А. М. Вербовецкий, Р. Витоло, П. Керстен, И. С. Красильщик, Об интегрируемых структурах для одного обобщенного уравнения Монжа–Ампера, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 208–224

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8365

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 171, № 2
май, 2012

А. М. Вербовецкий*, **Р. Витоло**†, **П. Керстен**‡, **И. С. Красильщик***

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ ОДНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

Рассмотрено одно из уравнений типа Монжа–Ампера третьего порядка, имеющее вид $u_{yyy} - u_{xxy}^2 + u_{xxx}u_{xyy} = 0$. Это уравнение тесно связано с уравнением ассоциативности, возникающим в двумерной топологической теории поля. Описаны все интегрируемые структуры, связанные с этим уравнением: гамильтоновы и симплектические операторы, а также операторы рекурсии. Построены бесконечные иерархии симметрий и законов сохранения.

Ключевые слова: уравнения Монжа–Ампера, интегрируемость, гамильтоновы операторы, симплектические структуры, симметрии, законы сохранения, пространства джетов, уравнения ВДВВ, двумерная топологическая теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Монжа–Ампера [1] являются интереснейшим объектом приложения геометрической теории дифференциальных уравнений. Обобщения классических уравнений Монжа–Ампера обсуждаются, например, в работе [2], и одним из таких обобщений является уравнение

$$u_{yyy} - u_{xxy}^2 + u_{xxx}u_{xyy} = 0. \tag{1}$$

Оно тесно связано с уравнением ассоциативности, возникающим в двумерной топологической теории поля [3], и изучалось в целом ряде работ (см., например, [4]–[8]), в которых была установлена его интегрируемость (в смысле существования бигамильтоновой структуры). Отметим, что во всех упомянутых работах уравнение рассматривалось не в его исходной форме (1), а в виде трехкомпонентной системы гидродинамического типа:

$$a_y = b_x, \qquad b_y = c_x, \qquad c_y = (b^2 - ac)_x. \tag{2}$$

*Независимый московский университет, Москва, Россия. E-mail: verbovet@mccme.ru, josephk@diffiety.ac.ru

†Department of Mathematics “E. De Giorgi”, University of Salento, Lecce, Italy. E-mail: raffaele.vitolo@unisalento.it

‡Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, University of Twente, Enschede, The Netherlands. E-mail: kersten@math.utwente.nl

Конечно, уравнения (1) и (2) тесно связаны друг с другом, но не идентичны и даже не эквивалентны – одно переходит в другое с помощью дифференциальных подстановок $a = u_{xxx}$, $b = u_{xxy}$, $c = u_{xyy}$ (подобно тому, как уравнение КдФ связано с модифицированным уравнением КдФ преобразованием Миуры или уравнение Бюргерса с уравнением теплопроводности – преобразованием Коула–Хопфа).

Цель настоящей работы состоит в непосредственном исследовании уравнения (1), без приведения его к эволюционному виду, и в изучении структур, которые возникают на этом уравнении. С этой целью мы используем геометрические и когомологические методы, первоначально описанные в работе [9] и детально обсуждавшиеся в обзорной статье [10]. Эти методы успешно применялись при анализе целого ряда дифференциальных уравнений (см., например, [11], [12]).

В разделе 2 мы кратко напоминаем важнейшие понятия геометрической теории пространств джетов и бесконечно продолженных уравнений. Раздел 3 содержит основные результаты, полученные для уравнения Монжа–Ампера (1) (включая описание гамильтоновых и симплектических операторов, а также операторов рекурсии, иерархий симметрий и законов сохранения). В частности, мы показываем, что уравнение (1) допускает симплектическую структуру вида D_x (это единственный локальный оператор среди тех, которые отвечают за интегрируемость уравнения, и он соответствует симплектической структуре, описанной в [13], [14]). Ей отвечает нелокальная гамильтонова структура D_x^{-1}. Остальные операторы имеют весьма сложный вид и описаны в пп. 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1 и 3.5.2.

Вычисления выполнены с использованием пакета `CDIFF` – специализированного комплекса программных средств для вычислений, необходимых в геометрии дифференциальных уравнений, реализованного на языке REDUCE (см. `http://gdeq.org`).

2. НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ФАКТЫ

2.1. Джеты и уравнения. Напомним, что геометрический подход к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных [15] состоит в рассмотрении уравнения $\mathcal{E}$ вместе со всеми его продолжениями (т. е. дифференциальными следствиями) как подмногообразия в многообразии $J^\infty(\pi)$ бесконечных джетов (или струй) некоторого локально-тривиального расслоения $\pi\colon E \to M$, где M и E – гладкие многообразия размерностей n и $n+m$ соответственно.

Многообразие M "содержит" независимые переменные, а сечения расслоения π играют роль неизвестных функций (полей) в уравнении $\mathcal{E}$. Если $U \subset M$ – такая координатная окрестность, что расслоение $\pi|_U$ тривиально, то мы выбираем локальные координаты $x^1, \dots, x^n$ в окрестности U и $u^1, \dots, u^m$ в слоях расслоения $\pi|_U$. Тогда в $J^\infty(\pi)$ естественным образом возникают соответствующие адаптированные координаты u^j_σ, где σ – мультииндекс. Они определяются так: если $f = (f^1, \dots, f^m)$ – локальное сечение, то мы полагаем

$$f^*(u^j_\sigma) = \frac{\partial^{|\sigma|} f^j}{\partial x^\sigma}.$$

Функции на многообразии $J^\infty(\pi)$ могут зависеть от x^i и только от конечного числа аргументов вида u^j_σ.

Векторные поля вида

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma i} \frac{\partial}{u^j_\sigma}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

называются *полными производными*, а дифференциальные операторы в полных производных – $\mathcal{C}$-*дифференциальными операторами.*

Если рассматриваемое уравнение задано системой $F = 0$, где $F = (F^1, \dots, F^r)$ – вектор-функция на $J^\infty(\pi)$, то его *бесконечное продолжение* $\mathcal{E}$ определяется условиями $D_\sigma(F) = 0$, $\sigma \geqslant 0$, где через D_σ обозначена композиция $D_{\sigma_1} \circ \dots \circ D_{\sigma_s}$, соответствующая мультииндексу $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_s$. Полные производные можно ограничить на уравнение $\mathcal{E}$ (ограничения будут обозначаться так же), и эти ограничения порождают распределение Картана $\mathcal{C}$. Полученное распределение интегрируемо в формальном смысле, т. е. $[X, Y] \in \mathcal{C}$ для любых векторных полей X, $Y \in \mathcal{C}$; его n-мерные интегральные многообразия суть решения уравнения $\mathcal{E}$.

2.2. Симметрии. Обозначим через $\pi_\infty \colon \mathcal{E} \to M$ естественную проекцию. Векторное поле X на $\mathcal{E}$, вертикальное относительно π_∞, называется *симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, если оно сохраняет распределение Картана, т. е. если $[X, \mathcal{C}] \subset \mathcal{C}$. Любая симметрия уравнения $\mathcal{E}$ имеет вид

$$\mathbf{E}_\varphi = \sum D_\sigma(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma},$$

где суммирование берется по всем внутренним координатам на $\mathcal{E}$, причем вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ должна удовлетворять уравнению $\ell_\mathcal{E}(\varphi) = 0$. Здесь $\ell_\mathcal{E}$ – оператор линеаризации вектор-функции F, ограниченный на $\mathcal{E}$. Точнее, мы рассматриваем функции F^α, определяющие уравнение $\mathcal{E}$, и строим матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор

$$\ell_F = \begin{pmatrix} \sum_\sigma \dfrac{\partial F^1}{\partial u^1_\sigma} D_\sigma & \dots & \sum_\sigma \dfrac{\partial F^1}{\partial u^m_\sigma} D_\sigma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_\sigma \dfrac{\partial F^r}{\partial u^1_\sigma} D_\sigma & \dots & \sum_\sigma \dfrac{\partial F^r}{\partial u^m_\sigma} D_\sigma \end{pmatrix}.$$

Поскольку это $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, его можно ограничить на $\mathcal{E}$, и мы полагаем $\ell_\mathcal{E} = \ell_F|_\mathcal{E}$.

Функция φ называется *производящей функцией* (производящим сечением, или характеристикой) симметрии $\mathbf{E}_\varphi$, и мы, как правило, не делаем различия между симметриями и их производящими функциями. Множество симметрий образует $\mathbb{R}$-алгебру Ли относительно коммутатора. Эта алгебра обозначается через $\operatorname{sym}(\mathcal{E})$. Скобка Ли векторных полей порождает скобку на производящих функциях, определенную равенством $\mathbf{E}_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = [\mathbf{E}_{\varphi_1}, \mathbf{E}_{\varphi_2}]$ и называемую *скобкой Якоби.* В координатах эта скобка задается формулой

$$\{\varphi_1, \varphi_2\}^j = \sum_{\alpha,\sigma} \left(D_\sigma(\varphi_1^\alpha) \frac{\partial \varphi_2^j}{\partial u^\alpha_\sigma} - D_\sigma(\varphi_2^\alpha) \frac{\partial \varphi_1^j}{\partial u^\alpha_\sigma} \right).$$

2.3. Законы сохранения. Рассмотрим пространство $\Lambda^1(\mathcal{E})$ дифференциальных 1-форм на $\mathcal{E}$. Оно состоит из конечных сумм вида

$$\omega = \sum_i A_i\,dx^i + \sum_{j,\sigma} B_j^\sigma\,du_\sigma^j,$$

где A_i и B_j^σ – гладкие функции на $\mathcal{E}$. Пространство $\Lambda^1(\mathcal{E})$ естественным образом расщепляется в прямую сумму:

$$\Lambda^1(\mathcal{E}) = \Lambda^1_{\mathrm{h}}(\mathcal{E}) \oplus \Lambda^1_{\mathrm{v}}(\mathcal{E}), \tag{3}$$

где

$$\Lambda^1_{\mathrm{h}}(\mathcal{E}) = \left\{\omega \in \Lambda^1(\mathcal{E}) \;\middle|\; \omega = \sum_i A_i\,dx^i\right\}$$

– подпространство горизонтальных форм, а пространство $\Lambda^1_{\mathrm{v}}(\mathcal{E})$ порождено дифференциальными формами вида $\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_i u_{\sigma i}^j\,dx^i$ и состоит из вертикальных форм (или форм Картана). Следствием равенства (3) являются расщепления в прямые суммы

$$\Lambda^s(\mathcal{E}) = \sum_{p+q=s} \Lambda^q_{\mathrm{h}}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda^p_{\mathrm{v}}(\mathcal{E}),$$

где

$$\Lambda^q_{\mathrm{h}}(\mathcal{E}) = \underbrace{\Lambda^1_{\mathrm{h}}(\mathcal{E}) \wedge \dots \wedge \Lambda^1_{\mathrm{h}}(\mathcal{E})}_{q\ \text{раз}}, \qquad \Lambda^p_{\mathrm{v}}(\mathcal{E}) = \underbrace{\Lambda^1_{\mathrm{v}}(\mathcal{E}) \wedge \dots \wedge \Lambda^1_{\mathrm{v}}(\mathcal{E})}_{p\ \text{раз}}.$$

Обозначим через $\Lambda^{p,q}(\mathcal{E})$ тензорное произведение $\Lambda^q_{\mathrm{h}}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda^p_{\mathrm{v}}(\mathcal{E})$. Тогда дифференциал де Рама $d\colon \Lambda^s(\mathcal{E}) \to \Lambda^{s+1}(\mathcal{E})$ расщепляется в сумму, состоящую из горизонтальной составляющей $d_{\mathrm{h}}\colon \Lambda^{p,q}(\mathcal{E}) \to \Lambda^{p,q+1}(\mathcal{E})$ и вертикальной составляющей $d_{\mathrm{v}}\colon \Lambda^{p,q}(\mathcal{E}) \to \Lambda^{p+1,q}(\mathcal{E})$. При этом выполнено равенство $[d_{\mathrm{h}}, d_{\mathrm{v}}] = 0$. В силу этого равенства на пространстве $\Lambda^*(\mathcal{E})$ возникает бикомплекс, являющийся частным случаем $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова [16]–[18]. Обозначим через $E_1^{p,q}(\mathcal{E})$ когомологии дифференциала d_{h} в члене $\Lambda^{p,q}(\mathcal{E})$. Тогда d_{v} порождает дифференциалы

$$\delta\colon E_1^{p,q}(\mathcal{E}) \to E_1^{p+1,q}(\mathcal{E}).$$

Группа $E_1^{0,n-1}(\mathcal{E})$ занимает особое место в рассматриваемой теории: ее элементы называются *законами сохранения* уравнения $\mathcal{E}$, а сама она обозначается через $\mathrm{Cl}(\mathcal{E})$. Нам также понадобится группа $E_1^{1,n-1}$, элементы которой называются *косимметриями* и которая обозначается через $\mathrm{cosym}(\mathcal{E})$.

В дальнейшем нам понадобится следующая конструкция. Пусть P и Q – пространства сечений некоторых векторных расслоений над $\mathcal{E}$. Введем обозначение $\widehat{P} = \mathrm{Hom}\big(P, \Lambda^n(\mathcal{E})\big)$ и аналогичное обозначение $\widehat{Q}$. Тогда для любого $\mathcal{C}$-дифференциального оператора $\Delta\colon P \to Q$ определен его формально сопряженный $\Delta^*\colon \widehat{Q} \to \widehat{P}$. Этот оператор задается с помощью формулы Грина

$$\big\langle \Delta^*(\hat{q}), p\big\rangle - \big\langle \hat{q}, \Delta(p)\big\rangle = d_{\mathrm{h}}\omega(\hat{q}, p),$$

где $\omega\colon \widehat{Q} \times P \to \Lambda^{n-1}(\mathcal{E})$ – отображение, являющееся $\mathcal{C}$-дифференциальным оператором по обоим аргументам, а $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначает естественное спаривание. Если оператор Δ задан матрицей (Δ_{ij}), где $\Delta_{ij} = \sum_\sigma a^\sigma_{ij} D_\sigma$, то $\Delta^* = (\Delta^*_{ji})$, где

$$\Delta^*_{ji} = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \circ a^\sigma_{ji}.$$

Всюду ниже мы будем предполагать, что рассматриваемое уравнение удовлетворяет следующим условиям:

1) дифференциалы dF^j функций, определяющих уравнение $\mathcal{E}$, линейно независимы во всех точках пространства $\mathcal{E}$;

2) если Δ – такой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, что $\Delta \circ \ell_{\mathcal{E}} = 0$, то $\Delta = 0$;

3) если для $\mathcal{C}$-дифференциального оператора Δ верно $\Delta \circ \ell^*_{\mathcal{E}} = 0$, то $\Delta = 0$.

Если уравнение обладает указанными свойствами, то для него справедливы следующие утверждения[1)]:

1) дифференциал $\delta\colon \mathrm{Cl}(\mathcal{E}) \to \mathrm{cosym}(\mathcal{E})$ является мономорфизмом, т.е. $\delta(\omega) = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega = 0$;

2) группа косимметрий совпадает с ядром оператора $\ell^*_{\mathcal{E}}$, т.е. $\psi \in \mathrm{cosym}(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда $\ell^*_{\mathcal{E}}(\psi) = 0$.

Если $\omega \in \mathrm{Cl}(\mathcal{E})$ – закон сохранения, то косимметрия $\delta(\omega)$ называется его *производящей функцией* (или производящим сечением).

2.4. Дифференциальные накрытия. Рассмотрим два уравнения $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$. Гладкое отображение $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ называется *морфизмом* этих уравнений, если оно переводит распределение Картана на $\tilde{\mathcal{E}}$ в соответствующее распределение на $\mathcal{E}$. Сюръективный морфизм τ называется *накрытием*, если в каждой точке $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}$ его дифференциал $d\tau|_\theta$ отображает картановскую плоскость $\mathcal{C}_\theta(\tilde{\mathcal{E}})$ на плоскость $\mathcal{C}_{\tau(\theta)}(\mathcal{E})$ изоморфно. Координаты вдоль слоя накрытия τ называются *нелокальными переменными* в рассматриваемом накрытии. Пусть $\tau'\colon \tilde{\mathcal{E}}' \to \mathcal{E}$ – другое накрытие. Будем говорить, что оно *эквивалентно* накрытию τ, если существует такой морфизм $f\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}}'$, что он является диффеоморфизмом и выполнено равенство $\tau = \tau' \circ f$.

Если $D_1, \dots, D_n$ – полные производные на $\mathcal{E}$ и $w^1, \dots, w^r, \dots$ – нелокальные переменные, то структура накрытия задается векторными полями

$$\widetilde{D}_i = D_i + X_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

где $X_i = \sum_\alpha X^\alpha_i \,\partial/\partial w^\alpha$ суть τ-вертикальные поля, удовлетворяющие условиям

$$D_i(X_j) - D_j(X_i) + [X_i, X_j] = 0, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{5}$$

Накрытие называется *абелевым*, если коэффициенты X^α_i не зависят от нелокальных переменных. В этом случае уравнения (5) эквивалентны уравнениям

$$D_i(X_j) - D_j(X_i) = 0, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{6}$$

В частном случае одномерного накрытия условия (6) определяют d_{h}-замкнутую горизонтальную 1-форму $\omega_\tau = \sum_i X_i\, dx^i$ на уравнении $\mathcal{E}$, причем два таких накрытия эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие дифференциальные

[1)] Это следствие теоремы Виноградова “о двух строчках” [18].

формы лежат в одном классе когомологий, т. е. $\omega_\tau - \omega_{\tau'} = d_{\mathrm{h}}(g)$ для некоторой функции g. В случае, когда n (число независимых переменных) равно двум, это определяет взаимно однозначное соответствие между группой $\mathrm{Cl}(\mathcal{E})$ законов сохранения и классами эквивалентности одномерных абелевых накрытий над уравнением $\mathcal{E}$.

Пусть $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ – накрытие. Симметрии уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$ называются *нелокальными* τ-*симметриями* уравнения $\mathcal{E}$. Заметим, что любой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ на $\mathcal{E}$ можно поднять до $\mathcal{C}$-дифференциального оператора $\tilde{\Delta}$ на $\tilde{\mathcal{E}}$. Процедура поднятия состоит в замене полных производных D_i, присутствующих в координатном представлении оператора Δ, на производные $\widetilde{D}_i$, определяемые равенствами (4). В частности, таким образом можно поднять оператор линеаризации $\ell_{\mathcal{E}}$. Решения уравнения $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\varphi) = 0$ называются (нелокальными) *тенями симметрий* в накрытии τ. Аналогичным образом решения уравнения $\tilde{\ell}^*_{\mathcal{E}}(\psi) = 0$ называются (нелокальными) *тенями косимметрий* в рассматриваемом накрытии.

2.5. ℓ-Накрытие. Пусть $\mathcal{E}$ – уравнение. Рассмотрим новые зависимые переменные $q = (q^1, \dots, q^m)$ (по целому ряду причин переменные q удобно считать нечетными), где m – это число неизвестных функций в уравнении $\mathcal{E}$, и добавим к исходному уравнению уравнение

$$\ell_{\mathcal{E}}(q) = 0. \tag{7}$$

Полученная система, состоящая из уравнения $\mathcal{E}$ и уравнения (7), называется *ℓ-накрытием* уравнения $\mathcal{E}$. Это накрытие является аналогом касательного расслоения уравнения $\mathcal{E}$. Введенное ℓ-накрытие играет важную роль в последующих вычислениях в силу некоторых его свойств, описываемых ниже.

2.5.1. *Операторы рекурсии для симметрий.* Рассмотрим вектор-функцию $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^m)$, компоненты которой записываются как $\Phi^j = \sum_{\alpha,\sigma} \Phi^j_{\alpha,\sigma} q^\alpha_\sigma$. Пусть Φ – тень симметрии в ℓ-накрытии. Это означает, что наша функция удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\Phi) = 0, \tag{8}$$

где $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}$ – оператор линеаризации, поднятый в ℓ-накрытие. Тогда можно показать, что матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, имеющий вид $\mathcal{R}_\Phi = \bigl(\sum_\sigma \Phi^j_{\alpha,\sigma} D_\sigma\bigr)$, переводит симметрии уравнения $\mathcal{E}$ в симметрии. Иными словами, $\mathcal{R}_\Phi$ является оператором рекурсии для симметрий.

Оператор рекурсии $\mathcal{R}$ называется *наследственным*, если для любых φ_1, φ_2 выполнено равенство

$$\{\mathcal{R}\varphi_1, \mathcal{R}\varphi_2\} - \mathcal{R}\bigl(\{\mathcal{R}\varphi_1, \varphi_2\} + \{\varphi_1, \mathcal{R}\varphi_2\} - \mathcal{R}\{\varphi_2, \varphi_2\}\bigr) = 0.$$

Наследственные операторы рекурсии обладают следующим свойством, играющим важную роль в исследовании интегрируемости: пусть φ – такая симметрия, что $\mathbf{E}_\varphi(\mathcal{R}) - [\ell_\varphi, \mathcal{R}] = 0$. В этом случае все симметрии вида $\mathcal{R}^i\varphi$ попарно коммутируют, т. е. образуют коммутативную иерархию.

2.5.2. *Симплектические операторы.* Поступим аналогичным образом и рассмотрим вектор-функцию $\Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^r)$ с компонентами $\Psi^j = \sum_{\alpha,\sigma} \Psi^j_{\alpha,\sigma} q^\alpha_\sigma$ (напомним, что r – это число функций F^j, которые определяют уравнение $\mathcal{E}$), удовлетворяющую уравнению

$$\tilde{\ell}^*_{\mathcal{E}}(\Psi) = 0, \tag{9}$$

где $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}^*$ – поднятие оператора $\ell_{\mathcal{E}}^*$ в ℓ-накрытие. Тогда оператор $\mathcal{S}_\Psi = \left(\sum_\sigma \Psi^j_{\alpha,\sigma} D_\sigma\right)$ переводит симметрии уравнения $\mathcal{E}$ в его косимметрии.

Предположим, что оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{S}^* \circ \ell_{\mathcal{E}} = \ell_{\mathcal{E}}^* \circ \mathcal{S}. \tag{10}$$

Тогда $\mathcal{S}$ можно понимать как вариационную 2-форму $\Omega_{\mathcal{S}}$ на уравнении $\mathcal{E}$, значения которой на симметриях задаются равенством $\Omega_{\mathcal{S}}(\varphi_1, \varphi_2) = \langle \mathcal{S}\varphi_1, \varphi_2\rangle$. Эта форма является элементом группы $E_1^{2,n-1}(\mathcal{E})$ члена E_1 в $\mathcal{C}$-спектральной последовательности.

Рассмотрим теперь два таких закона сохранения ω_1 и ω_2, что $\delta\omega_i = \mathcal{S}\varphi_i$, $i = 1, 2$, для некоторых симметрий φ_1, $\varphi_2 \in \operatorname{sym} \mathcal{E}$. Тогда определена скобка $\{\omega_1, \omega_2\}_{\mathcal{S}} = \Omega_{\mathcal{S}}(\varphi_1, \varphi_2)$. Эта скобка кососимметрична в силу условия (10) и удовлетворяет тождеству Якоби, если

$$\delta\Omega_{\mathcal{S}} = 0. \tag{11}$$

Операторы, обладающие свойствами (10) и (11), называются *симплектическими.*

2.5.3. *Нелокальные ковекторы.* Во многих случаях уравнения (8) или (9) имеют только тривиальные решения. Причина в том, что симплектические структуры и, в особенности, операторы рекурсии в большинстве случаев являются нелокальными, т. е. содержат слагаемые типа D_x^{-1}. Чтобы рассматривать такие объекты, нужно ввести нелокальные переменные, а это, в свою очередь, обеспечивается построением соответствующих накрытий. Один из способов введения последних основан на следующем факте [10]: всякой косимметрии уравнения $\mathcal{E}$ соответствует закон сохранения на его ℓ-накрытии. Такие законы сохранения мы называем *нелокальными ковекторами.* Следовательно, в случае $n = 2$ всякой косимметрии можно сопоставить абелево накрытие. Многочисленные примеры (см., например, работы [9], [11], [12]) показывают, что нелокальных переменных, возникающих таким образом, достаточно для нахождения необходимых структур.

2.6. ℓ^*-Накрытие. Рассмотрим вновь некоторое уравнение $\mathcal{E}$ и введем новый набор зависимых переменных $p = (p^1, \dots, p^r)$, где r – число функций F^j, определяющих уравнение $\mathcal{E}$. Добавим к рассматриваемому уравнению уравнение

$$\ell_{\mathcal{E}}^*(p) = 0. \tag{12}$$

Получающаяся в результате система, состоящая из уравнения $\mathcal{E}$ и уравнения (12), называется *ℓ^*-накрытием* над уравнением $\mathcal{E}$. Оно является аналогом кокасательного расслоения уравнения $\mathcal{E}$. Это накрытие также играет важную роль в последующих вычислениях, что обусловлено обсуждаемыми ниже свойствами ℓ^*-накрытия. Как и переменные q в ℓ-накрытии, переменные p также удобно считать нечетными.

2.6.1. *Гамильтоновы операторы.* Для нахождения этих операторов рассмотрим вектор-функцию $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^m)$, где $\Phi^j = \sum_{\alpha,\sigma} \Phi^j_{\alpha,\sigma} p^\alpha_\sigma$, и предположим, что она является тенью симметрии в ℓ^*-накрытии. Это означает, что данная функция есть решение уравнения

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\Phi) = 0, \tag{13}$$

где $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}$ – оператор линеаризации, поднятый в ℓ^*-накрытие. Тогда можно показать, что матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, имеющий вид $\mathcal{H}_\Phi = \left(\sum_\sigma \Phi^j_{\alpha,\sigma} D_\sigma\right)$, переводит косимметрии уравнения $\mathcal{E}$ в его симметрии.

Решения уравнения (13) специального вида отождествляются с вариационными бивекторами $\Lambda_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{E}$. Эти решения должны удовлетворять условию $\ell_{\mathcal{E}} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H}^* \circ \ell_{\mathcal{E}}^*$. Если это условие выполнено, то операция

$$\{\omega_1, \omega_2\}_{\mathcal{H}} = \big\langle \mathcal{H}(\delta\omega_1), \delta\omega_2 \big\rangle, \qquad \omega_1, \omega_2 \in \mathrm{Cl}(\mathcal{E}),$$

задает кососимметрическую скобку на пространстве законов сохранения. Эта скобка подчиняется тождеству Якоби тогда и только тогда, когда $[\![\Lambda_{\mathcal{H}}, \Lambda_{\mathcal{H}}]\!] = 0$, где $[\![\,\cdot\,,\,\cdot\,]\!]$ – вариационная скобка Схоутена [9], [10] на пространстве вариационных мультивекторов. В этом случае справедливо равенство $\mathcal{H}\delta\big(\{\omega_1, \omega_2\}_{\mathcal{H}}\big) = \{\mathcal{H}\delta\omega_1, \mathcal{H}\delta\omega_2\}$.

2.6.2. *Операторы рекурсии для косимметрий.* Рассмотрим такую вектор-функцию $\Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^r)$, что $\Psi^j = \sum_{\alpha,\sigma} \Psi^j_{\alpha,\sigma} p^\alpha_\sigma$, и предположим, что она является тенью косимметрии в ℓ^*-накрытии. Это означает, что функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\ell}^*_{\mathcal{E}}(\Psi) = 0. \tag{14}$$

В этом случае можно показать, что матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\widehat{\mathcal{R}}_\Psi = \big(\sum_\sigma \Psi^j_{\alpha,\sigma} D_\sigma\big)$ переводит косимметрии уравнения $\mathcal{E}$ в его косимметрии. Другими словами, оператор $\widehat{\mathcal{R}}$ является оператором рекурсии для кососимметрий уравнения $\mathcal{E}$.

2.6.3. *Нелокальные векторы.* Как и в ситуации, которую мы рассматривали в п. 2.5, решение уравнений (13) и (14) часто приводит только к тривиальным результатам. Причина та же: операторы рекурсии и гамильтоновы структуры во многих случаях являются нелокальными. Им соответствуют нелокальные переменные, которые вводятся в рассмотрение с помощью соответствующих накрытий. Один из способов построения необходимых накрытий основан на следующем результате: всякой симметрии уравнения $\mathcal{E}$ соответствует закон сохранения в ℓ^*-накрытии. Мы называем такие законы сохранения *нелокальными векторами*. Следовательно, при $n = 2$ всякой симметрии исходного уравнения соответствует абелево накрытие над ℓ^*-накрытием. Вычисления, проделанные в работах [9], [11], [12], показывают, что нелокальных переменных, построенных таким образом, достаточно для нахождения необходимых операторов.

2.7. Общая схема вычислений. Во всех вычислениях, проделанных нами при анализе конкретных уравнений (в частности, уравнения (1)), мы придерживались следующей схемы.

1. Добавление к исходному уравнению минимального набора нелокальных переменных (как правило, ассоциированных с законами сохранения), которые обеспечивают наличие нетривиальных решений у основных уравнений относительно интегрируемых структур.

2. Вычисление минимального набора (локальных и нелокальных) симметрий и косимметрий, необходимых как для порождения иерархий, так и для построения нелокальных векторов и ковекторов.

3. Расширение ℓ-накрытия нелокальными ковекторами и построение симплектических структур и операторов рекурсии для симметрий.

4. Расширение ℓ^*-накрытия нелокальными векторами и построение гамильтоновых структур и операторов рекурсии для косимметрий.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве внутренних локальных координат на уравнении $\mathcal{E}$ мы выбираем функции

$$u_{k,i} = \frac{\partial^{k+i} u}{\partial x^k \partial y^i}, \qquad i = 0, 1, 2, \qquad k = 0, 1, \dots\ . \tag{15}$$

При таком выборе координат полные производные, ограниченные на $\mathcal{E}$, приобретают вид

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k\geqslant 0}\Big(u_{k+1,0}\frac{\partial}{\partial u_{k,0}} + u_{k+1,1}\frac{\partial}{\partial u_{k,1}} + u_{k+1,2}\frac{\partial}{\partial u_{k,2}}\Big),\\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k\geqslant 0}\Big(u_{k,1}\frac{\partial}{\partial u_{k,0}} + u_{k,2}\frac{\partial}{\partial u_{k,1}} + D_x^k(u_{2,1}^2 - u_{3,0}u_{1,2})\frac{\partial}{\partial u_{k,2}}\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что уравнение (1) становится однородным, если входящим в него переменным присвоить следующие веса (градуировки): $|u| = 0$, $|x| = -1$, $|y| = -4$.

3.1. Законы сохранения и абелевы накрытия. Для последующих вычислений нам понадобится некоторый набор нелокальных переменных. Эти переменные мы обозначаем через $Q_{i,j}$, где второй индекс соответствует весу переменной, а первый обозначает уровень нелокальности. Под последним имеется в виду следующее. Переменные нулевого уровня определяются локальными функциями на уравнении $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{0,7}}{\partial x} &= -u_{0,1}u_{4,0} + u_{0,2}, & \frac{\partial Q_{0,7}}{\partial y} &= -u_{0,1}u_{3,1} - u_{0,2}u_{3,0} + u_{1,1}u_{2,1},\\ \frac{\partial Q_{0,9}}{\partial x} &= 2u_{0,2}u_{2,0} + u_{1,1}^2 - u_{2,0}^2u_{2,1}, & \frac{\partial Q_{0,9}}{\partial y} &= 2u_{0,2}u_{1,1} - u_{1,2}u_{2,0}^2,\\ \frac{\partial Q_{0,12}}{\partial x} &= u_{1,1}(u_{0,2} - u_{2,0}u_{2,1}), & \frac{\partial Q_{0,12}}{\partial y} &= \frac{1}{2}(u_{0,2}^2 - 2, u_{1,1}, u_{1,2}u_{2,0}). \end{aligned}$$

Переменные первого уровня определяются локальными функциями и переменными нулевого уровня:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{1,3}}{\partial x} &= 2u_{0,1} - u_{2,0}^2, & \frac{\partial Q_{1,3}}{\partial y} &= 2(Q_{0,7} + u_{0,1}u_{3,0} - u_{1,1}u_{2,0}),\\ \frac{\partial Q_{1,6}}{\partial x} &= Q_{0,7} + u_{0,1}u_{3,0}, & \frac{\partial Q_{1,6}}{\partial y} &= \frac{1}{2}u_{1,1}^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{1,8}}{\partial x} &= Q_{0,9} - 2u_{0,1}u_{1,0}u_{4,0} - 4u_{0,1}u_{20}u_{30} + 2u_{0,2}u_{1,0},\\ \frac{\partial Q_{1,8}}{\partial y} &= 4Q_{0,12} - 2u_{0,1}u_{1,0}u_{3,1} - 2u_{0,1}u_{1,1}u_{3,0} - 2u_{0,1}u_{2,0}u_{2,1} -\\ &\qquad - 2u_{0,2}u_{1,0}u_{3,0} - u_{0,2}u_{2,0}^2 + 2u_{1,0}u_{1,1}u_{2,1} + 2u_{1,1}^2u_{2,0}. \end{aligned}$$

Существуют переменные и более “глубоких” уровней. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{2,5}}{\partial x} &= -18Q_{1,6} - 2u_{0,1}u_{2,0} + 4u_{1,0}u_{1,1} + u_{2,0}^3,\\ \frac{\partial Q_{2,5}}{\partial y} &= -3Q_{0,9} - 2u_{0,1}u_{1,1} + 4u_{0,2}u_{1,0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{2,7}}{\partial x} = &-40Q_{0,7}u_{1,0} - 10Q_{1,8} - 10u_{0,1}^2 - 60u_{0,1}u_{1,0}u_{3,0} + \\ &+ u_{1,0}u_{2,0}^2u_{3,0} - \frac{1}{2}u_{20}^4, \\ \frac{\partial Q_{2,7}}{\partial y} = &-40Q_{0,7}u_{01} - 10Q_{1,11} - 30u_{0,1}^2u_{3,0} + 20u_{0,1}u_{1,1}u_{2,0} + \\ &+ 10u_{0,1}u_{2,0}^2u_{3,0} - 30u_{1,0}u_{1,1}^2 + u_{1,0}u_{2,0}^2u_{2,1} - 3u_{1,1}u_{2,0}^3,\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{3,4}}{\partial x} &= \frac{1}{3}Q_{2,5} + Q_{1,3}u_{2,0} - \frac{4}{3}u_{0,1}u_{1,0}, \\ \frac{\partial Q_{3,4}}{\partial y} &= 2Q_{0,7}u_{1,0} + Q_{1,3}u_{1,1} - Q_{1,8} - 2u_{0,1}^2 - u_{0,1}u_{2,0}^2.\end{aligned}$$

Замечание 1. С нелокальными переменными нулевого уровня ассоциированы законы сохранения уравнения (1). Например, переменной $Q_{0,7}$ соответствует закон сохранения

$$\omega_{0,7} = (-u_{0,1}u_{4,0} + u_{0,2})\,dx + (-u_{0,1}u_{3,1} - u_{0,2}u_{3,0} + u_{1,1}u_{2,1})\,dy.$$

Нелокальным переменным первого уровня соответствуют законы сохранения на накрытиях, определяемых переменными нулевого уровня, и т. д.

Замечание 2. Конечно, приведенный выше список нелокальных переменных не является исчерпывающим. Здесь описаны только те из них, которые необходимы для построения используемых далее нелокальных симметрий (п. 3.2) и косимметрий (п. 3.3); см. также п. 2.7. Новые нелокальности возникают при действии операторов рекурсии, однако в их явном описании в данном случае нет необходимости.

3.2. Симметрии. Приводимые далее результаты прямых вычислений необходимы, во-первых, для построения нелокальных векторов (см. п. 2.6.3) и, во-вторых, для “посева” иерархий симметрий.

Линеаризация уравнения (1) имеет вид

$$D_y^3(\varphi) - 2u_{2,1}D_x^2D_y(\varphi) + u_{1,2}D_x^3(\varphi) + u_{3,0}D_xD_y^2(\varphi) = 0, \tag{17}$$

где полные производные D_x и D_y берутся из равенств (16). Решая данное уравнение (17) “в малых размерностях”, мы получаем следующие симметрии [2)].

Симметрии степени 0:

$$\begin{aligned}&\varphi_0^0 = 1, \qquad \varphi_1^0 = u_{1,0}, \qquad \varphi_4^0 = u_{0,1}, \qquad \varphi_5^0 = Q_{2,5} + 8u_{0,1}u_{1,0}, \\ &\varphi_8^0 = -2Q_{0,7}u_{1,0} + Q_{1,8} - 2u_{0,1}^2 + u_{0,1}u_{2,0}^2.\end{aligned}$$

[2)] В используемых ниже обозначениях для симметрий верхний индекс отвечает степени полинома по переменным x и y, первый нижний индекс равен весу, а второй, если он есть, – это порядковый номер в множестве симметрий с данными весом и степенью.

Симметрии степени 1:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^1_{-4} = y, \qquad \varphi^1_{-1} = x,\\
&\varphi^1_{0,1} = xu_{1,0} - 4u, \qquad \varphi^1_{0,2} = yu_{0,1} + u,\\
&\varphi^1_3 = 4xu_{0,1} - Q_{1,3},\\
&\varphi^1_4 = x(Q_{2,5} + 8u_{0,1}u_{1,0}) - 3(8Q_{3,4} - 3Q_{1,3}u_{1,0} + 16uu_{0,1}).
\end{aligned}
$$

Симметрии степени 2:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^2_{-4} = y, \qquad \varphi^2_{-8} = y^2, \qquad \varphi^2_{-5} = xy, \qquad \varphi^2_{-2} = x^2,\\
&\varphi^2_{-1} = x^2u_{1,0} + 4xyu_{0,1} - 4xu - yQ_{1,3},\\
&\varphi^2_2 = 2x^2u_{0,1} - xQ_{1,3} - u^2_{1,0}.
\end{aligned}
$$

Симметрии степени 3:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^3_{-3} = x^3 - 2yu_{1,0},\\
&\varphi^3_1 = 12x^3u_{0,1} - 9x^2Q_{1,3} - 18xu^2_{1,0} - 2y(Q_{2,5} + 8u_{0,1}u_{1,0}) + 24uu_{1,0}.
\end{aligned}
$$

Нам также понадобится симметрия степени 4, имеющая вид

$$
\varphi^4_{-4} = x^4 - 8xyu_{1,0} - 8y^2u_{0,1} + 16yu.
$$

3.3. Косимметрии. Причины, по которым нам нужны явно вычисленные косимметрии, аналогичны тем, которые были указаны в п. 3.2.

Для нахождения косимметрий требуется решить уравнение, сопряженное к уравнению (17):

$$
D^3_y(\psi) - 2D^2_xD_y(u_{2,1}\psi) + D^3_x(u_{1,2}\psi) + D_xD^2_y(u_{3,0}\psi) = 0. \tag{18}
$$

Опишем необходимые в дальнейшем результаты, используя обозначения, аналогичные тем, которые применялись в п. 3.2.

Косимметрии степени 0:

$$
\begin{aligned}
&\psi^0_0 = 1, \qquad \psi^0_2 = u_{2,0}, \qquad \psi^0_5 = u_{1,1},\\
&\psi^0_6 = -18Q_{1,6} + 6u_{0,1}u_{2,0} + 12u_{1,0}u_{1,1} + u^3_{2,0},\\
&\psi^0_9 = 2Q_{0,7}u_{2,0} - Q_{0,9} + 4u_{0,1}u_{1,1} + 2u_{0,1}u_{2,0}u_{3,0} - u_{1,1}u^2_{2,0}.
\end{aligned}
$$

Косимметрии степени 1:

$$
\begin{aligned}
&\psi^1_{-4} = y, \qquad \psi^1_{-1} = x, \qquad \psi^1_{1,1} = xu_{2,0} - 3u_{1,0},\\
&\psi^1_{1,2} = yu_{1,1} + u_{1,0}, \qquad \psi^1_4 = 4xu_{1,1} + 2u_{0,1} + u^2_{2,0}.
\end{aligned}
$$

Косимметрии степени 2:

$$
\begin{aligned}
&\psi^2_{-2} = 3x^2 - 2yu_{2,0},\\
&\psi^2_0 = x^2u_{2,0} + 4xyu_{1,1} - 2xu_{1,0} + y(2u_{0,1} + u^2_{2,0}) - 4u,\\
&\psi^2_3 = 2x^2u_{1,1} + x(2u_{0,1} + u^2_{2,0}) - Q_{1,3} - 2u_{1,0}u_{2,0}.
\end{aligned}
$$

Косимметрии степени 3:

$$\begin{aligned}\psi^3_{-3} &= 2u_{1,0}y - 2u_{1,1}y^2 - 2u_{2,0}xy + x^3,\\ \psi^3_2 &= x^3u_{1,1} + x^2\left(\frac{3}{2}u_{0,1} + \frac{3}{4}u^2_{2,0}\right) - x\left(\frac{3}{2}Q_{1,3} + 3u_{1,0}u_{2,0}\right) +\\ &\quad + y\left(3Q_{1,6} - u_{0,1}u_{2,0} - 2u_{1,0}u_{1,1} - \frac{1}{6}u^3_{2,0}\right) + \left(2uu_{2,0} + \frac{1}{2}u^2_{1,0}\right).\end{aligned}$$

3.4. ℓ-Накрытие. Это накрытие задается системой уравнений

$$\begin{gathered}u_{yyy} - u^2_{xxy} + u_{xxx}u_{xyy} = 0,\\ q_{yyy} - 2u_{xxy}q_{xxy} + u_{xyy}q_{xxx} + u_{xxx}q_{xyy} = 0,\end{gathered}$$

где q является нечетной переменной в слое накрытия.

Внутренние координаты на пространстве ℓ-накрытия – это функции, определенные формулами (15), к которым добавлены следующие равенства:

$$q_{k,i} = \frac{\partial^{k+i}q}{\partial x^k\partial y^i}, \qquad i = 0,1,2, \quad k = 0,1,\dots, \tag{19}$$

а полные производные на рассматриваемом накрытии имеют вид

$$\begin{aligned}D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k\geqslant 0}\left(u_{k+1,0}\frac{\partial}{\partial u_{k,0}} + u_{k+1,1}\frac{\partial}{\partial u_{k,1}} + u_{k+1,2}\frac{\partial}{\partial u_{k,2}} +\right.\\ &\qquad\left. + q_{k+1,0}\frac{\partial}{\partial q_{k,0}} + q_{k+1,1}\frac{\partial}{\partial q_{k,1}} + q_{k+1,2}\frac{\partial}{\partial q_{k,2}}\right),\\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k\geqslant 0}\left(u_{k,1}\frac{\partial}{\partial u_{k,0}} + u_{k,2}\frac{\partial}{\partial u_{k,1}} + D^k_x(u^2_{2,1} - u_{3,0}u_{1,2})\frac{\partial}{\partial u_{k,2}} +\right.\\ &\qquad\left. + q_{k,1}\frac{\partial}{\partial q_{k,0}} + q_{k,2}\frac{\partial}{\partial q_{k,1}} + D^k_x(2u_{2,1}q_{2,1} - u_{1,2}q_{3,0} - u_{3,0}q_{1,2})\frac{\partial}{\partial q_{k,2}}\right).\end{aligned}$$

Из общей теории [10] следует, что всякой косимметрии ψ исходного уравнения соответствует закон сохранения на ℓ-накрытии (нелокальная форма). Обозначим через $\boldsymbol{\Omega}_\psi$ соответствующую нелокальную переменную. В случае уравнения (1) эта переменная определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_\psi}{\partial x} &= \psi q_{0,2} + a_{0,1}q_{0,1} + a_{0,0}q,\\ \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_\psi}{\partial y} &= b_{0,2}q_{0,2} + b_{1,1}q_{1,1} + b_{2,0}q_{2,0} + b_{0,1}q_{0,1} + b_{1,0}q_{1,0} + b_{0,0}q,\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered}b_{0,2} = -u_{3,0}\psi, \qquad b_{1,1} = 2u_{2,1}\psi, \qquad b_{2,0} = -u_{1,2}\psi,\\ b_{0,1} = -D_x(b_{1,1}), \qquad b_{1,0} = -D_x(b_{2,0}),\\ b_{0,0} = -D_x(b_{1,0})\end{gathered} \tag{21}$$

и

$$a_{0,1} = D_x(b_{0,2}) - D_y(\psi), \qquad a_{0,0} = D_x(b_{0,1}) - D_y(a_{0,1}). \tag{22}$$

Ниже мы полагаем $\boldsymbol{\Omega}^k_{i,j} = \boldsymbol{\Omega}_{\psi^k_{i,j}}$.

3.4.1. *Операторы рекурсии для симметрий.* Чтобы найти операторы рекурсии для симметрий уравнения (1), нужно решить уравнение $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\Phi) = 0$, где $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}$ – оператор линеаризации вида (17) в ℓ-накрытии, расширенном нелокальными формами, а Φ – функция на этом расширении.

Простейшее нетривиальное решение имеет вид

$$\Phi_1 = \mathbf{\Omega}^3_{-3} - x\mathbf{\Omega}^2_{-2} + 4y\mathbf{\Omega}^1_{1,2} + 2y\mathbf{\Omega}^1_{1,1} + 3x^2\mathbf{\Omega}^1_{-1} - 2u_{1,0}\mathbf{\Omega}^1_{-4} - \\ - 2y^2\mathbf{\Omega}^0_5 - 2xy\mathbf{\Omega}^0_2 + (2u_{1,0}y - x^3)\mathbf{\Omega}^0_0. \tag{23}$$

Пользуясь первым из уравнений (20), поставим в соответствие нелокальной форме $\mathbf{\Omega}_\psi$ оператор

$$\mathcal{D}_\psi = D_x^{-1} \circ (\psi D_y^2 + a_{0,1}D_y + a_{0,0}), \tag{24}$$

в котором коэффициенты заданы равенствами (21) и (22), т. е.

$$a_{0,1} = -D_x(u_{3,0}\psi) - D_y(\psi),$$
$$a_{0,0} = -2D_x^2(u_{2,1}\psi) + D_xD_y(u_{3,0}\psi) + D_y^2(\psi).$$

Тогда решению (23) соответствует оператор рекурсии вида

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{D}_{\psi^3_{-3}} - x\mathcal{D}_{\psi^2_{-2}} + 4y\mathcal{D}_{\psi^1_{1,2}} + 2y\mathcal{D}_{\psi^1_{1,1}} + 3x^2\mathcal{D}_{\psi^1_{-1}} - 2u_{1,0}\mathcal{D}_{\psi^1_{-4}} - \\ - 2y^2\mathcal{D}_{\psi^0_5} - 2xy\mathcal{D}_{\psi^0_2} + (2u_{1,0}y - x^3)\mathcal{D}_{\psi^0_0}. \tag{25}$$

Замечание 3. Поскольку переменные x и y, входящие в уравнение (1), равноправны, рассмотренной выше нелокальной форме $\mathbf{\Omega}_\psi$ можно сопоставить оператор, пользуясь вторым из уравнений (20). Этот оператор имеет вид

$$\mathcal{D}'_\psi = D_x^{-1} \circ (b_{0,2}D_y^2 + b_{1,1}D_xD_y + b_{2,0}D_x^2 + b_{0,1}D_y + b_{1,0}D_x + b_{0,0}),$$

и ему соответствует оператор рекурсии $\mathcal{R}'_1$, аналогичный оператору (25). Действие полученных операторов на симметрии уравнения (1) одинаково.

3.4.2. *Симплектические структуры.* Симплектические структуры находятся из уравнения $\tilde{\ell}^*_{\mathcal{E}}(\Psi) = 0$, где, как и в п. 3.4.1, через $\tilde{\ell}^*_{\mathcal{E}}$ обозначен оператор (18) на пространстве ℓ-накрытия, расширенном нелокальными формами, а через Ψ – функция на этом расширении.

Ниже мы приводим первые два решения этого уравнения. Простейшее решение локально и имеет вид $\Psi_1 = \mathbf{\Omega}_{1,0}$; ему соответствует симплектическая структура

$$\mathcal{S}_1 = D_x. \tag{26}$$

Следующее решение нелокально:

$$\Psi_2 = \mathbf{\Omega}^2_{-1} - 6x\mathbf{\Omega}^1_{-1} + 2u_{2,0}\mathbf{\Omega}^1_{-4} + 2y\mathbf{\Omega}^0_2 - (2u_{2,0}y - 3x^2)\mathbf{\Omega}^0_0.$$

Соответствующий оператор $\mathcal{S}_2\colon \operatorname{sym}\mathcal{E} \to \operatorname{cosym}\mathcal{E}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{D}_{\psi^2_{-1}} - 6x\mathcal{D}_{\psi^1_{-1}} + 2u_{2,0}\mathcal{D}_{\psi^1_{-4}} + 2y\mathcal{D}_{\psi^0_2} - (2u_{2,0}y - 3x^2)\mathcal{D}_{\psi^0_0},$$

где операторы $\mathcal{D}_\psi$ определены равенствами (24).

3.5. ℓ^*-Накрытие. Как уже было отмечено выше, это накрытие получается путем добавления к исходному уравнению еще одного, сопряженного к линеаризации первого. Иными словами, это накрытие описывается уравнениями

$$u_{yyy} - u_{xxy}^2 + u_{xxx}u_{xyy} = 0,$$
$$u_{xxyy}p_{xx} - 2u_{xxxy}p_{xy} + u_{xxxx}p_{yy} + u_{xyy}p_{xxx} - 2u_{xxy}p_{xxy} + u_{xxx}p_{xyy} + p_{yyy} = 0,$$

где p – новая нечетная переменная.

Внутренние координаты на ℓ^*-накрытии состоят из функций (15), к которым добавлены функции

$$p_{k,i} = \frac{\partial^{k+i}p}{\partial x^k \partial y^i}, \qquad i = 0,1,2, \quad k = 0,1,\dots,$$

а полные производные, записанные в этих координатах, имеют вид

$$\begin{aligned} D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k\geqslant 0}\biggl(&u_{k+1,0}\frac{\partial}{\partial u_{k,0}} + u_{k+1,1}\frac{\partial}{\partial u_{k,1}} + u_{k+1,2}\frac{\partial}{\partial u_{k,2}} + \\ &+ p_{k+1,0}\frac{\partial}{\partial p_{k,0}} + p_{k+1,1}\frac{\partial}{\partial p_{k,1}} + p_{k+1,2}\frac{\partial}{\partial p_{k,2}}\biggr), \\ D_y = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k\geqslant 0}\biggl(&u_{k,1}\frac{\partial}{\partial u_{k,0}} + u_{k,2}\frac{\partial}{\partial u_{k,1}} + D_x^k(u_{2,1}^2 - u_{3,0}u_{1,2})\frac{\partial}{\partial u_{k,2}} + \\ &+ p_{k,1}\frac{\partial}{\partial p_{k,0}} + p_{k,2}\frac{\partial}{\partial p_{k,1}} - D_x^k(u_{2,2}p_{2,0} - 2u_{3,1}p_{1,1} + u_{4,0}p_{0,2} + \\ &+ u_{1,2}p_{3,0} - 2u_{2,1}p_{2,1} + u_{3,0}p_{1,2})\frac{\partial}{\partial p_{k,2}}\biggr). \end{aligned}$$

Рассмотрим симметрию φ уравнения (1). Тогда [10] этой симметрии соответствует закон сохранения на ℓ^*-накрытии и, следовательно, некоторая нелокальная переменная, которую мы обозначим через $\mathbf{\Pi}_\varphi$ и назовем *нелокальным вектором.* Для уравнения (1) соответствие $\varphi \mapsto \mathbf{\Pi}_\varphi$ описывается равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_\varphi}{\partial x} &= \varphi p_{0,2} + a_{0,1}p_{0,1} + a_{0,0}p, \\ \frac{\partial \mathbf{\Pi}_\varphi}{\partial y} &= b_{0,2}p_{0,2} + b_{1,1}p_{1,1} + b_{2,0}p_{2,0} + b_{0,1}p_{0,1} + b_{1,0}p_{1,0} + b_{0,0}p, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{gathered} b_{0,2} = -u_{3,0}\varphi, \qquad b_{1,1} = 2u_{2,1}\varphi, \qquad b_{2,0} = -u_{1,2}\varphi, \\ b_{0,1} = -D_x(b_{1,1}) + 2u_{3,1}\varphi, \qquad b_{1,0} = -D_x(b_{2,0}) - u_{2,2}\varphi, \\ b_{0,0} = -D_x(b_{1,0}) \end{gathered} \tag{28}$$

и

$$a_{0,1} = D_x(b_{0,2}) - D_y(\varphi) + u_{4,0}\varphi, \qquad a_{0,0} = D_x(b_{0,1}) - D_y(a_{0,1}).$$

Далее мы обозначаем $\mathbf{\Pi}_{\varphi^k_{i,j}}$ через $\mathbf{\Pi}^k_{i,j}$.

Для последующего описания полученных нами результатов сопоставим каждому нелокальному вектору $\mathbf{\Pi}_\varphi$ оператор

$$\mathcal{D}_\varphi = D_x^{-1} \circ (\varphi D_y^2 + a_{0,1}D_y + a_{0,0}), \tag{29}$$

вид которого вытекает из первого уравнения (27). Здесь в силу соотношений (28) и (29) коэффициенты $a_{0,0}$ и $a_{0,1}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
a_{0,0} &= -2u_{2,1}D_x^2(\varphi) + u_{3,0}D_xD_y(\varphi) + D_y^2(\varphi) - u_{3,1}D_x(\varphi),\\
a_{0,1} &= -u_{3,0}D_x(\varphi) - D_y(\varphi).
\end{aligned}
$$

3.5.1. *Гамильтоновы структуры.* Как и в пп. 3.4.1 и 3.4.2, гамильтоновы структуры соответствуют решениям уравнения

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\Phi) = 0, \tag{30}$$

где оператор $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}$ – это линеаризация, которую подняли в $\tilde{\ell}^*$-накрытие, расширенное нелокальными векторами. Простейшее нетривиальное решение уравнения (30) есть функция

$$\Phi_0 = \mathbf{\Pi}^2_{-8} - 2y\mathbf{\Pi}^1_{-4} + y^2\mathbf{\Pi}^0_0,$$

которой соответствует оператор $\mathcal{H}_0\colon \operatorname{cosym}\mathcal{E} \to \operatorname{sym}\mathcal{E}$ вида

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{D}_{\varphi^2_{-8}} - 2y\mathcal{D}_{\varphi^1_{-4}} + y^2\mathcal{D}_{\varphi^0_0}.$$

Следующее решение оказывается гораздо более сложным:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 = \mathbf{\Pi}^4_{-4} - 4x\mathbf{\Pi}^3_{-3} + 6x^2\mathbf{\Pi}^2_{-2} - 8u_{1,0}\mathbf{\Pi}^2_{-5} - 8u_{0,1}\mathbf{\Pi}^2_{-8} + 16y\mathbf{\Pi}^1_{0,2} +{}\\
+ (8xu_{1,0} + 16yu_{0,1} - 16u)\mathbf{\Pi}^1_{-4} + 8y\mathbf{\Pi}^1_{0,1} - (4x^3 - 8yu_{1,0})\mathbf{\Pi}^1_{-1} -{}\\
- 8y^2\mathbf{\Pi}^0_4 - 8xy\mathbf{\Pi}^0_1 + (x^4 - 8xyu_{1,0} - 8y^2u_{0,1} + 16yu)\mathbf{\Pi}^0_0;
\end{aligned}
$$

ему соответствует оператор

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}_{\varphi^4_{-4}} - 4x\mathcal{D}_{\varphi^3_{-3}} + 6x^2\mathcal{D}_{\varphi^2_{-2}} - 8u_{1,0}\mathcal{D}_{\varphi^2_{-5}} - 8u_{0,1}\mathcal{D}^2_{\varphi_{-8}} + 16y\mathcal{D}_{\varphi^1_{0,2}} +{}\\
+ (8xu_{1,0} + 16yu_{0,1} - 16u)\mathcal{D}_{\varphi^1_{-4}} + 8y\mathcal{D}_{\varphi^1_{0,1}} - (4x^3 - 8yu_{1,0})\mathcal{D}_{\varphi^1_{-1}} -{}\\
- 8y^2\mathcal{D}_{\varphi^0_4} - 8xy\mathcal{D}_{\varphi^0_1} + (x^4 - 8xyu_{1,0} - 8y^2u_{0,1} + 16yu)\mathcal{D}_{\varphi^0_0}.
\end{aligned}
$$

Здесь и ниже операторы $\mathcal{D}_\varphi$ определяются уравнением (29).

Замечание 4. Форма приведенного выше решения зависит от выбора нелокальных векторов в ℓ^*-накрытии. Они, в свою очередь, определяются выбором базиса в пространстве симметрий. На самом деле уравнение (30) обладает гораздо более простым решением вида $\Phi'_0 = \mathbf{\Pi}'_1$, где нелокальная переменная $\mathbf{\Pi}'_1$ определяется системой уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{\Pi}'_1}{\partial x} &= p, & \frac{\partial\mathbf{\Pi}'_1}{\partial y} &= \mathbf{\Pi}'_2,\\
\frac{\partial\mathbf{\Pi}'_2}{\partial x} &= p_{0,1}, & \frac{\partial\mathbf{\Pi}'_2}{\partial y} &= \mathbf{\Pi}'_3,\\
\frac{\partial\mathbf{\Pi}_3}{\partial x} &= p_{0,2}, & \frac{\partial\mathbf{\Pi}'_3}{\partial y} &= -u_{3,0}p_{0,2} + 2u_{2,1}p_{1,1} - u_{1,2}p_{2,0}.
\end{aligned}
$$

Этому решению соответствует гамильтонов оператор $\mathcal{H}'_0 = D_x^{-1}$, являющийся обратным к симплектической структуре (26). Этот оператор отвечает гамильтонову оператору J_0 из работы [7]. Оператор $\mathcal{H}_1$, содержащий явную зависимость от x и y, является, по-видимому, новым.

Замечание 5. Имеет место соотношение $\mathcal{H}_1 = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{H}_0$ между двумя гамильтоновыми структурами, где $\mathcal{R}_1$ – оператор рекурсии, определенный равенством (25).

3.5.2. *Операторы рекурсии для косимметрий.* В заключение рассмотрим уравнение $\tilde{\ell}^*_{\mathcal{E}}(\Psi) = 0$ на ℓ^*-накрытии, расширенном нелокальными векторами. Его простейшее нетривиальное решение таково:

$$\begin{aligned}\Psi_0 = \mathbf{\Pi}^3_{-3} - 3x\mathbf{\Pi}^2_{-2} + 2u_{2,0}\mathbf{\Pi}^2_{-5} + 2u_{1,1}\mathbf{\Pi}^2_{-8} +\\ + 2(u_{1,0} + 2u_{1,1}y - u_{2,0}x)\mathbf{\Pi}^1_{-4} - (2u_{2,0}y - 3x^2)\mathbf{\Pi}^1_{-1} + 2y\mathbf{\Pi}^0_1 -\\ - (2u_{1,0}y - 2u_{1,1}y^2 - 2u_{2,0}xy + x^3)\mathbf{\Pi}^0_0.\end{aligned}$$

Решению Ψ_0 соответствует оператор рекурсии $\widehat{R}_0\colon \operatorname{cosym}\mathcal{E} \to \operatorname{cosym}\mathcal{E}$ вида

$$\begin{aligned}\widehat{R}_0 = \mathcal{D}_{\varphi^3_{-3}} - 3x\mathcal{D}_{\varphi^2_{-2}} + 2u_{2,0}\mathcal{D}^2_{\varphi_{-5}} + 2u_{1,1}\mathcal{D}_{\varphi^2_{-8}} +\\ + 2(u_{1,0} - 2u_{1,1}y - u_{2,0}x)\mathcal{D}_{\varphi^1_{-4}} - (2u_{2,0}y - 3x^2)\mathcal{D}_{\varphi^1_{-1}} + 2y\mathcal{D}_{\varphi^0_1} -\\ - (2u_{1,0}y - 2u_{1,1}y^2 - 2u_{2,0}xy + x^3)\mathcal{D}_{\varphi^0_0}.\end{aligned}$$

3.6. Иерархии. К сожалению, из-за чрезвычайной сложности вычислений нам не удалось полностью описать структуру алгебры Ли симметрий рассмотренного уравнения. В настоящее время можно сделать следующие утверждения.

1. Действие оператора $\mathcal{R}_1$ сохраняет полиномиальную степень симметрий относительно переменных x и y.

2. Существует по меньшей мере девять иерархий симметрий, которые порождаются оператором $\mathcal{R}_1$ из симметрий

$$\varphi^0_0,\ \varphi^0_1,\ \varphi^1_{-4},\ \varphi^1_{0,1},\ \varphi^1_{-1},\ \varphi^2_{-8},\ \varphi^2_{-5},\ \varphi^3_{-3},\ \varphi^4_{-4}.$$

3. Симметрии вида $\mathcal{R}_1^n\varphi^0_0$ и $\mathcal{R}_1^m\varphi^0_1$ попарно коммутируют.

4. По-видимому (хотя у нас нет строгого доказательства), существует бесконечная иерархия симметрий, имеющих сколь угодно большую полиномиальную степень по x и y.

5. В силу существования локальной симплектической структуры, приведенной в равенстве (26), существуют бесконечные иерархии косимметрий, соответствующие описанным иерархиям симметрий.

6. Законы сохранения, соответствующие иерархиям $\mathcal{R}_1^n\varphi^0_0$ и $\mathcal{R}_1^m\varphi^0_1$, находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической структурой $\mathcal{S}_1 = D_x$.

Замечание 6. В случае эволюционных уравнений наличие коммутативной иерархии симметрий означает существование “высших аналогов” исходного уравнения, получаемых в результате действия на него оператора рекурсии. В неэволюционном случае не существует, вообще говоря, корректного действия операторов рекурсии на уравнение, поэтому такое построение высших уравнений невозможно. Можно, однако, рассмотреть альтернативную схему: во-первых, перейти (если это возможно) к эволюционному представлению, во-вторых, построить “высшие аналоги” в этом представлении и, в-третьих, вернуться к исходным переменным. Мы не задавались вопросом, будет ли такая схема инвариантной, т. е. будет ли конечный результат определяться только исходным уравнением или он зависит от промежуточных шагов. Возможно, ответ на этот вопрос приведет к более глубокому пониманию природы интегрируемости уравнений общего вида.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке NWO–РФФИ (грант № 047.017.015) (П. Керстен, И. Красильщик и А. Вербовецкий), РФФИ–Консорциум E.I.N.S.T.E.I.N (грант № 09-01-92438) (А. Вербовецкий, Р. Витоло и И. Красильщик) и РФФИ–CNRS (грант № 08-07-92496) (И. Красильщик и А. Вербовецкий).

Список литературы

[1] A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov, *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **101**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[2] G. Boillat, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Math.*, **315**:11 (1992), 1211–1214.

[3] B. Dubrovin, "Geometry of 2-D topological field theories", *Integrable Systems and Quantum Groups* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, Springer, Berlin, 1996, 120–348, arXiv: hep-th/9407018.

[4] E. V. Ferapontov, C. A. P. Galvão, O. I. Mokhov, Y. Nutku, *Commun. Math. Phys.*, **186**:3 (1997), 649–669.

[5] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 62–72; O. I. Mokhov, E. V. Ferapontov, *Equations of associativity in two-dimensional topological field theory as integrable hamiltonian nondiagonalizable systems of hydrodynamic type*, arXiv: hep-th/9505180.

[6] J. Kalayci, Y. Nutku, *Phys. Lett. A*, **227**:3–4 (1997), 177–182.

[7] J. Kalayci, Y. Nutku, *J. Phys. A*, **31**:2 (1998), 723–734, arXiv: hep-th/9810076.

[8] I. A. B. Strachan, *Phys. Lett. A*, **210**:4–5 (1996), 267–272.

[9] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *J. Geom. Phys.*, **50**:1–4 (2004), 273–302, arXiv: math/0304245.

[10] I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *J. Geom. Phys.*, **61**:9 (2011), 1633–1647, arXiv: 1002.0077.

[11] V. A. Golovko, I. S. Krasil'shchik, A. M. Verbovetsky, *Acta Appl. Math.*, **101**:1–3 (2008), 59–83, arXiv: 0812.4681.

[12] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *Acta Appl. Math.*, **90**:1–2 (2006), 143–178, arXiv: nlin/0511012.

[13] C. Crnković, E. Witten, "Covariant description of canonical formalism in geometrical theories", *Three Hundred Years of Gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 676–684.

[14] G. J. Zuckerman, "Action principles and global geometry", *Mathematical Aspects of String Theory* (San Diego, California, 1986), Advanced Series in Mathematical Physics, **1**, ed. S. T. Yau, Word Scientific, Singapore, 1987, 259–284.

[15] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, XX век. Математика и механика, Факториал Пресс, М., 2005.

[16] А. М. Виноградов, *Докл. АН СССР*, **236**:2 (1977), 1200–1204.

[17] А. М. Виноградов, *Докл. АН СССР*, **238**:5 (1978), 1028–1031.

[18] A. M. Vinogradov, *J. Math. Anal. Appl.*, **100**:1 (1984), 1–40.