



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

**Aalborg Universitet**

## **Matemekanik & Wave Star**

*teori & opgaveforslag*

Hartvig, Peres Akrawi

*Publication date:*  
2011

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Hartvig, P. A. (2011). *Matemekanik & Wave Star: teori & opgaveforslag*. Department of Civil Engineering, Aalborg University. DCE Lecture notes Nr. 23 <http://www.energipaahavet.dk/default.asp>

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Matemekanik & Wave Star

## Teori & Opgaveforslag

Peres Akrawi Hartvig



Til gymnasielærere og -elever på pilotprojektet *Energi På Havet*  
den 10. -- 11. marts 2011 på Aalborg Universitet i Esbjerg



Aalborg Universitet  
Institut for Byggeri og Anlæg  
Sektionen for Vand & Jord

DCE Lecture Notes No. 23

# **Matemekanik & Wave Star Teori & Opgaveforslag**

Peres Akrawi Hartvig

Juli 2011

© Aalborg Universitet

## Videnskabelige publikationer ved Institut for Byggeri og Anlæg

*Technical Reports* anvendes til endelig afrapportering af forskningsresultater og videnskabeligt arbejde udført ved Institut for Byggeri og Anlæg på Aalborg Universitet. Serien giver mulighed for at fremlægge teori, forsøgsbeskrivelser og resultater i fuldstændig og uforkortet form, hvilket ofte ikke tillades i videnskabelige tidsskrifter.

*Technical Memoranda* udarbejdes til præliminær udgivelse af videnskabeligt arbejde udført af ansatte ved Institut for Byggeri og Anlæg, hvor det skønnes passende. Dokumenter af denne type kan være ufuldstændige, midlertidige versioner eller dele af et større arbejde. Dette skal holdes in mente, når publikationer i serien refereres.

*Contract Reports* benyttes til afrapportering af rekvireret videnskabeligt arbejde. Denne type publikationer rummer fortroligt materiale, som kun vil være tilgængeligt for rekvirenten og Institut for Byggeri og Anlæg. Derfor vil Contract Reports sædvanligvis ikke blive udgivet offentligt.

*Lecture Notes* indeholder undervisningsmateriale udarbejdet af undervisere ansat ved Institut for Byggeri og Anlæg. Dette kan være kursusnoter, lærebøger, opgavekompendier, forsøgsmanualer eller vejledninger til computerprogrammer udviklet ved Institut for Byggeri og Anlæg.

*Theses* er monografier eller artikelsamlinger publiceret til afrapportering af videnskabeligt arbejde udført ved Institut for Byggeri og Anlæg som led i opnåelsen af en ph.d.- eller doktorgrad. Afhandlingerne er offentligt tilgængelige efter succesfuldt forsvar af den akademiske grad.

*Latest News* rummer nyheder om det videnskabelige arbejde udført ved Institut for Byggeri og Anlæg med henblik på at skabe dialog, information og kontakt om igangværende forskning. Dette inkluderer status af forskningsprojekter, udvikling i laboratorier, information om samarbejde og nyeste forskningsresultater.

Udgivet 2011 af  
Aalborg Universitet  
Institut for Byggeri og Anlæg  
Sohngårdsholmsvej 57,  
DK-9000 Aalborg, Danmark

Trykt i Aalborg på Aalborg Universitet

ISSN 1901-7286  
DCE Lecture Notes No. 23

---

# Indhold

---

<b>Indhold</b>	<b>1</b>
<b>1 Generelle principper</b>	<b>3</b>
1.1 Newtons love . . . . .	3
1.2 Tyngdekraft . . . . .	3
<b>2 Vand i hvile</b>	<b>5</b>
2.1 Hydrostatisk tryk . . . . .	5
2.2 Hydrostatisk opdrift . . . . .	5
2.3 Opgaveforslag . . . . .	6
<b>3 Vandbølger</b>	<b>9</b>
3.1 Bølgeparametre . . . . .	9
3.2 Tryk . . . . .	10
3.3 Mekanisk energi . . . . .	10
3.4 Opgaveforslag . . . . .	11
<b>4 Wave Star</b>	<b>13</b>
4.1 Princip . . . . .	13
4.2 Bevægelsesligning . . . . .	14
4.3 Opgaveforslag . . . . .	15
<b>Symboler</b>	<b>19</b>



## Kapitel 1

---

# Generelle principper

---

### 1.1 Newtons love

Newton foreslog nogle matematiske ligninger som i mange tilfælde kan bruges til at beskrive legemers bevægelse. Et legeme har massen  $m$  og accelerationen  $a_i$  i retning  $i$ , hvor  $i$  kan være  $x, y, z$ . Legemet kan påvirkes af ydre kræfter i alle tre retninger og summen af kræfterne i retning  $i$  defineres som den resulterende kraft  $F_{res,i}$ . Newton knyttede disse tre variable sammen i to ligningssystemer, som kaldes henholdsvis Newtons 1. og 2. lov:

$$\text{N1: Legemet er i hvile eller har konstant retlinet hastighed} \Leftrightarrow F_{res,i} = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\text{N2: } F_{res,i} = ma_i \quad (1.1.2)$$

### 1.2 Tyngdekraft

Et legeme i et tyngdefelt påvirkes af en nedadrettet kraft  $F_T$ :

$$F_T = mg \quad (1.2.1)$$

dvs. tyngdekraften er proportional med legemets masse og tyngdeaccelerationen  $g$ . Hvis tyngdekraften er den eneste ydre kraft, der påvirker et legeme, forudsiger (1.1.2) og (1.2.1) tilsammen, at massens nedadrettede acceleration er  $g$ , hvilket forklarer hvorfor man kalder  $g$  for *tyngdeaccelerationen*.

Tyngdekraften virker i et punkt, der kaldes tyngdepunktet  $T$ . Hvis massen er jævnt fordelt, svarer tyngdepunktet til det geometriske midtpunkt.





## Kapitel 2

---

# Vand i hvile

---

### 2.1 Hydrostatisk tryk

Et tryk er den trykkraft per areal, der virker med samme størrelse i alle tre dimensioner  $(x, y, z)$ . Hvis vand er i hvile, oplever det et *hydrostatisk tryk* (græsk *hydro*: vand, latin *staticus*: hvile). Trykket vil stige proportionalt med vanddybden på grund af tyngden af det overliggende vand jf. (1.1.1) og (1.2.1). Trykkræfterne per areal må være ens i alle retninger da vandet ellers ville bevæge sig på grund af sine materialeegenskaber. Hvis trykket defineres til at være nul i vandoverfladen, dvs. vi fortolker her  $p$  som overtrykket i forhold til luftens tryk, er det hydrostatiske tryk  $p$  givet af formlen:

$$p = -\rho_w g z \quad (2.1.1)$$

hvor  $\rho_w$  er vandets densitet og  $z$  er den opadrettede position fra vandoverfladen. Minusset skyldes, at  $z$  peger op. Bemærk, at formlen kun gælder for *stillestående* vand. Hvis vandet er i bevægelse, fx når det passerer af en vandbølge, vil trykket altså afvige fra det hydrostatiske tryk – eller tilsvarende, hvis trykket afviger fra det hydrostatiske tryk, vil vandet begynde at bevæge sig.

### 2.2 Hydrostatisk opdrift

Hvis et legeme nedsænkes i vand og det viser sig, at både legemet og vandet oplever at være i hvile, må vandet have et hydrostatisk tryk. De kræfter, der virker vinkelret på legemets nedsænkede overflade, er dermed kendt og deres samlede virkning giver en opadrettet kraft, der kaldes den hydrostatiske opdrift  $F_O$ :

$$F_O = \int_A -pn_z dA$$

hvor  $n_z$  er  $z$ -komponenten af den udrettede normalvektor på legemets nedsænkede overflade  $A$ . Minusset skyldes, at trykkrafterne peger *ind* i overfladen modsat normalvektoren. Hvis  $\rho_w$  og  $g$  kan regnes konstante langs legemets overflade og (2.1.1) udnyttes, reduceres denne formel til *Archimedes' lov*:

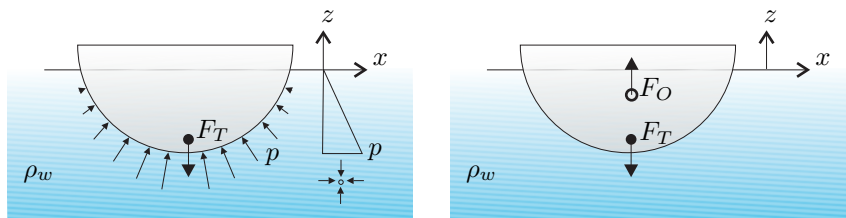
$$F_O = \rho_w V_w g \quad (2.2.1)$$

Den hydrostatiske opdrift afhænger altså af vandets densitet, tyngdeaccelerationen og det fortrængte volumen  $V_w$ . Med *fortrængt volumen* menes det rumfang, der er udspændt mellem vandoverfladen og legemets nedsænkede overflade, eller i en tilsvarende fortolkning, det rumfang af vand, som legemet har presset væk ved sin tilstedeværelse. Den lodrette afstand mellem vandoverfladen og legemets bund kaldes dybgangen  $d$  og opfylder per definition altid  $d \geq 0$ .

Opdriften virker i et punkt, der kaldes opdriftscenteret og benævnes  $O$ . Hvis  $\rho_w$  og  $g$  er konstante mht. position, er opdriftscentret sammenfaldende med det geometriske midtpunkt af det fortrængte volumen.

Hvis både legeme og vand er i hvile, må opdriften blive modsvaret af tyndekraften jf. Newtons 1. lov (1.1.1) og derved fås flg. ligevægtsligning i lodret retning:

$$F_O = F_T \quad (2.2.2)$$



Figur 2.2.1: Faktisk tryk-/kraftfordeling (t.v.) og tilsvarende kraftfordeling (t.h.).

## 2.3 Opgaveforslag

Følgende opgaver er baseret på adgang til vandkar og fysiske modeller. Prøv gerne forskellige geometrier, fx en kasse eller en halvkugle (ligesom Wave Stars ponton).

1. Beregn det fortrængte volumen for legemet ved hjælp af integration (analytisk eller numerisk) og angiv det som en funktion af dybgangen,

dvs. fra legemet lige rører vandoverfladen til det er helt neddykket. For nemheds skyld kan det antages, at legemet altid er i lodret position.

2. Beregn legemets dybgang når det har massen  $m$  og vandet har densiteten  $\rho_w$ . Gør brug af løsningen til opgave 1 samt ligningerne (1.2.1), (2.2.1) og (2.2.2) som tilsammen kan reduceres til betingelsen  $V_w = m/\rho_w$ .
3. Mål legemets masse  $m$  og vandets densitet  $\rho_w$  ved hjælp af en vægt og et rummål og bestem legemets dybgang i et kar. Sammenlign dette med den beregnede dybgang i opgave 2.
4. Beregn og undersøg i et kar den maksimale masse som legemet kan bære.
5. Undersøg i et kar betydningen af tyngdepunktets position for legemets stabilitet. Hvornår og hvorfor begynder den at kæntre eller stabiliseres?
6. Beregn placeringen af tyngdepunktet og opdriftscentret, fx når legemet er halvt neddykket.
7. Bevis, at  $\int_A -pn_z dA$  reduceres til  $\rho_w V_w g$  når  $\rho_w$  og  $g$  er konstante mht. legemets nedsænkede overflade. Dette kan gøres for en bestemt geometri ved hjælp af integration eller helt generelt for en vilkårlig geometri ved hjælp af divergenssætningen.
8. Undersøg trykkræfterne i vandkaret mht. lodret og vandret position samt retning ved hjælp af en tryktransducer og sammenlign med (2.1.1).



## Kapitel 3

---

# Vandbølger

---

En vandbølge forårsager en bevægelse af vandet og dets vandoverflade. I det følgende tager jeg afsæt i den *lineære bølgeteori for vand*, som kan bruges her. Da vandoverfladen nu varierer i modsætning til det hydrostatiske tilfælde i forrige kapitel, angives vanddybden, dybgang og den opadrettede koordinat  $z$  fra middelvandspejlet (MVS).

### 3.1 Bølgeparametre

Den opadrettede position fra MVS til vandoverfladen defineres som  $\eta$  og kan beskrives af følgende harmoniske funktion:

$$\eta = a \cos(\omega t - kx) \quad (3.1.1)$$

hvor  $a$  er bølgeamplituden,  $\omega = 2\pi/T$  er den cirkulære frekvens og  $k = 2\pi/L$  er bølgetallet. Dermed er bølgehøjden lig  $2a$ , bølgeperioden er  $T$  og bølgelængden er  $L$ . Minusset mellem de to led i argumentet betyder, at bølgen her rejser i  $x$ -retningen, da  $\omega > 0$  og  $k > 0$ . Den lineære bølgeteori gælder når bølgehøjden er meget mindre end bølgelængden.

Udbredelseshastigheden  $c$  er defineret som:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (3.1.2)$$

Sammenhængen mellem bølgeperiode og bølgelængde kan beskrives af følgende *dispersionsligning*:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.1.3)$$

hvor  $h$  er vanddybden, dvs. afstanden mellem MVS og havbunden. Dispersionsligningen bekræfter intuitionen om, at bølgelængden vokser når bølgeperioden vokser. Den fortæller også mere præcist, at bølgeperioden i det

generelle tilfælde har en *ulineær* afhængighed af bølgelængden og dermed vil bølger med forskellige bølgelængder udbrede sig med forskellige hastigheder jf. (3.1.2) og (3.1.3). Til sammenligning har lysbølger i vakuum en *lineær* dispersionsligning:

$$\omega = ck$$

således, at lysbølger i vakuum udbreder sig med samme konstante hastighed uanset bølgelængde.

## 3.2 Tryk

Med den nævnte definition af  $\eta$  forudsiger den lineære bølgeteori, at trykket under MVS varierer med tiden og stedet på følgende måde:

$$p = \rho_w g \eta \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} + p_{stat} \quad (3.2.1)$$

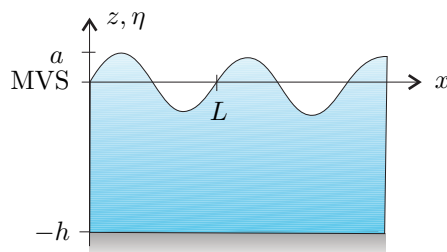
hvor  $p_{stat}$  er det hydrostatiske tryk fra (2.1.1). Trykket *over* MVS ( $z > 0$ ) er ubetydeligt ifølge den lineære bølgeteori.

## 3.3 Mekanisk energi

Den mekaniske energi  $E_{mek}$  i en vandsøjle (energi per areal) er i gennemsnit i løbet af en bølgeperiode eller  $\lambda$ -længde givet ved:

$$E_{mek} = \frac{\rho_w a^2}{2} \quad (3.3.1)$$

Formel (3.3.1) beskriver den mekaniske energi for vandbølgen i forhold til den mekaniske energi i det hydrostatiske tilfælde. Ud fra dette synspunkt har det hydrostatiske tilfælde ingen mekanisk energi da den stillestående vandoverflade aldrig befinder sig over MVS og det stillestående vand ikke



Figur 3.1.1: Definition af bølgeparametre. Vandoverfladen er her vist til tidspunktet  $t = \pi/(2\omega)$ .

har nogen hastighed. Vandbølgens mekaniske energi er proportional med kvadratet af bølgeamplituden  $a$  og det er denne energi, som man ønsker at udvinde med bølgeenergimaskiner, som vi ser på i næste kapitel.

### 3.4 Opgaveforslag

Følgende opgaveforslag er baseret på adgang til bølgebassin og viser forskellige måder at bestemme parametrene  $a, L, T, h$ .

1. Optegn  $\tanh(kh)$  som funktion af  $kh$  eller skriv den ved hjælp af Taylor-rækker. Vis, at  $\tanh(kh) \rightarrow kh$  når  $kh \rightarrow 0$  (lavt vand), og  $\tanh(kh) \rightarrow 1$  når  $kh \rightarrow \infty$  (dybt vand). Hvad bliver vandbølgers udbredelsehastighed i disse to grænsetilfælde?
2. Hvis  $k$  (eller tilsvarende  $L$ ) er ukendt, må dispersionsligningen i det generelle tilfælde (3.1.3) løses implicit da  $k$  ikke kan isoleres i ligningen. I stedet kan man betragte funktionen  $f = \omega^2 - gk \tanh(kh)$  og ved iteration finde dets nulpunkt,  $f \approx 0$ , hvilket betyder at dispersionsligningen er opfyldt. Da  $f$  aftager monotont med  $k$  kan nulpunktet bestemmes ved bisektionsmetoden ved systematiske gæt af  $k$  i intervallet  $[\omega^2/g, \infty[$ .
3. Mål vanddybden  $h$  i bassinet når vandet er i hvile.
4. Lav vandbølger i bassinet ved at bevæge en plade med håndkraft. Armbevægelsen bør være så jævn som mulig og foretages med en konstant 'amplitude' og 'periode'  $T_2$  således, at armbevægelsen forplanter sig til vandbølger med samme bølgeperiode  $T = T_2$ . Når  $h, T_2, g$  er kendt, kan  $L$  bestemmes ved hjælp af resultatet fra opgave 1 eller 2.
5. Mål  $\eta$  i et fast punkt ved hjælp af kapacitans-måleudstyr. Sammenlign med (3.1.1) og bestem  $a$  og  $T$ .
6. Bestem  $T$  ved at måle tidsrummet mellem to bølgetoppe mens man står på samme sted.
7. Fastgør en målestok langs bølgebassinet og fotografér bølgebevægelsen eller optag den med videokamera. Bestem  $a$  og  $L$  ud fra fotos/videooptagelsen.
8. Bestem bølgens udbredelsehastighed ved hjælp af opgave 6 og 7.
9. Mål vandets densitet  $\rho_w$  og anbring en tryktransducer på bassinets bund. Ud fra tryksignalet og resultatet fra opgave 1 eller 2 bestemmes  $a, h, T, L$ .





## Kapitel 4

---

# Wave Star

---

### 4.1 Princip

Der findes mange forskellige principper for at udvinde bølgeenergi. Den nuværende udgave af Wave Star bygger på *linie-* og *punktabsorption* og består af følgende dele:

1. En fast og aflang platform over vandoverfladen, der bør placeres med længderetningen parallelt med den dominerende bølgeretning.
2. Underarme, der hver er fastgjort med kugleleje til platformen og er fikseret til en halvkugle-ponton, der flyder i vandoverfladen.
3. Overarme med hydrauliske stempler, der hver er fastgjort med kugleleje til platformen og kugleleje til underarmen. Når bølgetoppen passerer pontonen, hæves pontonen over MVS og forårsager et tryk i overarmen. Når bølgedalen passerer pontonen, sænkes pontonen under MVS og forårsager et træk i overarmen. Konstruktionens opbygning sørger



Figur 4.1.1: Wave Star-platform (t.v.) og ponton (t.h.).

er altså for, at overarmen udsættes for skiftevis tryk og træk og dette driver overarmens oliestempel.

4. En generator, som udnytter det jævne olierekredsløb fra alle oliestemplerne til at producere elektricitet til elnettet.

## 4.2 Bevægelsesligning

I det følgende opstilles bevægelsesligninger på baggrund af Newtons 2. lov som kan anvendes til at beskrive bevægelsen af en enkelt ponton.

For nemheds skyld antages det, at pontonen kun har frihed til at bevæge sig i lodret retning. Desuden antages det, at pontonen, foruden tyngdekraften, er påvirket af den *hydrostatisk* opdrift  $F_O$ , der blev givet i (2.2.1), selvom vandet egentligt er i bevægelse og opdriften dermed ville afvige fra den hydrostatiske opdrift. Pontonens vandrette position benævnes  $x_0$  og den opadrettede position fra MVS til pontonens bund defineres som  $d_z$ . Dybgangen  $d$  er dermed givet ved:

$$d = \eta(x = x_0, t) - d_z \quad (4.2.1)$$

Hvis kræfter, der peger i  $z$ -retningen regnes som positive, giver Newtons 2. lov i (1.1.2) følgende bevægelsesligning for den opadrettede position efter begyndelsestidspunktet  $t_0$ :

$$md_z'' = F_{res,z} \approx F_O - F_T, \quad t > t_0 \quad (4.2.2)$$

Anførselstegn angiver differentiation mht. tiden  $t$  og  $d_z''$  er dermed pontonens opadrettede acceleration. Ligning (4.2.2) er en 2. ordens differentialligning, da den ubekendte  $d_z$  højst er differentieret to gange. Når bølgetoppen passerer pontonen ( $\eta > 0$ ), vil dybgangen, det fortrængte volumen og dermed opdriften øges. Pontonen er ikke længere i ligevægt og vil bevæge sig op indtil opdriften reduceres og balanceres af tyngdekraften. Det omvendte sker når bølgedalen passerer pontonen ( $\eta < 0$ ).

En forbedret udgave af bevægelsesligningen kunne inddrage overarmens kraftabsorption. Her kan det antages, at pontonen, foruden tyngdekraften og hydrostatisk opdrift, også påvirkes af en dæmpende kraft, der er proportional med pontonens opadrettede hastighed  $d_z'$ :

$$F_D = -qd_z', \quad q > 0 \quad (4.2.3)$$

hvor proportionalitetskonstanten  $-q$  er konstant mht. tiden. Dæmperkraften virker i punktet  $D$ . Det kan ses af formel (4.2.3), at dæmperkraften opfører sig på en sådan måde, at oliestemplet trykker på pontonen når den bevæges op ( $d_z' > 0 \Rightarrow F_D < 0$ ) og trækker i pontonen når den bevæges ned ( $d_z' < 0 \Rightarrow F_D > 0$ ). Denne model kan også anvendes til at inddrage vandets egen dæmpning på en simpel måde ved at opdele  $q$  i to bidrag:

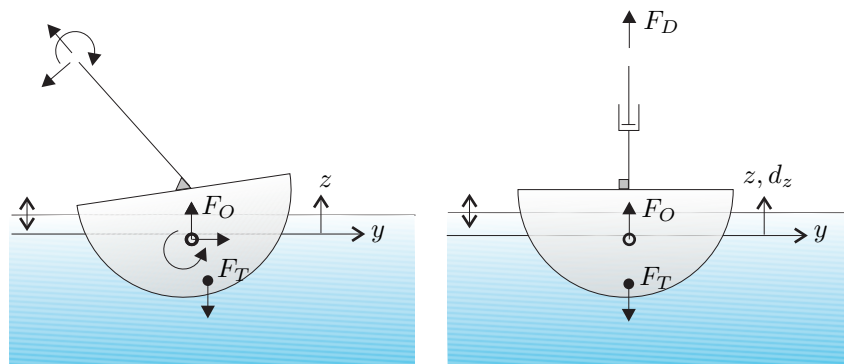
$$q = q_{olie} + q_w \quad (4.2.4)$$

hvor  $q_{olie}$  er oliestemplets dæmpningskonstant og  $q_w$  er vandets dæmpningskonstant. Bevægelsesligningen bliver dermed:

$$md_z'' = F_{res,z} \approx F_O - F_T + F_D, \quad t > t_0 \quad (4.2.5)$$

Som andre konstruktioner, der udsættes for gentagen belastning, vil pontonens bevægelse blive markant forstærket hvis den går i egensvingninger, også kaldet *resonans*. Dette sker når systemets egensvingningsfrekvens  $T_0$  er tæt på eller sammenfaldende med bølgefrequensen  $T$ . For Wave Star kan egensvingninger være gunstige for pontonens bevægelse, da det kan forøge udvindingen af bølgeenergi. Dette styres principielt på to måder i Wave Star, nemlig ved at justere pontonens masse (ved at lukke vand ind i dens hulrum) eller ved at styre oliestemplets dæmperkonstant  $q_{olie}$ .

For en god ordens skyld vil jeg nævne de fænomener, som en mere fuldkommen beskrivelse af bevægelsen ville have inddraget: Flere frihedsgrader (dvs. også pontonens vandrette og roterende bevægelse og bevægelsen af de øvrige konstruktionsdele og de kræfter der virker på dem), den faktiske opdrift (herunder ulineær dæmpning og hydrodynamisk masse) og en mere komplet model af oliestemplet.



Figur 4.2.1: Faktisk kraftfordeling (t.v.) og antaget kraftfordeling (t.h.) når pontonen passerer af en bølgetop. Bølgeretningen  $x$  er ind i  $yz$ -planen.

### 4.3 Opgaveforslag

1. Skitsér kraftprincippet i den oprindelige og nuværende Wave Star. Gør brug af kraftpile, momentpile og samlingssymboler, der illustrerer om vandret, lodret og roterende bevægelse er mulig i samlingen.
2. Opbyg et træskelet, der demonstrerer kraftprincippet i opgave 1.

3. Antag, at samlingen mellem underarmen og pontonen udsættes for *statisk* belastning i form af en vandret og lodret kraft og et væltende moment og at platformen er ubevægelig. Bestem de to reaktioner i samlingen mellem platformen og overarmen, og de to reaktioner i samlingen mellem platformen og underarmen. Bestem også normalkraften i overarmen. For at gøre dette, skal der opstilles fire ligevægtsligninger, nemlig kraftligevægt i vandret og lodret retning (1.1.1), momentligevægt  $M_{res} = 0$  og momentligevægt i samlingen mellem over- og underarmen.
4. Bestem bølgemaskinens eller pontonernes areal i  $xy$ -planen og beregn den mekaniske bølgeenergi vha. (3.3.1). Sammenlign dette med den målte energi ved forskellige bølgeamplituder.
5. For et kasseformet legeme med tværsnitsarealet  $A_k$  i  $xy$ -planen, vil den hydrostatiske opdrift være  $F_O = -sd_z$ , hvor  $s = \rho_w A_k g$  kan opfattes som en fjederstivhed. Det svarer til, at pontonen hænger i en lineær fjeder med stivheden  $s$ . Differentialligningerne (4.2.2) og (4.2.5) bliver dermed *lineære* og kan løses analytisk. Eftersis vha. (4.2.2), at når  $\eta = 0$  og pontonen udsættes for begyndelsesbetingelserne  $d_z(t_0) = d_0 - \frac{mg}{s}$  og  $d'_z(t_0) = 0$  vil dens egensvingning være  $d_z = d_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{mg}{s}$  med den cirkulære egensvingningsfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$ .
6. Løs bevægelsesligningen (4.2.2) og/eller (4.2.5) ved en numeriske metode. Brug fx Eulers metode:
  - a) Fastsat tidsskridtet  $\Delta t$ . Jo laver værdi, jo mere præcist bliver resultatet, men jo flere beregninger, skal der derimod udføres.
  - b) Fastsat den nedre og øvre grænse for tiden, henholdsvis  $t_0$  og  $t_{\max}$ .
  - c) Fastsat begyndelsespositionen  $d_z(t_0)$  og begyndelseshastigheden  $d'_z(t_0)$ .
  - d) Beregn positionen til næste tidspunkt  $d_z(t_{j+1}) \approx d_z(t_j) + \Delta t \cdot d'_z(t_j) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 d''_z(t_j)$  og hastigheden  $d'_z(t_{j+1}) \approx d'_z(t_j) + \Delta t \cdot d''_z(t_j)$ . Forskriften for accelerationen  $d''_z$  fås af (4.2.2) eller (4.2.5). Beregn det nye tidspunkt  $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ . Beregn  $\eta$ ,  $F_O$ ,  $F_D$  til dette nye tidspunkt. Gem de relevante variable, herunder positionen  $d_z(t_{j+1})$ .
  - e) Gentag forrige punkt indtil den øvre tidsgrænse er nået,  $t_{j+1} \geq t_{\max}$ .
7. Løs bevægelsesligningen (4.2.2) og (4.2.5) analytisk, hvis en analytisk løsning er mulig.

8. Observér flyderens lodrette bevægelse i et kar og i bølgebassinet med forskellige bølgeparametre. Sammenlign dette med de beregnede resultater i opgave 5-7 og redegør for evt. uoverensstemmelser.



---

# Symboler

---

Symbol	Størrelse	SI-enhed
$t$	Tidskoordinat	s
$x, y, z$	Stedkoordinater	m
$F_{res,i}$	Legemets resulterende kraft i retning $i$ , hvor $i$ er $x, y$ eller $z$	N
$a_i$	Legemets acceleration i retning $i$	m/s <sup>2</sup> eller N/kg
$m$	Legemets masse	kg
$g$	Tyngdeacceleration	m/s <sup>2</sup> eller N/kg
$F_T$	Tyngdekraft	N
$F_O$	Opdrift	N
$F_D$	Dæmperkraft	N
$T$	Tyngdepunkt	–
$O$	Opdriftscenter	–
$D$	Angrebspunkt for dæmperkraft	–
$q$	Dæmperkonstant	Ns/m
$p$	Tryk	Pa eller N/m <sup>2</sup>
$A$	Legemets nedsænkede overflade	m <sup>2</sup>
$n_z$	$z$ -komponenten af den udadrettede normalvektor på legemets nedsænkede overflade	–
$\rho_w$	Vandets densitet	kg/m <sup>3</sup>
$V_w$	Fortrængt volumen	m <sup>3</sup>
$d$	Dybgang	m
$d_z$	Opadrettet position fra middelvandspejlet til pontonnens bund	m
$\eta$	Opadrettet position fra middelvandspejlet til vandoverfladen	m
$a$	Bølgeamplitude	m
$\omega$	Cirkulær bølgefrequens	rad/s
$k$	Bølgetal/Cirkulær bølgelængde	rad/m
$T$	Bølgeperiode	s
$L$	Bølgelængde	m
$c$	Bølgens udbredelseshastighed	m/s
$h$	Vanddybde	m
$E_{mek}$	Mekanisk energi i en vandsøjle midlet over en bølgeperiode eller –længde	Nm/m <sup>2</sup>

---



