

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет  
«Дніпровська політехніка»

Факультет інформаційних технологій  
(факультет)  
Кафедра системного аналізу та управління  
(повна назва)

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА**  
кваліфікаційної роботи ступеня магістр

Студента \_\_\_\_\_ Рейс Анастасії Семенівни \_\_\_\_\_  
академічної групи \_\_\_\_\_ 124М-22-1 \_\_\_\_\_  
спеціальності \_\_\_\_\_ 124 Системний аналіз \_\_\_\_\_  
на тему: «Математичне моделювання та візуалізація оптимізаційних  
двоетапних задач екстреної логістики»

Керівники	Прізвище, ініціали	Оцінка за шкалою		Підпис
		рейтинговою	інституційною	
кваліфікаційної роботи	<i>к.т.н., доц. Желдак Т.А.</i>			
розділів:				
Інформаційно- аналітичний	<i>к.ф.-м.н., доц. Коряшкіна Л.С.</i>			
Спеціальний розділ	<i>к.ф.-м.н., доц. Коряшкіна Л.С.</i>			
Рецензент	<i>к.ф.-м.н., доц. Лебідь О. Ю.</i>			
Нормоконтролер	<i>к.ф.-м.н., доц. Хом'як Т.В.</i>			

Дніпро  
2022

ЗАТВЕРДЖЕНО:  
завідувач кафедри  
Системного аналізу та управління  
(повна назва)

\_\_\_\_\_ к.т.н., доц. Желдак Т.А.  
(підпис) (прізвище, ініціали)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

**ЗАВДАННЯ**  
**на кваліфікаційну роботу**  
**ступеня магістра**

студенту Рейс А. С. академічної групи 124м- 22-1  
спеціальності: 124 Системний аналіз  
на тему «Математичне моделювання та візуалізація оптимізаційних  
двоетапних задач екстреної логістики»  
затверджену наказом ректора НТУ «Дніпровська політехніка»  
від \_\_\_\_\_ р. №268-с

Розділ	Зміст	Терміни виконання
1. Інформаційно-аналітичний розділ	<i>Проаналізувати структуру об'єкта дослідження. Визначити предметну область дослідження та проблему, що розв'язується. Обґрунтувати методи виконання поставлених завдань</i>	
2. Спеціальний розділ	<i>Розв'язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики Розв'язати поставлені задачі: розробити алгоритми двоетапних задач екстреної логістики</i>	
3. Експериментально-аналітичний розділ	<i>Проаналізувати та надати практичні рекомендації</i>	

Завдання видано \_\_\_\_\_ доц. Желдак Т.А.  
(підпис) (прізвище, ініціали)

Дата видачі: \_\_\_\_\_ р.

Дата подання до екзаменаційної комісії: \_\_\_\_\_

Прийнято до виконання \_\_\_\_\_ Рейс А. С.  
(підпис студента) (прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка 90 с., 35 рисунків, 8 таблиць, 4 додатки, 40 джерел.

*Об'єкт дослідження:* методи та алгоритми математичного моделювання та візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

*Предмет дослідження:* математичні моделі оптимізаційної двоетапної задачі екстреної логістики.

*Мета дослідження:* моделювання та візуалізація оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

В *інформаційно-аналітичному розділі* було розглянуто існуючі методи та алгоритми, потрібні для розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття; проведено аналіз існуючих візуалізацій наукових проєктів.

В *спеціальному розділі* було створено математичне моделювання, розглянуто методи і алгоритми розв'язання задач та продемонстровано роботу цих алгоритмів на розв'язанні модельних задач.

В *експериментально-аналітичному розділі* було створено візуалізацію математичної моделі оптимізаційних двоетапних задач.

*Практична цінність* отриманих у роботі результатів полягає тому, що запропонована модель і алгоритм дозволяє одночасно знаходити місця розташування первинних пунктів збору і зони їх відповідальності, а також розподіляти зібраний ресурс між центрами першого та другого етапів з урахуванням їх місткості й мінімізації транспортних витрат.

Ключові слова: ГУМАНІТАРНА ЛОГІСТИКА, ЗОНИ ЕВАКУАЦІЇ, СИСТЕМИ АВАРІЙНОЇ ЛОГІСТИКИ, АНАЛІЗ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, НЕПЕРЕРВНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН, ДВОРІВНЕВЕ РОЗБИТТЯ, ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ, ВІЗУАЛІЗАЦІЯ.

## ABSTRACT

Explanatory note 90 p., 35 figures, 8 table, 4 appendices, 40 sources.

*Object of research:* methods and algorithms of mathematical modelling and visualisation of optimisation two-stage problems of emergency logistics.

*Subject of research:* mathematical models of the two-stage optimisation problem of emergency logistics.

*Purpose of the study:* modelling and visualisation of two-stage optimisation problems of emergency logistics.

In the information and analytical section, we reviewed the existing methods and algorithms required to solve two-stage optimal partitioning problems; we analysed existing visualisations of research projects.

*In a special section,* we created a mathematical modelling, reviewed methods and algorithms for solving problems, and demonstrated the operation of these algorithms in solving model problems.

In the *experimental and analytical section*, a visualisation of the mathematical model of two-stage optimisation problems was created. The practical value of the results obtained in this paper lies in the fact that the proposed model and algorithm allows simultaneously finding the locations of primary collection points and their areas of responsibility, as well as distributing the collected resource between the centres of the first and second stages, taking into account their capacity and minimising transport costs.

Keywords: HUMANITARIAN LOGISTICS, EVACUATION ZONES, EMERGENCY LOGISTICS SYSTEMS, ANALYSIS, MATHEMATICAL MODELLING, CONTINUOUS PROBLEM OF OPTIMAL PARTITIONING OF SETS, TWO-LEVEL PARTITIONING, SOFTWARE IMPLEMENTATION, VISUALISATION.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ .....	10
1.1 Методи та алгоритми розв’язання двоетапних задач оптимального розбиття множин .....	10
1.2 Аналіз існуючих візуалізацій наукових проєктів .....	21
1.3 Змістовна постановка завдання .....	30
1.4 Висновки до першого розділу .....	33
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ .....	35
2.1 Математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики .....	35
2.2 Методи та алгоритм розв’язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики .....	44
2.3 Розв’язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.....	54
2.4 Висновки до другого розділу .....	63
РОЗДІЛ 3. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ .....	65
3.1 Розробка потоку робіт (workflow) для візуалізації моделі .....	65
3.2 Розробка візуалізації моделі оптимізаційних двоетапних задач.....	72
3.3 Висновки до третього розділу .....	84
ВИСНОВКИ.....	86
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	89
ДОДАТОК А. ВІДОМІСТЬ МАТЕРІАЛІВ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ..	95
ДОДАТОК Б. ВІДГУК НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ МАГІСТРА .....	96
ДОДАТОК В. СПОСОБИ ОПИСУ ЩІЛЬНОСТІ НАСЕЛЕННЯ РЕГІОНУ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ .....	97
В.1 Теоретичний спосіб представлення густини населення регіону.....	97
В.2. Створення цифрової мапи щільності населення регіону .....	99
ДОДАТОК Г. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА І МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ІІ РОЗВ’ЯЗАННЯ.....	114

## ВСТУП

Від початку існування і до сьогодні людство щорічно потерпає від природньо закономірних стихійних лих. Для сейсмічно нестійких територій характерні землетруси, зсуви чи цунамі, інші несуть значні матеріальні та людські втрати від паводків, торнадо, або навпаки – надмірної спеки чи навіть виверження вулканів. Також значного впливу завдає глобалізація: аварії техногенного характеру додатково порушують ламкий баланс екосистеми, підвищуючи ризик виникнення катастроф. Свій внесок завдають надзвичайні ситуації епідеміологічного характеру, а також варто зазначити ті, що несуть соціальний вміст і можуть супроводжуватись пожежами, вибухами й іншими негативними для суспільства наслідками.

Щорічно від подібного роду надзвичайних ситуацій (НС) страждають тисячі людей. Саме через це наразі існують та активно розробляються методи та алгоритми завчасного планування, здатні мінімізувати людські втрати, якщо запобігти чи передбачити НС не є можливим, що характерно, наприклад, для територій, які знаходяться у зоні потенційного ризику.

Серед подібних методів можна виділити напрям екстреної (гуманітарної) логістики, яка оперує системами досліджень і знань, здатних допомогти раціонально організувати евакуаційні процеси, спричинені надзвичайними ситуаціями із урахуванням планування рухів матеріальних і людських потоків. Основна концепція дій даного виду логістики спрямована безпосередньо на екстрений характер заходів щодо запобігання чи ліквідації наслідків, отриманих через НС.

Значення екстреної логістики зростає зі збільшенням кількості природних катаклізмів, аварій техногенного характеру та локальних воєнних конфліктів. Однак не зважаючи на ефективність, існує певна складність щодо розповсюдження використання даних моделей, обумовлена відсутністю уніфікованого способу пояснення та передачі їх концепцій для подальшої розробки та фінансування, що була б в достатній мірі зрозумілою для

широкого загалу людей, не причетних до науки. Такої проблеми можна запобігти або уникнути, здійснюючи візуалізацію або анімацію, за допомогою яких стає можливим більш детально проінформувати органи місцевої влади (відповідальні особи) щодо наявності готових рішень, які передбачають залучення певних спеціалістів до подальшого процесу розробки моделі та її впровадження в рамках соціального проєкту захисту населення.

Саме тому математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики та розробка її візуалізації в рамках презентації набуває подвійної актуальності.

Як інструменти дослідження в даній кваліфікаційній роботі були використані наступні методи: спостереження, узагальнення, аналізу, синтезу, гіпотетичний, емпіричного рівня, експериментально-теоретичного рівня, моделювання та режисерського бачення.

Метою роботи є моделювання та візуалізація оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

Об'єктом дослідження є методи та алгоритми математичного моделювання та візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

Предметом дослідження є математичні моделі оптимізаційної двоетапної задачі екстреної логістики.

Для досягнення поставленої мети в ході виконання кваліфікаційної роботи було необхідно вирішити наступні завдання:

1. Проаналізувати методи та алгоритми, що використовуються для розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття множин в рамках екстреної (гуманітарної) логістики.

2. Розробити змістовну постановку поставленої задачі. Створити математичну модель оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики згідно постановки завдання.

3. Розглянути методи та алгоритми, потрібні для розв'язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

4. Скласти потік робіт (workflow) та план реалізації задуманої ідеї.

5. За допомогою програмного застосунку розв'язати створену згідно розробленого раніше алгоритму математичну модель для різних вихідних даних.

6. Створити візуалізацію процесу побудови математичної моделі оптимізаційної двоетапної задачі екстреної логістики.

В результаті виконання завдань кваліфікаційної роботи бакалавра можна підтвердити наступні програмні результати, що відповідають освітній програмі 124 «Системний аналіз та управління»:

ПР01 – аналіз, цілеспрямований пошук і вибір необхідних для вирішення професійних завдань інформаційно-довідникових ресурсів і знань з урахуванням сучасних досягнень науки і техніки;

ПР03 – знання основних процесів, фаз та ітерацій життєвого циклу програмного забезпечення;

ПР06 – уміння вибирати та використовувати відповідну задачі методологію створення програмного забезпечення;

ПР09 – знати та вміти використовувати методи та засоби збору, формулювання та аналізу вимог до програмного забезпечення;

ПР11 – вибір вихідних даних для проектування, керуючись формальними методами опису вимог та моделювання;

ПР14 – застосовувати на практиці інструментальні програмні засоби доменного аналізу, проектування, тестування, візуалізації, вимірювань та документування програмного забезпечення;

ПР23 – вміння документувати та презентувати результати розробки програмного забезпечення.

Структура кваліфікаційної роботи магістра складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел у кількості 40 посилань, 90 сторінок, містить 35 рисунків та 8 таблиць.





## РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

### 1.1 Методи та алгоритми розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття множин

Виділимо в гуманітарній логістиці систему досліджень і знань, пов'язаних з питаннями раціональної організації евакуаційних процесів, розподілу матеріальних або людських потоків під час евакуації, і будемо називати цей напрям наукових досліджень екстреною логістикою з оглядом на екстрений характер більшості дій і заходів щодо запобігання або ліквідації наслідків від стихійних лих або техногенних аварій.

У прикладному значенні екстрену логістику будемо сприймати як інтегрований процес, покликаний сприяти зменшенню кількості та масштабів катастроф за рахунок профілактики, раннього попередження, мінімізації сумарних втрат, загальних транспортних і організаційних витрат, наслідків від надзвичайної ситуації. Значення екстреної логістики зростає зі збільшенням кількості природних катаклізмів та локальних воєнних конфліктів, які супроводжуються пожежами, вибухами, затопленнями й іншими негативними наслідками, завдають суспільству суттєві матеріальні та соціальні збитки; із зростанням ризику виникнення аварійних ситуацій за рахунок зношуваності основних фондів об'єктів інфраструктури або недостатнього рівня їх фізичного захисту.

Екстрена логістика відіграє важливу роль у наданні допомоги у надзвичайних ситуаціях (стихійних лихах, техногенних катастрофах тощо) із кількох причин.

По-перше, вона робить величезний внесок у пом'якшення негативного впливу НС з погляду людських жертв та економічних витрат, таких як:

- втрати будівель, магістралей та іншої інфраструктури;

- зниження обсягів виробництва та скорочення зайнятості та податкових надходжень;

- збитки через подорожчання витратних та будівельних матеріалів;
- втрати тисяч життів через брак їжі чи внаслідок нещасних випадків.

По-друге, гуманітарна, а отже, й екстрена логістика вважається сховищем даних, які можна аналізувати, аби забезпечити навчання після події. Логістичні дані відображають усі аспекти руху матеріальних або людських ресурсів від ефективності постачальників та агентів транспортних послуг до вартості та своєчасності реагування, доречності наданих послуг та управління інформацією. А це є критично важливим для виконання як поточних, так і майбутніх рятувальних операцій та програм. Складання планів реагування на випадок надзвичайних ситуацій допоможе у підготовці та мобілізації ресурсів під час НС.

Концепція екстреної логістики полягає у реалізації принципу системного підходу під час вирішення логістичних задач в умовах НС, прийнятті рішень на основі часових і економічних компромісів; обліку матеріальних і часових витрат протягом усього логістичного ланцюга. Системний підхід передбачає дослідження об'єктів і явищ, що так чи інакше пов'язані із надзвичайною ситуацією, як цілісних логістичних систем на двох рівнях. На макрорівні логістична система розглядається як єдине ціле, встановлюються її межі та зовнішні зв'язки; передбачається оцінка та аналіз логістичної системи ззовні. На мікрорівні вивчаються її складові елементи, їх властивості, взаємозв'язки.

Комплексний аналіз внутрішніх і зовнішніх факторів системи – їх природи, взаємного впливу, можливих ризиків тощо – дає змогу виявити нові якості системи (що притаманні системі в цілому, а не окремим її складовим), і, враховуючи їх, розробити цілісний підхід для досягнення загальної мети логістичної системи. При розробці методів і алгоритмів розв'язання задач екстреної логістики особлива увага приділяється початковим умовам, можливостям і обмеженням, що існують як на макро-, так і на мікрорівні.

Рішення щодо транспортування людей за межі зони надзвичайної ситуації, збору і доставки гуманітарної допомоги, проведення інших заходів мають прийматися з урахуванням доступності та місткості транспортних засобів, часових (фінансових) витрат на перевезення людей і матеріальних ресурсів, особливостей інфраструктури зони надзвичайної ситуації тощо.

Сукупність форм, методів і правил організації та управління матеріальними або людськими потоками під час надзвичайних ситуацій формують систему екстреної логістики (СЕЛ). Вона включає підсистеми трьох рівнів: елементного – які забезпечують узгоджене та ефективне функціонування основних ланок логістичного ланцюга (первинні пункти збору, склади, аварійні служби та транспорт); функціонального – що відповідають за організацію матеріальних або людських потоків, управління заготівками, організація правового та інформаційного забезпечення логістичних рішень; інтеграційного – котрі об'єднують усі групи операцій у єдиний процес.

Відтак, оптимальність і ефективність прийнятих рішень в умовах екстреної ситуації визначається повнотою виявлених обмежень в рамках логістичної системи і економічними компромісами, затвердженими з урахуванням цих обмежень.

Оскільки екстрена логістика передбачає оптимальне керування матеріальними та людськими потоками в умовах надзвичайних ситуацій, вона виконує три функції: інтегруючу (формування процесу руху ресурсу або людських потоків як єдиної цілісної системи); організуючу (забезпечення взаємодії та узгодження дій учасників руху матеріальних ресурсів або населення); керуючу (підтримка параметрів логістичної системи в заданих межах).

Відтак, головними задачами екстреної логістики є:

1. Швидкість реакції. У надзвичайних ситуаціях кожна хвилина має значення. Екстрена логістика передбачає швидке реагування на події, оцінку ситуації та активізацію відповідних ресурсів.

2. Координація. Ефективна екстрена логістика вимагає добре організованої співпраці між різними організаціями, структурами влади, групами волонтерів та іншими сторонами, що надають допомогу.

3. Оцінка потреб. Гуманітарна криза породжує різноманітні потреби – медична допомога, продовольство, притулок, вода тощо. Екстрена логістика включає в себе оцінку цих потреб і забезпечення відповідних ресурсів.

4. Транспортування та розподіл. Швидка та безпечна доставка гуманітарної допомоги на місце призначення або евакуація населення з території НС – ключові задачі, які можуть передбачати, у свою чергу, організацію повітряних мостів, використання вантажних літаків та інших засобів транспорту.

5. Управління інформацією. В екстрених ситуаціях дуже важливо мати актуальну та достовірну інформацію про розмір, характер та місцезнаходження кризи. Сучасні інформаційні системи, у тому числі ГІС-технології) допомагають координувати зусилля та приймати обґрунтовані рішення.

6. Безпека. Умови екстреної ситуації найчастіше є небезпечними для постраждалого населення, гуманітарних працівників та рятувальних груп. Екстрена логістика передбачає заходи щодо захисту їх життя та здоров'я.

7. Відновлення. Після надзвичайної ситуації екстрена логістика також включає відновлювальні заходи, спрямовані на відновлення інфраструктури та нормального функціонування суспільства.

Планування екстреної допомоги й евакуації є важливим і складним елементом управління надзвичайними ситуаціями через високий рівень невизначеності та численних гравців та агенцій, залучених до події. Для обґрунтування управлінських рішень, що враховують багато факторів, а під час, і суперечливі цілі, широкого застосування набуло математичне моделювання. Математичні постановки та методи розв'язання задач оптимізації поточкових систем, зокрема систем екстреної логістики, дозволяють особам, які здійснюють реагування, та політикам визначати

необхідний час для евакуації, оцінювати кількість і розподіл можливих жертв за різних сценаріїв НС. Звісно, вибір конкретної сукупності заходів визначається оцінкою всіх загроз, необхідною швидкістю реагування, географічним розташуванням, специфікою інфраструктури в зоні потенційної загрози або лиха. Комплекс усіх дій для евакуації населення може мати запобіжний чи екстрений характер (якщо загроза надзвичайних обставин лише прогнозується, евакуація населення проводиться із запобіганням).

Далі наведено огляд наукових публікацій, пов'язаних з розробкою математичних моделей і методів розв'язання оптимізаційних задач, що виникають під час розробки комплексу запобіжних заходів щодо евакуації населення та надання екстреної допомоги у разі надзвичайних ситуацій.

На сьогодні в науковій літературі запропонована чимала кількість моделей задач раціонального територіального розподілу елементів систем цивільного захисту. Широко представлені дослідження евакуаційних процесів з використанням моделей і методів математичного програмування [1, 2]. Серед них є моделі розміщення-розподілу для складання планів евакуації під час ураганів або землетрусів [3, 4], пошуку оптимальних маршрутів евакуації і місць укриття у випадках міських надзвичайних ситуацій [5], умисних дій чи стихійних лих в замкнених просторах (стадіонах, музеях, конференц-залах або торговельних центрах) [6, 7].

Одним з найбільш значущих напрямків наукових досліджень в галузі безпеки життєдіяльності є гуманітарна логістика (ГЛ), мета якої – вивчення проблем, пов'язаних з можливими катастрофами або надзвичайними ситуаціями, розробка операцій щодо усунення цих проблем і управління ситуацією. Моделі і технології, які використовуються в гуманітарній логістиці, розглянуто в [8]. В [9] наведено систематичний огляд наукових робіт, опублікованих між 2000 і 2020 роками, в котрих з різних сторін вивчаються проблеми ГЛ, на етапах до та після катастрофи, можливі людські і економічні втрати. Тут запропоновано кілька математичних моделей і алгоритмів для підвищення ефективності логістичних операцій. При цьому

автори класифікують оптимізаційні задачі, поділяючи їх на три групи відповідно до основної досліджуваної проблеми:

1. Розташування об'єктів і задачі оптимального покриття.
2. Мережеві моделі та задачі транспортування і розподілу.
3. Масова евакуація населення, яка в свою чергу вивчається з точки зору урядової і приватної організації. Кожна з класифікованих областей включає як детерміновані, так і недетерміновані моделі.

Значна частина існуючих моделей носить стохастичний характер [10, 11]. Двоетапну стохастичну модель планування евакуації, яка передбачає оптимальне розташування місць укриття та призначення евакуйованих до найближчого з них з мінімізацією очікуваного загального часу евакуації, розглянуто в [12].

У роботі [13] запропонована модель оптимізації з обмеженими шансами для проблеми розташування притулку за умов невизначеності попиту. На основі центральної граничної теореми авторами побудовано нелінійну детерміновану еквівалентну модель, яку далі зведено до змішаної цілочисельної задачі лінійного програмування з максимінним критерієм якості, апроксимуючи нелінійні члени кусково-лінійними функціями.

В роботі вирішено практичну проблему розташування місця укриття, використовуючи дані з району Картал і з усієї анатолійської сторони Стамбула, Туреччина. Отримавши за різних комбінацій параметрів різні розв'язки оптимізаційних задач, автори наголошують на важливості врахування таких аспектів, як коефіцієнт використання житла, рівень надання послуг, попит.

Зазвичай в районах, схильних до стихійного явища, організації, що беруть участь в операціях з ліквідації наслідків лиха, заздалегідь передбачають певні ресурси. Та іноді через високу інтенсивність руйнувань звертаються до іншої національної чи міжнародної допомоги. Для того, щоб врахувати невизначеність і складний характер катастрофи непередбачуваного явища, під час математичного моделювання задач гуманітарної логістики

використовують елементи нечітких множин і нечіткої логіки [14, 15]. Так, в [15] розроблена двокритеріальна модель оптимізації, в якій деякі параметри розглядаються як трикутні нейтронофізичні числа. Реалізація моделі здійснена з використанням компромісного підходу, методів головних критеріїв та зваженої суми за допомогою оптимізаційного розв'язувача LINGO для відповідних обчислень.

Розв'язуванню задачі оптимізації, з точки зору захисту навколишнього середовища, системи аварійного матеріально-технічного забезпечення присвячено роботу [16]. Тут розроблена нечітка модель логістики з багатоцільовою функцією, яка включає мінімальний час доставки, загальні витрати, а також викиди вуглецю. Запропонований гібридний двоступеневий алгоритм розв'язання задачі з поєднанням рою частинок і пошуку табу.

Завчасне планування зон запобіжних заходів та аварійних процедур на територіях потенційного лиха надзвичайно важливий етап, від якого напряду залежить ефективність боротьби з наслідками НС.

Останнім часом багато наукових досліджень присвячено питанням завчасного зонування територій, що можуть постраждати у разі потенційного стихійного лиха або техногенної катастрофи. Важливість запобіжних заходів та процедур не викликає сумнівів.

Так, в [17] запропоновані два підходи щодо організації завчасного планування зон запобіжних заходів й аварійних процедур на територіях потенційного радіаційного впливу об'єктів використання атомної енергії в умовах радіаційної аварії. Один з них передбачає розбиття регіону на зони планування у відповідності з адміністративним його поділом, другий – розбиття на менші підрегіони, об'єднані в кластери із застосуванням математичних методів районування. Результати моделювання зон аварійного планування і рекомендованих границь реалізації захисних заходів з використанням даних щодо території й радіаційної обстановки для префектури Фукусіма свідчать про дієвість підходу щодо попереднього планування таких зон. Рішення про границі зон приймається на основі



розподілу очікуваної дози випромінювання для населення на забрудненій території. Ефективною складовою підходу є оптимізація автоматизованих алгоритмів розбиття територій на кластери з урахуванням відстані до потенційного об'єкта випромінювання й щільності населення, а також пошук оптимальних розмірів кластерів і діапазонів значень доз випромінювання, що дозволяють мінімізувати число мешканців, відносно яких необґрунтовано можуть бути заподіяні заходи евакуації або ж відселення.

В роботі [18] представлено двоетапну математичну модель для покращення умов після землетрусу. На першому етапі досліджуються місця розміщення притулків для первинного розміщення людей, розташування складів першої медичної допомоги, а також відстані, які проходять люди від кризових районів до укриття у разі землетрусу. На другому етапі вивчається полегшення та покриття потреб після розміщення людей у притулках. У розробленому програмному забезпеченні розв'язується отримана модель цілочисельного лінійного програмування.

Створенню системи екстреної допомоги, орієнтованої на людину, присвячено роботу [19]. В ній автори вводять вартість сприйняття болю постраждалими, і, за рахунок конструювання моделі спільної взаємодії держава-підприємство, а також розміщення-розподілення аварійних матеріалів, намагаються досягти найнижчої вартості усієї аварійно-рятувальної системи.

У роботі [20] розглядається дворівнева стохастична задача розміщення укриття з використанням сценарного підходу щодо невизначеної кількості населення, яку потрібно евакуювати з невеликого містечка в регіоні Ломбардія, Італія. Як метод розв'язання використовується генетичний алгоритм. Розглянуто чотири сценарії для вивчення оптимальної кількості та розташування укриття для евакуації у звичайні будні, нічні, вихідні та під час відпустки з приїжджими мандрівниками. Продемонстровано, що різні сценарії потребують різної кількості та місць розташування захисних споруд для оптимальної евакуації.

Автори [21] також зазначають, що правильне розташування аварійного на випадок землетрусу укриття може ефективно зменшити кількість жертв серед мешканців постраждалого регіону, забезпечуючи безпечні притулки та ефективні шляхи евакуації під час хаотичного періоду катастрофи. Різні строгі обмеження та дискретна допустима область моделей ускладнюють вирішення проблеми розміщення-розподілу. В роботі розроблено моделі задач мінімізації загального зваженого часу евакуації з житлових районів до певного укриття та мінімізації загальної площі всіх притулків з обмеженнями на їх місткість та радіус обслуговування.

Роботу [22] зосереджено на моделі розташування вертольотних баз на островах Егейського моря. Острівні регіони відіграють важливу роль у Східному Середземномор'ї, здебільшого через їх географічні, екологічні, соціальні та економічні особливості. Грецькі острови є привабливими туристичними напрямками з різним постійним населенням як для острова, так і для сезону. В статті аналізується просторовий розподіл національних засобів аероевакуації, таких як вертольоти, для того, щоб наголосити на необхідності організації децентралізованих служб екстреної евакуації. Авторами доведено, що просторова аналітика особливо корисна для прийняття обґрунтованих рішень в районах з динамічною сезонністю населення протягом року.

Для вирішення питання розміщення укриття від землетрусу в [23] розроблена багатоцільова, ієрархічна математична модель, яку реалізовано за допомогою алгоритму оптимізації рою частинок із перемещуванням і генетичним алгоритмом. З усіх можливих місць для притулку-кандидата спочатку модель визначає, які з них мають виконувати роль аварійного укриття, а потім, котрі слід використовувати як довгостроково, одночасно оптимізуючи розміщення в них населення. З точки зору етапів моделювання аварійного та довгострокового укриття, цілями вважають мінімізацію загального зваженого часу евакуації та найменшу загальну використовувану

площу укриття. Виходячи з уподобань уряду, можна зробити вибір щодо місць для будівництва притулків і способів розподілу за ними населення.

В роботі [24] представлено підхід щодо визначення положень множини точок, які забезпечують заданий коефіцієнт досяжності для заданої точкової множини на площині. Проблему розташування точок часто розглядають як задачу визначення видимості [25], або під час моделювання людських потоків [26], визначення деякої множини оглядових точок на поверхні, що спостерігається [27] та ін.

Екстрена евакуація зазвичай носить динамічний характер, оскільки інтенсивність і наслідки надзвичайної ситуації можуть змінюватися з часом. Більш того, поведінка трафіку під час аварійних ситуацій може бути непередбачуваною, що обумовлюватиме необхідність обробки динамічної ситуації, наприклад, паніки, зближення (дорожні загородження), нездатність відреагувати на евакуацію попередження тощо. Важливо спланувати альтернативні стратегії евакуації чи плани заздалегідь. В [28] досліджено проблему динамічного планування маршруту евакуації, коли швидкість її потоку може змінюватися з часом протягом горизонту планування через несподівані інциденти, приміром: дороги можуть бути недоступні через повені, поширення лісових пожеж, аварії, обвалення конструкцій автомагістралі та ін. Автори запропонували підхід зміни маршруту для мережі евакуації, яка зазнає перебоїв на дорозі, причому на кількох дорогах і в різні моменти часу. Попередня обробка даних для розрахунку параметрів, пов'язаних із порушеннями на дорозі та топологією мережі евакуації, дозволила перетворити вихідну оптимізаційну модель на лінійну і зменшити обчислювальне навантаження.

Під час типової евакуації деякі автомобілі повинні евакуюватися швидше за інші, наприклад, аварійні або великі, які транспортують набагато більше людей. Тому в [29] на основі отриманого в [30] рішення Парето розроблено модель, яка враховує пріоритетну маршрутизацію під час НС з мінімальною вартістю та максимальною кількістю перевезеного населення.

При загальній евакуації, як зазначено в [9], всі пішоходи стікаються до виходу одночасно, і евакуаційна здатність проходу стає неспроможною витримати це навантаження, що призводить до виникнення заторів у проході. Чим довшим є час затору, тим більший ризик витоптування. У процесі евакуації через перегородку натовп ділиться на кілька частин, а час скупчення змінюється на час очікування для усунення потенційних небезпек. Коли починається евакуація натовпу, група пішоходів, найближчих до виходу, спочатку починає втікати з місця стихійного лиха, а решті потрібно залишатися там, де вони є. Усі групи пішоходів евакуюються по черзі. Автори [9] вивчають, чи можлива впорядкована евакуація через перегородку в критичних умовах, коли немає великої різниці між впорядкованим часом евакуації та часом безладної евакуації.

Аби безпечно та швидко евакуювати людей у закритому середовищі стихійного лиха, необхідно оцінити поточне місцезнаходження людей, виявити ситуації лиха, передбачити його поширення, визначити оптимальні індивідуальні шляхи евакуації та запровадити зручну й інтуїтивно зрозумілу систему навігації. В роботі [31] розроблено навігаційну систему внутрішньої доповненої реальності на основі машинного навчання та систему екстреної евакуації, яка може вказувати оптимальний шлях евакуації для окремих користувачів. Для виявлення екстрених подій і доставки даних зондування розглянуто спеціальну мережу з підтримкою Інтернету речей. Розташування людей оцінюється глибокою нейронною мережею за допомогою потужності отриманого сигналу від вузлів-маяків. Визначення оптимального шляху евакуації для кожної людини здійснюється за допомогою запропонованого методу Q-навчання на основі інформації про конструкцію будівлі і контекст катастрофи. Продуктивність запропонованої системи експериментально оцінена для різних сценаріїв катастроф.

Автори [32] вивчають евакуації натовпу пішоходів, розроблюючи імітаційну модель на основі різних методів штучного інтелекту. Завдяки вибору найкращого розташування дверей серед багатьох запропонованих

місце, модель і метод її реалізації дозволяють знайти дизайн зони евакуації, більш відповідний щодо безпеки.

Цей метод передбачає оцінку середнього часу евакуації людей з кожного місця їх розташування до дверей виходу, а потім вирішує, яке розташування вихідних дверей серед багатьох запропонованих місць буде найкращим для евакуації потерпілих. Для перевірки методики розроблено різні проекти зони евакуації з використанням різних сценаріїв.

## 1.2 Аналіз існуючих візуалізацій наукових проектів

На сьогоднішній день існує багато перешкод, пов'язаних із взаємодією концептуально різних сфер діяльності людства, які в значній мірі погіршують комунікацію спеціалістів різного типу навичок та складу інтелекту, заважаючи продуктивній праці в команді.

Особливого значення дана проблема набуває при комунікаційній роботі над великими проектами, де одночасно буває залучено різні за спеціальностями команди чи департаменти. Як приклад можна навести машино- чи ракетобудування, управління великими корпораціями чи навіть розробка певного проєкту в рамках ІТ компанії.

Ці проблеми також стосуються спілкування світу науки із людьми, не причетними до неї. Саме через це великою популярністю користується науково-популярна література, здатна передати складні поняття простою мовою, зрозумілою для більшості людей.

У рамках екстреної (гуманітарної) логістики значних ускладнень завдає важка для сприйняття та мало візуальна мова моделювання та подальших обчислень, що залучає велику кількість суто математичних пояснень, зрозумілу лише математикам.

Саме це стає завадою для поширення та використання даних моделей не зважаючи на їх можливість одночасного опрацювання і залучення великої кількості критеріїв та факторів, з якими стикається людина під час НС.

Наразі існує велика кількість сайтів спрямування яких зосереджено на вижимках із наукових робіт у вигляді науково-популярних статей, редактори яких спираються на реально існуючі дослідження різних напрямків науки.

Також не варто недооцінювати такі платформи як You Tube, завдяки яким стає можливим перегляд конференцій робототехніки, математики, фізики з усього світу, великої кількості навчальних записів, можливість слідкувати за експериментальними розробками, тощо, для будь-якої людини із телефоном, планшетом чи комп'ютером за наявності доступу в інтернет.

Серед контенту даної платформи можна зазначити нішу, присвячену людям науки, що залучають до неї глядачів через розважальний контекст та легку для розуміння, візуальну подачу відеороликів.

Під час процесу дослідження шляху створення візуалізації моделі оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики, одним із варіантів-аналогів було розглянуто відео каналу @PRIMER.

Його засновник – чоловік, що розповідає про складні соціальні, економічні, еволюційні моделі поведінки на прикладі симуляцій комунікації розроблених ним персонажів. В описі його каналу написано: «Намагаюсь донести глибині ідеї академічних предметів».

Вигляд його каналу наведено на рисунку 1.1.

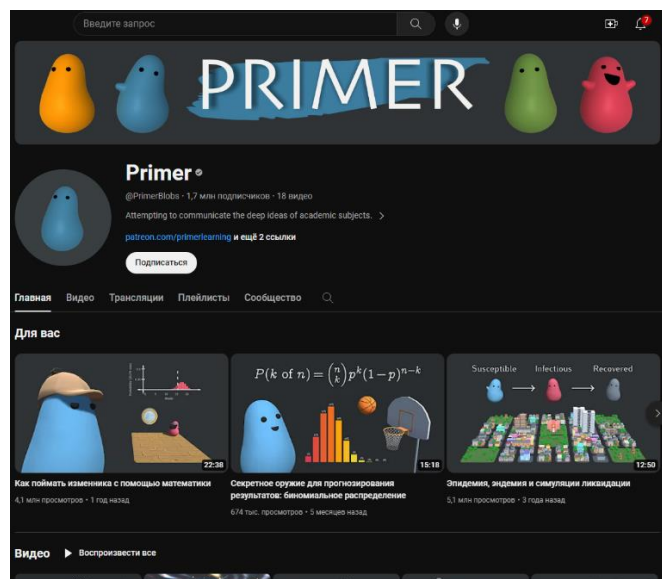


Рисунок 1.1 – Скріншот науково-популярного You Tube каналу @PRIMER

Проаналізувавши його відео, до висновку було прийнято те, що майже кожне із них складається із:

- героя на ім'я Влор, який потрапляє у ситуацію теми відеоролика;
- звукового запису дикторського голосу;
- математичної моделі, що поступово розвивається, ускладнюючись певними умовами та обмеженнями;
- музичного супроводження;
- симуляції та анімації об'єктів на сцені, які діють згідно правилам обраної автором моделі поведінки та можливостей, обмежень чи здібностей середі і персонажів;
- висновків на кожному етапі ускладнення моделі;
- програмних розрахунків;
- анімованої або статичної інфографіки;
- декількох рівнів складності подачі інформації: від словесного опису до представлення формул та диференційних систем рівнянь;
- загальних висновків та проєкції моделі на реальне життя;
- тривалості серії від 5 до 20-30 хвилин;
- можливого продовження, розвитку чи ускладнення теми відеоролику у наступній серії.

Також варто зазначити, що запуск та керування анімаційною симуляцією здійснюється за допомогою ігрового рушія Unity та програмування на C#.

Для створення подібного відеоролику ним було розроблено:

- 3D моделі оточення та персонажів, їх анімації;
- програмна реалізація моделі на мові C#;
- запрограмований на рівні ігрового рушія (Unity) зв'язок між обчисленими на програмному рівні результатами та запуском і розвитком згідно отриманих результатів симуляцій поведінки та анімацій об'єктів на сцені;
- сценарій та порядок дій відеоряду;

- монтаж відзнятих симуляцій;
- анімація інфографіки;
- звуковий ряд озвучування власного голосу.

Для кращого розуміння його підходу було проаналізовано скріншоти із інших відео автора, що представлені на рисунках 1.2-1.4 [33, 34, 35].

На рисунку 1.2 з лівої сторони представлений графік залежності часу, потрібного для збору певного типу ресурсу до їх зібраної кількості, який також відомий як граничний графік всіх можливих варіантів.

Справа знаходиться симуляція виду зверху, на якій представлений синій персонаж Wlop, певна територія та дерева на ній, з яких персонаж добуває ресурси згідно умов моделі задачі, що описується.

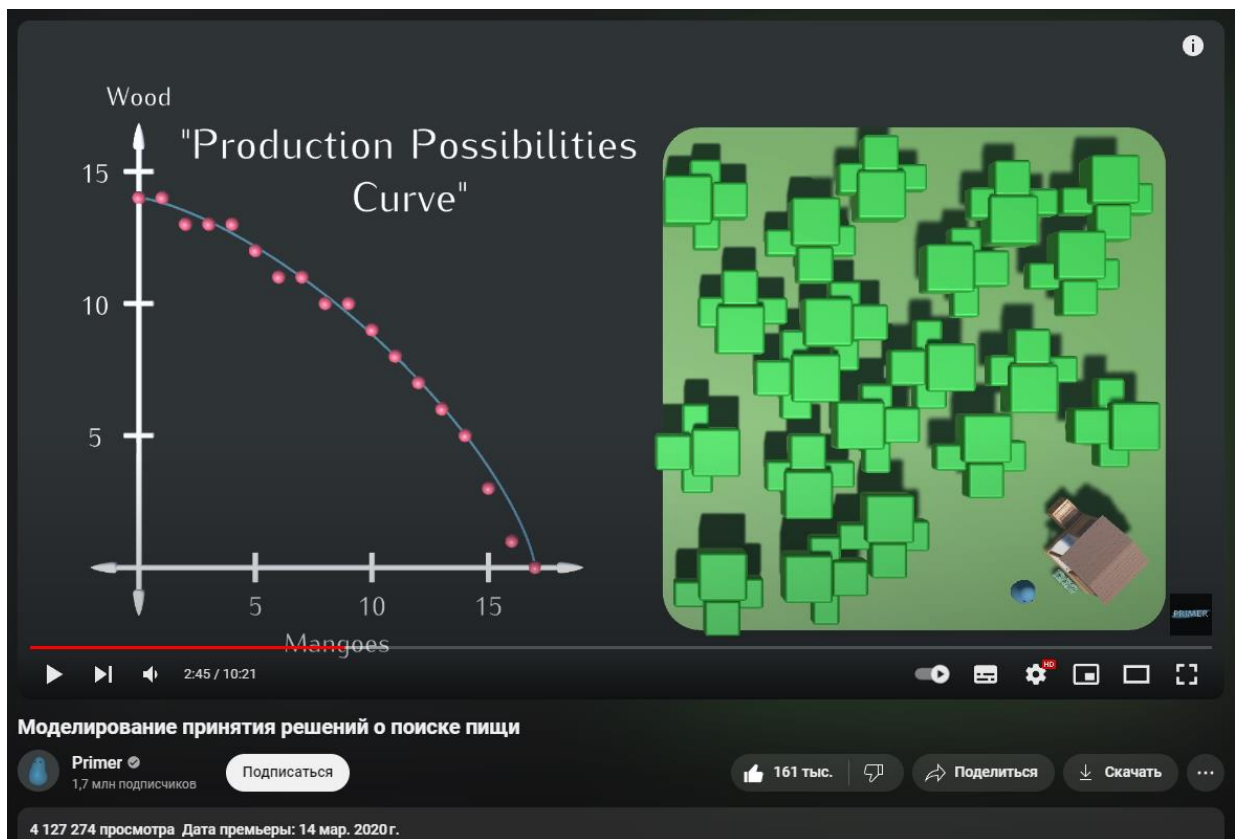


Рисунок 1.2 – Скріншот із відеоролика про пошук їжі каналу @PRIMER

Даний рисунок, а також усі інші сцени із відеороликів, тематично чи концептуально схожі між собою, ілюструють стиль подачі інформації схожого графічного виду.



Для даних сцен характерно:

- запуск анімаційної симуляції паралельний із записом даних до графіку, що розглядається;
- під час відтворення симуляції автор озвучує математичні, концептуальні чи описові пояснення;
- фон завжди залишається однотонним і не відволікає глядача;
- усім об'єктам притаманні прості повторювані анімації;
- усі об'єкти стилістично мінімалістичні та крупних розмірів;
- при закінченні симуляції автор описує результати та робить висновки.

На рисунку 1.3 [34] зображено скріншот із іншого відеоролика автора каналу PRIMER, який концептуально схожий із тим, що було попередньо розглянуто (рисунок 1.2), проте має певні відмінності: зміна масштабів елементів інфографіки відносно персонажів.

Отже, значущість анімації наразі має більше значення за дані, що записуються під час відтворення.



Рисунок 1.3 – Скріншот із відеоролика про альтруїзм каналу PRIMER

На рисунку 1.4 [35] зображено скріншот із відеоролика про знаходження зрадника завдяки математичному моделюванню та арифметичним розрахункам.

Даний скріншот має схожості із попередньо проаналізованими на рисунку 1.2 та 1.3. Серед відмінностей було зазначено різність масштабів блоків із анімацією та інфографікою, а також додано блок із розрахунками.

The screenshot displays a probability tree for a 'Fair Coin' starting from a root node. The tree branches out three times, with each branch labeled '50%'. The final level of the tree shows 8 possible outcomes, represented by combinations of blue and gold coins. Below the tree, a blue character stands on a wooden platform. To the right, a mathematical calculation is shown:

$$P(\text{coin} \times 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12.5\%$$

The video player interface at the bottom shows the title 'Как поймать изменника с помощью математики', the channel name 'Primer' with 1.7 million subscribers, and engagement metrics: 146 thousand likes, 4.1 million views, and 1 year ago.

Рисунок 1.4 – Скріншот із відео про пошук зрадника каналу @PRIMER

Як висновок щодо проведеного аналізу прийнято наступні тези:

- відео високої якості, починаючи від звуку озвучування, закінчуючи математичними обчисленнями та рівнем подачі;
- гумор та комічність персонажів сприяють кращому розумінню та засвоєнню матеріалу;
- пояснення максимально прості з урахуванням максимізації інформативності кожної сцени;

– дані відео науково-популярного характеру.

Проте, не зважаючи на усі плюси, даний вид візуалізації математичних моделей не підходить для реалізації візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики, оскільки:

- надміру складний для реалізації;
- не зважаючи на простоту, рівень поданої інформації не підходить для перегляду для широкої аудиторії людей;
- зацікавлює математичними рішеннями, а не концепцією самої моделі;
- не є гарним варіантом наслідування для презентації моделі, оскільки занадто в неї поглиблюється;
- надміру довгий, що ускладнює утримання уваги не дуже зацікавленого глядача;
- відсутня гіперболізована динаміка, характерна для швидких коротких відеороликів (до 3-5 хвилин);
- даний підхід подачі розрахований на зацікавлення аудиторії наукою, аніж для презентації самої моделі, що суперечить меті даної кваліфікаційної роботи.

Надалі розглянуто приклади таких каналів площадки You Tube, як @3blue1brown, та @BostonDynamics.

На рисунках 1.5-1.6 [36, 37] зображено скріншоти із різних коротких відео (shorts) автора @3blue1brown. Провівши їх аналіз, стиль подачі можна узагальнити наступними тезами:

- короткі відео (shorts) доволі динамічні і утримують погляд глядача;
- в деяких відео фігурує повторюваний персонаж у вигляді впізнаваного символу  $\pi$  (рис. 1.5);
- озвучування відбувається спокійним тихим тоном, підтримуючи змістовний зв'язок із анімаціями;
- майже на кожному відео грає тиха заспокійлива музика;
- фон однотонний, контрастний до об'єктів на сцені, не відволікає;

- озвучуваний текст дублюється змонтованими субтитрами внизу відео для можливості перегляду без звуку;
- орієнтація відео вертикального формату, розраховане на телефон;
- глядача залучають до перегляду повноцінного відео;

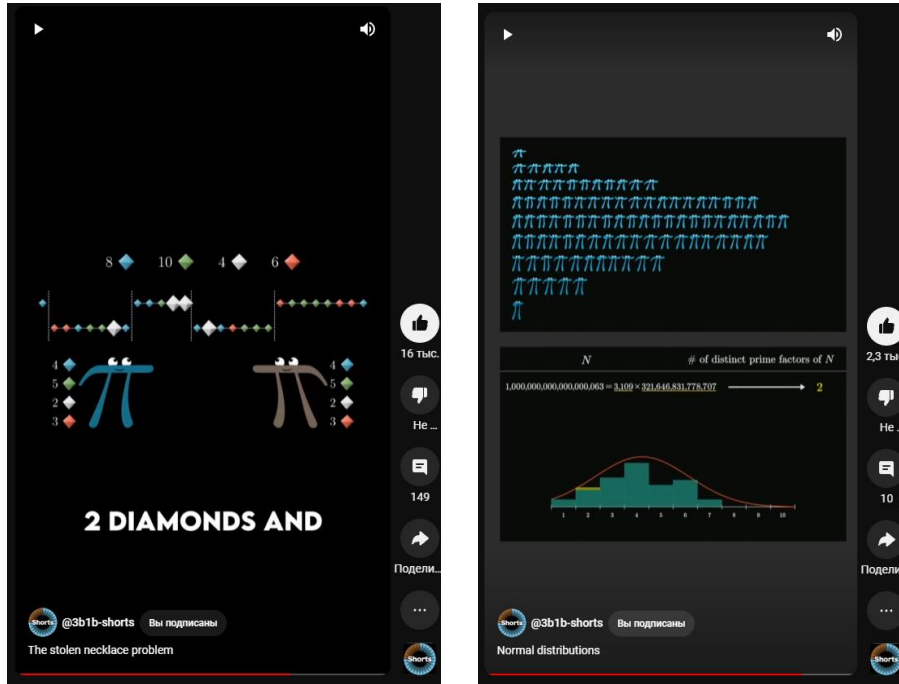


Рисунок 1.5 – Скріншоти з персонажем із відеороликів автора каналу @3blue1brown

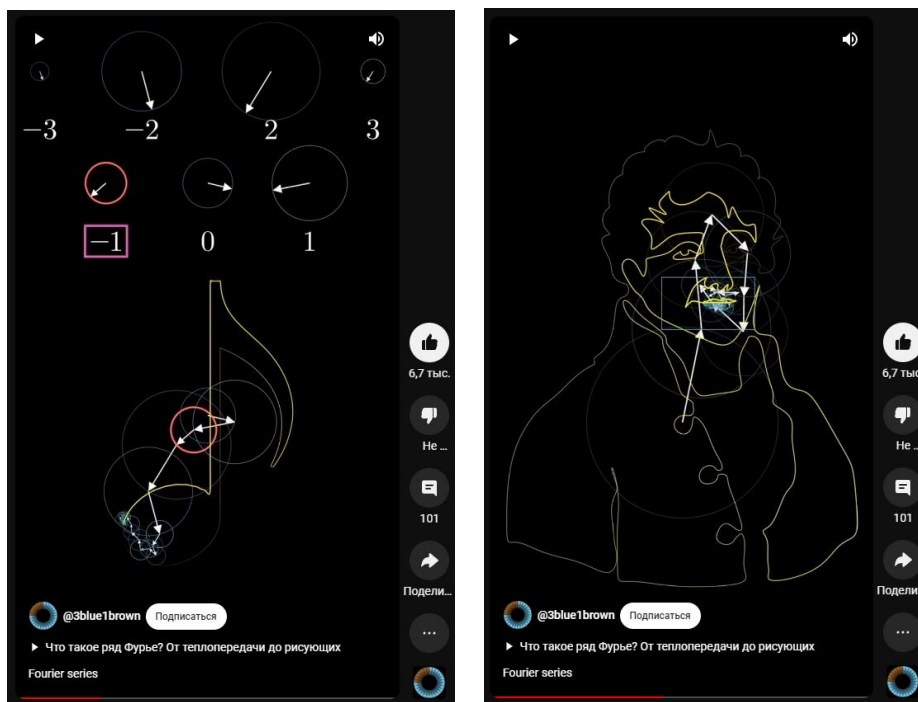


Рисунок 1.6 – Скріншоти з персонажем із відеороликів автора каналу  
@3blue1brown

Відео авторства @3blue1brown викликає приємні враження та зацікавлює, однак даний підхід не є доцільним для досягнення поставленої мети даної кваліфікаційної роботи магістра.

В даному контексті за недолік можна вважати надмірну мінімалістичність об'єктів, яка доречна для пояснення науки в інформативному ключі, але не в розважальних цілях напряду та потребу замислюватись і думати при перегляді, що суперечить поставленим, легким для сприйняття глядача, цілям.

Як висновок, із відео каналу @3blue1brown варто наслідувати динамічний стиль подачі, який був відсутній у роботах автора каналу @PRIMER. Водночас варто відмовитись від надмірної мінімалістичності та наблизитись до більш ілюстративної стилістики.

Наступними до аналізу підлягають короткі відео каналу @BostonDynamics. Скріншоти деяких із них наведено на рисунку 1.7 [38, 39].

На відміну від попередніх авторів, спрямування даного каналу націлене в більшій мірі на маркетинг, аніж науку в глибокому її сенсі або за мети навчання.

Дані відео не носять ілюстративний характер, проте є гарним прикладом презентації наукового проекту, що показує його результати без заглиблення в технічні, інженерні, тестувальні, експериментальні та програмні тонкощі, що, в свою чергу, є відмінним від концепцій попередніх авторів та варте розгляду.

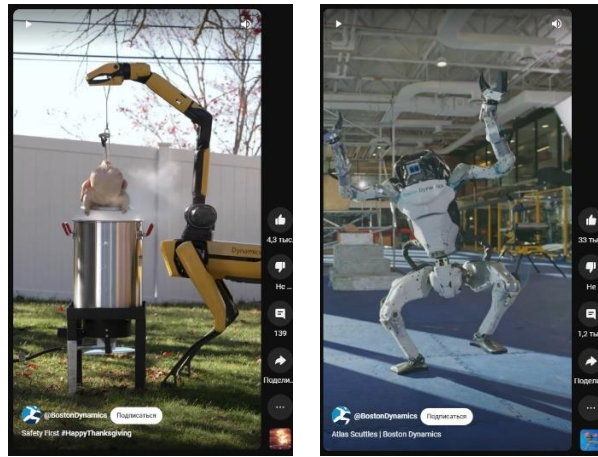


Рисунок 1.7 – Скріншоти із відеороликів You Tube каналу @BostonDynamics

### 1.3 Змістовна постановка завдання

Змістовна постановка завдання та мета кваліфікаційної роботи магістра полягає у моделюванні та візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики. Для досягнення поставленої мети, постановку завдання було розбито на два глобальні етапи:

1. Математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.
2. Візуалізація математичної моделі оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

На першому етапі розглянуто та проаналізовано існуючі методи та алгоритми, які використовуються для розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття множин.

На основі цих даних здійснене математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики, розглянуто методи та алгоритми, завдяки яким було здійснено розв'язок на модельних задачах.

Для самого процесу моделювання створено наступну постановку завдання. Нехай потрібно розробити план евакуації населення з території, де склалася (або потенційно може статися) надзвичайна ситуація, до спеціально відведених центрів екстреної допомоги у відведений термін (або за якомога менший час) і з якомога меншими транспортними витратами.

При цьому слід врахувати, що частина населення володіє власними транспортними засобами і може дістатися пунктів кінцевого призначення самостійно. Цій категорії мешканців має бути лише вказано, на допомогу якого саме пункту вони можуть розраховувати.

Решта населення евакуюється в два етапи: на першому – із зони небезпеки до первинного пункту збору (штабу, відповідального за евакуацію населення з певної зони, центру першого етапу), у той час як на другому – від штабів до вищезазначених центрів екстреної допомоги (центрів другого етапу).

Розподіл постраждалого населення за центрами першого етапу має здійснюватися з урахуванням їх місткості.

Якщо центри першого етапу не визначені заздалегідь, то їх потрібно розмістити і облаштувати з розрахунку на певну кількість мешканців постраждалого від НС регіону.

Відтак, потрібно закріпити за кожним з центрів зону, за евакуацію населення з якої він відповідає.

Вважається, що кількість центрів другого порядку та їхні можливості дозволяють прийняти і надати допомогу усім постраждалим з території НС.

Отже, дану задачу можна сформулювати наступним чином: з метою здійснення евакуації населення з постраждалої від НС території у відведений (передбачений) термін і з якомога меншими транспортними і організаційними витратами визначити:

1. Місця розміщення штабів (пунктів первинного збору);
2. Їх зони відповідальності – постраждалі від НС території, евакуацію населення з яких центри організують, розподіляючи частину мешканців одразу між кінцевими пунктами екстреної допомоги, а решту транспортуючи до останніх в два етапи;
3. Кількість населення, на яку мають бути розраховані пункти первинного збору;

4. Розподіл зібраних постраждалих для подальшого транспортування до кінцевих пунктів екстреної допомоги;

5. Число транспортних засобів певної місткості, яке має бути задіяне для перевезення населення з центрів першого до центрів другого етапів у відведений термін;

6. План евакуації тієї частини населення, яка володіє власним транспортом і може дістатися кінцевого пункту самостійно.

На другому етапі (візуалізація) необхідно розглянути та проаналізувати існуючі реалізації візуалізацій наукових проєктів, обрати доцільну до поставленої мети стратегію подачі, стилістику ілюстрацій та анімації.

На основі проведеного аналізу необхідно створити вимоги, технічне завдання та потік робіт (workflow), згідно якого дана візуалізація буде успішно реалізована.

Вимоги мають нести в собі наступні пояснення:

1. Якою має бути візуалізація на вигляд?
2. Яку мету потрібно досягти даною візуалізацією?
3. Яка її тривалість?
4. На яку категорію людей дана візуалізація розрахована?

Технічне завдання має відповідати на наступні питання:

1. Які технічні особливості експорту об'єктів наявні?
2. Чи впливає стилістичне рішення на подальші технічні особливості анімації?

3. Який порядок організації файлів?

4. В якому форматі мають бути експортовані об'єкти?

Workflow має відповідати на наступні питання:

1. Яка послідовність дій?
2. Які процеси є паралельними, циклічними і послідовними?
3. Які області знань охоплює дана розробка?
4. Чи мають вихідні дані вплив на запланований результат візуалізації?



5. Чи потрібне проведення поглибленого аналізу для використання певних інструментів розробки, стилістики, тощо?

Результатом розробки має стати короткий відеоролик, який в розважальній манері проілюструє принцип роботи математичної моделі оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики, уникаючи прямих математичних посилань.

#### 1.4 Висновки до першого розділу

Гуманітарна (екстрена) логістика – це інтегрований процес, завдяки якому людство має можливість пом'якшувати або запобігати (завдяки завчасному плануванню) наслідків негативного впливу НС на соціальне життя, мінімізувати людські та економічні втрати, сприяти завчасній евакуації населення та доставляти допомогу для людей, що постраждали внаслідок НС.

В даному розділі було проаналізовано концептуальний підхід існуючих на сьогоднішній день методів та алгоритмів розв'язання багатоетапних задач оптимального розбиття множин, описаних науковцями з усього світу.

Узагальнюючи, основними задачами даного виду логістики є:

- швидкість реагування на подію;
- координація людських та ресурсних потоків;
- оцінка потреб населення;
- транспортування та розподіл допомоги;
- управління інформаційними потоками;
- відновлюючі заходи.

Не зважаючи на ефективність, на сьогоднішній день актуальна проблема складності передачі концепції складних систем для презентації їх широкій аудиторії людей, що може сприяти поширенню даного виду логістики та залучати спеціалістів, необхідних для якісної її реалізації та впровадження в якості проєкту захисту населення.

В процесі розгляду даної проблеми було проаналізовано існуючі презентації наукових проектів у форматі коротких відеороликів науково-популярного характеру.

Під час аналізу було виявлено, що для досягнення поставленої мети необхідно скомбінувати сильні сторони розглянутих прикладів та дотримуватись поставлених вимог щодо візуалізації.

## РОЗДІЛ 2.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

## 2.1 Математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики

Отже модель оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики набуває наступного вигляду.

Нехай потрібно розробити план евакуації населення з території, де склалася (або потенційно може статися) надзвичайна ситуація, до спеціально відведених центрів екстреної допомоги у відведений термін (або якомога менший час) і з якомога меншими транспортними витратами.

При цьому слід врахувати, що частина населення володіє власними транспортними засобами і може дістатися пунктів кінцевого призначення самостійно. Цій категорії мешканців має бути лише вказано, на допомогу якого саме пункту вони можуть розраховувати.

Решта населення евакуюється в два етапи (як у попередніх параграфах):

– на першому – із зони небезпеки до первинного пункту збору (штабу, відповідального за евакуацію населення з певної зони, центру першого етапу);

– на другому – від штабів до вищезазначених центрів екстреної допомоги (центрів другого етапу) (рис. 2.1).

Розподіл постраждалого населення за центрами першого етапу має здійснюватися з урахуванням їх місткості.

Якщо центри першого етапу не визначені заздалегідь, то їх потрібно розмістити і облаштувати з розрахунку на певну кількість мешканців постраждалого від НС регіону, тобто потрібно закріпити за кожним з центрів зону, за евакуацію населення з якої він відповідає.

Вважається, що кількість центрів другого порядку та їхні можливості дозволяють прийняти і надати допомогу усім постраждалим з території НС.

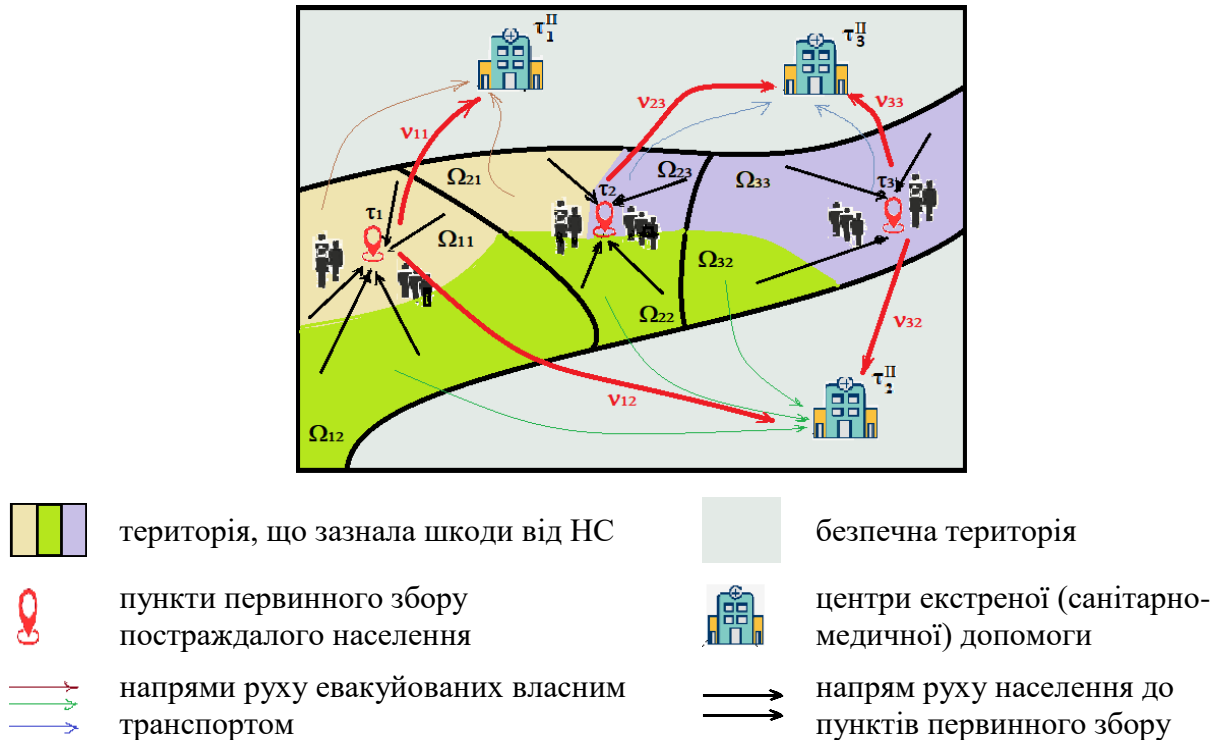


Рисунок 2.1 – Схема частково-двоетапної евакуації мешканців району  $\Omega$

Отже, формулюється задача: з метою здійснення евакуації населення з постраждалої від НС території у відведений (передбачений) термін і з якомога меншими транспортними і організаційними витратами визначити:

1. Місця розміщення штабів – (пунктів первинного збору).
2. Їх зони відповідальності – постраждалі від НС території, евакуацію населення з яких центри організують, розподіляючи частину мешканців одразу між кінцевими пунктами екстреної допомоги, а решту транспортуючи до останніх в два етапи.
3. Кількість населення, на яку мають бути розраховані пункти первинного збору.
4. Розподіл зібраних постраждалих для подальшого транспортування до кінцевих пунктів екстреної допомоги.

5. Число транспортних засобів певної місткості, яка має бути задіяна задля перевезення населення з центрів першого до центрів другого етапів у відведений термін.

6. План евакуації населення власним транспортом.

Для побудови математичної моделі задачі будемо використовувати такі позначення:

$\Omega$  – територія деякого регіону, що зазнала (може зазнати) пошкоджень в результаті надзвичайної ситуації, задана географічними координатами границь;

$\hat{\Omega} \subseteq \Omega$  – територія, де можуть бути розміщені первинні пункти збору постраждалого населення (центри першого етапу);

$\rho(x)$  – функція, що описує щільність населення в точці  $x$  множини  $\Omega$ , чол./м<sup>2</sup>;

$\mu(x)$  – безрозмірна функція, яка приймає значення від 0 до 1 і задає частку населення, яка спроможна евакуюватися власним транспортом;

$N$  – кількість пунктів первинного збору населення (центрів першого етапу);

$M$  – кількість пунктів кінцевого призначення (центрів другого етапу);

$K$  – кількість типів транспортних засобів, які можна залучати до перевезення населення;

$S$  – загальна кількість населення на заданій території  $\Omega$ , люд.;

$Vehicle\_capacity_k, k = \overline{1, K}$ , – максимально можлива місткість транспортного засобу  $k$ -го типу, люд.;

$Park_k, k = \overline{1, K}$ , – максимальна кількість транспортних засобів  $k$ -го типу, яку можна залучати для евакуації населення;

$Evacuation\_period$  – максимальний термін евакуації мешканців з території НС до пунктів первинного збору;

$v_{min} > 0$  – мінімально допустима швидкість евакуації;

$\tau_i^r = (\tau_i^{(1)r}, \tau_i^{(2)r})$  – координати  $i$ -го центру  $r$ -го етапу;

$b_i^r$  – місткість  $i$ -го центру  $r$ -го етапу,  $r = I, II$ , люд.;

$c_i^I(x, \tau_i^I)$  – вартість евакуації мешканця від точки  $x \in \Omega$  до  $i$ -го центру I-го етапу, яку можна вважати пропорційною відстані між точками, грн./люд.;

$c_{ij}^{II}(x, \tau_j^{II})$  – кошти, які можуть бути виділені центром  $\tau_i^I$  постраждалим в точці  $x \in \Omega_i$  для їх самостійного переїзду до центру  $\tau_j^{II}$  II-го етапу; розмір допомоги може бути фіксованим, а може враховувати відстань між початковим і кінцевим пунктами, грн./люд.;

$c_{ijk}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$  – вартість перевезення населення від центру  $\tau_i^I$  до центру  $\tau_j^{II}$ , середня  $k$ -им типом транспортного засобу, грн./один. трансп.;

$a_i^I$  – вартість облаштування первинного пункту збору населення в точці  $\tau_i^I$ , розрахована на одну евакуйовану людину, грн./люд.;

$\Omega_i$  – зона відповідальності центру  $\tau_i^I$ ;

$\Omega_{ij}$  – територія, закріплена за центром  $\tau_i^I$ , з якої мешканці самостійно евакууються до центру  $\tau_j^{II}$ , так що  $\bigcup_{j=1}^M \Omega_{ij} = \Omega$ ,  $mes(\Omega_{is} \cap \Omega_{ij}) = 0$ ,  $s \neq j$ ,  $s, j = \overline{1, M}$ ;

$v_{ij}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $j = \overline{1, M}$  – число евакуйованих, які транспортуються від центру  $\tau_i^I$  до спеціалізованого структурного підрозділу системи екстреної допомоги  $\tau_j^{II}$  (центри другого етапу), люд.;

$V\_Num_{ijk}$  – число транспортних засобів  $k$ -го типу, яке потрібно залучити для перевезення евакуйованих від центру  $\tau_i^I$  до спеціалізованого структурного підрозділу СЕЛ  $\tau_j^{II}$  (центри другого етапу), люд.,  $i = \overline{1, N}$ ;  $j = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Відтак, маємо справу з дворівневим розбиттям (розбиттям в розбитті): кожна із зон  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , що складають розбиття  $\Omega$ , розбивається у свою чергу на зони  $\Omega_{i1}, \Omega_{i2}, \dots, \Omega_{iM}$ , з яких, за розпорядженням штабу в пункті  $\tau_i^I$ , мешканці власним транспортом евакууються до відповідних центрів  $\tau_1^{II}, \tau_2^{II}, \dots, \tau_M^{II}$ .

Нехай  $\Sigma_{\Omega}^N$  – клас всіх можливих розбиттів  $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$  множини  $\Omega$  на  $N$  підмножин (як в усіх задачах вище), а для кожного  $i = 1, 2, \dots, N$  клас  $\Sigma_{\Omega_i}^M$  – клас всіх можливих розбиттів множини  $\Omega_i$  на  $M$  підмножин:

$$\Sigma_{\Omega_i}^M = \left\{ \bar{\zeta}_i = \{\Omega_{i1}, \Omega_{i2}, \dots, \Omega_{iM}\} : \bigcup_{j=1}^M \Omega_{ij} = \Omega_i, \text{mes}(\Omega_{is} \cap \Omega_{ij}) = 0, \right. \\ \left. s \neq j, s, j = \overline{1, M} \right\}.$$

Тоді можна ввести до розгляду взагалі клас всіх можливих розбиттів  $\Omega$  на  $NM$  підмножин

$$\Sigma_{\Omega}^{NM} = \{ \bar{\zeta} = \{ \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_N \} : \bar{\zeta}_i \in \Sigma_{\Omega_i}^M, i = \overline{1, N}, \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_q) = 0, i \neq q, i, q = \overline{1, N} \}. \quad (2.1)$$

Задача: потрібно знайти таке розбиття  $\bar{\zeta} = \{ \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_N \}$  множини  $\Omega$  на  $NM$  підмножин і визначити такі  $\tau^I, \dots, \tau^N, \nu = \{ \nu_{11}, \dots, \nu_{ij}, \dots, \nu_{NM} \}$  та

$$V\_Num = \{ V\_Num_{ijk} \}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, k = \overline{1, K}, \text{ за яких} \\ F(\bar{\zeta}, \tau^I, \nu, V\_Num) \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

$$F(\bar{\zeta}, \tau^I, \nu, V\_Num) = \\ = \beta_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_{ij}} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) (1 - \mu(x)) \rho(x) dx + \\ + \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K c_{ijk}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) \cdot V\_Num_{ijk} + \\ + \beta_3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_{ij}} c_{ij}^{II}(x, \tau_j^{II}) \mu(x) \rho(x) dx;$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} (1 - \mu(x)) \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M \nu_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(x) \rho(x) dx + v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^K Vehicle\_capacity_k \cdot V\_Num_{ijk} \geq v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{v\_min} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} d(x, \tau_i^I) \leq Evacuation\_period, \quad (2.6)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M V\_Num_{ijk} \leq Park_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.7)$$

$$\bar{\zeta} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad v \in R_{NM}^+, \quad V\_Num \in Z_{NMK}^+, \quad \tau^I \in \hat{\Omega}^N, \quad (2.8)$$

де  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$  – задані коефіцієнти, які визначають пріоритет доданків і враховують їх нормування і безрозмірність;  $d(x, \tau_i^I)$  – відстань між точками  $x$  та  $\tau_i^I$ ;  $\Sigma_{\Omega}^{NM}$  – клас всіх можливих розбиттів множини  $\Omega$  на  $NM$  підмножин;  $\bar{\zeta}$  – елемент класу  $\Sigma_{\Omega}^{NM}$ ;  $R_{NM}^+$  –  $NM$ -вимірний простір невід’ємних дійсних чисел;  $Z_{NMK}^+$  –  $NMK$ -вимірний простір невід’ємних цілих чисел.

В задачі (2.2) – (2.8):

– перший доданок функціоналу враховує витрати на організацію штабів і первинних пунктів збору, а також транспортні витрати на перевезення до них населення з постраждалого регіону;

– другий доданок функціоналу пов’язаний з витратами оренди транспортних засобів і перевезення ними населення від центрів першого до центрів другого ;

– третій доданок критерію якості описує витрати на дотації населенню, яке самостійно евакуюється;

– умова (2.3) означає, що всі мешканці, зібрані в центрах першого етапу перерозподіляються між центрами другого етапу і мають бути до них перевезені;



– умова (2.4) враховує місткість центрів другого етапу і передбачає, що вона дорівнює загальній кількості мешканців постраждалого регіону, котрі дісталися відповідних центрів і самостійно, і організовано;

– умова (2.5) накладається на кількість задіяних транспортних засобів різних типів, які мають бути задіяні до евакуаційного процесу, аби вивести всіх постраждалих з центрів першого етапу;

– обмеження (2.6) враховує максимально допустимий час, за який усі мешканці постраждалого регіону мають добратися до пунктів первинного збору;

– умова (2.7) пов'язана із обмеженим парком наявних транспортних засобів;

– (2.8) – умови допустимості шуканих величин.

Задача (2.2) - (2.8) є новою за своєю математичною постановкою, в класі неперервних задач оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками, оскільки передбачає необов'язкове використання проміжних центрів в багатоетапній транспортно-логістичній мережі. За рахунок введення до розгляду параметрів і змінних, які пов'язані з використовуваними транспортними засобами, задача (2.2) – (2.8) носить дискретно-неперервних характер, а, отже, потребує залучення методів не лише теорії оптимального розбиття множин, а й комбінаторної оптимізації.

Зазначені властивості моделі обумовлюють її складність, потребу в теоретичному дослідженні і обґрунтуванню умов існування допустимих і оптимальних розв'язків, розробки методів і алгоритмів розв'язання таких задач, що є напрямком подальших наукових досліджень.

Наступним етапом було зведено частково двоетапної задачі до трьох послідовних оптимізаційних задач.

Виокремимо випадок задачі (2.2) - (2.8), можна здійснити декомпозицію задачі, тобто розбити її на декілька послідовних задач.

Спростимо умови задачі так, аби можна було розв'язати задачу в 3 етапи:

1. Розіб'ємо всю територію на  $M$  зон, кожна з яких закріплюється за центром 2-го етапу. З них здійснюється евакуація населення власним транспортом до відповідного центру. Відповідно до оптимального розбиття території обчислюються потоки, які надходять до центрів 2-го етапу. Звісно, їх обсяги не можуть перевищувати місткість центрів.

2. Визначаємо кількість ресурсу, який може бути додатково прийнятий центром другого етапу, знаходимо місця розташування центрів першого етапу (якщо вони невідомі заздалегідь) і розбиваємо територію на  $N$  зон для збору ресурсу в центрах першого етапу і подальшого розподілу і відправки до центрів 2-го етапу. При цьому передбачається, що кількість і тип наявних транспортних засобів дозволяють здійснити доставку ресурсу від центрів 1-го до центрів 2-го етапу у повному обсязі.

3. Визначаємо за результатами оптимального розв'язання попередньої задачі кількість ресурсу, зібраного в центрах 1-го етапу і розраховуємо оптимальний розподіл транспортних засобів за центрами 1-го етапу.

Запишемо математичні постановки вказаних задач.

Задача 2.1. Знайти таке розбиття  $\bar{w}_* = \{\bar{\Omega}_{*1}, \bar{\Omega}_{*2}, \dots, \bar{\Omega}_{*M}\}$  множини  $\Omega$  на  $M$  підмножин, за яких

$$F_1(\bar{w}) \rightarrow \min, \quad (2.9)$$

$$F_1(\bar{w}) = \sum_{j=1}^M \int_{\bar{\Omega}_j} c_j^H(x, \tau_j^H) \mu(x) \rho(x) dx;$$

за умов

$$\int_{\bar{\Omega}_j} \mu(x) \rho(x) dx \leq b_j^H, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.10)$$

$$\bar{w} \in \Sigma_{\Omega}^M. \quad (2.11)$$

За оптимальним розв'язком задачі 1 розраховуємо невикористану місткість центрів 2-го етапу:

$$\hat{b}_j^H = b_j^H - \int_{\bar{\Omega}_{*j}} \mu(x) \rho(x) dx, \quad j = \overline{1, M},$$

і формулюємо наступну задачу.

Задача 2.2. потрібно визначити такі  $\tau_1^I, \dots, \tau_N^I$ , знайти таке розбиття  $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$  множини  $\Omega$  на  $N$  підмножин і величини  $v = \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}$ ,  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ , за яких

$$F_2(\bar{\omega}, \tau^I, v) \rightarrow \min, \quad (2.12)$$

$$F_2(\bar{\omega}, \tau^I, v) = \beta_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) (1 - \mu(x)) \rho(x) dx + \\ + \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) \cdot v_{ij};$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} (1 - \mu(x)) \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = \hat{b}_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.14)$$

$$\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad v \in R_{NM}^+, \quad \tau^I \in \hat{\Omega}^N. \quad (2.15)$$

За оптимальним розв'язком задачі 2.2 розраховуємо обсяг зібраного ресурсу в центрах першого етапу:

$$\hat{b}_i^I = \int_{\Omega_i} (1 - \mu(x)) \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, N},$$

і формулюємо наступну задачу.

Задача 2.3. потрібно визначити такий вектор  $V\_Num = \{V\_Num_{ijk}\}$ ,  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, k = \overline{1, K}$ , за яких

$$F_3(V\_Num) \rightarrow \min, \quad (2.16)$$

$$F_3(V\_Num) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K c_{ijk}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) \cdot V_{Num_{ijk}},$$

за умов

$$\sum_{k=1}^K Vehicle\_capacity_k \cdot V\_Num_{ijk} \geq v_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{v\_min} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} d(x, \tau_i^I) \leq Evacuation\_period, \quad (2.18)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M V\_Num_{ijk} \leq Park_k, k = \overline{1, K}, \quad (2.19)$$

$$V_{Num} \in Z_{NMK}^+. \quad (2.20)$$

Необхідними і достатніми умовами розв'язності задачі (2.2) – (2.8), а також її декомпозиційних задач є наступні співвідношення:

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}. \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K Vehicle\_capacity_k \cdot V\_Num_{ijk} \geq \int_{\Omega} \rho(x) dx. \quad (2.22)$$

Якщо умова (2.21) для задачі не виконується, то, можна ввести або фіктивний центр II-го етапу, або розширити множину, що розбивається, до певної зваженої площі, за аналогією переходу від відкритої до закритої моделі транспортної задачі.

## 2.2 Методи та алгоритм розв'язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики

Серед методів розв'язання задачі оптимального розбиття заданої території на зони самостійної евакуації до центрів другого етапу було розглянуто наступний. Для кращого розуміння його було описано на прикладі задачі 2.1.

Задача 2.1 є класичною неперервною задачею оптимального розбиття множин з обмеженнями на потужності центрів.

Далі наведено основну ідею та алгоритм розв'язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

Ідея методу розв'язання задачі 2.1 полягає в наступному. Задача формулюється в еквівалентній формі в термінах характеристичних функцій підмножин, що складають розбиття.

Тобто для кожного допустимого розбиття регіону  $\Omega$  вводиться до розгляду вектор-функція  $\lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^j(\cdot), \dots, \lambda^M(\cdot))$ , компоненти якої дорівнюють

$$\lambda^j(\cdot) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \bar{\Omega}_j, \\ 0 \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

і розв'язується задача:

Знайти таке розбиття  $\bar{w}_* = \{\bar{\Omega}_{*1}, \bar{\Omega}_{*2}, \dots, \bar{\Omega}_{*M}\}$  множини  $\Omega$  на  $M$  підмножин, за яких

$$I_1(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min, \quad \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^M,$$

$$I_1(\bar{w}) = \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} c_j^{II}(x, \tau_j^{II}) \mu(x) \rho(x) \lambda^j(x) dx;$$

за умов

$$\int_{\Omega} \mu(x) \rho(x) \lambda^j(x) dx \leq b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M},$$

$$\Gamma_0^M = \left\{ \lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^l(\cdot), \dots, \lambda^M(\cdot)) : \right.$$

$$\left. \lambda^l(x) = 0 \vee 1, \quad l = \overline{1, M}, \quad \sum_{l=1}^M \lambda^l(x) = 1, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі в термінах характеристичних функцій підмножин  $(\bar{\Omega}_{*1}, \dots, \bar{\Omega}_{*i}, \dots, \bar{\Omega}_{*M}) \in \Sigma_{\Omega}^M$  має наступний вигляд для  $i = 1, \dots, M$  і  $x \in \Omega$ :

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c_i^{II}(x, \tau_i^{II}) + \psi_i^* \leq c_j^{II}(x, \tau_j^{II}) + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 \text{ у протилежному випадку,} \end{cases} \quad (2.23)$$

в якості  $\psi_1^*, \dots, \psi_M^*$  вибирається оптимальний розв'язок задачі, що набуває наступного вигляду:

$$G(\psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, M} [c_i^{II}(x, \tau_i^{II}) + \psi_i^*] \mu(x) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^M \psi_i b_i^{II} \rightarrow \max, \quad (2.24)$$

$$\psi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.25)$$

Для чисельної реалізації методу від (2.24), (2.25) здійснюється перехід до задачі:

$$\max_{\psi \in E^N} U(\psi),$$

де

$$U(\psi) = G(\psi) - Q \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

$Q$  – додатне число (більше за множники Лагранжа).

Алгоритм розв'язання задачі 2.1 в термінах характеристичних функцій наступний.

Ініціалізація. Область  $\Omega$  заключаємо в прямокутник  $\Pi$ ,  $\rho(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ .  $\Pi$  покриваємо прямокутною сіткою, задаємо початкове наближення  $\psi^{(0)}$ , параметри модифікації  $r(\alpha)$ -алгоритму.

Крок 1. Обчислюємо у вузлах сітки  $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \dots, \lambda_M^{(0)}(x))$ , за формулою, аналогічною (2.3), при  $\psi = \psi^{(0)}$ ; значення  $G(\psi^{(0)})$ .

Обчислюємо вектор узагальненого градієнта функції  $U(\psi)$ . Реалізуємо першу ітерацію  $r(\alpha)$ -алгоритму і знаходимо  $\psi^{(1)}$ .

Нехай в результаті обчислень  $q$ ,  $q = 1, 2, \dots$  кроків алгоритму отримано  $\psi^{(q)}$ ,  $\lambda^{(q-1)}(x)$  у вузлах сітки.

( $q + 1$ )-й крок включає наступні етапи:

1. Обчислюємо  $\lambda^{(q)}(x)$ , у вузлах сітки за формулою (2.23) при  $\psi = \psi^{(q)}$ .

2. Обчислюємо вектор узагальненого градієнта функції  $U(\psi)$ . Проводимо чергову ітерацію  $r(\alpha)$ -алгоритму і знаходимо  $\psi^{(q+1)}$ .

3. Якщо умова  $\|\psi^{(q+1)} - \psi^{(q)}\| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , не виконується, переходимо до  $(q + 2)$ -го кроку з новими значеннями величин  $\psi^{(q+1)}$ ,  $\lambda^{(q)}(x)$ , у вузлах сітки, інакше – переходимо до п. 5.

4. Вважаємо  $\psi^* = \psi^{(s)}$ ,  $\lambda_*(x) = \lambda^{(s)}(x)$ , де  $s$  – номер ітерації, на якій умова закінчення ітераційного процесу виконалася.

5. Відтворюємо оптимальне розбиття  $\{\Omega_{*1}, \Omega_{*2}, \dots, \Omega_{*M}\}$  за отриманими значеннями вектор-функції  $\lambda(\cdot) = \lambda_*(\cdot)$ .

6. Обчислюємо оптимальне значення функціоналу вихідної задачі при  $\{\Omega_{*1}, \Omega_{*2}, \dots, \Omega_{*M}\}$ .

7. Кінець алгоритму.

Далі розглянемо метод розв'язання задачі оптимального двоетапного розподілення евакуйованого населення без обмежень на місткість пунктів первинного збору.

Нехай за оптимальним розв'язком попередньої задачі 2.1 розраховано невикористану місткість центрів 2-го етапу:

$$\hat{b}_j^{II} = b_j^{II} - \int_{\bar{\Omega}_{*j}} \mu(x) \rho(x) dx, \quad j = \overline{1, M},$$

Припустимо, що в задачі 2.2 центри першого етапу є фіксованими. Оскільки в задачі 2.2 місткості пунктів первинного збору евакуйованих не відомі заздалегідь, а визначаються величиною області, яку вони обслуговують, то математична модель задачі є задачею оптимального розбиття множин з додаковими зв'язками при фіксованих центрах підмножин без обмежень на місткість центрів першого етапу. Наведемо її постановку і метод розв'язання.

Далі будемо використовувати наступні позначення:

$$\rho(x) := \rho(x)(1 - \mu(x)); \quad b_j^{II} := \hat{b}_j^{II}.$$

Задача 2.3. Знайти таке розбиття множини  $\Omega$  на  $N$  підмножин  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  і такі величини  $v_{11}, \dots, v_{NM}$ , які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}), \quad (2.26)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.28)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad (2.29)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.30)$$

Рівності (2.27) і (2.28) разом визначають обмеження на потужність центрів першого та другого етапів.

Функції  $c_i^I(x, \tau_i^I)$ ,  $i = \overline{1, N}$  – дійсні, обмежені, вимірні по аргументу  $x$  на  $\Omega$ ;  $\rho(x)$  – дійсна, невід'ємна, визначена на  $\Omega$  функція;  $\tau_i^I$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\tau_j^{II}$ ,  $j = \overline{1, M}$  – задані точки області  $\Omega$ ;  $a_i^I$ ,  $a_j^{II}$ ,  $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  – задані дійсні невід'ємні величини;  $b_j^{II}$ ,  $j = \overline{1, M}$  – задані дійсні невід'ємні числа, що задовольняють умову розв'язуваності задачі:

$$\sum_{j=1}^M b_j^{II} = \int_{\Omega} \rho(x) dx. \quad (2.31)$$

Введемо до розгляду вектор-функцію  $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$ , компонентами якої є характеристичні функції підмножин, що утворюють розбиття множини  $\Omega$ :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

Перепишемо задачу (2.26) – (2.30) в наступній постановці:

Задача 2.4

$$I(\lambda(\cdot), v) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma \times R_{NM}^+}, \quad (2.32)$$

$$I(\lambda(\cdot), v) =$$

$$\beta_1 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) v_{ij},$$

за умов

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.34)$$



$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ a.e. for } x \in \Omega, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ a.e. for } x \in \Omega\}.$$

Від задачі 2.4, яка є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними  $\lambda(\cdot)$ , перейдемо до задачі зі значеннями  $\lambda(\cdot)$  на відрізку  $[0,1]$  (тобто запишемо ЛП-релаксацію задачі 2.4).

Задача 2.5. Знайти  $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2$  та  $v^* \in R_{NM}^+$  такі, що

$$I(\lambda^*(\cdot), v^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, v \in R_{NM}^+} I(\lambda(\cdot), v),$$

за умов (2.33), (2.34), де

$$\Gamma_2 = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda(\cdot) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega\},$$

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}\}.$$

Задача 2.5 є розв'язною за таких умов:

1)  $\Omega$  – замкнута, обмежена, вимірна за Лебегом множина евклідового простору  $E_2$ .

2) функції  $c_i^l(x, \tau_i^l)$ ,  $i = \overline{1, N}$  – дійсні, обмежені, вимірні за аргументом  $x$ .

3)  $\rho(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$  і виконується умова (2.26).

Для отримання необхідних і достатніх умов екстремуму для задачі 2.5 введемо функціонал Лагранжа в наступному вигляді:

$$L(\lambda(\cdot), v, \Psi(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \\ + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx, \quad (2.35)$$

де  $\lambda(\cdot) \in \Gamma$ ,  $v \in R_{NM}^+$ ,  $\Psi(x), x \in \Omega$  – вектор-функція,  $\Psi(\cdot) \in \Lambda$ ,  $\Lambda = \{\Psi(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi, \eta): \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2, \psi \in E_N, \eta \in E_M\}$ .

Пара  $(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot))$  називається сідловою точкою функціоналу (2.35) на множині  $\{\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda\}$ , якщо виконуються наступні умови:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$$

для усіх  $\lambda(\cdot) \in \Gamma$ ,  $v \in R_{NM}^+$ ,  $\Psi(\cdot) \in \Lambda$ , або

$$\begin{aligned} L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) &= \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times R_{NM}^+} L(\{\lambda, v\}, \Psi(\cdot)). \end{aligned}$$

Аби пара  $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda)$  була сідловою точкою функціоналу (4.19), необхідними і достатніми є наступні умови:

1.  $L(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot)), \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+$ ,
2.  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^{II}$ .

На множині  $(E_N \times E_M)$  розглянемо функцію

$$\begin{aligned} G(\psi, \eta) &= \\ \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx &+ \min_{v \in R_{NM}^+} (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^I) + \\ &a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij}) + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j. \end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \min_{v \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} &= \\ = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Отже задачу, двоїсту до (4.28), можна записати у такий спосіб:

$$G(\psi, \eta) \rightarrow \max_{\psi \in E_N, \eta \in E_M} \quad (2.37)$$

за умов

$$\psi_i - \eta_j \leq \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}), \forall i, = \overline{1, N}, j, = \overline{1, M}.$$

Компонента  $v_{ij}^*$  є оптимальним розв'язком задачі 4.3 і тому задовольняє умови:

$$v_{ij}^* = \begin{cases} > 0, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, \\ 0, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) > \psi_i + \eta_j. \end{cases}$$

Отже, виконання нерівностей 1), 2), коли  $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$  – оптимальний розв'язок задачі 4.3, доведено.

З іншого боку, нехай виконуються умови 1) та 2). Перепишемо (4.30) у вигляді:

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_0(x) + \psi_i) \rho(x) \lambda(x) dx +$$

$$\min_{v \in R_{NM}^+} (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j) -$$

$$\int_{\Omega} \psi_0(x) dx.$$

Очевидно, що умова 1) забезпечує мінімальне значення першого доданку функціоналу  $U(\Psi(\cdot))$ . Другий доданок досягає своєї точної нижньої грані за умов 2), оскільки

$$\min_{v \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i < 0. \end{cases}$$

Отже, достатність виконання нерівностей 1), 2) для оптимальності пари  $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$  в задачі 4.3 також показано.

Якщо зв'язок між центрами першого і другого етапів  $v_{ij}^* > 0$  істотний, то згідно умови 2):  $\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \eta_j + \psi_i$  або

$$\psi_i = -\eta_j - \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}). \quad (2.38)$$

Згідно умови 1):

$$\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) - \psi_i = \beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) - \psi_k, \quad i \neq k,$$

$$\forall x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, N,$$

тоді рівняння границі між зонами  $\Omega_k$  і  $\Omega_i$  має вигляд:

$$\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) - \psi_i = \beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) - \psi_k.$$

За наявності хоча б одного центру другого типу  $\tau_j^{II}$ , з урахуванням виразу (4.35), отримаємо:

$$\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \eta_j + \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) +$$

$$\eta_j + \beta_2(c_{kj}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}), \quad i \neq k, \quad \forall x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, N.$$

Відтак, якщо точка  $x$  належить границі  $\Omega_{ij}^*$  між підмножинами  $\Omega_i^*$  і  $\Omega_j^*$  для  $x \in \Omega_{ij}^*$ , то для неї виконується рівність:

$$\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \beta_2 c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \beta_2 c_{kj}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}).$$

А це означає, що центри першого етапу  $\tau_i^I$  є транзитними пунктами, через які фактично здійснюється розподіл або евакуйованого населення до центрів другого етапу, або предметів першої необхідності з хабів до кінцевих клієнтів.

Справедливим є і зворотне твердження. Якщо  $G(\psi^*, \eta^*) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$ ,  $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$  – оптимальний розв'язок прямої задачі, а  $\{\psi^*, \eta^*\}$  – оптимальний розв'язок двоїстої задачі, то пара  $(\{\lambda^*, v^*\}, \{\psi^*, \eta^*\}) \in (\Gamma \times R_{NM}^+ \times E_{N+M})$  – сідлова точка функціоналу Лагранжа.

Враховуючи еквівалентність задач 2.4 і 2.5, для першої має місце наступне твердження.

Твердження. Нехай в задачі 2.4  $\rho(x) \geq 0$  майже всюди для  $x \in \Omega$ . Тоді для того щоб пара  $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma_1 \times R_{NM}^+$  була розв'язком задачі необхідно й достатньо, щоб існували такі  $\psi_i, i = 1, \dots, N$  та  $\eta_j, j = 1, \dots, M$ , за яких виконувалися б умови:  $\forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}$

1)

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) = \min_k (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k), \\ 0, & \text{якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) \neq \min_k (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k), \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, & \text{якщо } v_{ij}^* > 0, \\ \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) > \psi_i + \eta_j, & \text{якщо } v_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

Рівняння границі між сусідніми підмножинами  $\Omega_i^*$  та  $\Omega_k^*$ , має наступний вигляд:

$$\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \beta_2 c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \beta_2 c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}).$$

Опишемо ітераційний алгоритм розв'язання задачі 2.4 з фіксованими центрами першого етапу, розроблений на основі наведеного вище твердження у припущенні, що  $\rho(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ . Складовою частиною алгоритму є метод потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Другий алгоритм наступний.

Ініціалізація. Задаємо  $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ , координати центрів першого і другого етапів  $\tau_i^I, \tau_j^{II}$ , величини  $a_i^I, a_j^{II}, b_j^{II}$   $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ ; функцію  $\rho(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ ;  $\varepsilon > 0$ .

Задаємо довільне допустиме початкове наближення вектор-функції  $\lambda^{(0)}(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$  (наприклад та, що відповідає діаграмі Діріхле-Вороного, побудованої для набору центрів першого етапу).

1. Обчислюємо значення  $b_i^{I(0)}$  за формулою:

$$b_i^{I(0)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^{(0)}(x) dx, \quad i = \overline{1, N}.$$

2. Визначаємо початкові значення  $v_{ij}^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ , і значення потенціалів  $\psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , та  $\eta_j^{(0)}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , розв'язуючи транспортну задачу такого виду:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \beta_2 (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.39)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.40)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.41)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.42)$$

за умов  $b_i^I = b_i^{I(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Нехай у результаті  $k$  кроків алгоритму  $k = 1, 2, \dots$  отримані значення потенціалів  $\psi_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , та  $\eta_j^{(k)}$ ,  $j = \overline{1, M}$ .

Опишемо  $(k + 1)$ -й крок.

1. Обчислюємо значення  $\lambda_i^{k+1}(x)$  за формулою:

$$\lambda_i^{(k+1)}(x) = \begin{cases} 1, \beta_1 (c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i^{k+1} = \min_{s=\overline{1, N}} (\beta_1 (c_s^I(x, \tau_s^I) + a_s^I) + \psi_s^{k+1}), \\ 0 \quad \text{у протилежному випадку,} \quad i = \overline{1, N}, \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

2. Обчислюємо значення  $b_i^{I(k+1)}$  за формулою:

$$b_i^{I(k+1)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^{(k+1)}(x) dx, \quad i = \overline{1, N}.$$

3. Визначаємо значення  $v_{ij}^{(k+1)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $\psi_i^{(k+1)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , та  $\eta_j^{(k+1)}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , розв'язуючи задачу (4.36) – (4.39) за умов  $b_i^I = b_i^{I(k+1)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

4. Обчислюємо значення цільового функціоналу  $I(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu)$  при  $\lambda_i(x) = \lambda_i^{(k+1)}(x)$ ,  $\nu_{ij} = \nu_{ij}^{(k+1)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  ( $\tau^I$  – фіксований вектор).

5. Якщо хоча б одна з умов

$$|I(\lambda^{(k+1)}(\cdot), \tau^I, \nu^{(k+1)}) - I(\lambda^{(k)}(\cdot), \tau^I, \nu^{(k)})| \leq \varepsilon \quad (2.43)$$

або

$$\|\lambda^{(k+1)}(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \quad (2.44)$$

виконується, то переходимо до п. 6, якщо жодна з них не виконується, то – до  $(k + 2)$ -го кроку алгоритму.

6. Вважаємо  $\lambda_i^*(x) = \lambda_i^{(m)}(x)$ ,  $\nu_{ij}^* = \nu_{ij}^{(m)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $\psi_i^* = \psi_i^{(m)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , и  $\eta_j^* = \eta_j^{(m)}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , де  $m$  – номер ітерації, на якій виконується умова (4.40) або (4.41). Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу  $I(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu)$  і для контролю правильності розрахунків – значення двоїстого функціоналу  $G(\psi, \eta)$ .

7. Алгоритм 2 завершено.

### 2.3 Розв'язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики

Алгоритми 1 та 2 програмно реалізовані в середовищі Visual Studio 2022 на мові C#. Продемонструємо роботу алгоритмів на модельних задачах.

Підготовчий етап обробки електронних карт полягає у видаленні з малюнка карти місць, що не належать території регіону за допомогою графічного редактора.

Далі вводиться прямокутна система координат, обравши початок відліку і масштабну одиницю так, аби регіон, що розглядається, повністю містився в прямокутнику  $\Pi = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 12; 0 \leq x_2 \leq 12\}$ . Область

$\Omega$ , яка має бути поділена на зони відповідальності центрів першого етапу, на всіх рисунках далі виділена яскравими кольорами.

Чисельна реалізація алгоритмів передбачає дискретизацію заданої області. Для обчислення кратних інтегралів застосовується кубатурна формула трапецій, задача (2.39) – (4.41) розв'язується за допомогою методу потенціалів.

Обчислювальні експерименти були проведені за наступних значень похибки та параметрів  $r(\alpha)$ -алгоритму:  $\alpha = 3$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $\varepsilon = 0.0001$ .

У всіх наведених нижче модельних прикладах вважається, що сумарні потужності підприємств другого етапу становлять одну умовну одиницю.

Отже, сумарна кількість населення, охоплюваного на території всіма центрами першого етапу, також дорівнює 1 ум. од.

Для обчислення функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  використовується метрика Мінковського  $c(x, y) = ((x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p)^{1/p}$  з конкретним параметром  $p$ .

Функція  $\rho(x) = 1$  для всіх точок області  $\Omega$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ , що характеризує собою рівномірний розподіл населення.

Задача 2.6. Вихідні дані:

$N = 3$ ,  $M = 5$ ;  $\tau_1^I = (6.534; 3.52)$ ,  $\tau_2^I = (9.108; 3.872)$ ,  $\tau_3^I = (8.096; 4.378)$ ;  
 $\tau_1^{II} = (4.862; 2.496)$ ,  $\tau_2^{II} = (9.096; 6.292)$ ,  $\tau_3^{II} = (8.03; 2.574)$ ,  $\tau_4^{II} = (2.508; 3.96)$ ,  
 $\tau_5^{II} = (4.642; 5.346)$ ;  $b^{II} = (0.205; 0.205; 0.235; 0.182; 0.171)$ .

На рисунку 2.1 представлено оптимальне розбиття території  $\Omega$  і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів.

Для функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  параметр метрики Мінковського  $p = 1$  та  $p = 2$  відповідно,  $a_i^I = 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $a_j^{II} = 0$ ,  $j = \overline{1,5}$ ;

Умовна кількість зібраного ресурсу центрами першого етапу при цьому склала з точністю 0.001:

$b^I = (0.246; 0.212; 0.208)$ ;

Значення цільового функціоналу 9.06085.

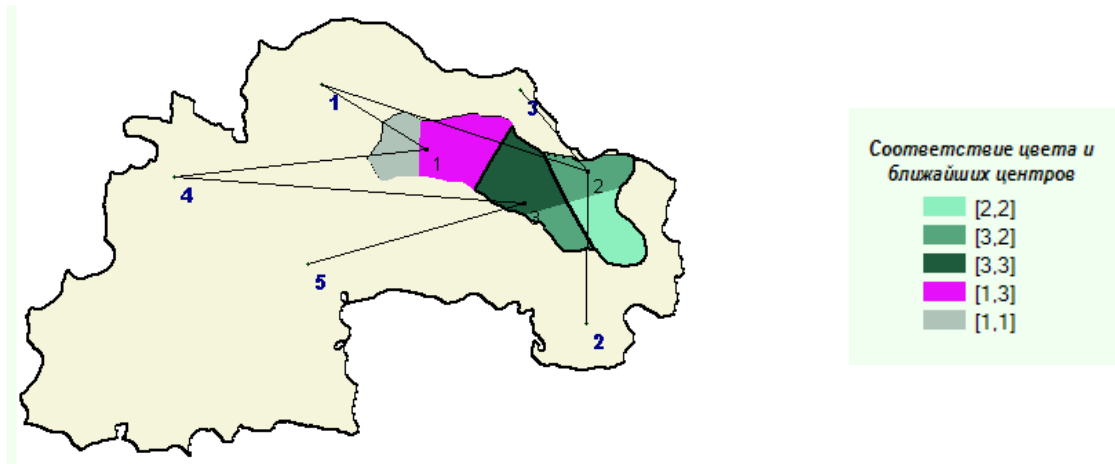


Рисунок 2.1 – Оптимальне розбиття території і схема перевозок ресурсу між центрами першого та другого етапів для задачі 2.6

Кількість ресурсу, що спрямовується від центрів першого етапу до центрів другого етапу, наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Структура зв'язків між центрами двох етапів у задачі 2.6

Номер центру I етапу $i$	Номер центру II етапу $j$	Кількість перевезеного ресурсу $v_{ij}$
1	1	0.1009
1	4	0.1452
2	2	0.1298
2	1	0.0627
2	3	0.0299
3	4	0.0372
3	5	0.1711

Задача 2.7 Вихідні дані:

$$N = 5, M = 4;$$

$$\tau_1^I = (6.336; 3.234), \tau_2^I = (7.634; 3.124), \tau_3^I = (9.482; 3.806), \tau_4^I = (9.394; 4.928), \tau_5^I = (8.404; 4.466);$$

$$\tau_1^{II} = (2.681; 3.432), \tau_2^{II} = (1.672; 5.676), \tau_3^{II} = (5.556; 5.302), \tau_4^{II} = (10.12; 4.224);$$

$$b^{II} = (0.281; 0.082; 0.407; 0.228).$$



На рисунку 2.2 представлено оптимальне розбиття території  $\Omega$  і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів.

Для функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  параметр метрики Мінковського  $p = 1$  та  $p = 2$  відповідно,  $a_i^I = 0$ ,  $i = \overline{1,5}$ ;  $a_j^{II} = 0$ ,  $j = \overline{1,4}$ ;

Умовна кількість зібраного ресурсу центрами першого етапу при цьому склала з точністю 0.001:

$$b^I = (0.173; 0.133; 0.092; 0.118; 0.148);$$

Значення цільового функціоналу 7.48703.

Кількість ресурсу, що спрямовується від центрів першого етапу до центрів другого етапу, наведено в таблиці 2.2.

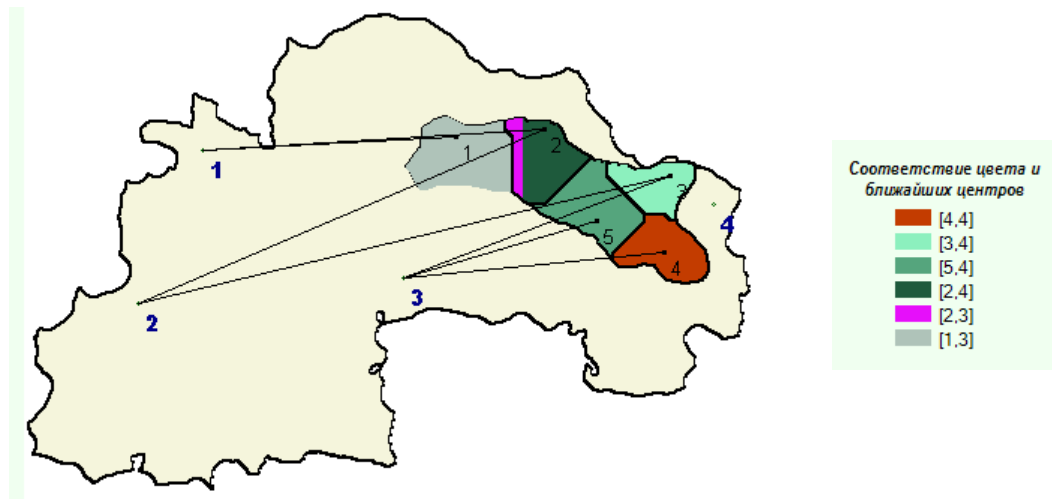


Рисунок 2.2 – Оптимальне розбиття території і схема перевозок ресурсу між центрами першого та другого етапів задачі 2.7

Таблиця 2.2

Структура зв'язків між центрами двох етапів у задачі 2.7

Номер центру I етапу $i$	Номер центру II етапу $j$	Кількість перевезеного ресурсу $v_{ij}$
1	1	0.1731
2	1	0.1045
2	2	0.029
3	2	0.056
3	3	0.0368
4	3	0.1188

5	3	0.1486
---	---	--------

Задача 2.8. Вихідні дані:

$N = 4, M = 7; \tau_1^I = (5.918; 3.718), \tau_2^I = (9.46; 3.85), \tau_3^I = (8.646; 4.818),$   
 $\tau_4^I = (7.942; 2.508); \tau_1^{II} = (5.83; 1.936), \tau_2^{II} = (2.618; 3.586), \tau_3^{II} = (4.312; 2.684),$   
 $\tau_4^{II} = (10.01; 4.356), \tau_5^{II} = (9.284; 6.292), \tau_6^{II} = (6.864; 4.95), \tau_7^{II} = (4.334; 5.478);$   
 $b^{II} = (0.086; 0.249; 0.201; 0.112; 0.055; 0.077; 0.217).$

На рисунку 2.3 представлено оптимальне розбиття території  $\Omega$  і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів.

Для функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  параметр метрики Мінковського  $p = 1$  та  $p = 2$  відповідно,  $\alpha_i^I = 0, i = \overline{1,4}; \alpha_j^{II} = 0, j = \overline{1,7};$

Умовна кількість зібраного ресурсу центрами першого етапу при цьому склала з точністю 0.001:

$b^I = (0.206; 0.145; 0.203; 0.11);$

Значення цільового функціоналу 9.44497.

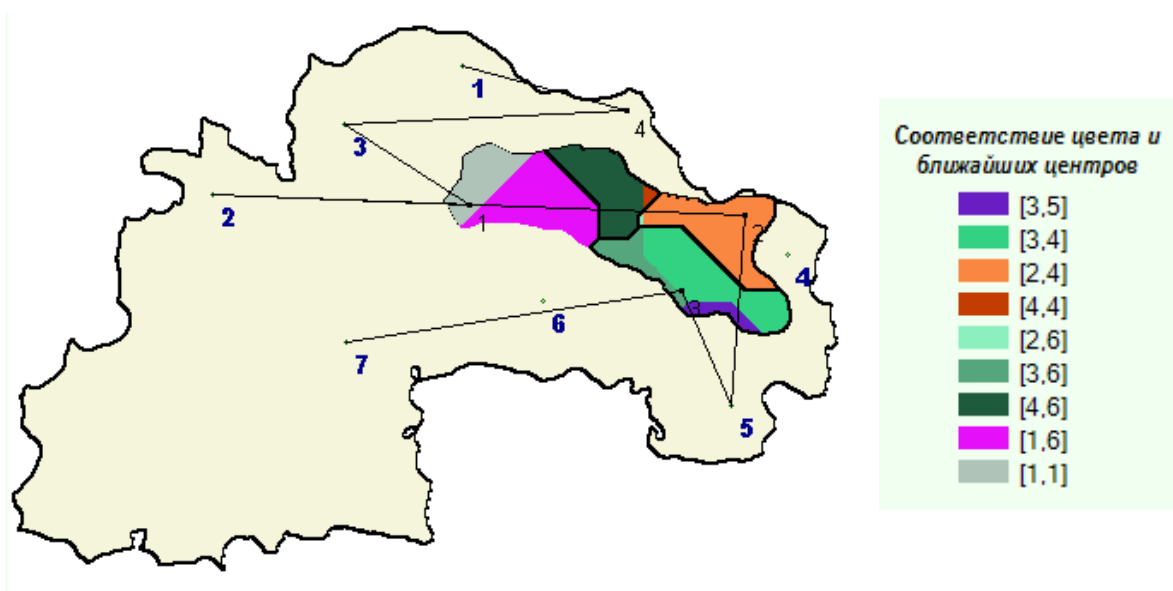


Рисунок 2.3 – Оптимальне розбиття території і схема перевозок ресурсу між центрами першого та другого етапів задачі 2.8

Кількість ресурсу, що спрямовується від центрів першого етапу до центрів другого етапу, наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Структура зв'язків між центрами двох етапів у задачі 2.8

Номер центру I етапу $i$	Номер центру II етапу $j$	Кількість перевезеного ресурсу $v_{ij}$
1	2	0.0851
1	3	0.1215
2	5	0.0339
2	2	0.1117
3	7	0.176
3	5	0.0278
4	1	0.0669
4	3	0.0439

Задача 2.9. Вихідні дані:

$N = 3$ ,  $M = 6$ ;  $\tau_1^I = (7.392; 3.124)$ ,  $\tau_2^I = (7.766; 4.18)$ ,  $\tau_3^I = (9.438; 3.938)$ ;  
 $\tau_1^{II} = (5.852; 1.738)$ ,  $\tau_2^{II} = (4.444; 3.102)$ ,  $\tau_3^{II} = (2.948; 4.62)$ ,  $\tau_4^{II} = (10.23; 5.698)$ ,  
 $\tau_5^{II} = (8.844; 6.666)$ ,  $\tau_6^{II} = (6.006; 5.412)$ ;  $b^{II} = (0.211; 0.058; 0.127; 0.176; 0.238;$   
 $0.188)$ .

На рисунку 2.4 представлено оптимальне розбиття території  $\Omega$  і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів.

Для функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  параметр метрики Мінковського  $p = 1$  та  $p = 2$  відповідно,  $a_i^I = 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $a_j^{II} = 0$ ,  $j = \overline{1,6}$ ;

Умовна кількість зібраного ресурсу центрами першого етапу при цьому склала з точністю 0.001:

$$b^I = (0.225; 0.208; 0.232);$$

Значення цільового функціоналу 15.28643.

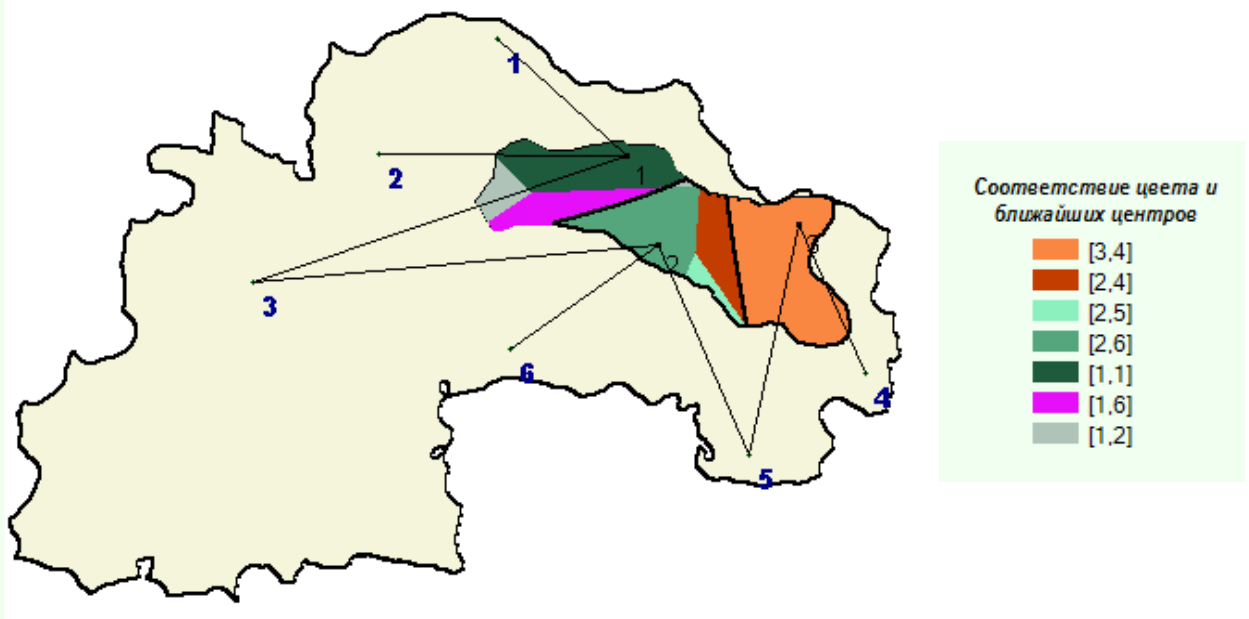


Рисунок 2.4 – Оптимальне розбиття території і схема перевозок ресурсу між центрами першого та другого етапів задачі 2.9

Кількість ресурсу, що спрямовується від центрів першого етапу до центрів другого етапу, наведено в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Структура зв'язків між центрами двох етапів у задачі 2.9

Номер центру I етапу $i$	Номер центру II етапу $j$	Кількість перевезеного ресурсу $v_{ij}$
1	1	0.1434
1	2	0.0438
1	3	0.0379
2	3	0.0892
3	4	0.028
2	5	0.0242
3	5	0.2048
2	6	0.0955

Задача 2.10. Вихідні дані:

$$N = 4, M = 7;$$

$$\tau_1^I = (6.424; 3.322), \tau_2^I = (7.656; 4.136), \tau_3^I = (9.504; 3.762),$$

$$\tau_4^I = (8.8; 4.84); \tau_1^{II} = (10.186; 4.378), \tau_2^{II} = (8.91; 6.534),$$

$$\tau_3^{II} = (6.292; 5.434), \tau_4^{II} = (5.258; 1.694), \tau_5^{II} = (3.256; 3.498),$$

$$\tau_6^{II} = (3.498; 4.884), \tau_7^{II} = (8.008; 2.464);$$

$$b^{II} = (0.141; 0.187; 0.067; 0.181; 0.136; 0.042; 0.243).$$

На рисунку 2.5 представлено оптимальне розбиття території  $\Omega$  і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів.

Для функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  параметр метрики Мінковського  $p = 1$  та  $p = 2$  відповідно,  $a_i^I = 0$ ,  $i = \overline{1,4}$ ;  $a_j^{II} = 0$ ,  $j = \overline{1,7}$ ;

Умовна кількість зібраного ресурсу центрами першого етапу при цьому склала з точністю 0.001:

$$b^I = (0.192; 0.182; 0.114; 0.176);$$

Значення цільового функціоналу 7.06274.

Кількість ресурсу, що спрямовується від центрів першого етапу до центрів другого етапу, наведено в таблиці 2.5.

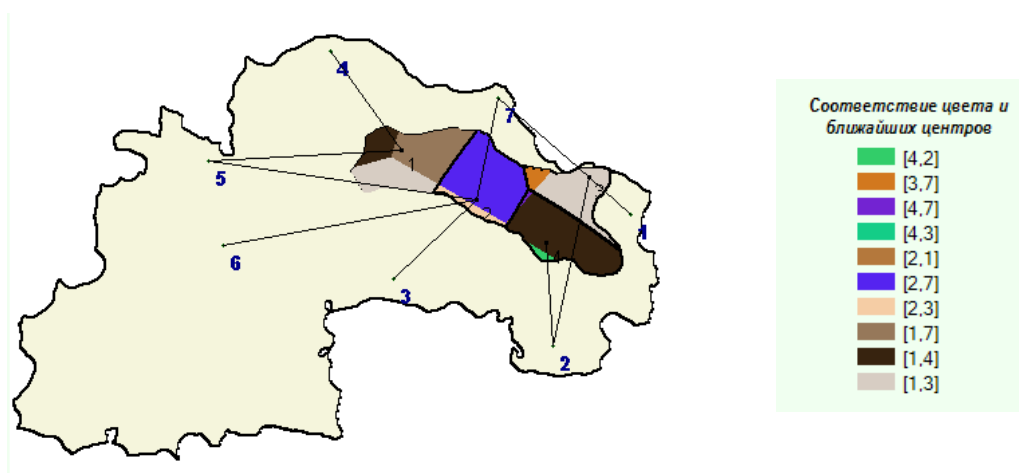


Рисунок 2.5 – Оптимальне розбиття території і схема перевозок ресурсу між центрами першого та другого етапів задачі 2.10

Таблиця 2.5

Структура зв'язків між центрами двох етапів у задачі 2.10

Номер центру I етапу $i$	Номер центру II етапу $j$	Кількість перевезеного ресурсу $v_{ij}$
3	1	0.0076
3	2	0.0072

4	2	0.1768
2	3	0.0255
1	4	0.1647
1	5	0.0281
2	5	0.1082
2	6	0.0427
2	7	0.0064
3	7	0.0995

Задача 2.11. Вихідні дані:

$N = 3$ ,  $M = 7$ ;  $\tau_1^I = (6.402; 3.212)$ ,  $\tau_2^I = (9.328; 3.894)$ ,  $\tau_3^I = (8.734; 4.796)$ ;  
 $\tau_1^{II} = (5.676; 1.848)$ ,  $\tau_2^{II} = (5.434; 5.412)$ ,  $\tau_3^{II} = (7.326; 5.5)$ ,  $\tau_4^{II} = (8.074; 2.662)$ ,  
 $\tau_5^{II} = (9.966; 4.356)$ ,  $\tau_6^{II} = (9.24; 6.468)$ ,  $\tau_7^{II} = (2.882; 3.806)$ ;  $b^{II} = (0.226; 0.121;$   
 $0.097; 0.144; 0.229; 0.067; 0.113)$ .

На рисунку 2.6 представлено оптимальне розбиття території  $\Omega$  і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів.

Для функцій  $c_i^I(x, \tau_i)$  та  $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$  параметр метрики Мінковського  $p = 1$  та  $p = 2$  відповідно,  $a_i^I = 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $a_j^{II} = 0$ ,  $j = \overline{1,7}$ ;

Умовна кількість зібраного ресурсу центрами першого етапу при цьому склала з точністю 0.001:

$$b^I = (0.267; 0.189; 0.210);$$

Значення цільового функціоналу 10.0018.

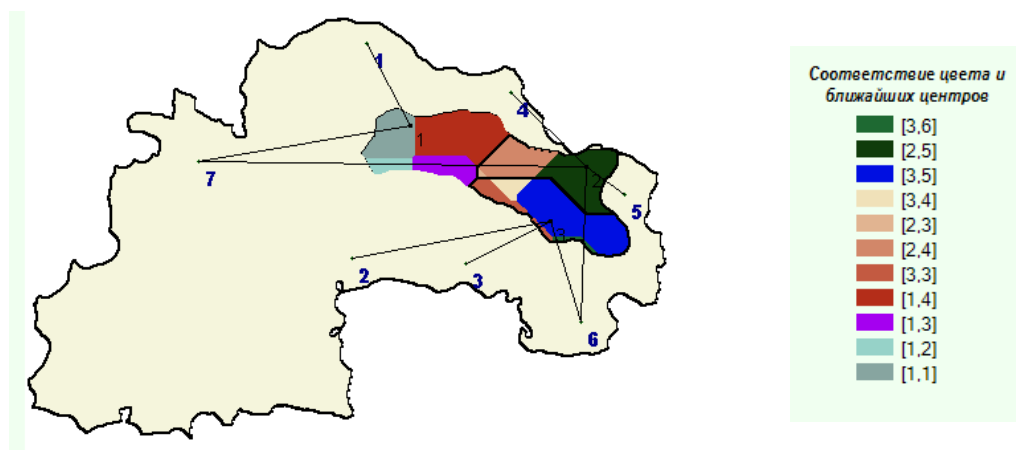


Рисунок 2.6 – Оптимальне розбиття території і схема перевозок ресурсу між центрами першого та другого етапів задачі 2.11

Кількість ресурсу, що спрямовується від центрів першого етапу до центрів другого етапу, наведено в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Структура зв'язків між центрами двох етапів у задачі 2.11

Номер центру I етапу $i$	Номер центру II етапу $j$	Кількість перевезеного ресурсу $v_{ij}$
1	1	0.1914
3	2	0.112
3	3	0.0588
2	4	0.03
2	5	0.0979
2	6	0.024
3	6	0.0397
1	7	0.0758
2	7	0.0371

#### 2.4 Висновки до другого розділу

В даному розділі було проведено математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної (гуманітарної) логістики згідно постановки завдання.

Також було розглянуто усі необхідні для її розв'язання методи та розроблено два алгоритми, програмно реалізовані в середовищі Visual Studio 2022 на мові C#.

Роботу алгоритмів було продемонстровано на модельних задачах для різних вихідних даних, результати яких описано в шести задачах даного розділу.

До кожної задачі представлено згенеровану програмою мапу із зонуванням та розбиттям на відповідні до центрів першого і другого етапу зон згідно щільності населення, а також представлено легенду до кожної з мап.

Підготовчим етапом для даного процесу було оброблено електронні карти, на яких видалено місця, що не належать території регіону, за

допомогою графічного редактора, а також відповідним чином нанесено дані щодо щільності населення.

Як висновок можна сказати, що рисунки до розглянутих задач наглядно відображають зміни не тільки зони відповідальності центрів першого етапу (закріплені території можуть бути навіть незв'язними), а й зв'язки між усіма центрами.

Також вартий уваги висновок, що є доволі очевидним те, що врахування додаткових витрат на будівництво або організацію центрів першого етапу не тільки збільшує загальні витрати, а й впливає на потужність цих центрів, тобто кількість ресурсу, яку вони можуть охопити (у разі завдання екстреної евакуації – це кількість людей, зібраних у цих центрах для організації подальшого пересування).

Важливим уточненням є те, що на даному етапі реалізації передбачається розв'язання третьої задачі (за розбиття другої задачі на декілька етапів), яка не була врахована в рамках даної кваліфікаційної роботи магістра. Дана задача стосується розподілу транспортних засобів згідно кількісного навантаження центрів першого етапу для успішної евакуації населення до центрів другого етапу.

Дана транспортна задача має характер закритого типу (тобто з центру першого етапу до другого перевозяться 100% населення) та її рішення передбачається додатковим.

Також варто зазначити, що дана модель здатна працювати і в зворотну сторону: не тільки для евакуації населення, але і для логістики гуманітарних потреб в рамках екстрених ситуацій.



## РОЗДІЛ 3.

### ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧІ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ

#### 3.1 Розробка потоку робіт (workflow) для візуалізації моделі

Метою даної кваліфікаційної роботи є моделювання та візуалізація оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики. Для досягнення поставленої мети та згідно постановки завдання, етапи процесу візуалізації та їх розробка були розглянуті більш детально.

Спираючись на проведений в першому розділі аналіз існуючих візуалізацій наукових робіт, було вирішено притримуватись більш простих способів розробки, оскільки сам по собі процес візуалізації є складним і багатокроковим та охоплює велику кількість знань різних напрямків творчості і технічних навичок.

Для успішної реалізації задуманої ідеї було вирішено розробити власний workflow, розроблений конкретно для даного проєкту і потрібний для кращого розуміння та координації подальших дій.

Першим кроком для цього було створено вимоги щодо фінального результату візуалізації.

До вимог входять наступні пункти:

- візуалізація має бути у форматі відеоролика;
- тривалість відеоролика в межах від 30 секунд до 5 хвилин;
- характер та стиль візуалізації простий, веселий, напруга від ситуації не має бути відчутна;
- задіяні персонажі чи населення має виглядати як емої;
- візуалізація має чітко та просто передати те, як працює модель;
- мета відеоролика – показати складні процеси в простій формі; презентувати модель таким чином, щоб вона була привабливою для залучення інвесторів;

- анімація та малюнки мають бути створені у двовимірному просторі;
- можлива стилістична схожість із національними характеристиками, символікою;

Також було виявлено потребу у створенні технічного завдання, без якого подальші процеси не будуть коректними.

До технічного завдання увійшли наступні пункти:

- усі малювані елементи мають бути експортовані у форматі png;
- усі елементи мають бути розбиті по папкам та перейменовані згідно їх змістовного значення;
- за потреби подальшої анімації один об'єкт може бути розбитий на незалежні один від одного файли-елементи;
- при малюванні усі картинки мають бути в двічі більшого розміру, ніж будуть використані в програмі для анімації для збереження якості;
- за використання контурів у малюванні, він має бути однаковим для всіх елементів або відрізнятися слідує певному структурному упорядкуванню;
- усі файли мають бути зібраними в єдиному місці;

Після того як вимоги та технічне завдання були сформульовані, було проведено моделювання процесів розробки відповідного для їх реалізації у вигляді workflow.

Будь-яке моделювання складних багатоетапних процесів варто розпочинати із їх розбиття на підпроцеси. Завдяки цьому стає можливим систематизувати та упорядкувати їх до єдиної структури.

Саме через це було впроваджено техніки структурно-функціонального моделювання для досягнення поставленої мети згідно постановки завдання, вимог та технічного завдання.

Моделювання було виконано за допомогою нотації IDEF0, завдяки якій було можливим детальне розбиття процесів.

Для візуалізації наступних схем моделі та її декомпозицій було використано програмне забезпечення Figma.

Отримана діаграма нульового рівня відображає наявну в процесі розробки інформацію як вхідну, що зображено на рисунку 3.1.

Вихідною визначається та інформація, що стосується ідеї, мети реалізації, загального уявлення про об'єкт, що має бути створений.

Процесами розробки візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики управляють методики візуалізації та технічне завдання. Як результат, на виході було отримано відеоролик.



Рисунок 3.1– Діаграма нульового рівня (контексна) моделі IDEF0

Далі було зроблено декомпозицію першого рівня. Варто зазначити, що робота з будь-яким творчим проєктом розподіляється на 3 основні етапи:

- pre-production – етап аналітики, відбору ідей, стилістики та інших до підготовчих процесів створення та концепції, загального вигляду проєкту.
- production – безпосередньо процес розробки, створення та реалізації задуманого;

– post-production – фінальний етап виробництва, в процесі якого результат попереднього етапу приводять до належного чистового виду з урахуванням додаткових нюансів його подальшого використання, перегляду чи реалізації.

Отриманий результат декомпозиції першого рівня діаграми показано на рисунку 3.2.

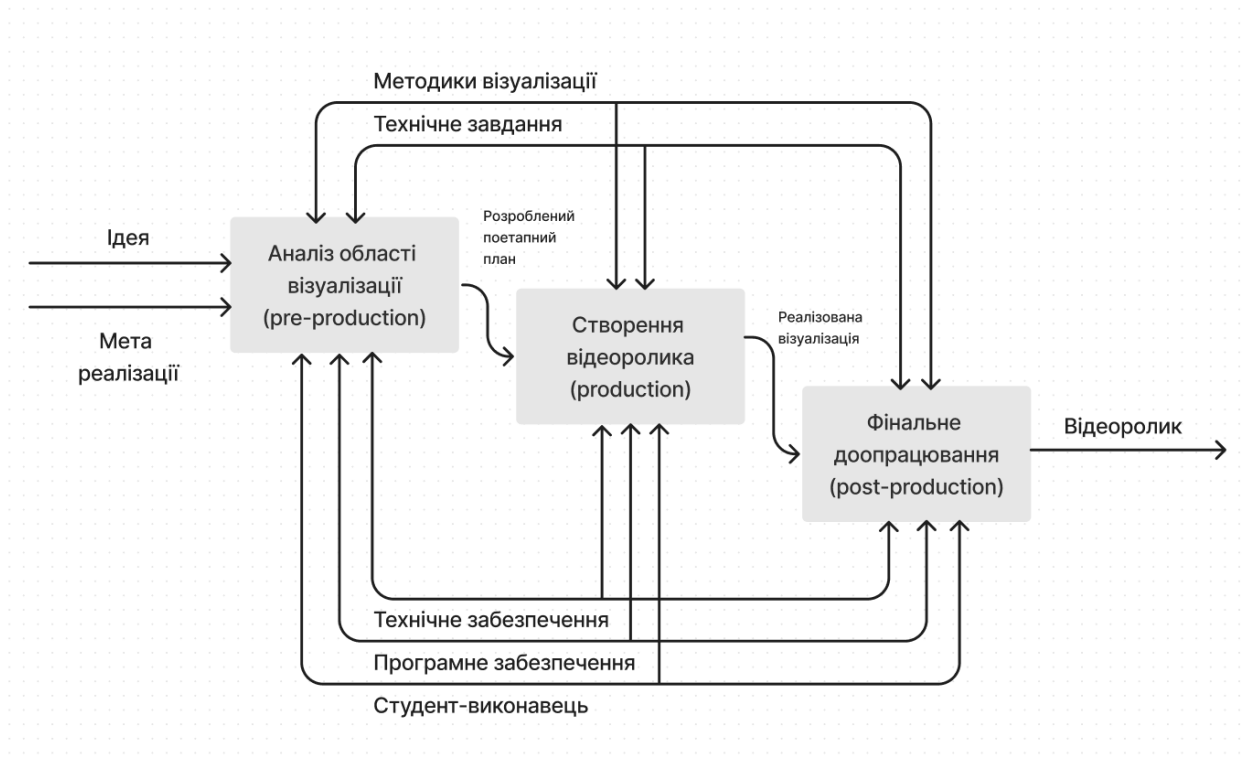


Рисунок 3.2– Декомпозиція першого рівня моделі IDEF0

В першому блоці було проведено аналіз області візуалізації, який було більш детально описано в першому розділі даної кваліфікаційної роботи, оснований на проведеному попередньо аналізі подібних до задуманої візуалізацій наукових проєктів, доступних та зрозумілих для широкого загалу людей не причетних до науки. Даний блок описаний в рамках етапу pre-production.

Другий блок присвячений етапу production. В ньому описуються всі процеси розробки візуалізації. Для даного блоку («Створення відеоролика») було розроблено декомпозицію другого рівня.

Результат проведеної декомпозиції наведено на рисунку 3.3.

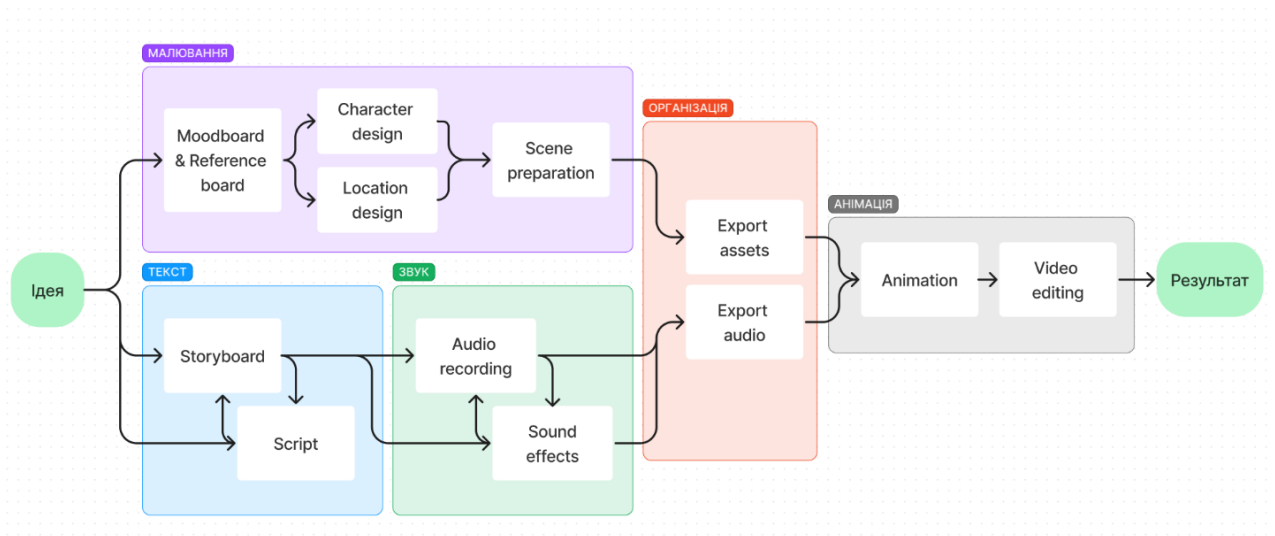


Рисунок 3.3– Декомпозиція другого рівня блоку «Створення відеоролика»

Дана декомпозиція включає в себе такі глобальні етапи як:

- малювання: включає в себе підпроцеси, пов’язані зі створенням малюнків та ілюстрацій, які будуть в подальшому анімуватись;
- текст: включає в себе створення storyboard та script; До етапу script входить текст на озвучування (у разі потреби) та текстові описи рухів об’єктів, переходи, звуковий супровід, інше; до storyboard входить готовий script та додатково розробляється раскадровка;
- звук: для даного етапу характерний пошук готових звуків чи/та запис власного аудіо супроводу, підготовка звукових ефектів, музики та їх обробка згідно описаного у попередньому етапі storyboard;
- організація: всі файли, отримані як результат попередніх етапів мають бути експортовані та організовані належним чином для того, щоб процес анімації було полегшено;
- анімація: в даний етап входить створення сцен анімації згідно раскадровки та script в storyboard, безпосередньо анімація та монтаж, кольорова корекція та збірка усіх сцен до єдиної композиції.

Третій блок декомпозиції першого рівня моделі IDEF0, що зображено на рисунку 3.2, «Фінальне доопрацювання» – присвячений етапу post-production. Для даного блоку було створено декомпозицію другого рівня, представлену на рисунку 3.4.

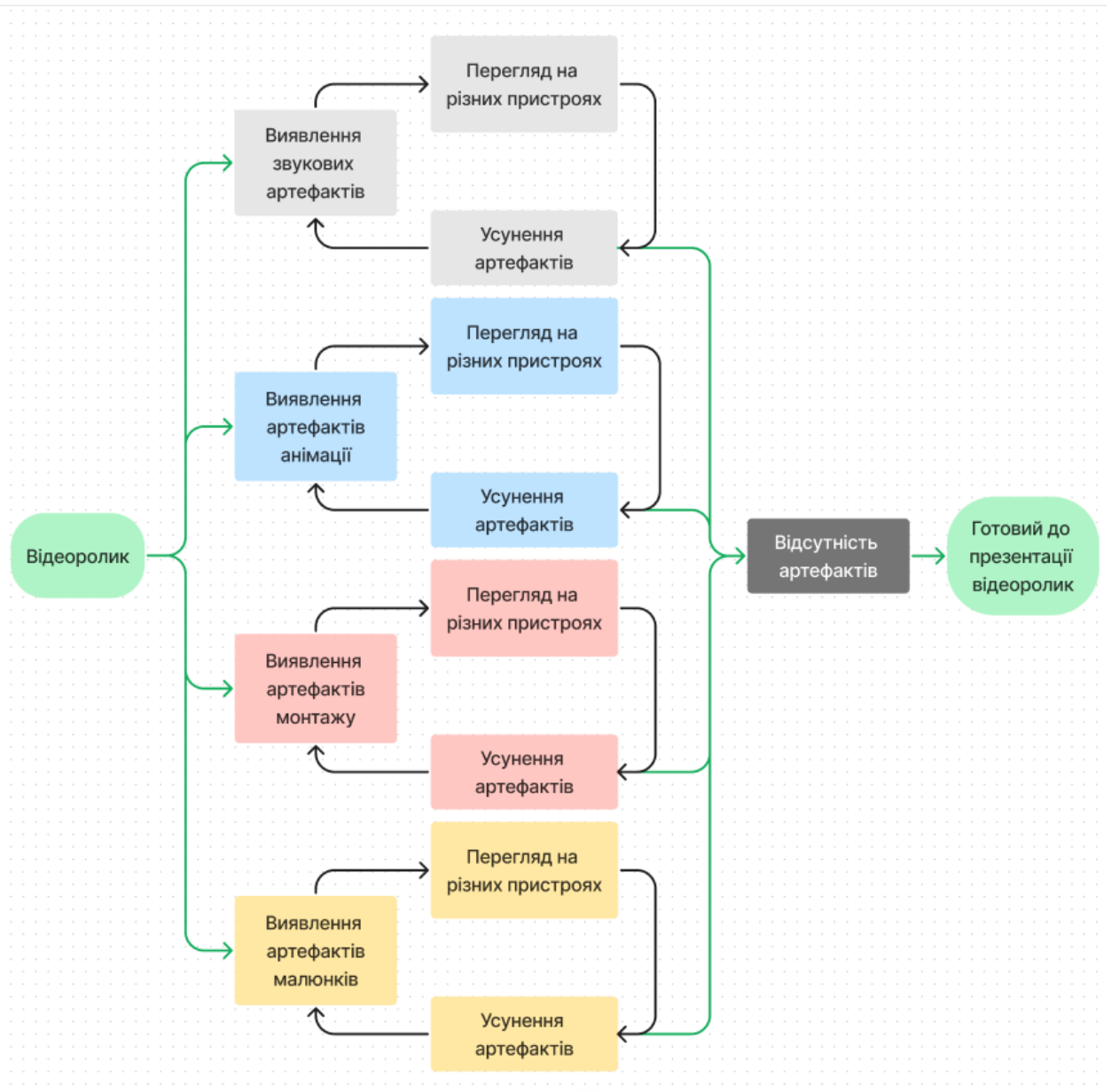


Рисунок 3.4 – Декомпозиція другого рівня «Фінальне доопрацювання»

В нього вкладено підпроцеси, що мають під собою детальний перегляд відеоролика для виявлення артефактів переходів, звуку, монтажу, малюнків чи анімації, інших некоректно відображених елементів, тощо.

Результатом даного блоку є отримання фінального відеоролику, готового до презентації. Отже, отримана модель нотації IDEF0 детально описує workflow з дотриманням етапності розробки. Між етапами наявні лінійні, циклічні та паралельні зв'язки.

Надалі було розглянуто можливості взаємодії користувача з отриманим результатом візуалізації, що наведено на рисунку 3.5 та роз'яснено за допомогою таблиці 3.1.

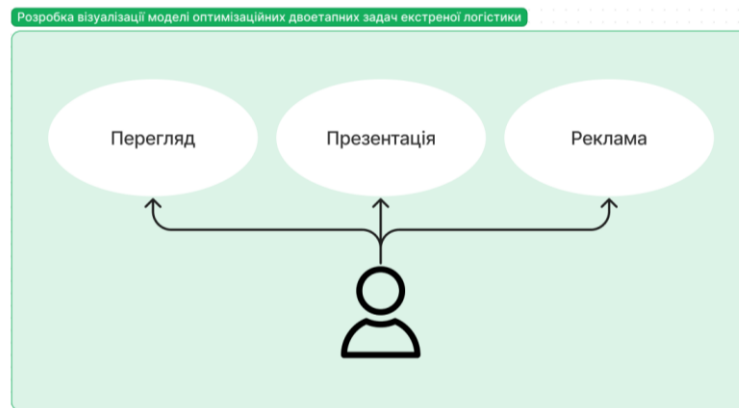


Рисунок 3.5 – Взіємодія користувача з відеороликом

Таблиця 3.1

### Опис варіантів використання

Назва	Опис
Перегляд	Функція перегляду візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики у вигляді відеоролика, отриманого як результат розробки, може набувати розповсюдження у якості загальнодоступного відео навчально-розважального характеру завдяки публікації на таких платформах чи соціальних мережах як: You Tube, Instagram, Facebook, Vimeo, Behance, TikTok, тощо.
Презентація	Функція презентації візуалізації оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики у вигляді відеоролика може бути корисною при безпосередньо презентації моделі, потрібна для пояснення її роботи широкому загалу людей не причетних до науки. Завдяки цьому збільшуються шанси на виграш у випадку виступу для здобуття гранту і реальній реалізації моделі у вигляді проєкту захисту населення, також може бути корисним на наукових конкурсах чи конференціях.
Реклама	Користувач має можливість поділитись результатами проєкту (тобто відеороликом) з іншими, що сприятиме розповсюдженню реалізованої ідеї серед людей різних сфер діяльності та вікових категорій. Також дана візуалізація може бути корисною у випадку її використання для презентації робіт студентів навчального закладу, що може допомогти у побудові маркетингу на набір студентів до відповідної спеціалізації даного навчального закладу.

### 3.2 Розробка візуалізації моделі оптимізаційних двоетапних задач

Спираючись на вимоги, технічне завдання та workflow, описані у попередньому підрозділі 3.1, проведено research стосовно концептуально схожих зображень, потрібних для створення moodboard та reference board згідно першого етапу потоку робіт, що має назву «малювання».

Отриманий moodboard та reference board створено за допомогою програмного застосунку Figma та з'єднано до єдиного зображення, комфортного для подальшої роботи, оскільки дані дошки необхідні для загального бачення ідеї та розуміння вектору стилістичного спрямування.

Результат наведено на рисунку 3.6.

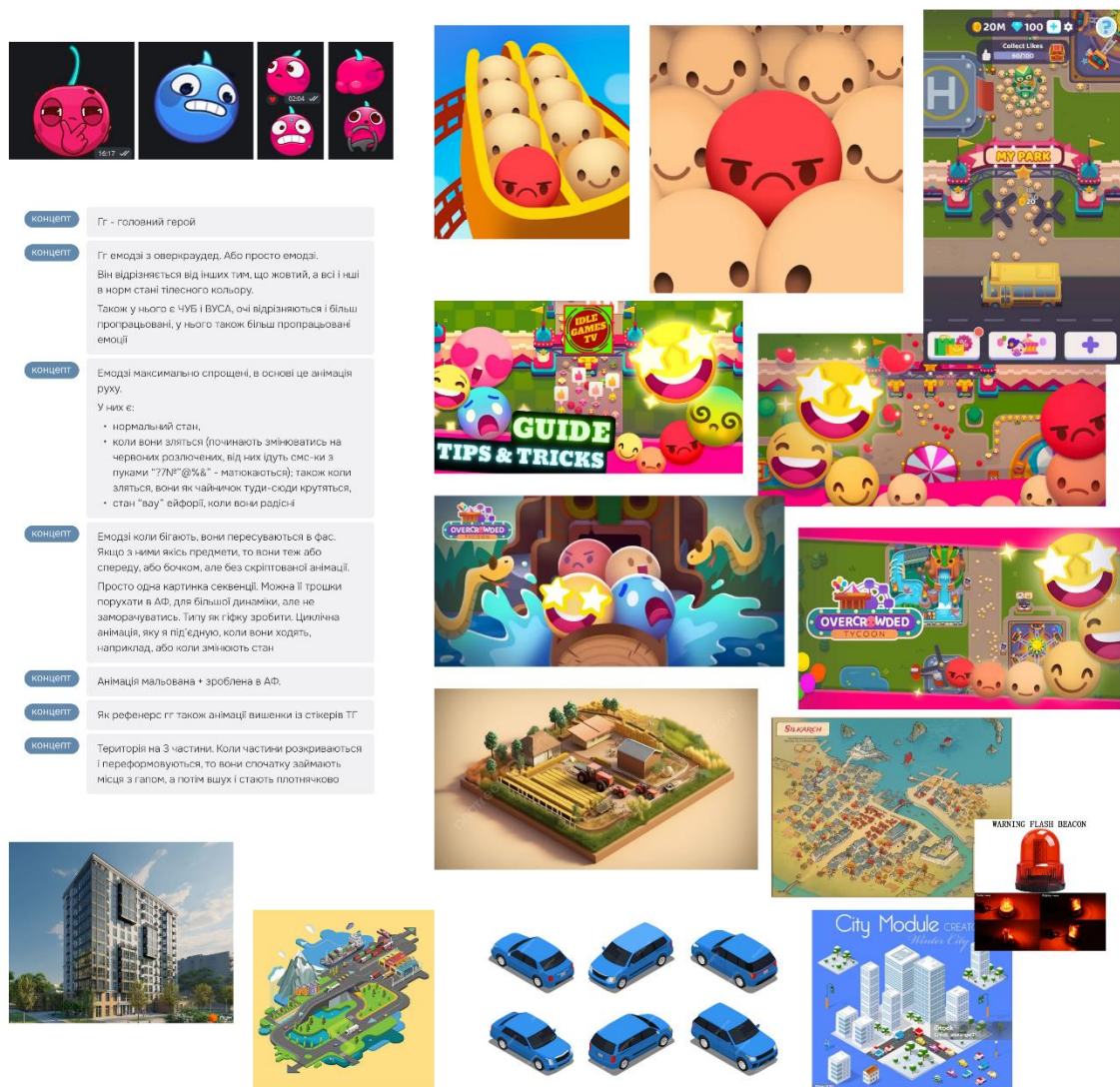


Рисунок 3.6 – Moodboard та reference board



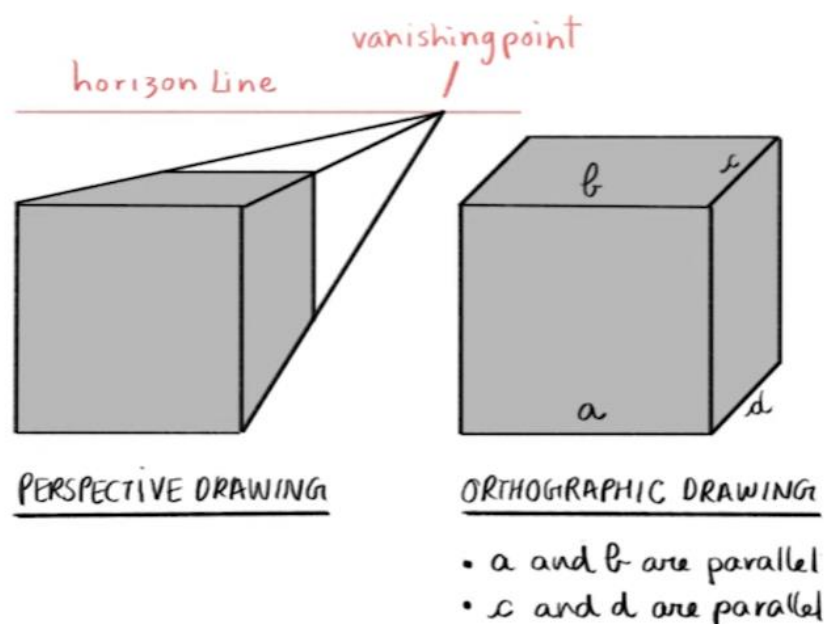
Наступним кроком проведено аналіз існуючих стилів малювання, необхідний для дотримання стилістичної єдності усіх анімованих та статичних елементів на сцені.

Варто зазначити, що обраний стиль може як полегшити подальшу анімацію, так і призвести до її беззмістовного ускладнення. Також стиль подачі має якомога краще розкривати елементи, необхідні для повноцінного розкриття ідеї візуалізації та досягнення її мети.

На сьогоднішній день існує два принципово різних підходи до створення ілюстрацій: побудова за допомогою перспективних викривлень чи навпаки – за дотримання ортогонального виду (рис. 3.7) [40].

Варто зважити переваги та недоліки обох підходів згідно їх відповідності щодо наступних пунктів:

- ілюстровані об'єкти мають легко переміщуватись по сцені не порушуючи загальний вид;
- об'єкти мають бути відносно незалежними як один від одного, так і від навколишнього середовища;
- об'єкти, що несуть вторинний акцент, мають бути уніфікованими для того, щоб на їх фоні виділялись об'єкти первинного акценту.



### Рисунок 3.7 – Перспективний та ортографічний підходи в малюванні

Отже, потрібної систематичності можна досягти притримуючись стилю ортографічної побудови ілюстрацій, оскільки використання перспективи є більш доцільним для покадрової анімації, характерною особливістю якої є малювання кожного окремого кадру відеоряду, або для створення статичних повноцінних ілюстрацій чи картин.

Це пояснюється тим, що при роботі із перспективою, при переміщенні будь-якого об'єкта сцени, його точка викривлення буде зміщуватись відносно лінії сходження (vanishing point), що прагне до лінії горизонту (horizon line), а отже і усі об'єкти сцени стають напряму залежними від свого положення в просторі, що суперечить поставленим цілям та описаним пунктам (рис. 3.7).

Серед існуючих розробок ортогонального виду малювання ілюстрацій, необхідних для подальшої анімації та візуалізації моделі, обрано підхід, що активно використовується в індустрії ігор.

Згідно такого підходу кожен окремий об'єкт має термінологічну назву «asset» у тому випадку, якщо він являє собою незалежну одиницю, з якою можна взаємодіяти, анімувати чи перемішувати в будь-яку точку сцени не порушуючи її загального виду, а також asset є складовою самої сцени. В даному випадку він є найменшою повноцінною одиницею. Приклад сцени гри за дотримання описаного підходу, наведено на рисунку 3.8.

Проте спираючись на даний підхід варто зазначити, що подача об'єктів у ортогональному вигляді не є достатньою умовою для їх створення, оскільки обраний кут та висота мають співпадати одночасно для всіх об'єктів сцени. Таким чином в порядку уніфікації існує три основні типи ортографічної проекції, різні за кутом та висотою огляду, що використовуються в індустрії ігор за дотримання обраного підходу.

Усі вони відносяться до проекції виду axonometric (рис. 3.9), а саме:

1. Isometric projection.
2. Dimetric projection.

## 3. Trimetric projection.



Рисунок 3.8 – Приклад сцени, створеної за допомогою assets

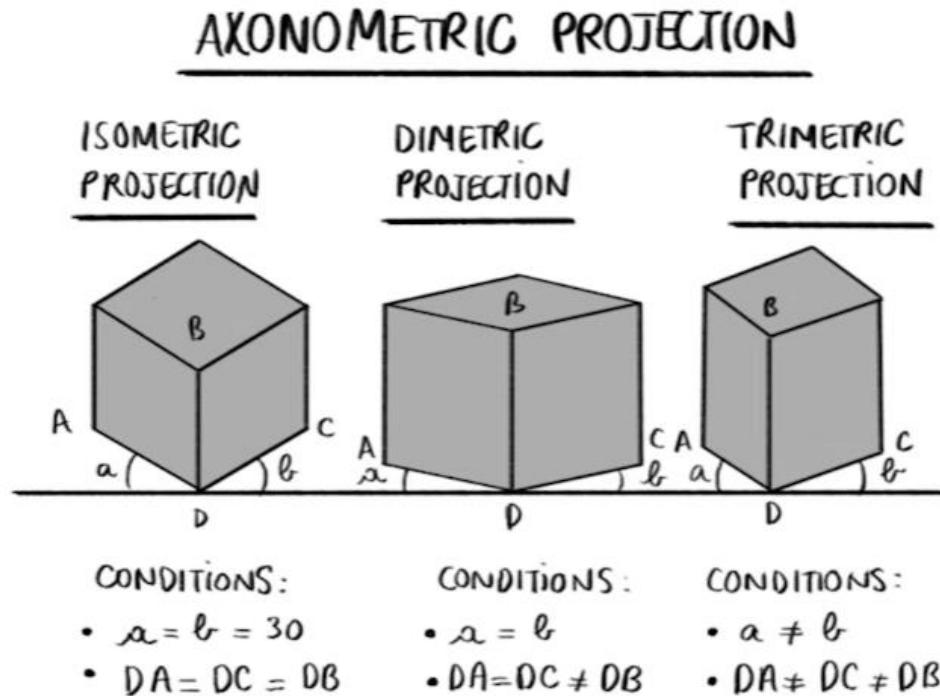


Рисунок 3.9 – Проекції типу ахонOMETRIC ортогонального виду

Спираючись на рисунок 3.7 [40], варто зазначити, що усі три типи проєкцій наслідують ортографічний вид, ігноруючи перспективні викривлення і таким чином відносяться до категорії псевдо перспективних.

Проаналізуємо кожен із них та розглянемо більш детально.

Для побудови проєкції типу *isometric* необхідно розібрати структурну побудову його сітки, найменша одиниця якої складається із куба.

Даний куб має рівнозначні кути відносно дотичного до його нижньої точки горизонту  $\alpha = \beta = 30^\circ$  та сторони подібного куба рівні  $DA = DC = DB$ .

Для типу проєкції *dimetric* характерне наслідування кутів  $\alpha = \beta$ , за виключенням висоти огляду на об'єкт, який впливає на значення кутів  $\alpha$  та  $\beta$ , при чому  $\alpha = \beta$ , та порушує нерівність сторін  $DA = DC \neq DB$ .

На відміну від двох попередніх, третій тип проєкції – *trimetric*, має як різні кути  $\alpha \neq \beta$ , так і сторони  $DA \neq DC \neq DB$ .

Емпіричним шляхом виявлено, що найскладнішим для реалізації є тип *trimetric*, оскільки при відзеркаленні об'єкта, порушується його структурна цілісність із сценою, що потребує його повного перемалювання, а отже ускладнює процес.

Для подальшого опрацювання обрано тип *isometric*, який підходить для реалізації поставленої задачі найкраще за рахунок як можливості відзеркалити об'єкт без його значних втрат відносно загальної цілісності, так і високого кута огляду, завдяки якому утворюється додаткове місце для анімації супутніх об'єктів першого пріоритету атракції.

Більш детально тип *isometric* описано на рисунку 3.10 [40].

## ISOMETRIC PROJECTION

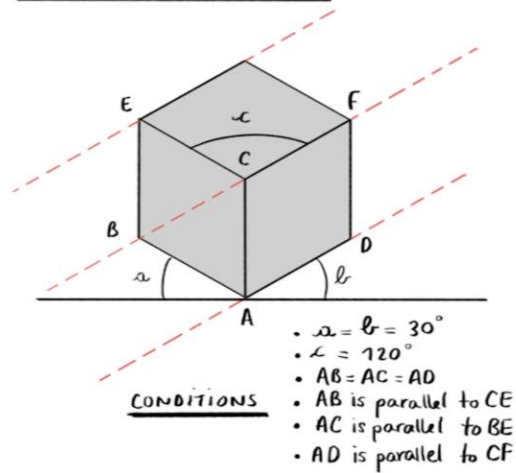


Рисунок 3.10 – Опис проєкції типу isometric

Після описаних вище уточнень можливе предметне опрацювання дизайну персонажів та навколишньої середовища в рамках продовження блоку «модельювання», зазначеного у workflow.

Перед початком роботи особливого значення набуває побудова сітки обраного типу проєкції. Для isometric projection було створено наступну сітку, наведену на рисунку 3.11, за допомогою інструменту guide lines.

В якості програмного забезпечення було обрано Clip Studio Paint.

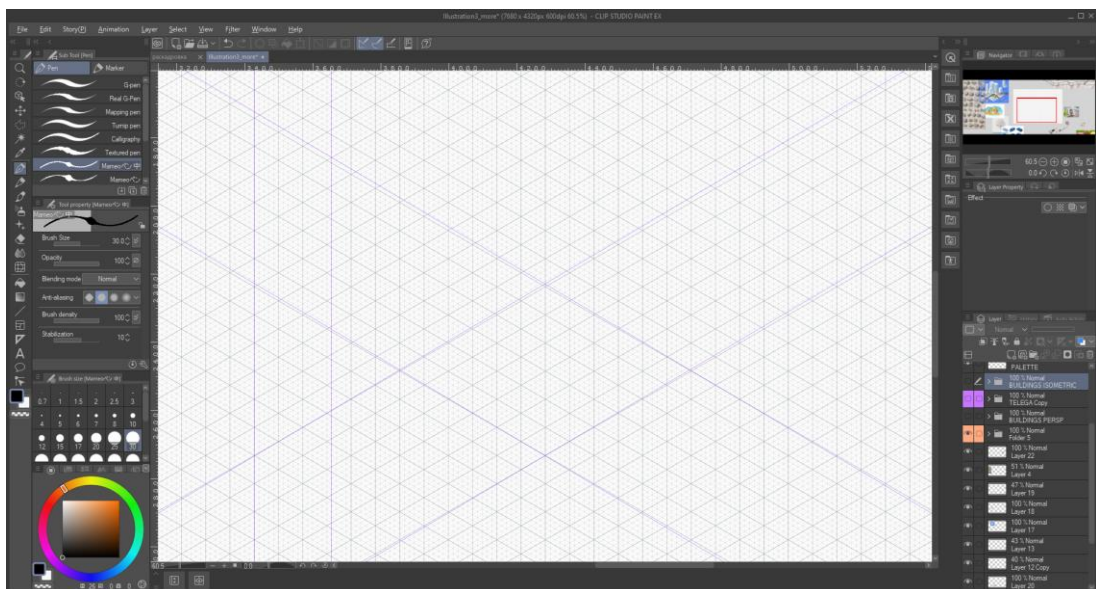


Рисунок 3.11 – Сітка для isometric projection

Серед існуючих алгоритмів створення зображення ілюстративного характеру (asset) обрано наступний:

1. Створення скетчу (рис. 3.12).
2. Створення допоміжних ліній побудови (рис. 3.12).
3. Малювання чистового line art (рис.3.13).
4. Нанесення diffuse color з урахуванням прозорості фону (рис.3.13).
5. Додавання кольору на деталі (рис.3.14).
6. Нанесення текстурних мап (рис.3.14).
7. Створення тіней (рис.3.15).
8. Експорт ілюстрованого зображення у форматі png.
9. Кінець алгоритму.

Важливим уточненням є те, що описаний процес створення локацій та дизайну персонажів паралельний процесу формування storyboard та script, що знаходиться у блоку «текст» розробленого workflow, оскільки надає точний перелік того, що має відбуватись на сцені.

Після опрацювання персонажів та оточення, всі assets перевіряються на відповідність згідно storyboard та готують до експорту файли, організовуючи їх згідно змістовного значення для подальшого імпорту у редактор для анімації.

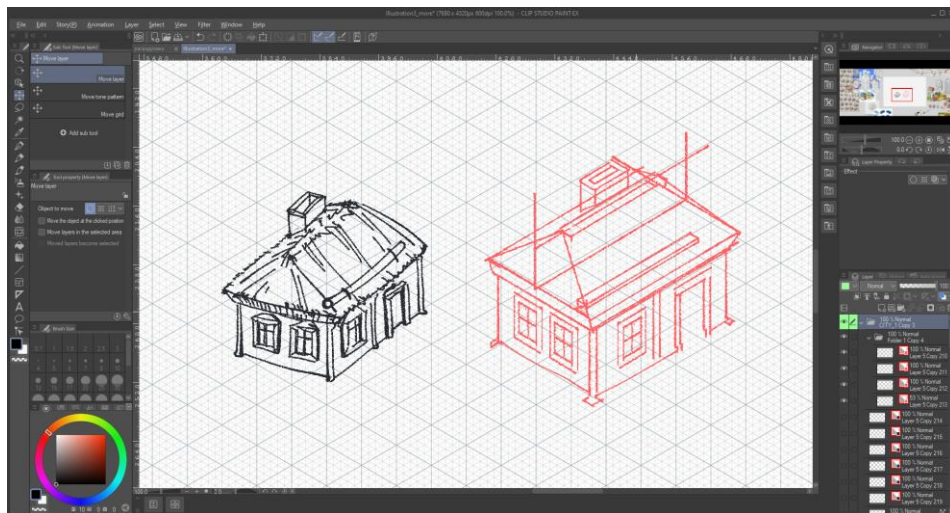


Рисунок 3.12 – Створення скетчу та допоміжних ліній побудови на прикладі будинку

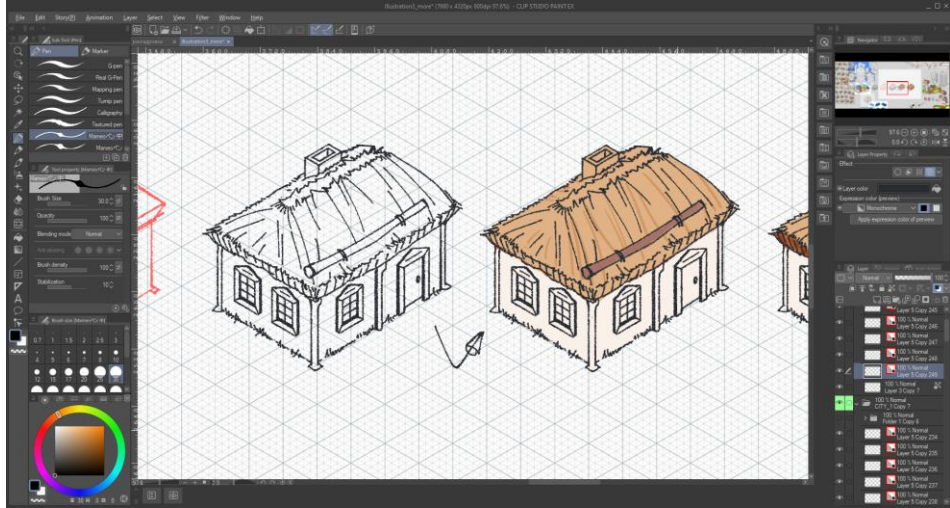


Рисунок 3.13 – Малювання чистового line art та нанесення diffuse color на прикладі будинку

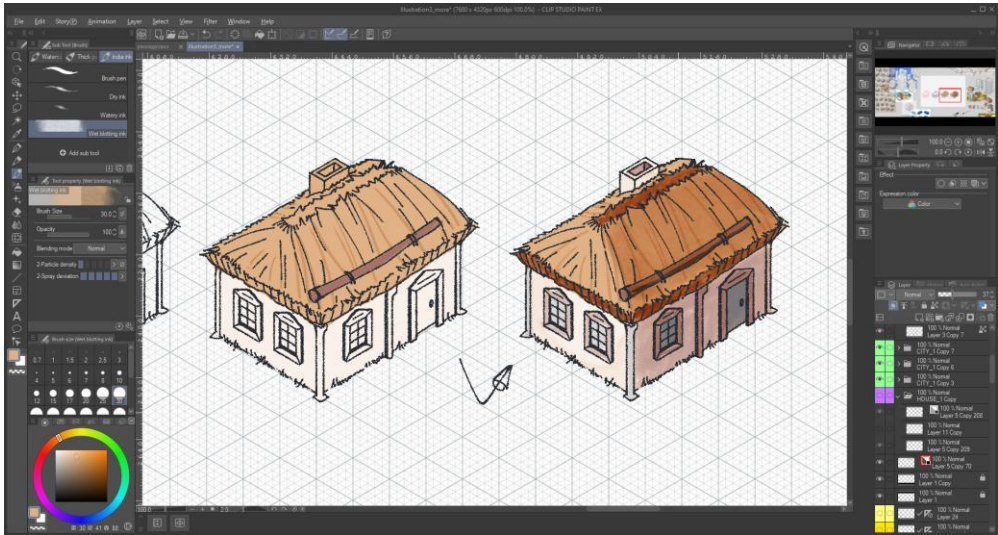


Рисунок 3.14 – Додавання кольору, нанесення текстурних мап на прикладі будинку

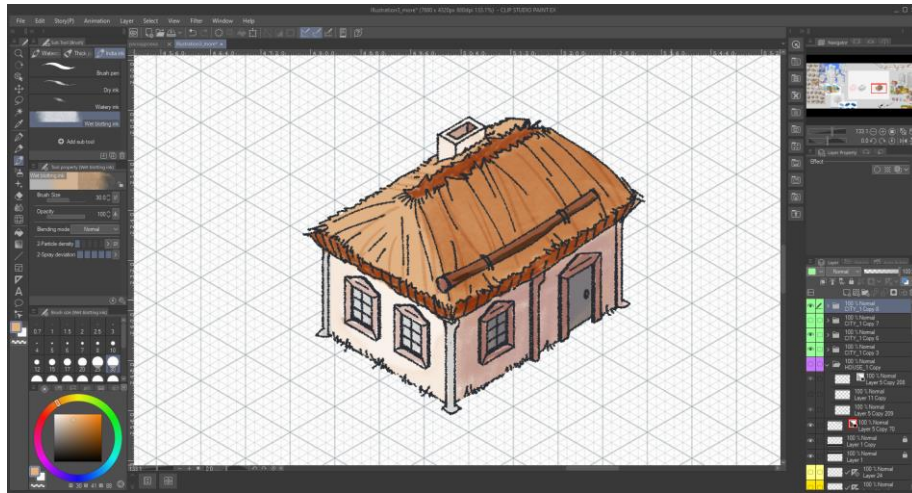


Рисунок 3.15 – Створення тіней на прикладі будинку

Згідно блоку «текст» workflow паралельно розробляється script та storyboard.

Script являє собою текстовий документ, написаний сценарною мовою. Він складається із коротких пояснень того, що відбуватиметься на сцені, описує дії, опрацьовує текст на озвучування та його кореляцію із анімацією, зазначаються звукові ефекти, переходи монтажу, описуються додаткові пояснення для кращого розуміння переліку подій.

Storyboard поєднує в собі дані, отримані із script, та додає візуальну розкадровку, що супроводжує створені текстові описи. Дані два етапи можливо створювати паралельно один одного, оскільки на даному етапі картинка є допоміжною описам ідей, записаних в script.

Даний етап вважається завершеним у випадку, якщо досягнуто бажаної деталізації.

Створений storyboard наведено на рисунку 3.16.



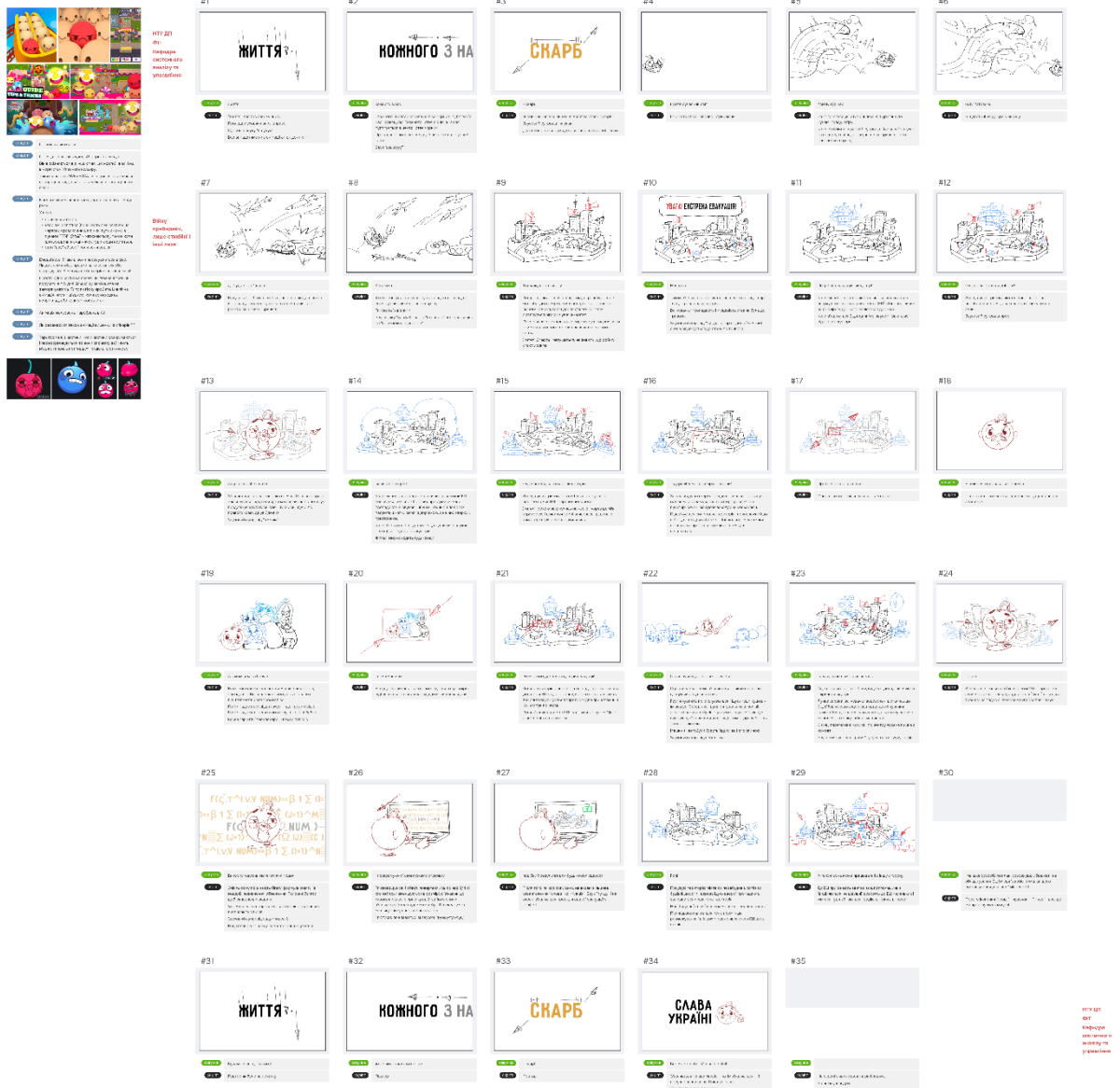


Рисунок 3.16 – Розроблений storyboard

На рисунку 3.17 та 3.18 показано збільшений варіант рисунку 3.16 для детальнішої ілюстрації вигляду декількох сцен.



Рисунок 3.17 – Наближений варіант деяких сцен 11 та 12 storyboard

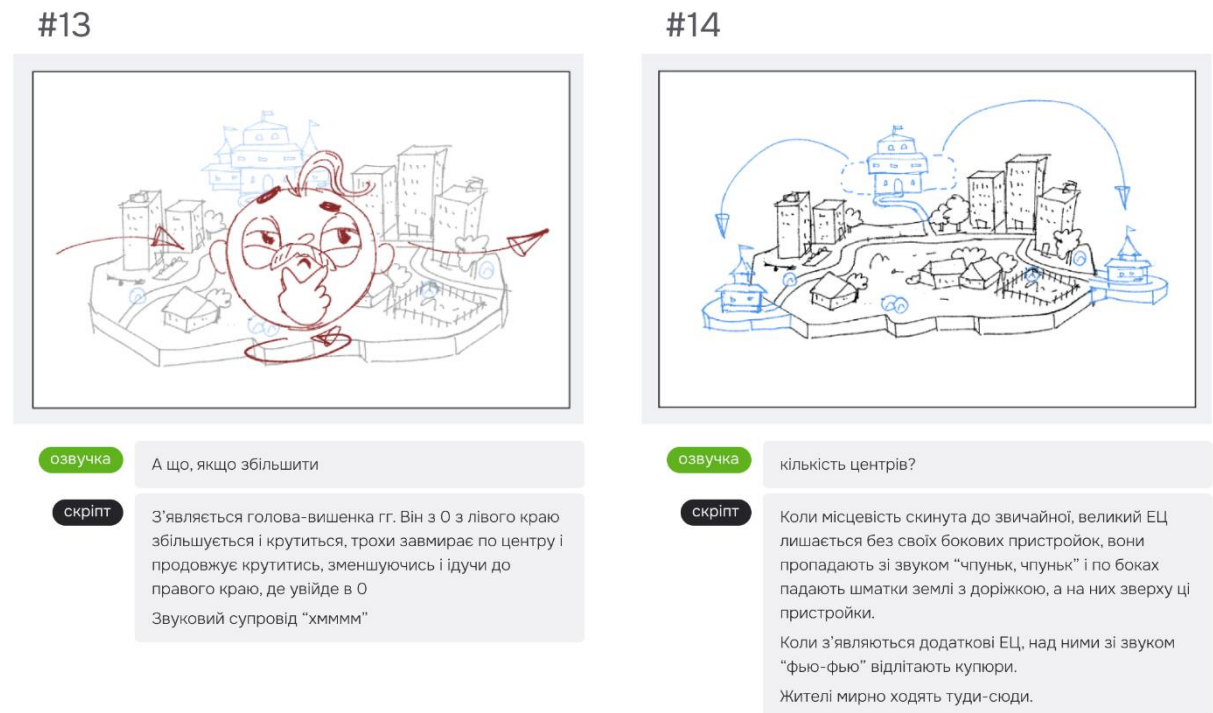


Рисунок 3.18 – Наближений варіант деяких сцен 13 та 14 storyboard

Після закінчення даного етапу наступним кроком проведено роботу із підбором мелодії, звукових ефектів та озвучування, описаних в storyboard.

Звуковий супровід (фонова мелодія) взято із треків You Tube фонотеки, твори якої публікуються за згоди авторів із відкритою ліцензією.

Озвучування та допоміжні звукові ефекти записано на диктофон смартфона або знайдено серед відкритих джерел.

Усі знайдені та записані аудіодоріжки експортовано у формат mp3, перейменовано та організовано до відповідної папки для подальшого імпорту у наступний редактор.

Наступним етапом розробки є анімація та монтаж анімованих сцен до єдиної композиції. Для спрощення роботи заанімовані елементи згрупувалися за допомогою функції precompose з можливістю вкладення.

В рамках post-production, описаного декомпозицією другого рівня блоку «фінальне доопрацювання» workflow, відеоролик переглянуто на різних пристроях за різних умов для виявлення та усунення артефактів:

- звукових ефектів та озвучування;
- анімації та монтажу;
- задіяних assets;
- інше.

Отже, отриманий відеоролик придатний до перегляду. Нижче наведено скріншоти деяких сцен наведених на рисунках 3.19-3.21.



Рисунок 3.19 – Одна із сцен готового до перегляду анімованого відео



відеоролика, метою якого є залучення інвесторів та розповсюдження складних моделей для широкої аудиторії глядачів завдяки простій та зрозумілій подачі її концепції та за постановки завдання.

Згідно проведеного в першому розділі аналізу існуючих візуалізацій наукових робіт та на основі проведених висновків, було створено вимоги та технічне завдання щодо розробки візуалізації.

Наступним кроком було створено потік робіт (workflow) за допомогою нотації IDEF0 з двома декомпозиціями другого рівня та розроблено план реалізації задуманої ідеї.

За дотримання етапності було успішно проведено етапи pre-production, production та post-production. В рамках даного розділу було використано наступне програмне забезпечення:

- Figma;
- Clip Studio Paint;
- After Effects.

Під час виконання роботи було проведено роботу над наступними процесами:

- розроблено та експортовано assets, підготовлені до анімації;
- створено storyboard та script;
- знайдено музичний супровід та створено звукові ефекти;
- записано дикторський голос;
- занімовано відеоролик та змонтовано до єдиної композиції.

Як результат, було отримано коротку презентацію у вигляді гумористичного відео, що у веселій формі розповідає про роботу оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

## ВИСНОВКИ

Дана кваліфікаційна робота магістра була розбита на два глобальні етапи:

1. Математичне моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

2. Візуалізація оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

В рамках математичного моделювання для досягнення поставленої мети було створено постановку завдання в ході виконання якої було вирішено наступні завдання:

1. Проаналізовано методи та алгоритми, що використовуються для розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття множин в рамках екстреної (гуманітарної) логістики.

2. Створено математичну модель оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики згідно постановки завдання.

3. Розглянуто методи та створено два алгоритми, що були необхідними для розв'язання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

4. За допомогою програмного застосунку було розв'язано математичну модель для різних вихідних даних на прикладі модельних задач.

В першому розділі було проаналізовано концептуальний підхід існуючих на сьогоднішній день методів та алгоритмів розв'язання багатоетапних задач оптимального розбиття множин, описаних науковцями з усього світу та узагальнено основні задачі даного виду логістики.

В другому розділі було проведено математичне моделювання згідно постановки завдання та розглянуто усі необхідні для розв'язання методи, розроблено два алгоритми, програмно реалізовані в середовищі Visual Studio 2022 на мові C#. Роботу алгоритмів було продемонстровано на модельних задачах для різних вихідних даних.

Також важливим уточненням до даного розділу є те, що на даному етапі реалізації передбачається розв'язання третьої задачі, розв'язання якої

не було враховано в рамках даної кваліфікаційної роботи магістра, і яка стосується розподілу транспортних засобів згідно кількісного навантаження центрів першого етапу для успішної евакуації населення до центрів другого етапу. Рішення даної задачі наразі є додатковим та може бути реалізовано в майбутньому.

Також варто зазначити, що дана модель здатна працювати і в зворотну сторону: не тільки для евакуації населення, але і для логістики гуманітарних потреб в рамках екстрених ситуацій.

В рамках візуалізації математичного моделювання оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики, для досягнення поставленої мети було створено постановку завдання в ході виконання якої було вирішено наступні завдання:

1. Проведено аналіз існуючих візуалізацій наукових проєктів.
2. Складено потік робіт (workflow) та план реалізації задуманої ідеї.
3. Створено візуалізацію у вигляді короткого відеоролика-презентації.

В першому розділі даної кваліфікаційної роботи магістра, було розглянуто актуальність проблеми, що полягає у важкості передачі концепції складних систем для презентації їх широкій аудиторії людей, що може сприяти поширенню даного виду логістики та залучати спеціалістів, необхідних для якісної її реалізації та впровадження в якості проєкту захисту населення.

В рамках даного розділу було проаналізовано існуючі презентації наукових проєктів у форматі коротких відеороликів науково-популярного характеру та виявлено необхідні комбінації вимог для успішного досягнення поставленої мети.

В третьому розділі було реалізовано візуалізацію математичної моделі оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики у вигляді короткого відеоролика, виконаного за постановки завдання.

Було створено вимоги та технічне завдання щодо розробки візуалізації, створено потік робіт (workflow) за допомогою нотації IDEF0 з двома декомпозиціями другого рівня та розроблено план реалізації задуманої ідеї.

Як результат, було отримано коротку презентацію у вигляді гумористичного відео, що у веселій формі розповідає про роботу оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики.

В подальшому є можливим використовувати дану розробку для візуалізацій даної моделі, відштовхуючись від іншої мети.

Наприклад:

- створення покрокового алгоритму дій під час НС, створеного для дітей та підлітків;
- для більш детальної презентації моделі в інвестиційних рамках;
- для розгорнутого представлення як науковий проєкт.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. H. Abdelgawad and B. Abdulhai, «Emergency evacuation planning as a network design problem: a critical review,» *Transportation Letters*, vol. 1(1), P. 41–58, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3328/TL.2009.01.01.41-58>.
2. T.N. Dhamala, «A survey on models and algorithms for discrete evacuation planning network problems,» *Journal of industrial and management optimization*, vol. 11(1), P. 265–289, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.265>.
3. L. Qin, W. Xu, X. Zhao and Y. Ma, «Typhoon track change-based emergency shelter location-allocation model: a case study of Wenchang in Hainan province, China,» *Inj Prev.*, vol. 26(3), P. 196–203. Jun. 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1136/injuryprev-2018-043081>.
4. X. Zhao, G. Coates and X. Wei, «A hierarchical mathematical model of the earthquake shelter location-allocation problem solved using an interleaved MPSO–GA,» *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, vol. 10(1), P. 1712–1737, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/19475705.2019.1609605>.
5. Y. Hong, D. Li, Q. Wu and H. Xu, «Dynamic Route Network Planning Problem for Emergency Evacuation in Restricted-Space Scenarios,» *Journal of Advanced Transportation*. *Hindawi Journal of Advanced Transportation*, vol. 2018, Article ID 4295419, 13 pages. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2018/4295419>.
6. L. Han, C. Gong, L. Gu, H. Qiao, A. Zhang and M. Liu, «A Multi-Zone Staged Indoor Emergency Evacuation Algorithm Based on Time Equalization,» *ISPRS Int. J. Geo-Inf.*, vol. 10, 499, Jul. 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/ijgi10080499>.
7. L. Jin, M. Xiang, S. Chen, X. Zheng, R. Yao and Y. Chen, «An Orderly Untangling Model against Arching Effect in Emergency Evacuation Based on Equilibrium Partition of Crowd,» *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol.

2017, Article ID 2757939, 7 pages, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2017/2757939>.

8. L. Ozdamar and Ertem M. Alp, «Models, solutions and enabling technologies in humanitarian logistics,» *European Journal of Operational Research*, vol. 244, no.1, P. 55–65, 2015.

9. I.M. Hezam and Mk. Nayeem, «A Systematic Literature Review on Mathematical Models of Humanitarian Logistics,» *Symmetry*, vol. 13(1):11, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/sym13010011>.

10. V. Bayram and H. Yaman, «Shelter location and evacuation route assignment under uncertainty: a benders decomposition approach,» *Transportation Science*, vol. 52(2), P. 416–436, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1287/trsc.2017.0762>.

11. A. Moreno, D. Alem, D. Ferreira and A. Clark, «An effective two-stage stochastic multi-trip location-transportation model with social concerns in relief supply chains,» *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 269, P. 1050–1071, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.02.022>.

12. V. Bayram and H. Yaman, «A stochastic programming approach for Shelter location and evacuation planning,» *RAIRO Oper. Res.*, vol. 52, P. 779–805, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1051/ro/2017046>.

13. O.B. Kınay, B.Y. Kara, F. Saldanha-da-Gama and I. Correia, «Modelling the shelter site location problem using chance constraints: a case study for Istanbul,» *European Journal of Operational Research*, vol. 270(1), P. 132–145, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.006>.

14. М.В. Новожилова, Р.В. Гудак та О.І. Чуб, «Оцінка ефективності засобів ліквідації надзвичайної ситуації природного характеру методами нечіткої логіки,» *Комунальне господарство міст*, том 1, вип. 154, С. 126–132, 2020. doi: 10.33042/2522-1809-2020-1-154-126-132.

15. D. Sarma, U.K. Bera and A. Das, «A mathematical model for resource allocation in emergency situations with the co-operation of NGOs under uncertainty,» *Comput. Ind. Eng.*, 137, (2019).

16. L. Shen, F. Tao, Y. Shi and R. Qin, «Optimization of Location-Routing Problem in Emergency Logistics Considering Carbon Emissions,» *International Journal of Environmental Research and Public Health.*, 16(16): 2982, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/ijerph16162982>.

17. Арон Д.В., Волков А.Д., Дьяков С.В. и Зарянов А.В. «Моделирование зон аварийного планирования защитных мероприятий при радиационной аварии на данных по территории префектуры Фукусима,» *Радиация и риск*, том 29, № 1, С. 140–153, 2020. doi: 10.21870/0131-3878-2020-29-1-140-153.

18. H. Seraji, R. Tavakkoli-Moghaddam and R. Soltani, «A two-stage mathematical model for evacuation planning and relief logistics in a response phase,» *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 12, P. 129–146, 2019.

19. J. Geng, H. Hou and S. Geng, «Optimization of Warehouse Location and Supplies Allocation for Emergency Rescue under Joint Government–Enterprise Cooperation Considering Disaster Victims’ Distress Perception,» *Sustainability*, vol. 13, 10560, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/su131910560>.

20. F. Haghpanah and H. Foroughi, «Optimal Shelter Location-Allocation during Evacuation with Uncertainties: A Scenario-Based Approach,» arXiv:1802.05775, *Optimization and Control*, 2018.

21. X. Zhao, W. Xu, Y. Ma and F. Hu, «Scenario-Based Multi-Objective Optimum Allocation Model for Earthquake Emergency Shelters Using a Modified Particle Swarm Optimization Algorithm: A Case Study in Chaoyang District, Beijing, China,» *PLoS One*, 10(12): e0144455, Dec. 2015. [Online]. Available: doi: 10.1371/journal.pone.0144455.

22. Kavroudakis, D., Christos, K., and Panagiotis, T. (2019). «Location-Allocation Modeling for Emergency Evacuations in the Aegean Sea,» In: Stratigea, A., Kavroudakis, D. (eds) *Mediterranean Cities and Island Communities*. Progress in IS. Springer, Cham. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99444-4\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99444-4_11).

23. Xiujuan Zhao, Jianguo Chen, Wei Xu, Shiyan Lou, Peng Du, Hongyong Yuan and Kuai Peng Ip. «A Three-Stage Hierarchical Model for An Earthquake Shelter Location-Allocation Problem: Case Study of Chaoyang District, Beijing, China,» *Sustainability*, MDPI, vol. 11(17), pages 1-18, Aug. 2019. doi:10.3390/su11174561.

24. А.О. Дашкевич, «Метод розташування точок на площині із урахуванням їх взаємної досяжності,» *Вісник Національного технічного університету "ХПІ"*, № 1 (5), С. 69–75, 2021. DOI: 10.20998/2411-0558.2021.01.05.

25. W. Jing and K. Shimada, «Model-based view planning for building inspection and surveillance using voxel dilation, medial objects, and random-key genetic algorithm,» *Journal of Computational Design and Engineering*, vol. 5, no. 3, P. 337–347, 2018.

26. M.-L. Xu, H. Jiang and X.-G. Jin, «Crowd simulation and its applications: recent advances,» *Journal of Computer Science and Technology*, vol. 29, no. 5, P. 799–811, 2014.

27. W. Wang, B. Tang, X. Fan, [et al.] «Efficient visibility analysis for massive observers,» *Procedia Computer Science*, vol. 111, P. 120–128, 2017.

28. A. Darvishan and Gino J. Lim, «Dynamic network flow optimization for real-time evacuation reroute planning under multiple road disruptions,» *Reliability Engineering and System Safety*, Elsevier, vol. 214(C), 2021. doi: 10.1016/j.ress.2021.107644.

29. S. Kamishetty and P. Paruchuri, «Towards a Better Management of Emergency Evacuation using Pareto Min Cost Max Flow Approach,» in *Proceedings of the 6th International Conference on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems (VEHITS 2020)*, P. 237–244, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5220/0009395302370244>.

30. G. Gupta and P. Paruchuri, «Effect of human behavior on traffic patterns during an emergency,» in *IEEE 19th International Conference on Intelligent*

Transportation Systems (ITSC), 2052–2058, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ITSC.2016.7795888>.

31. S.-J. Yoo and S.-H. Choi, «Indoor AR Navigation and Emergency Evacuation System Based on Machine Learning and IoT Technologies,» in IEEE Internet of Things Journal, vol. 9, no. 21, P. 20853–20868, Nov. 2022. doi: 10.1109/JIOT.2022.3175677.

32. D.A. Muhammed, T.A. Rashid, A. Alsadoon, N. Bacanin, P. Fattah, M. Mohammadi and I. Banerjee, «An Improved Simulation Model for Pedestrian Crowd Evacuation,» Mathematics, 8(12):2171, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/math8122171>.

33. Primer. Simulating Foraging Decisions. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=nsVD8VPh96w> (дата звернення: 01.12.2023).

34. Primer. Simulating Green Beard Altruism. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=goePYJ74Ydg> (дата звернення: 01.12.2023).

35. Primer. How To Catch A Cheater With Math. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=XTcP4oo4JI4> (дата звернення: 25.11.2023).

36. 3blue1brown. The split necklace puzzle (with a surprise topological solution) URL: <https://youtube.com/shorts/Cm-zmm0nANo?si=gNzXVbSNjUKjDdvU> (дата звернення: 25.11.2023).

37. 3blue1brown. Fourier series URL: <https://youtube.com/shorts/nXIHBYB0Gp70?si=zahXNk2-R3co2euQ> (дата звернення: 20.11.2023).

38. BostonDynamics. Safety first URL: [https://youtube.com/shorts/\\_OfnXrUvuc?si=cudW3n3Z3mfupS90](https://youtube.com/shorts/_OfnXrUvuc?si=cudW3n3Z3mfupS90) (дата звернення: 20.11.2023).

39. BostonDynamics. Atlas scuttles URL: <https://youtube.com/shorts/FFJqC0sPfTA?si=lpPhhrCkNeiVqSmu> (дата звернення: 20.11.2023).

40. Lola. Steps By Step Guide To Create An Isometric Illustration On Clip Studio Paint URL: <https://youtu.be/3w15DjNuAAc?si=K6vB356J3ARWVvyu>  
(дата звернення: 15.11.2023).

## ДОДАТОК А. ВІДОМІСТЬ МАТЕРІАЛІВ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ

№ з/п	Позначення				Найменування	Кількість аркушів	Примітки		
1									
2					Документація				
3									
4	САУ.КР.22.15.ПЗ				Пояснювальна записка	55	Формат А4		
5									
6					Демонстраційний матеріал	15	Презентація на CD-R		
7									
8					Копія роботи	1	Диск CD-R		
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
					САУ.КР.22.15.ДА.ПЗ.				
Змін.	Аркуш	№ докум.	Підпис	Дата					
Розроб.	Рейс А. С.				<b>Матеріали кваліфікаційної роботи</b>	Літ.	Аркуш	Аркушів	
К. розд.	Коряшкіна Л. С.								
Керівн.	Коряшкіна Л. С.					<b>НТУ «ДП», 124М-22-1</b>			
Н.контр.	Хом'як Т. В.								
Зав. каф.	Желдак Т. А.								

## ДОДАТОК Б. ВІДГУК НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ МАГІСТРА

**Відгук**  
**на кваліфікаційну роботу магістра**  
 студентки Рейс А. С.  
 групи 124м – 22 – 1  
 спеціальності 124 Системний аналіз

Тема кваліфікаційної роботи: «Математичне моделювання та візуалізація оптимізаційних двоетапних задач екстреної логістики».

Обсяг кваліфікаційної роботи \_\_\_\_\_ стор.

Мета кваліфікаційної роботи: \_\_\_\_\_

Актуальність теми \_\_\_\_\_

Тема кваліфікаційної роботи безпосередньо пов'язана з об'єктом діяльності магістра спеціальності 124 Системний аналіз, оскільки \_\_\_\_\_

Виконані в кваліфікаційній роботі завдання відповідають вимогам ступеня магістра. Оригінальність наукових рішень полягає в \_\_\_\_\_

Практичне значення результатів кваліфікаційної роботи полягає в \_\_\_\_\_

Висновки підтверджують можливість використання результатів роботи в \_\_\_\_\_

Оформлення пояснювальної записки та демонстраційного матеріалу до неї виконано згідно з вимогами. Роботу виконано самостійно, відповідно до завдання та у повному обсязі (*в разі невідповідності – вказати*)

У роботі відзначено такі недоліки: \_\_\_\_\_

Кваліфікаційна робота в цілому заслуговує оцінки: \_\_\_\_\_

З урахуванням висловлених зауважень автор заслуговує присвоєння освітньої кваліфікації «магістр з системного аналізу».

Керівник кваліфікаційної роботи магістра,  
 к. фіз.-мат. н., доцент, доцент

\_\_\_\_\_ / Коряшкіна Л. С.



## ДОДАТОК В. СПОСОБИ ОПИСУ ЩІЛЬНОСТІ НАСЕЛЕННЯ РЕГІОНУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ

### В.1 Теоретичний спосіб представлення густини населення регіону

Якщо область  $\Omega$  вважається однорідною, то функція  $\rho(x) = \text{Const}$ . Під час обчислювальних експериментів часто  $\text{Const} = 1$ .

У випадку неоднорідного середовища вважається, що в області існують так звані «точки скупчення», тобто точки області, в яких кількість мешканців є найбільшою. Позначимо їх через  $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2) \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, L}$ . Ними можуть бути центри мікрорайонів, споруди інфраструктури, навколо котрих зводяться будинки задля проживання населення, яке обслуговує ці об'єкти. Припустимо, що скупченість від кожного центру поширюється на деяку частину сусідніх територій, і чим далі від центру – тим меншою є густина населення.

Тоді «вплив» кожного такого центру на розподіл мешканців в регіоні може бути заданий функцією:

$$\sigma_i(\|x - \theta_i\|) = V_i \exp(-\varphi_i \|x - \theta_i\|^2), \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{1, L},$$

де  $V_i$  – максимальна кількість населення на одиницю площі, яка обумовлена впливом  $i$ -го центру,  $\varphi_i$  – параметр функції, що показує, наскільки «сильною» є здібність  $i$ -го центру до поширення густини населення на сусідні території,  $\|\cdot\|$  – евклідова метрика.

Тоді сукупна щільність населення  $\rho(x)$  в області  $\Omega$  може бути представлена функцією  $P(\theta, x)$ , яка виражається формулою:

$$P(\theta, x) = \sum_{i=1}^L \sigma_i(\|x - \theta_i\|), \quad x \in \Omega.$$

На рис. А.1, А.2 зображено приклади поверхонь функцій  $\rho(x) = P(\theta, x)$  при заданій кількості центрів, розташованих в двовимірній області  $\Omega = \{-6 \leq x \leq 6; -6 \leq y \leq 6\}$ .

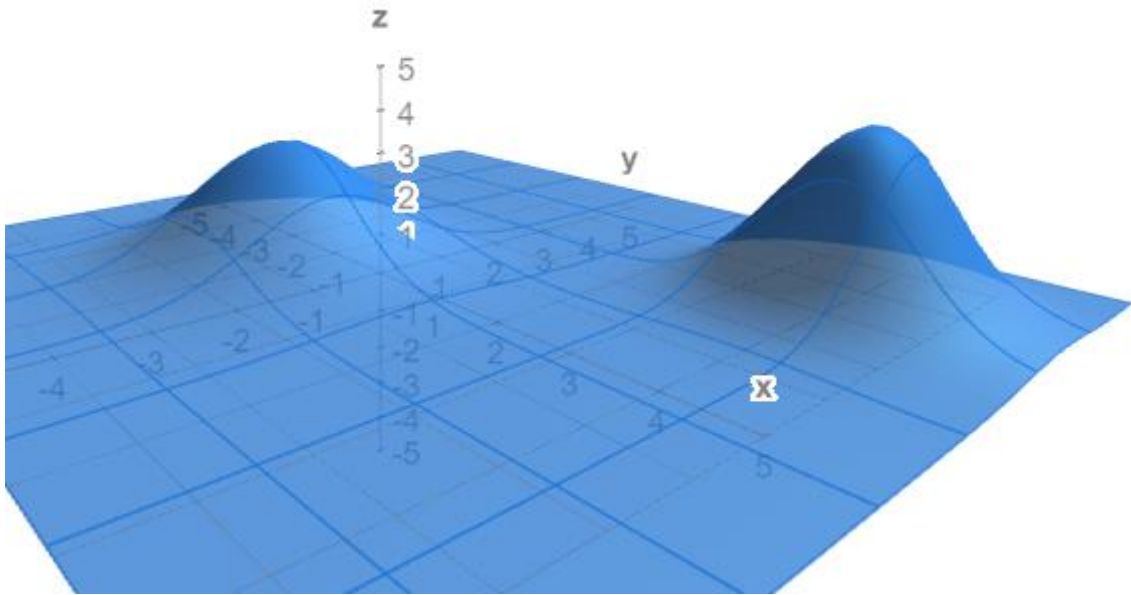


Рис. А.1. Щільність населення в області з 2 точками скупчення:

$$B_1 = 3, \sigma_1 = 0.4, \theta_1 = (-1.3; -0.5)$$

$$B_2 = 4, \beta_2 = 0.7, \theta_2 = (4; 3.5)$$

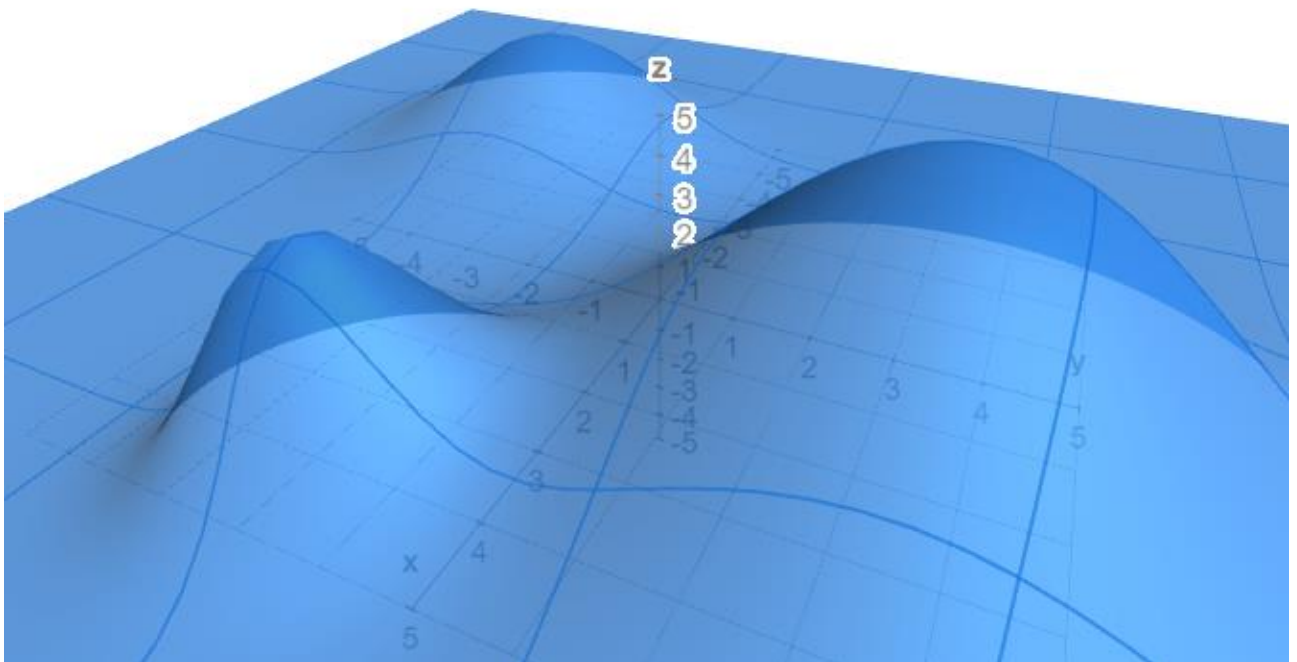


Рис. А.2. Щільність населення в області з 3 точками скупчення:

$$B_1 = 4, \sigma_1 = 0.18, \theta_1 = (-3.3; -3.5),$$

$$B_2 = 7, \sigma_2 = 0.1, \theta_2 = (2; 3.5),$$

$$B_3 = 5, \sigma_3 = 0.5, \theta_3 = (4; -1.5)$$

## В.2. Створення цифрової мапи щільності населення регіону

Для проведення аналізу і можливості оперувати даними щільність населення можна задавати у вигляді матриці, придатної для розрахунків, з оглядом на необхідність дискретизації області, що розбивається, під час реалізації алгоритмів розв'язання задач екстреної логістики.

Матриця щільності може бути отримана за наступною методикою (реалізація крок за кроком ілюструється на прикладі побудови оцифрованої матриці щільності населення одного з адміністративних районів м. Дніпра).

### 1. Поверхневий аналіз та представлення мапи району

За допомогою програмного забезпечення Adobe Photoshop накладаємо сітку з заданим кроком дискретизації на актуальні супутникові знімки території (див. рис. В.2).

Найменшою одиницею вимірювань слугує певний квадрат (рис. В.3), котрий має свої власні координати (на перехресті сітки), що відміряються відносно нульової точки, яка знаходиться на верхньому лівому куті мапи, відповідно до міжнародно визнаної координатної системи MGRS.



Рис В.2. Супутникові знімки із накладеною сіткою

Під час аналізу території можна використовувати поєднання багатьох методів дослідження:

- емпіричний метод спостережень інфраструктури району,
- опитування експертів, тобто жителів певних мікрорайонів,
- огляд наявних у вільному доступі мап чи супутникових знімків.

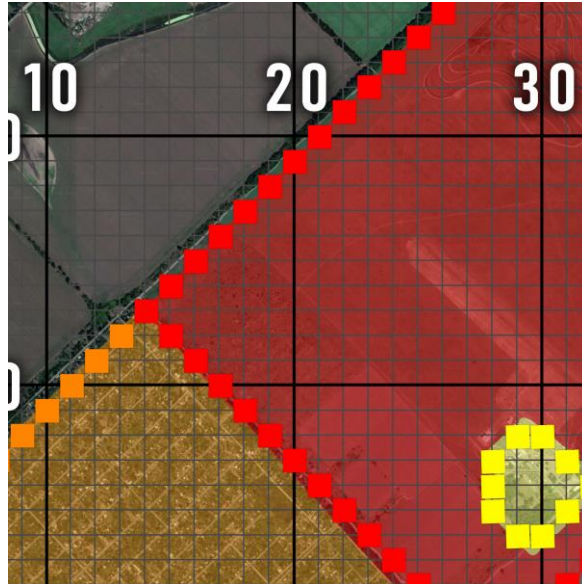


Рис. В.3. Приклад розташування точки на квадраті

Результатом поверхневого первинного дослідження є візуалізація частини зібраної та задокументованої інформації, відображеної безпосередньо позначками на мапі прямо на телефонних пристроях в режимі реального часу під час прогулянок районом та опитувань знайомих за допомогою відкритого військового ресурсу [map.army](http://map.army) (рис. В.4), на якому можна побачити позначки різних типів забудови за різними кольорами і типами відміток, згідно яких:

- Червона область – зони приватного сектору;
- Червона відмітка – 9 поверхів, 2 під'їзди;
- Жовта відмітка – 9 поверхів, 3 під'їзди;
- Синя відмітка – 9 поверхів, 4 під'їзди.

Такого роду аналіз надає можливості зробити висновки щодо усереднення скупчень багатоповерхівок до єдиної зони, адже у рамках збору даних для досягнення цілей досліджень, навіть у разі наявності настільки деталізованих даних, відслідкувати чітку кількість жителів цих місць, їх переміщення впродовж дня, майже неможливо та недоцільно у даному випадку.

Також можна отримати інформацію щодо наявності достатньо великої території, що займає лише приватний сектор, та відсутність майже будь-якої інфраструктури державного підпорядкування на ньому. Це стосується шкіл, дитячих садків, лікарень та інших державних установ різного типу призначення, що можуть використовуватись як логістичний вузол.

Варто зазначити, що побудова споруд екстреної логістики у межах приватного сектору є недоцільною, оскільки майже все місце займають приватні ділянки та домівки, поміж яких дуже важко розмістити споруду не перекривши при цьому дорожні артерії чи не пошкодивши чуже майно.

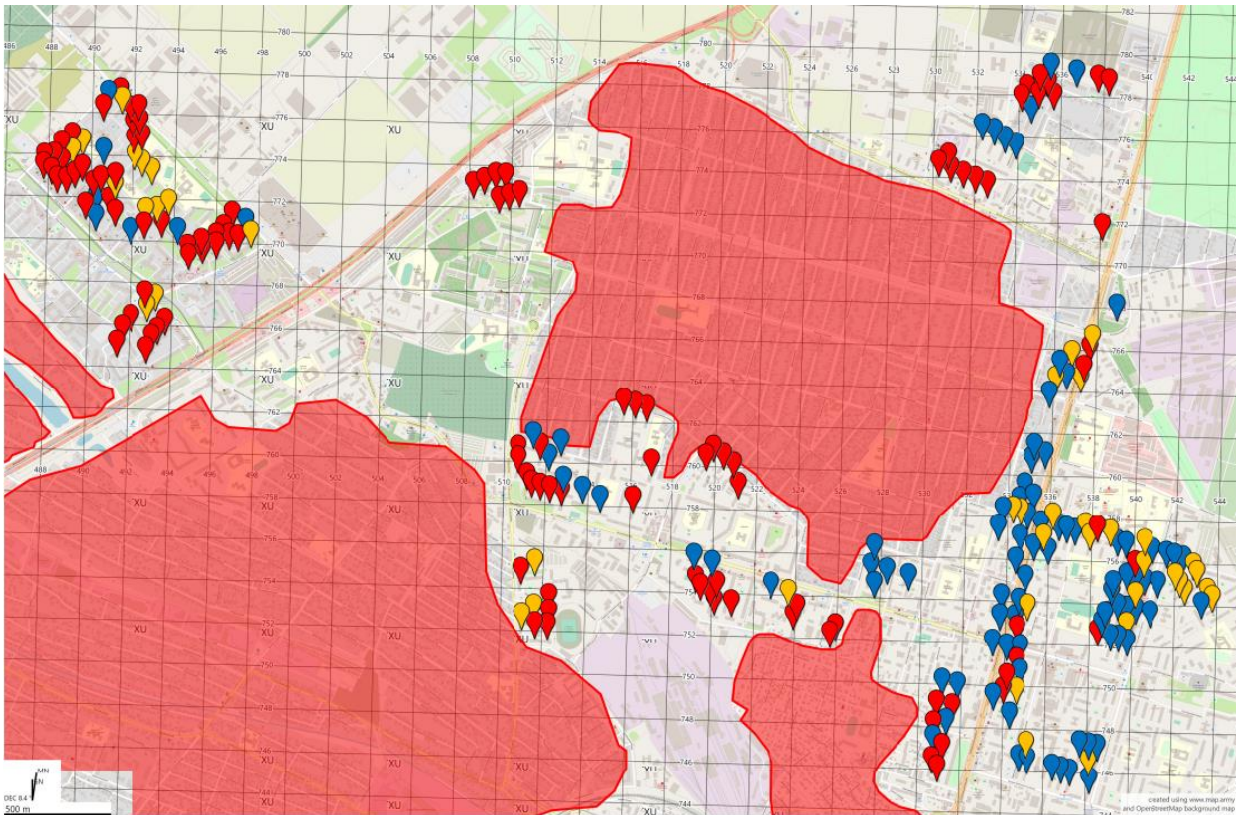


Рис В.4. Первинний збір інформації

Наступним пунктом поверхневого аналізу є виявлення великих промислових зон. Майже цілодобово на території даних підприємств та підлеглих їм територій знаходяться робочі, збереження життя та здоров'я яких також потрібно враховувати, оскільки, пошкодження, вивід зі строю або повне знищення заводів та інших об'єктів промислового призначення і дестабілізація такими діями економічного стану регіону потребує мір щодо збереження персоналу та максимальної підготовки таких об'єктів до повітряних або наземних атак, техногенної аварії тощо.

Зазначимо, що найбільше скупчення персоналу є здебільше точковим, аніж рівномірно розподіленим на усій прилеглий підприємству території. Наприклад, українська компанія Інтерпайп має у своєму підпорядкуванні достатньо велику територію, однак персонал знаходиться безпосередньо у певній будівлі, а не гуляє усією територією.

Не слід забувати і про наявні «зони ігнорування», тобто кладовища, широкі дороги, лісосмуги чи схожі непридатні для забудови місця надзвичайно малого або повністю відсутнього проживання людей. Такі зони не розглядатимуться. Для таких точок області щільність задається нульовою.

Як окремий вид території зазначимо територію стадіонів, шкіл, парків, торговельних центрів, алей та інших місць відпочинку людей, яких може застати потреба у швидкій евакуації.

2. Систематизація вихідних даних та нанесення вузлів екстреної логістики

На даному етапі район поділяється на різні зони, які об'єднує єдиний, або дуже схожий один на одного, стиль забудови чи приблизно однакова щільність населення, що може знаходитись у її межах впродовж дня. Кожна зона потребує різного підходу щодо територіального розподілу вузлів екстреної логістики, оскільки має різні типи розміщення людей.

Відтак, розіб'ємо район на зони:

- невеликих лісів, кладовищ, пляжів, доріг чи інших непридатних місцин для розташування важливих об'єктів забудови екстреної логістики;
- 5-16 поверхових будинків, спальних мікрорайонів, ЖК, щільно населених місць постійного проживання великого скупчення людей;
- приватного сектору з низькою щільністю населення;
- промислові, що займають достатньо велику територію, яка не виключає цілодобове та точкове розміщення людей, робітників даних інфраструктурних одиниць;
- паркові, місця розташування та навколишня територія торговельних центрів, ринків, шкіл, стадіонів, алей, місць відпочинку та можливого ситуативного скупчення людей.

Для точного розмежування та можливості оперувати певною територіальною одиницею, мапа, яка розбита на певні квадрати, утворюючи таким чином розмірну сітку, може містити інформацію про:

- одного можливого для призначення кольору приналежності даного квадрату до певної заздалегідь визначеної зони;
- координат місцерозташування у двовимірній системі декартових координат розглянутого квадрату.

Як результат, отримуємо наступну мапу, наведену на рисунку В.5.

Наступним кроком визначаються точки можливого (приблизного) розташування об'єктів, що можуть використовуватись як інфраструктурні одиниці чи центри розміщення екстреної логістики, придатні для добудови чи задіяні у поточному стані. Найпривабливішими для розташування виглядають об'єкти, які належать до державних установ, оскільки конституційно саме держава має забезпечувати захист свого населення.

До розгляду також можуть потрапляти об'єкти, що знаходяться поза межею району, проте все ще розташовані достатньо близько від неї. Оскільки межування районів, наприклад міста, розділено нерівномірно, можна стверджувати, що для деяких осіб переміщення до об'єктів з іншого району може виявитися більш привабливим, оскільки потребує значно меншого проміжку часу.

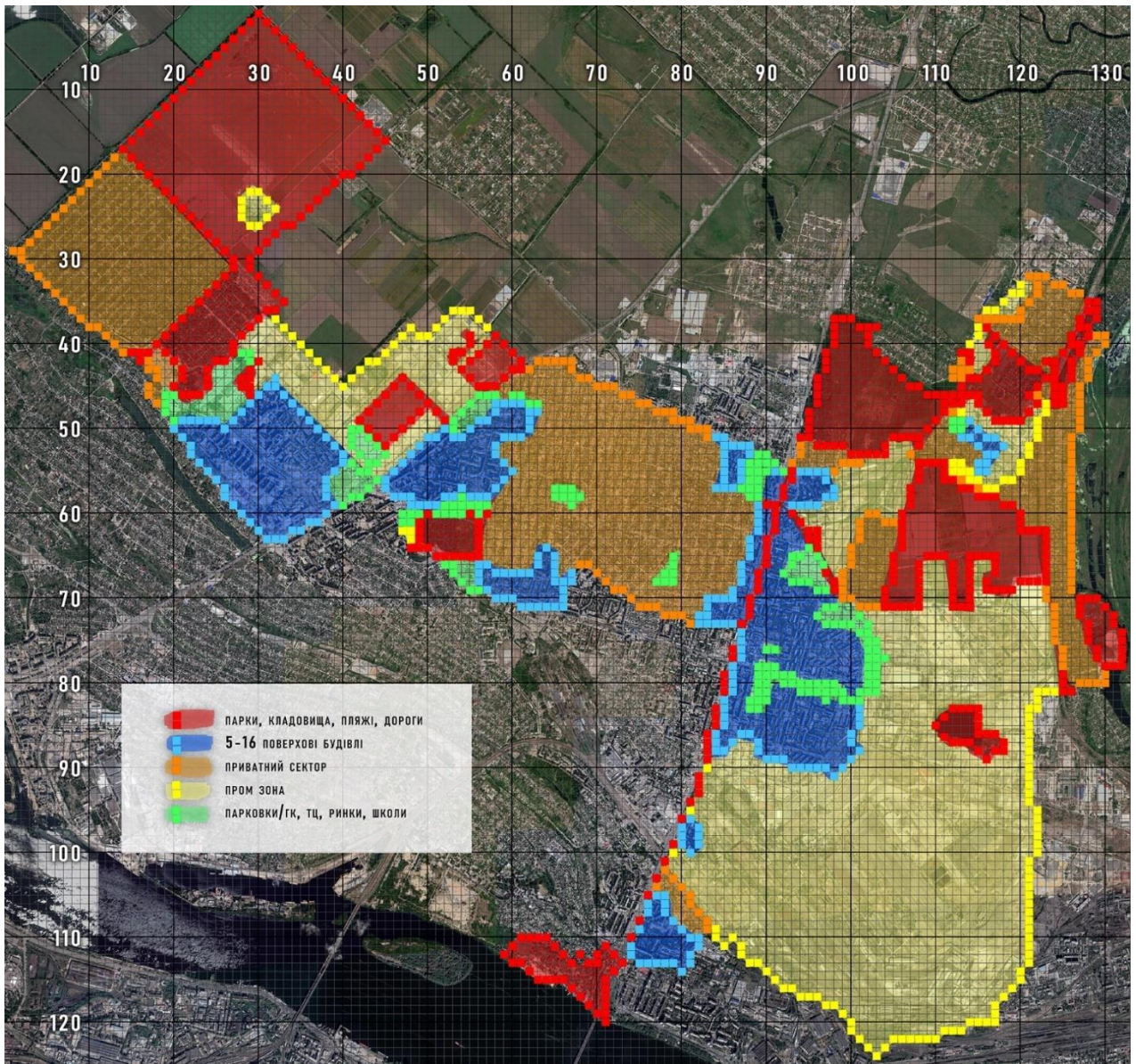


Рис. В.5. Візуалізація зон на мапі

Отримані точки позначаються на мапі різними кольорами (рис. В.6):

- фіолетові точки – об'єкти, що підпорядковуються державним органам влади;
- зелені точки – торгівельно-розважальні центри;
- червоні точки – загальноосвітні та спортивні школи, технікуми або інші заклади середньої чи вищої освіти;
- бірюзові (світло голубі) точки – лікарні;
- помаранчеві точки – промислові об'єкти.

Отже, результат отримуємо наступну мапу, наведену на рисунку В.6.

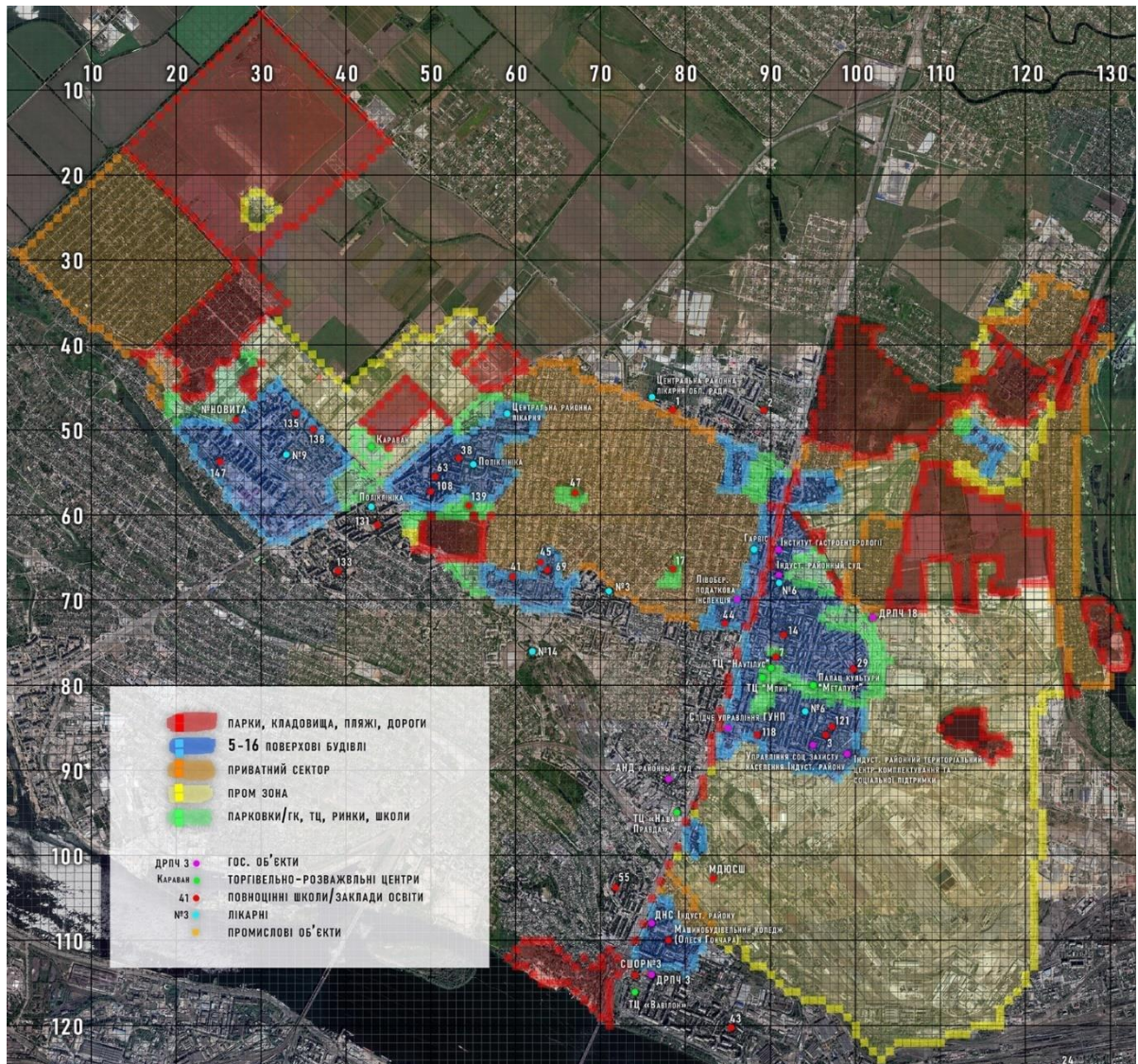


Рис. В.6. Повна візуалізація мапи регіону

### 3. Дискретизація даних

Далі проводиться оцифрування мапи. Для цього використовується програмне забезпечення Microsoft Excel.

Створюємо новий аркуш під назвою «Підрахунок» для розміщення оцифрованої мапи регіону. За допомогою функції умовного форматування створюються правила, завдяки яким число 9 буде означати квадрат, що знаходиться поза межею границі та зафарбується у сірий колір, а число 0 – даний квадрат належить до меж району.

Співвідносячи координати намальованої та розкресленої за допомогою програмного забезпечення Adobe Photoshop мапи, значення її мінімальної одиниці вимірювань – квадрата переносяться до відповідної мінімальної одиниці Excel – комірки, у заздалегідь підготовлений аркуш файлу.

Після завершення процедури переносу даних, отримуємо матрицю значень певної розмірності. Матриця набуватиме вигляду, наприклад, зазначеному на рисунку В.7 та В.8 (розмірності 132 на 124 умовних квадрати).



Розмежування по зонах переносяться до аркуша Excel відповідно введених нових правил умовного форматування: певне число ставиться у відповідність певній визначеній зоні. Приклад правил межування наведений у таблиці В.1.

Результат роботи представлений на рис. В.9 та В.10.

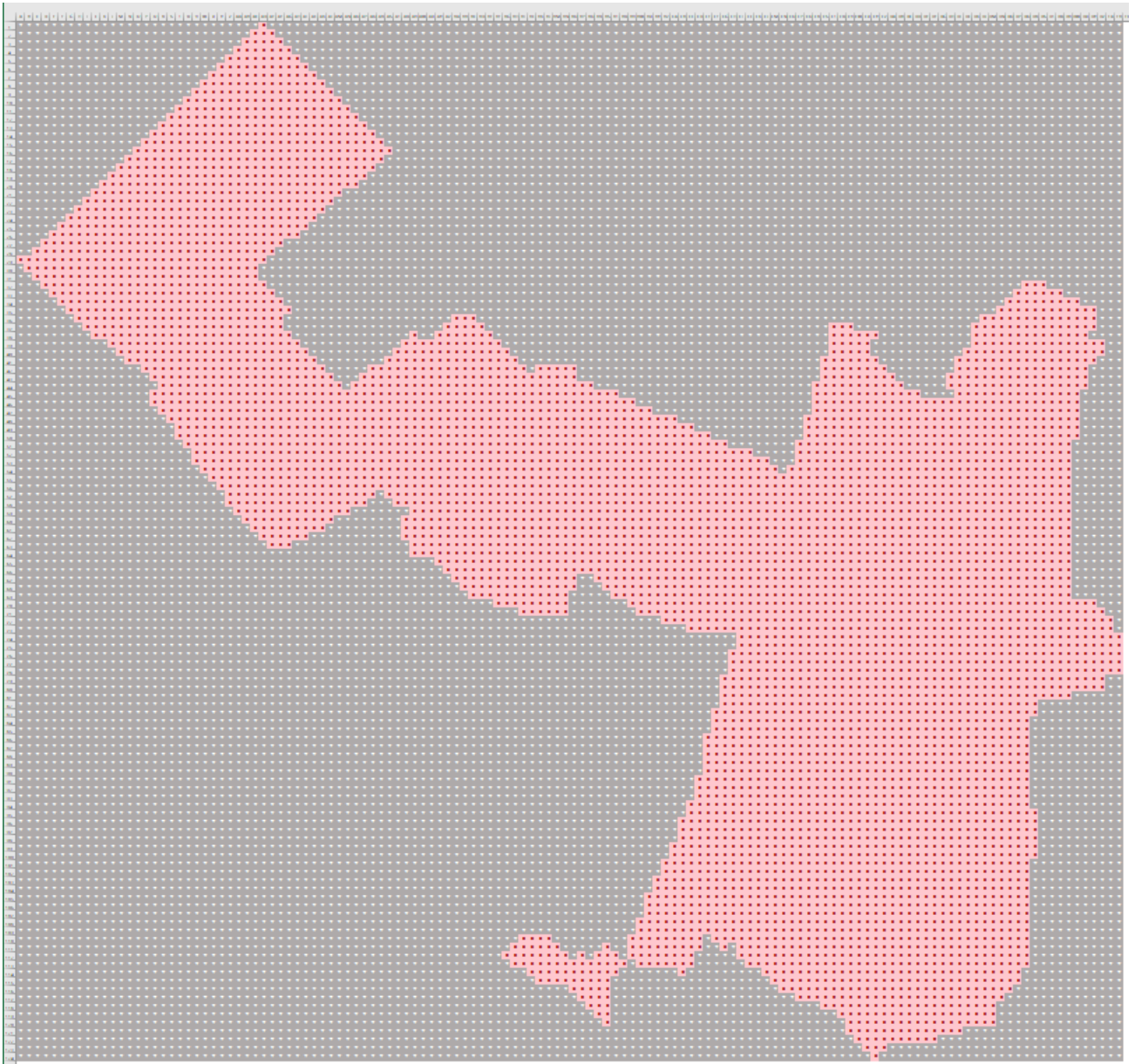


Рис. В.7. Оцифрована мапа у масштабі 20%

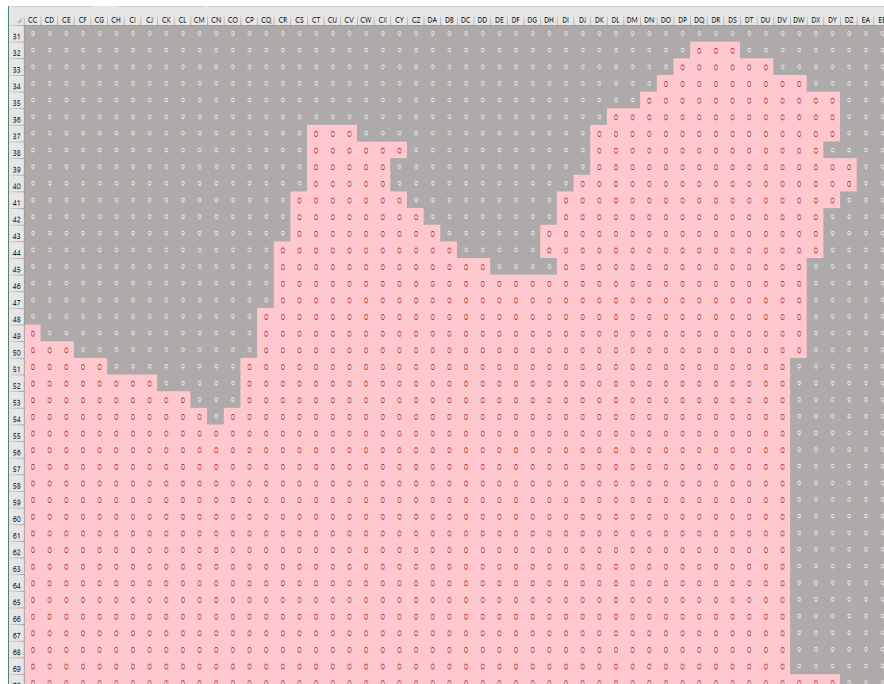


Рис. В.8. Оцифрована мапа у масштабі 70%

Таблиця В.1

## Межування по зонах

Число квадрату	Колір	Зона, якій відповідає дане число квадрату
9	Сірий	Поза зоною області розглядання;
0	Червоний	Зони невеликих лісів, кладовищ, пляжів, доріг чи інших непридатних місцин для розташування життєво важливих об'єктів забудови;
1	Синій	Зони 5-16 поверхових будинків, спальних мікрорайонів, ЖК, щільно населених місць постійного проживання великого скупчення людей;
2	Помаранчевий	Зони приватного сектору з низькою щільністю населення;
3	Жовтий	Промислові зони, які займають достатньо велику територію, що не виключає цілодобове та точкове розміщення людей, робітників даних інфраструктурних одиниць;
4	Зелений	Паркові зони, зони розташування та навколишня територія торговельних центрів, ринків, шкіл, стадіонів, алей, місць відпочинку та можливого ситуативного скупчення людей.

## 4. Підрахунки щільності населення

Визначається щільність населення на один квадрат. Для цього проведемо наступні розрахунки.

За допомогою відкритого військового ресурсу [map.army](http://map.army) оцінимо приблизні площі певних зон та їх відсоткове співвідношення одна з одною

для можливості адекватного розподілу людей згідно проведеного вище аналізу на розбиття території району по зонах.

Найбільш заселеними є сині зони 5-16 поверхових будинків, спальних мікрорайонів, ЖК, щільно населених місць постійного проживання великого скупчення людей та помаранчеві зони приватного сектору з низькою щільністю населення.

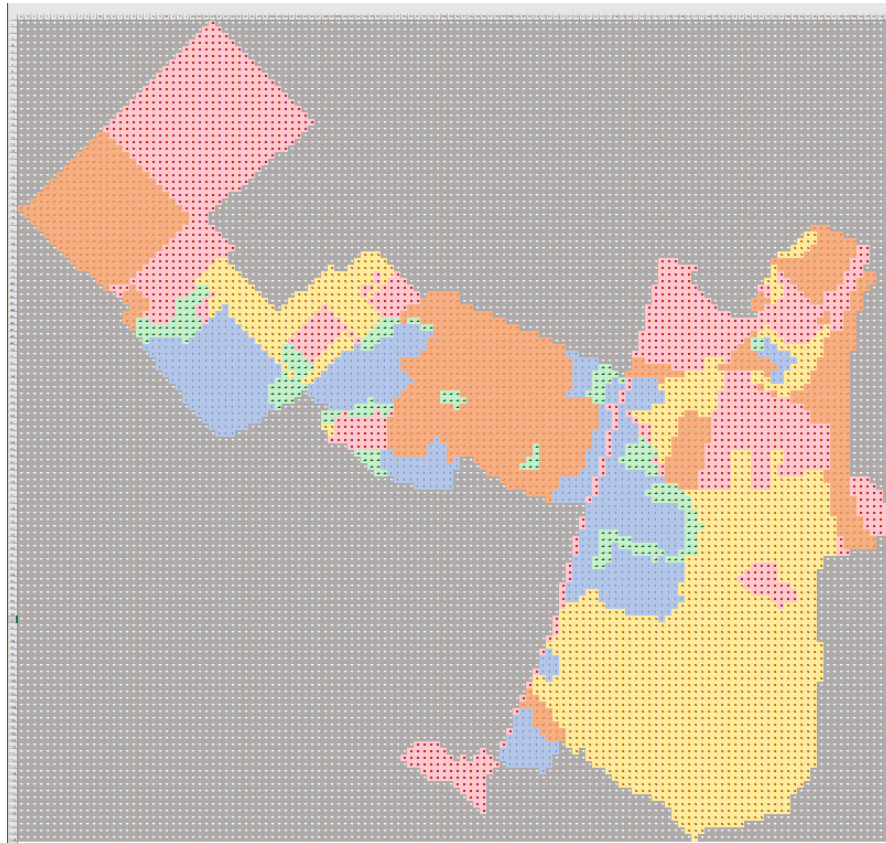


Рис. В.9. Оцифрована мапа у масштабі 20%

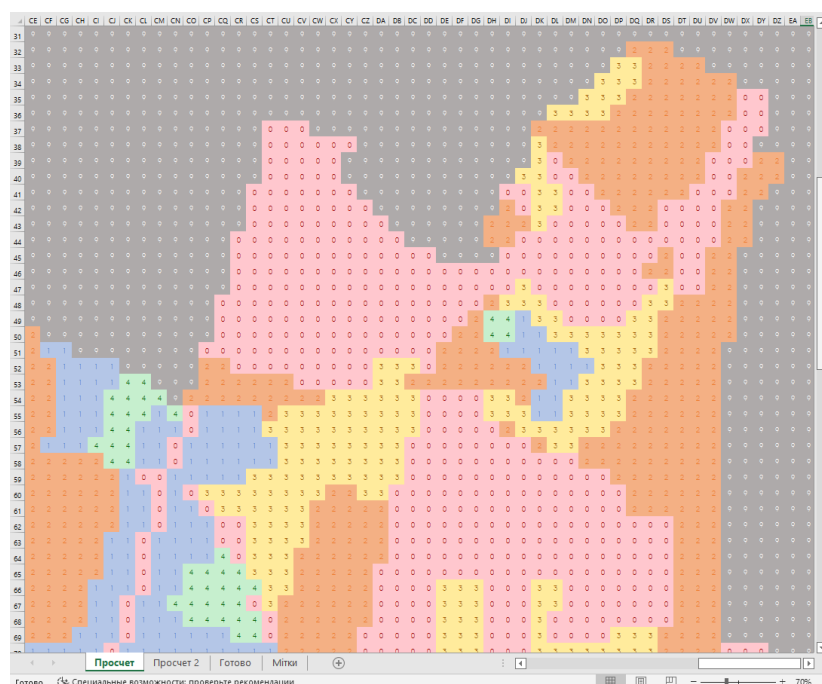


Рис. в.10. Оцифрована мапа у масштабі 70%

Дані зони є найбільш важливими, оскільки розміщують у собі майже 80-90% усього населення жилого району.

Отже, приблизна загальна площа синьої зони складатиме (рис.В.11):

$$1,1 + 0,3 + 0,6 + 0,9 + 2,1 + 0,2 \approx 7 \text{ км}^2$$

у той час, як приблизна загальна площа помаранчевої зони складатиме (рис. В.12):

$$1,8 + 3,4 + 0,3 + 0,3 + 0,7 \approx 7 \text{ км}^2$$



Рис. В.11. Підрахунки площі синьої зони

Згідно аналізу місцевості, приблизно 80% синьої зони 5-16 поверхових будинків належать саме 9-и поверховим будинкам з чотирма під'їздами, що у інших випадках просто поєднані до однієї довгої будівлі.

Розрахуємо приблизну кількість людей, що проживатимуть в одній такій будівлі. Для цього будемо відштовхуватись від усереднених даних.

На 9 поверхів житлової будівлі одного під'їзду припадає у середньому 36 квартир. Множимо ці 36 квартир на 4 під'їзди, отримуємо 144 квартири. Усереднюючи, в кожній квартирі проживає 2-3 людини. Отже, множимо 144 квартири на 2-х осіб та отримуємо 288 осіб. Множимо 144 квартири на 3-х осіб і отримуємо 432 особи:



Рис. В.12. Підрахунки площі помаранчевої зони

**36** квартир \* **4** під'їзди = **144** квартири

**144** квартири \* **2** особи = **288** осіб

**144** квартири \* **3** особи = **432** особи

Підрахуємо середню кількість осіб, що проживають по-двоє або по-трьох у 9-и поверховій будівлі:

$$\bar{x}_{\text{багатоповерхівка}} = \frac{288 + 432 \text{ особи}}{2} = 360 \text{ осіб}$$

Отже, у середньому на 9 поверхів житлової будівлі, що складається з 4-х під'їздів, припадає 360 осіб.

На площу розміщення одного 9-и поверхового будинку з 4-ма під'їздами припадає територія приблизно 3-х будинків приватного сектору.

Візуалізуємо дане ствердження, узятє із власних спостережень та середньостатистичних даних на рисунку В.13.

В одному такому приватному будинку проживає також як і у квартирі 9-и поверхового будинку у середньому 2-3 людини.

Отже, множимо 3 будинки на 2 особи і отримаємо 6 осіб та множимо 3 будинки на 3 особи, де отримаємо 9 осіб.

**3** будинки \* **2** особи = **6** осіб

**3** будинки \* **3** особи = **9** осіб

Підрахуємо середнє значення осіб, що проживають по-двоє або по-трьох у 3-х приватних будівлях:

$$\bar{x}_{\text{приват. сектор}} = \frac{6 + 9 \text{ осіб}}{2} \approx 7 \text{ осіб}$$



Рис. В.13. Співвідношення площі приватного сектору з 9-и поверховою будівлею

Отже, з урахуванням однакової площі обох розглянутих зон, виміряємо їх співвідношення:

$$\frac{360 \text{ осіб}}{7 \text{ осіб}} \approx \text{у } 50 \text{ разів}$$

Згідно цього, на однакову територіальну площу людей, котрі живуть у багатоповерхівках більше за кількість людей, які мешкають у приватному секторі приблизно у 50 разів.

Зазначимо, що багатодітні сім'ї не підлягають урахуванню, адже є виключенням із загальної тенденції або нівелюються за рахунок пустих або покинутих домівок чи квартир, квартир, що здаються в оренду, людей, які поїхали з міста на деякий час та залишили свої домівки, тощо.

Для підрахунку середнього значення співвідношень щільності населення на кожен квадрат різних зон, отримуємо дані про число осіб, які проживають в регіоні станом на певне число. Наприклад, відштовхуючись від відкритих даних з чисельності населення станом на 1 січня 2022 року, на території району проживає 127 тис. 327 осіб без урахування тих, хто приїзжав.

Зазначимо, що синя та помаранчева зони займають приблизно 90% усього записаного населення, оскільки є жилими мікрорайонами. Візуалізуємо приблизні значення співвідношень щільності населення на базі вище наведених розрахунків та подаємо їх у вигляді діаграми (рис. В.14).

Додаємо до розрахованої кількості ще 5% осіб, які приїжджають, тобто врахуємо людей, що можуть знаходитись у місті як гості та не мають місця постійного проживання у даному районі, не прописані в Дніпрі, тимчасово переміщені з області, можуть знаходитись в межах Індустріального району по справах або орендують житло. Отже, загальна сума людей, що знаходиться в межах району становитиме:

$$127\ 327 \text{ осіб} + 5\% \text{ приїзжих від загальної кількості населення} = 105\% \\ 127\ 327 \text{ осіб} + 6\ 366 \text{ осіб} = 133\ 693 \text{ особи}$$

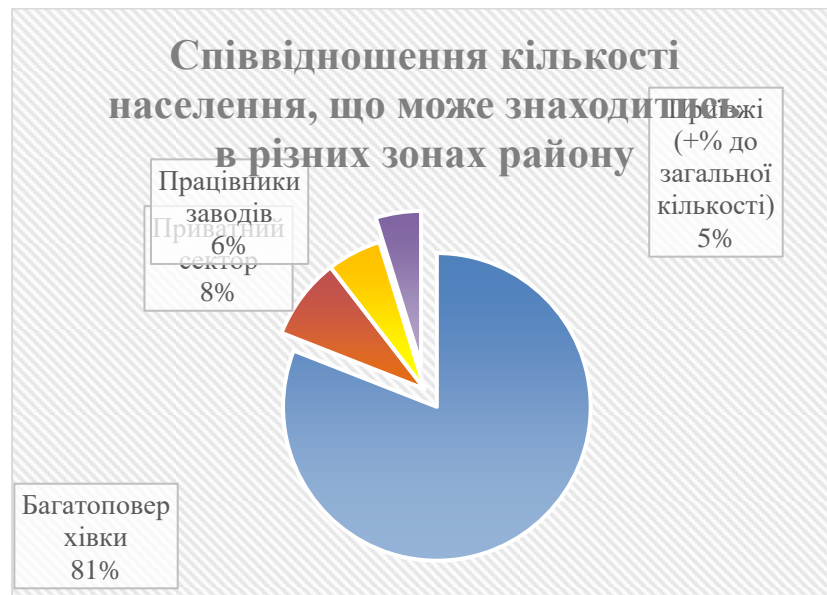


Рис. В.14. Співвідношення кількості населення, що може знаходитись в різних зонах району

Створюємо новий аркуш «Підрахунок 2» і за допомогою вбудованих в Excel формул під'єднаємо отриману оцифровану мапу до значень, отриманих на рисунку В.14 та отримаємо дані, наведені на рисунку В.15.

Підрахунки						
Загальна кількість	Місце проживання	% від загальної кількості		Зони, що входять до розподілу	Кількість квадратів	Вага квадрату
127 327	Багатоповерхівки	85	108228	Синій	879	123
	Приватний сектор	9	11459	Помаранчевий	1352	8
	Працівники заводів	6	7640	Жовтий	1926	4
	Приїзжі (+% до загальної кількості)	5	6366	Зелений, червоний	1689	4
<b>Усього:</b>		<b>105</b>	<b>133693</b>		<b>5846</b>	
Перевірка					<b>16368</b>	

Рис. В.15. Розрахунки щільності населення на один квадрат

На новоствореному аркуші «Готово» відображається мапа, у кожній клітинці якої замість номеру зони позначається вимірjana вага квадрату. Дана матриця готова до експорту у текстовий файл та набуває вигляду на рисунку В.16 та В.17.

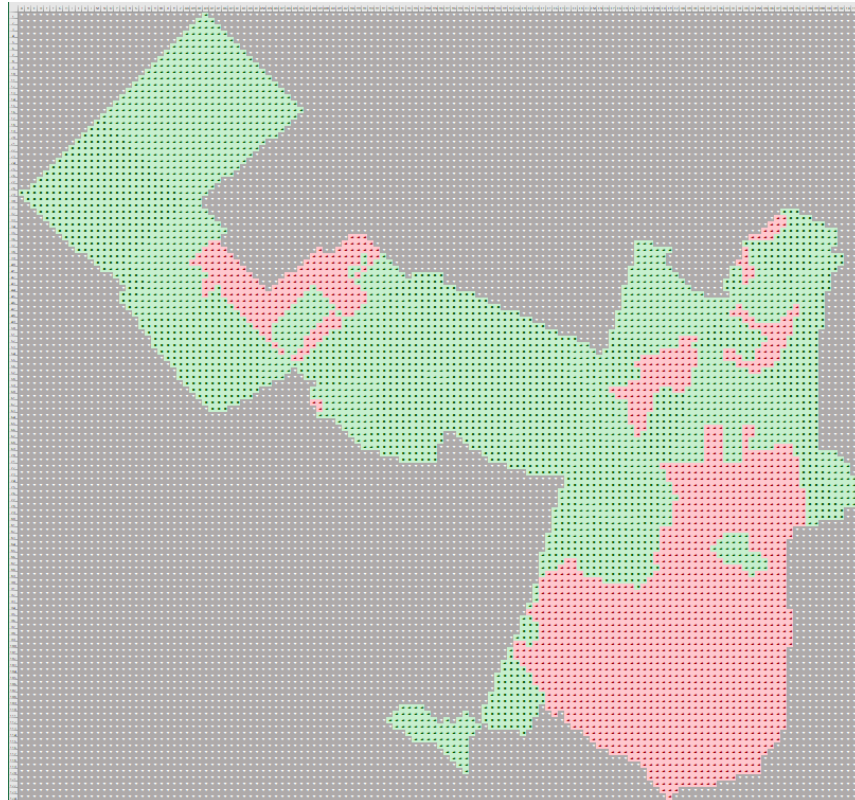


Рис. В.16. Підрахована мапа у масштабі 20%



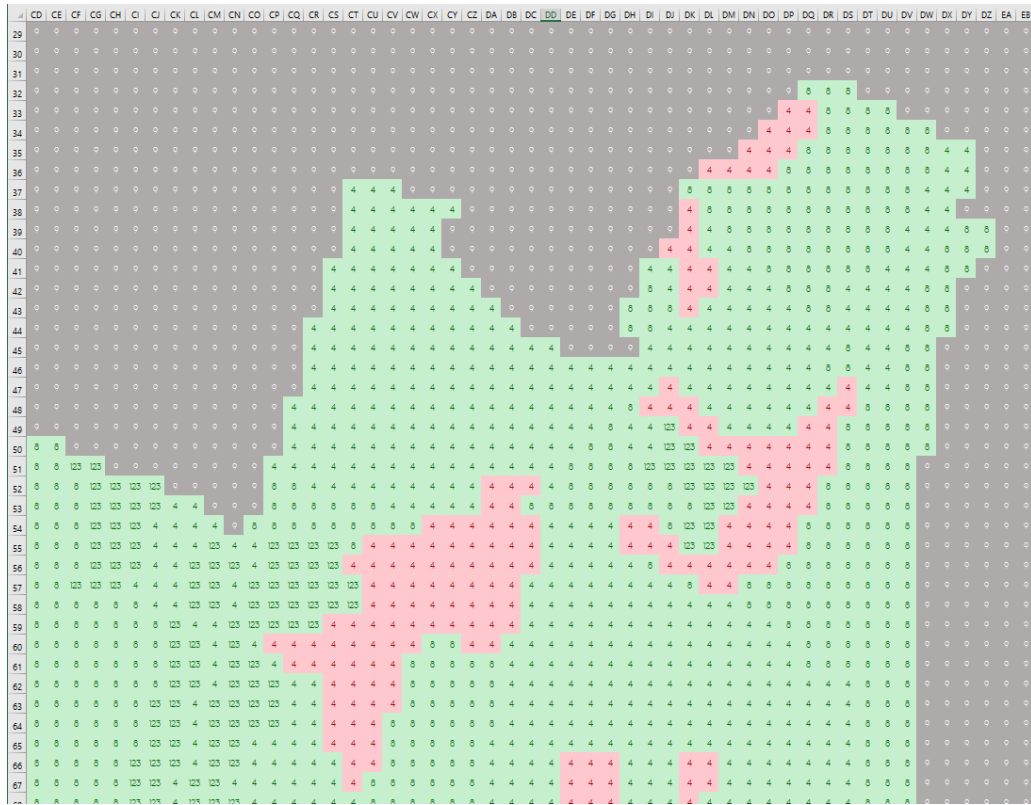


Рис. В.17. Підрахована мапа у масштабі 70%

## ДОДАТОК Г. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА І МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ІІ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### Постановка транспортної задачі (ТЗ)

Нехай однорідний вантаж зосереджений у  $t$  постачальників в обсягах  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ . Його необхідно доставити  $p$  споживачам в обсягах  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ . Відомі  $c_{ij}$  – вартості перевезення одиниці вантажу від кожного  $i$ -го постачальника кожному  $j$ -му споживачу. Потрібно скласти такий план перевезень, при якому потреби всіх споживачів, за можливістю, повністю задовольняються, а сумарні витрати на перевезення всіх вантажів будуть мінімальними.

Вихідні дані транспортної задачі можуть бути або записані в таблиці:

$a_i \backslash b_j$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_n$
$a_1$	$c_{11}$	$c_{12}$		$c_{1n}$
$a_2$	$c_{21}$	$c_{22}$		$c_{2n}$
$\dots$				
$a_m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$		$c_{mn}$

або представлені у вигляді: вектору запасів постачальників  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$ , вектору попиту споживачів  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  і матриці вартостей:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad (j = \overline{1, n}); \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}), \quad (4)$$

де  $x_{ij}$  – кількість продукції, що перевозиться від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача;  $c_{ij}$  – вартість перевезення одиниці продукції від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача;  $a_i$  – запаси продукції  $i$ -го постачальника;  $b_j$  – попит на продукцію  $j$ -го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (5)$$

то таку транспорту задачу називають збалансованою, або закритою. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Зазначимо, що у випадку закритої моделі ТЗ обмеження (2), (3) записуються у формі рівностей, тобто:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7)$$

Для того, щоб перейти від ТЗ у відкритій формі до ТЗ в закритій формі, потрібно ввести до розгляду або фіктивного споживача  $\mathbf{B}_{n+1}$  з попитом  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$  і вартістю перевезення одиниці продукції  $c_{i,n+1} = 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ) (у випадку  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ ), або фіктивного постачальника  $\mathbf{A}_{m+1}$  з обсягом постачання  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$  і вартістю перевезення одиниці продукції  $c_{m+1,j} = 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ) (у випадку  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ ). При цьому розмірність ТЗ, себто кількість невідомих в задачі збільшиться відповідно або на  $m$ , або  $n$  змінних.

Допустимим планом (або просто планом) транспортної задачі називають будь-який розв'язок системи обмежень (2) – (4), який позначають матрицею  $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ).

Опорний план перевезень в ТЗ (у закритій формі) є невід'ємним, він задовольняє умовам (6), (7), а його додатним компонентам відповідає система лінійно незалежних векторів-умов системи обмежень (6), (7). Якщо опорний план є невиродженим, то у ньому кількість додатних компонент дорівнює  $(m + n - 1)$ . У виродженому опорному плані таких компонент менше.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю  $\mathbf{X}^* = \{x_{ij}^*\}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ), яка задовольняє умови (2) – (4) задачі і забезпечує найменше значення цільової функції (1).

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто виконання умови (5).

Метод потенціалів застосовується до ТЗ в закритій формі. Тому спочатку слід визначити тип транспортної задачі (відкрита чи замкнена) і збалансувати її.

Алгоритм методу потенціалів складається з наступних етапів.

1. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі.
2. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

3. Якщо умова оптимальності виконується, то отримуємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, то визначається наступний опорний план і здійснюється перехід до кроку 2.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Опорний план ТЗ зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальникам продукції відповідають рядки, а споживачам – стовпчики.

Побудову першого плану за методом північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці ( $x_{11}$ ), куди записують значення, що є меншим з двох чисел  $a_1$  та  $b_1$ . Тобто  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ . Далі корегуємо обсяги постачання і попиту у  $A_1$  і  $B_1$ :  $a_1 := a_1 - x_{11}$ ,  $b_1 := b_1 - x_{11}$ . Якщо виявиться, що  $a_1 = 0$ , то з розгляду виключають постачальника  $A_1$ . Якщо попит споживача  $B_1$  повною мірою задоволений, тобто  $b_1 = 0$ , то з розгляду виключають  $B_1$ . Потім переходять до наступної північно-західної клітинки і так далі. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Якщо на етапі після визначення обсягу перевезень  $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$  і корегування величин  $a_i$  та  $b_j$  виявиться, що  $a_i = b_j = 0$ , то з розгляду виключають лише одного учасника – або постачальника  $A_i$ , або споживача  $B_j$ . А на черговому етапі одна з базисних змінних прийме нульове значення, тобто  $x_{ps} = 0$ . У цьому випадку початковий опорний план буде виродженим.

Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка містить величину найменшої вартості перевезення одиниці продукції, за алгоритмом, що наведений вище, доти, поки вся продукція не буде розподілена між споживачами.

Після побудови початкового опорного плану за допомогою одного із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено  $(m + n - 1)$  клітинок (далі будемо називати їх базисними), де  $m$  – кількість постачальників;  $n$  – кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають невивірженим.

Якщо кількість заповнених клітинок перевищує  $(n + m - 1)$ , то початковий план побудовано неправильно і він не є опорним. Ознакою опорності плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу з базисних компонент.

Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

2. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою наступного критерію.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Опорний план  $X^* = \{x_{ij}^*\}$  є оптимальним тоді і тільки тоді, коли існують числа  $u_i$  та  $v_j$ , для яких виконуються умови

$$u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0, \quad (8)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, x_{ij} = 0 \quad (9)$$

для всіх  $i = \overline{1, m}$  та  $j = \overline{1, n}$ .

Величини  $u_i$  та  $v_j$  називають відповідно потенціалами постачальників та споживачів.

3. Потенціали розраховують, розв'язуючи систему рівнянь (8). Далі перевіряють умову оптимальності (9) для небазисних клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто  $u_i + v_j > c_{ij}$ , то роблять висновок про те, що поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують, визначаючи величину  $x_{ps}$ , для якої порушено умову оптимальності. Якщо клітинок, на яких порушується умова оптимальності, декілька, то для заповнення (визначення  $x_{ps}$ ) вибирають ту, якій відповідає найбільше значення величин  $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$ , тобто  $\Delta_{ps} = \max \Delta_{ij}$ .

Для вибраної клітинки будують цикл перерахування, так званий компенсаційний ланцюжок, до якого включають вибрану та деякі клітинки, що відповідають базисним компонентам поточного опорного плану. Далі виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці – знак «+», а всім іншим по черзі – знаки «-» та «+»;

2) визначають величину  $\theta$ , яка вказує, наскільки слід змінити величини перевезень в компенсаційному ланцюжку за правилом:  $\theta = \min(x_{ij}^-)$ ;

3) у порожню клітинку переносяться  $\theta$ , тобто  $x_{ij} = \theta$ . Всі обсяги перевезень, що позначені в ланцюжку знаком «-», зменшуються на величину  $\theta$ , а позначені знаком «+» – збільшуються на  $\theta$ .

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою (базисною), а одна з клітинок, в якій перевезення стало дорівнювати нулю ( $x_{ij} = 0$ ), вважається порожньою (небазисною). Якщо таких клітинок декілька, то вилучити з базису доцільніше ту, яка відповідає найбільшій вартості перевезення одиниці продукції.

В результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі, який у свою чергу перевіряють на оптимальність згідно з п. 2 розглянутого алгоритму.

