t(x_1, \ldots, x_n)$ un término y $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ una fórmula atómica.

1. $x = x$. Observemos que este caso es trivial puesto que dado un modelo cualquiera $\mathfrak{A}$ y una asignación s en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models (x = x)[s]$ si y solo si, por definición, $s(x) = s(x)$, lo cual es obviamente cierto.
2. Vamos a denotar $t_x \equiv t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ y $t_y \equiv t(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Así pues, tenemos que ver que dado un modelo $\mathfrak{A}$ cualquiera y una asignación s en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models ((x = y) \to (t_x = t_y))[s]$. Esto sucede si $\mathfrak{A} \not\models (x = y)[s]$ o si $\mathfrak{A} \models (t_x = t_y)[s]$.

   De nuevo si $\mathfrak{A} \models (x = y)[s]$ entonces podemos demostrar con una sencilla inducción que $\mathfrak{A} \models (t_x = t_y)[s]$, i.e, que $t_x[s] = t_y[s]$, por lo que el axioma es válido.

3. De nuevo vamos a denotar $\psi_x \equiv \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ y $\psi_y \equiv \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_m)$. Al igual que en los axiomas del grupo (ii), basta ver que $\{x = y, \psi_x\} \models \psi_y$ por inducción, para ver que dado un modelo cualquiera $\mathfrak{A}$ y una asignación s en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models (x = y) \to (\psi_x \to \psi_y)[s]$. □

Proposición 3.2. ***Teorema de validez.*** *Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura en la que Σ es satisfacible. Entonces, toda fórmula deducible de Σ se satisface en $\mathfrak{A}$. O equivalentemente, dada una fórmula φ de $\mathscr{L}$,*

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$$

Demostración. Si $\Sigma \vdash \varphi$ entonces existe una demostración formada por axiomas lógicos, elementos de Σ o fórmulas obtenidas al aplicar Modus Ponens a dos fórmulas previas en la secuencia. Demostramos entonces el resultado por inducción.

- Si φ es un axioma lógico, por el Lema 3.1 se tiene que $\Sigma \models \varphi$.
- Si $\varphi \in \Sigma$, claramente por definición se tiene que $\Sigma \models \varphi$.

- Si φ se obtiene mediante Modus Ponens de ψ y $\psi \to \varphi$, por hipótesis de inducción tenemos que $\Sigma \models \psi$ y $\Sigma \models (\psi \to \varphi)$. Luego tenemos por un lado que $\Sigma \models \psi$ y por otro que o bien $\Sigma \not\models \psi$, o $\Sigma \models \varphi$. Por lo tanto, necesariamente $\Sigma \models \varphi$.

□

Definición 3.3. Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y C un conjunto de constantes de $\mathscr{L}$. Decimos que Σ *tiene testigos en* C si para cada $\mathscr{L}$-fórmula φ y variable x existe una constante $c \in C$ tal que

$$\Sigma \vdash \exists x\varphi \to \varphi^x_c.$$

Lema 3.4. *Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y c una constante que no aparece en ninguna fórmula de Σ. Si $\Sigma \vdash \varphi^x_c$ entonces $\Sigma \vdash \forall x\varphi$.*

Demostración. Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una deducción en Σ de $\varphi_n = \varphi^x_c$. Sea y una variable que no aparece en Σ, observemos que entonces $\{(\varphi_1)^c_y, \dots (\varphi_n)^c_y\}$ es una deducción en $\Sigma^c_y = \Sigma$ de $(\varphi_n)^c_y = (\varphi^x_c)^c_y = \varphi^x_y$ (para más detalle ver [2, Proposition 3.2.13]). Luego se tiene que $\Sigma \vdash \varphi^x_y$, y por el Teorema de Generalización 2.31 $\Sigma \vdash \forall y\varphi^x_y$, esto es $\Sigma \vdash \forall x\varphi$. □

Lema 3.5. *Sea Σ un conjunto consistente de $\mathscr{L}$-fórmulas y sea C un conjunto de nuevas constantes tal que $|C| = ||\mathscr{L}||$. Consideramos $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup C$ la extensión obtenida añadiendo a $\mathscr{L}$ el conjunto C. Entonces Σ se puede extender a un conjunto consistente $\bar{\Sigma}$ de $\bar{\mathscr{L}}$-fórmulas con testigos en C.*

Demostración. Sea $||\mathscr{L}|| = \alpha$. Para cada $\beta < \alpha$ tomamos una nueva constante c_β que no pertenezca ya a $\mathscr{L}$ y tal que $c_\beta \neq c_\gamma$ para todo $\beta < \gamma < \alpha$, y llamando $C = \{c_\beta : \beta < \alpha\}$ tenemos que $|C| = \alpha = ||\mathscr{L}||$ y por lo tanto tenemos que también $||\bar{\mathscr{L}}|| = \alpha$ (ver Proposición A.7). Sea $\{\psi_\kappa\}_{\kappa<\alpha}$ una secuencia de $\bar{\mathscr{L}}$-fórmulas de la forma $\exists x_\kappa\varphi_\kappa$. Nuestro objetivo es crear un extensión consistente $\bar{\Sigma}$ de Σ en $\bar{\mathscr{L}}$ con testigos en C. Para ello definimos una secuencia de conjuntos de fórmulas

$$\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \dots \subseteq \Sigma_\kappa \subseteq \dots, \kappa < \alpha$$

tal que:

(i) cada Σ_κ sea consistente,

(ii) si $\kappa = \xi + 1$, entonces $\Sigma_\kappa = \Sigma_\xi \cup \{\exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}\}$,

(iii) si κ es un ordinal límite distinto de 0, entonces $\Sigma_\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa}\Sigma_\xi$.

Veamos a continuación por inducción que estos conjuntos de fórmulas son consistentes, de donde se sigue entonces que el conjunto de fórmulas $\bar{\Sigma} = \bigcup_{\kappa<\alpha}\Sigma_\kappa$ es una extensión consistente de Σ.

Para $\kappa = 0$ tenemos que $\Sigma_0 = \Sigma$, que es consistente por hipótesis. Supongamos ahora que Σ_κ es consistente y veamos que $\Sigma_{\kappa+1}$ también lo es. Si $\Sigma_\kappa \vdash \forall x_\kappa\neg\varphi_\kappa$, entonces $\Sigma_\kappa \vdash (\exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa})$ y por la Proposición 2.28, $\Sigma_\kappa \cup \{\exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}\}$ es consistente. Si $\Sigma_\kappa \nvdash \forall x_\kappa\neg\varphi_\kappa$, entonces $\Sigma_\kappa \cup \{(\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}\}$ es consistente, ya que si no lo fuera tendríamos que $\Sigma_\kappa \cup \{(\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}\} \vdash \neg(\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}$ por lo que $\Sigma_\kappa \vdash \neg(\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}$ y por el Lema 3.4 se tendría que entonces $\Sigma_\kappa \vdash \forall x_\kappa\neg\varphi_\kappa$. Por lo tanto, como $\Sigma_\kappa \cup \{(\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_\kappa\}$ es consistente y $(\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_\kappa \vdash \exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}$, de nuevo por la Proposición 2.28 se tiene que $\Sigma_{\kappa+1} = \Sigma_\kappa \cup \{\exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}\}$ es también consistente.

Veamos por último que $\bar{\Sigma}$ tiene testigos en C: sea ψ una $\bar{\mathscr{L}}$-fórmula de la forma $\exists x\varphi$, entonces para algún $\kappa < \alpha$, $\psi = \exists x_\kappa\varphi_\kappa$, de manera que

$$\exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa} \in \Sigma_{\kappa+1} \subseteq \bar{\Sigma},$$

por lo que efectivamente $\bar{\Sigma} \vdash \exists x_\kappa\varphi_\kappa \to (\varphi_\kappa)^{x_\kappa}_{c_\kappa}$. □

Lema 3.6. *Sea Σ un conjunto consistente de $\mathscr{L}$-fórmulas y C un conjunto de constantes de $\mathscr{L}$ tal que Σ tiene testigos en C. Entonces Σ es satisfacible en una estructura $\mathfrak{A}$ tal que todos sus elementos son interpretación de una constante $c \in C$.*

Demostración. Notemos primero que si un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas Σ tiene testigos en el conjunto de constantes C de $\mathscr{L}$, entonces C es también un conjunto de testigos para cualquier extensión de Σ. Además, si una extensión de Σ es satisfacible en una estructura $\mathfrak{A}$, entonces Σ es también satisfacible en $\mathfrak{A}$. Y puesto que por el Teorema de Lindenbaum siempre podemos encontrar una extensión consistente maximal, asumiremos a partir de ahora que Σ es consistente maximal en $\mathscr{L}$.

Definimos primero la relación de equivalencia en $Term(\mathscr{L})$ dada por: para todo par de términos t_1, t_2 de $\mathscr{L}$,

$$t_1 \sim t_1 \text{ si y solo si } t_1 = t_2 \in \Sigma.$$

Es sencillo ver que esto es efectivamente una relación de equivalencia (y de hecho una relación de congruencia).

Definimos ahora la $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$. Definimos su universo A como $A = \{[t]_\sim : t \in Term(\mathscr{L})\}$, donde $[t]_\sim$ denota la clase de equivalencia de t, y su aplicación interpretación como:

(i) Si c es un símbolo constante de $\mathscr{L}$,

$$c^{\mathfrak{A}} = [c]_\sim.$$

(ii) Si F es un símbolo funcional de $\mathscr{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos,

$$F^{\mathfrak{A}}([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) = [F(t_1, \ldots, t_n)]_\sim.$$

(iii) Si R es un símbolo relacional de $\mathscr{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos,

$$([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si y solo si } R(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma.$$

Observemos que como

$$\vdash (t_1 = r_1) \wedge \ldots, \wedge (t_n = r_n) \to (F(t_1, \ldots, t_n) = F(r_1, \ldots, r_n))$$

y

$$\vdash (t_1 = r_1) \wedge \ldots, \wedge (t_n = r_n) \to (R(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow R(r_1, \ldots, r_n))$$

los apartados de la anterior defincíón están bien definidos (es decir, si elegimenos otros representantes de las clases de equivalencia $[c_i]_\sim$ obtenemos el mismo resultado).

Solo queda ver que los elementos de esta estructura son en realidad interpretaciones de elementos de C y que efectivamente Σ se satisface en $\mathfrak{A}$.

Sea x es una variable que no aparece en el término t, entonces $\vdash \exists x(x = t)$, luego $\Sigma \vdash \exists x(x = t)$. Como Σ es consistente maximal y tiene testigos en C se tiene que existe una cierta constante $c \in C$ tal que $c = t \in \Sigma$. Esto es, $t \sim c$, luego $[t]_\sim = [c]_\sim$. Esto prueba que $A = \{[t]_\sim : t \in Terms(\mathscr{L})\} = \{[c]_\sim : c \in C\} = \{c^{\mathfrak{A}} : c \in C\}$.

Finalmente, definimos la asignación s en $\mathfrak{A}$ como $s(x) = [x]_\sim$. Es sencillo ver por inducción que $t^{\mathfrak{A}}[s] = [t]_\sim$ y con esto la inducción sobre la complejidad de las fórmulas para ver que $\varphi \in \Sigma$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ es directa, a excepción del último paso (si φ es de la forma $\exists x\psi$), que detallamos a continuación. Supongamos primero que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$. Esto sucede si para algún $c \in C$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi[s^x_{[c]_\sim}]$, lo cual es equivalente a decir que $\mathfrak{A} \models \psi^x_c[s]$. Aplicando entonces la hipótesis de inducción tenemos que $\Sigma \vdash \psi^x_c$, y como $\vdash \psi^x_c \to \exists x\psi$, se tiene que $\Sigma \vdash \exists x\psi$. Como Σ es consistente maximal, $\exists x\psi \in \Sigma$. Recíprocamente, si $\exists x\psi \in \Sigma$, como Σ tiene testigos en C, existe $c \in C$ tal que $\Sigma \vdash \exists x\psi \to \psi^x_c$. Que $\Sigma \vdash \psi^x_c$ se sigue por Modus Ponens, y aplicando entonces la hipótesis de inducción se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi^x_c[s]$, que como antes es equivalente a que $\mathfrak{A} \models \psi[s^x_{[c]_\sim}]$, por lo que tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi$. $\square$

3.2. Teorema de Completitud

Teorema 3.7. ***Teorema de Completitud extendido.*** *Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas. Entonces Σ es consistente si y solo si Σ es satisfacible.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Suponer que Σ es inconsistente. Entonces para una fórmula cualquiera φ de $\mathscr{L}$, $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \neg\varphi$, por lo que por el Teorema de Validez 3.2, $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, esto es, $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \not\models \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, necesariamente Σ es consistente.

$\Longrightarrow$) Asumimos ahora Σ consistente. Por el Lema 3.5, podemos considerar la extensión $\bar{\Sigma}$ de Σ y $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup C$ la extensión de $\mathscr{L}$ (con $||\bar{\mathscr{L}}|| = ||\mathscr{L}||$) de forma que $\bar{\Sigma}$ tiene testigos en C (siendo C un conjunto de nuevas constantes que no están en $\mathscr{L}$ y $|C| = ||\mathscr{L}||$). Por el Lema 3.6 $\bar{\Sigma}$ es satisfacible en una $\bar{\mathscr{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$. Consideramos entonces $\mathfrak{B}$ la reducción de $\mathfrak{A}$ a $\mathscr{L}$, y como las fórmulas de Σ no incluyen las constantes de $\bar{\mathscr{L}}$ que no están en $\mathscr{L}$, Σ es satisfacible en $\mathfrak{B}$. ☐

Corolario 3.8. *Sea Σ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y φ una $\mathscr{L}$-fórmula. Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Σ es consistente si y solo si Σ es satisfacible.*

(ii) *$\Sigma \vdash \varphi$ si y solo si $\Sigma \models \varphi$.*

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Observemos primero que $\Sigma \models \varphi$ si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible. Por hipótesis, esto ocurre si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, lo cual por la Proposición 2.28 ocurre de nuevo si y solo si $\Sigma \vdash \varphi$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Tomemos ψ un axioma cualquiera. Entonces tenemos que Σ es inconsistente si y solo si $\Sigma \vdash \neg\psi$, lo cual por hipótesis ocurre si y solo si $\Sigma \models \neg\psi$. Como todo axioma es una fórmula válida por el Lema 3.1, esto ocurre si y solo si Σ no es satisfacible. ☐

Teorema 3.9. ***Teorema de Completitud de Gödel.*** *Una fórmula de $\mathscr{L}$ es un teorema si y solo si es válida.*

Demostración. Por el Teorema de Completitud extendido 3.7 tenemos que un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas Σ es consistente si y solo si es satisfacible, y por el Corolario 3.8 esto es equivalente a que dada una fórmula φ, $\Sigma \vdash \varphi$ si y solo si $\Sigma \models \varphi$. Así pues, basta tomar $\Sigma = \emptyset$. ☐

Resumimos en la siguiente tabla las equivalencias semánticas y sintácticas que se desprenden de los resultados sobre completitud:

Sintaxis	Semántica
φ es un teorema, $\vdash \varphi$	φ es válida, $\models \varphi$
Σ es consistente	Σ es satisfacible
φ se deduce de Σ, $\Sigma \vdash \varphi$	φ es una consecuencia de Σ, $\Sigma \models \varphi$

3.3. Teorema de Compacidad y Teoremas de Löwenheim-Skolem

Los siguientes resultados pueden verse como corolarios del Teorema de Completitud extendido 3.7 y del Lema 3.6, aunque sean históricamente anteriores.

Definición 3.10. Una *teoría T* de un lenguaje $\mathscr{L}$ es un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$.

Corolario 3.11. ***Teorema de Löwenheim-Skolem descendente.***

(i) *Todo conjunto consistente Σ de $\mathscr{L}$-fórmulas es satisfacible en una $\mathscr{L}$-estructura de cardinaliad como máximo $||\mathscr{L}||$.*

(ii) Todo teoría consistente T de un lenguaje $\mathscr{L}$ tiene un modelo de cardinalidad como máximo $||\mathscr{L}||$.

Demostración. El apartado (ii) se sigue de (i). Observemos que de nuevo por el Lema 3.5 podemos considerar la extensión $\bar{\Sigma}$ de Σ en el lenguaje $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup C$ donde C es un conjunto de constantes tal que $\mathscr{L} \cap C = \emptyset$, y por el Lema 3.6 $\bar{\Sigma}$ es satisfacible en una $\bar{\mathscr{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que todo elemento es interpretación de una constante, y por lo tanto se tiene que su reducción $\mathfrak{B}$ a $\mathscr{L}$, que es una $\mathscr{L}$-estructura donde Σ es satisfacible, cumpliría lo siguiente:

$$|B| = |A| \leq ||\bar{\mathscr{L}}|| = ||\mathscr{L}||,$$

donde la primera igualdad se tiene por definición de extensión de una estructura, la segunda a razón del Lema 3.5 y la desigualdad se sigue de que $\bar{\mathscr{L}}$ es un lenguaje con tantas constantes como elementos en A, luego el número de fórmulas de $\bar{\mathscr{L}}$ ha de ser mayor o igual que $|A|$. □

De este resultado se sigue la versión original del teorema, dada por Löwenheim en 1915, que establece que si una fórmula de un lenguaje numerable es satisfacible, entonces lo es en una estructura numerable. En 1920 Skolem extendió este resultado a un conjunto cualquiera de fórmulas de un lenguaje numerable.

Ejemplo 3.12. Paradoja de Skolem. El lenguaje de la teoría de conjuntos consiste en un único símbolo relacional $\in$ que se interpreta como la relación de pertenencia. Del teorema de Löwenheim-Skolem descendente, se sigue que existe un modelo numerable de la teoría de conjuntos, pero la teoría de conjuntos es capaz de demostrar la existencia de conjuntos no numerables, tomando por ejemplo el conjunto de partes del conjunto de los naturales. El hecho de que un modelo numerable pueda ver conjuntos no numerables dentro de sí puede resultar paradójico, y de ahí que a esto se le llame Paradoja de Skolem, pero no lo es: desde fuera del modelo, todo lo que contiene el modelo es obviamente numerable, la clave aquí es que ser numerable o no numerable no es una noción absoluta.

Definición 3.13. Se dice que un conjunto Σ de $\mathscr{L}$-fórmulas es *finitamente satisfacible* si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Teorema 3.14. ***Teorema de Compacidad.*** *Un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas Σ es satisfacible si y solo si es finitamente satisfacible.*

Demostración. Notemos que por el Teorema de Completitud extendido 3.7, todo subconjunto finito de Σ es satisfacible si y solo si todo subconjunto finito de Σ es consistente, y por la Proposición 2.28(i), esto sucede si y solo si Σ es consistente. Aplicando de nuevo el Teorema 3.7, esto pasa si y solo si Σ es satisfacible. □

Corolario 3.15. *Si un conjunto Σ de $\mathscr{L}$-fórmulas es satisfacible en $\mathscr{L}$-estructuras finitas arbitrariamente grandes, entonces es satisfacible en una $\mathscr{L}$-estructura infinita.*

Demostración. Sea Σ una conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas satisfacible en estructuras finitas arbitrariamente grandes. Consideremos la expansión $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_n : n \subset \omega\}$, donde $\{c_n\}_{n \subset \omega}$ es una lista de constantes distintas que no están en $\mathscr{L}$. Consideremos entonces el conjunto Γ de fórmulas de $\mathscr{L}'$ definido como

$$\Gamma = \Sigma \cup \{\neg(c_n = c_m) : n < m < \omega\}.$$

Todo subconjunto finito Γ' de Γ involucra como mucho las constantes $c_0, \ldots, c_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea entonces $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura con al menos $m+1$ elementos en la que Σ es satisfacible (lo cual podemos hacer porque Σ es satisfacible en $\mathscr{L}$-estructuras finitas arbitrariamente grandes), y sea $a_0, \ldots, a_m$ una lista de $m+1$ elementos distintos de $\mathfrak{A}$. Podemos verificar fácilmente que Γ' es satisfacible en la estructura $(\mathfrak{A}; a_0, \ldots, a_m)$ en la extensión finita $\mathscr{L}'' = \mathscr{L} \cup \{c_0, \ldots, c_m\}$ de $\mathscr{L}$. Por lo tanto, por el Teorema de Compacidad 3.14, Γ es satisfacible por una $\mathscr{L}''$-estructura. Esta estructura es claramente infinita, ya que como en particular el conjunto $\{\neg(c_n = c_m) : n < m < \omega\}$ se satisface en ella, esto exige que sus interpretaciones sean distintas. La reducción de esta estructura a $\mathscr{L}$ nos da una $\mathscr{L}$-estructura infinita (ya que su universo es el mismo que el de la $\mathscr{L}''$-estructura) en la cual Σ es satisfacible.

□

Corolario 3.16. ***Teorema de Löwenheim-Skolem ascendente*** *Si un conjunto Σ de $\mathscr{L}$-fórmulas es satisfacible en alguna $\mathscr{L}$-estructura infinita, entonces es satisfacible en $\mathscr{L}$-estructuras infinitas de cualquier cardinalidad $\alpha \geq ||\mathscr{L}||$.*

Demostración. Sea $\alpha \geq ||\mathscr{L}||$, $\{c_\xi\}_{\xi<\alpha}$ una lista de constantes todas ellas distintas que no están en $\mathscr{L}$ y $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup \{c_\xi\}_{\xi<\alpha}$. Considerar además el siguiente conjunto de $\bar{\mathscr{L}}$-fórmulas:

$$\Gamma = \Sigma \cup \{\neg(c_\xi = c_\eta) : \xi < \eta < \alpha\}.$$

Notemos que todo subconjunto finito Γ' de Γ contiene como mucho un numero finito de constantes c_ξ. Por lo tanto toda estructura infinita en la que Σ es satisfacible se puede extender a una $\bar{\mathscr{L}}$-estructura en la que Γ' es satisfacible. Por el Teorema de Compacidad 3.14, Γ es satisfacible y por el Teorema de Löwenheim-Skolem descendente 3.11, admite una $\bar{\mathscr{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$ de cardinalidad como mucho $||\bar{\mathscr{L}}|| = ||\mathscr{L} \cup \{c_\xi : \xi < \alpha\}|| = \alpha$, luego $|A| \leq \alpha$. Por otro lado, notemos que como $\mathfrak{A}$ es una estructura en la que Γ es satisfacible, para todo $\eta < \xi$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \neg(c_\xi = c_\eta)$, lo cual ocurre si y solo si $\mathfrak{A} \not\models c_\xi = c_\eta$, esto es, si $c_\xi^{\mathfrak{A}}$ es distinto de $c_\eta^{\mathfrak{A}}$. Así pues, las interpretaciones de estas las constantes deben ser elementos distintos de A, por lo que $\alpha \leq |A|$. Por lo tanto necesariamente $|A| = \alpha$. La reducción de $\mathfrak{A}$ a $\mathscr{L}$ es una $\mathscr{L}$-estructura de cardinalidad α en la que Σ es satisfacible. $\square$

En otras palabras, los conjuntos de fórmulas de primer orden no pueden controlar la cardinalidad de sus estructuras infinitas. Esto significa que si un conjunto de fórmulas es satisfacible en una estructura infinita, entonces es también satisfacible en estructuras de mayor cardinalidad. En particular, toda teoría de primer orden tiene modelos no isomorfos.

Anexo A

Nociones básicas de aritmética cardinal

Definición A.1. Una clase a se dice transitiva si para cada $y \in x$ con $x \in a$, se tiene $y \in a$. Un número ordinal es un conjunto transitivo bien ordenador con respecto a la relación de pertenencia $\in$.

Definición A.2. Si α es un ordinal, se define $\alpha + 1$ como el sucesor de α. Si α no es ordinal sucesor, entonces se dice que es un ordinal límite.

La clase de ordinales con la relación de pertenencia es una clase bien ordenada:$a < b$ si y solo si $a \in b$.

Proposición A.3. *Dados dos ordinales α, β:*

(i) $\alpha \in \beta$ *si y solo si* $\alpha \subsetneq \beta$.

(ii) *Si* $\alpha \neq \beta$, *o bien* $\alpha \in \beta$ *o* $\beta \in \alpha$.

Un ordinal se dice numerable si es finito o es biyectable con ω. En caso contrario se dice que es no numerable. El primer ordinal no numerable, denotado ω_1, es el conjunto de ordinales numerables; ω_2 es el siguiente ordinal tal que no se puede establecer una biyección con ninguno de sus predecesores. Análogamente, se definen todos los cardinales ω_α. En las etapas límite (esto es, cuando el índice α es un ordinal límite) ω_α es la unión de sus predecesores.

Teorema A.4. ***Teorema de Enumeración.*** *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal.*

En la clase de ordinales podemos definir recuersivamente la operación suma como sigue:

$\alpha + 0 = \alpha$.

$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$.

$\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$, si β es un ordinal límite.

Definición A.5. Un número cardinal es un ordinal que no es biyectable con ninguno de sus predecesores.

Para la siguiente proposición es necesario el axioma de elección.

Proposición A.6. *Todo conjunto es biyectivo con un único cardinal.*

Se denota como $|a|$ la cardinalidad de a, donde $|a|$ es el único cardinal con el cual se puede establecer una biyección con a.
Para todo par de cardinales κ, λ definimos $\kappa + \lambda$ como $|(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$.

Proposición A.7. *Sean κ y λ cardinales. Si alguno de ellos es infinito, entonces* $\kappa + \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.

Bibliografía

[1] BARRERA, F. *Usuba's contributions to set-theoretic geology*, Master Thesis, Universitat de Barcelona, 2020.

[2] CASANOVAS, E. *Mathematical Logic* Course Notes, Universitat de Barcelona, 2019.

[3] CHANG, C.C & KEISLER, H. J. *Model Theory*, Dover, 2012.

[4] ENDERTON, H. B. *A mathematical Introduction to Logic*, Harcourt/Academic Press, 2001.

[5] MONTALBÁN, A. 125A-Mathematical Logic Course Notes, Berkeley University, `https://math.berkeley.edu/~antonio/`

[6] MOSTERÍN, J. *Los Lógicos*, Espasa-Calpe, Madrid, 2000.