REPRESENTASI BULAT TENGAH DARI JUMLAH PARSIAL DERET HARMONIK

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP : 131 801 397

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS AIRLANGGA

SURABAYA

1994

FUNGSI HARMONIK

REPRESENTASI BULAT TENGAH DARI JUMLAH PARSIAL DERET HARMONIK

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP : 131 801 397

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

1994

REPRESENTASI BULAT TENGAH DARI JUMLAH PARSIAL DERET HARMONIK

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP. 131 801 397

Karya tulis ini telah diperiksa dan disetujui sebagai karya ilmiah bermutu.

Surabaya, 4 Nopember 1994

Mengetahui,	Menyetujui,
Ketua Jurusan Matematika	Kalab Matematika
(Dra. Utami Dyah Purwati)	(Drs. Kartono, M.Kom.)
NIP. 131 123 699	NIP. 131 569 358

ABSTRAK

Misalkan S_n merupakan jumlah parsial ke n dari deret Harmonik $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. Dengan menggunakan polinomial Bernoulli dan deret

$$g_m(x,n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \{(j-x)^{-m} - (-1)^m (j+x)^{-m}\}$$

diperoleh representasi bulat tengah dari S_n, yaitu :

$$S_n = \gamma + \ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}(n + \tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{7}{960}(n + \tfrac{1}{2})^{-4} + \frac{31}{8604}(n + \tfrac{1}{2})^{-6} - \frac{127}{30720}(n + \tfrac{1}{2})^{-8} - \ldots - \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{2k}(n + \tfrac{1}{2})^{-2k} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\; g_{2k+1}(x)\; dx.$$

Selanjutnya untuk sebarang $A \in R^+$, misalkan n_A merupakan bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $S_{n_A} \geq A$. Pada pembahasan ini akan dicari salah satu fungsi Comtet dari S_n dan syarat cukup untuk menentukan nilai n_A dengan menggunakan representasi bulat tengah dari S_n di atas.

KATA PENGANTAR

Rasa syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T., yang atas berkat rahmat dan hidayat-Nya penulis dapat menyelesaikan karya tulis ini.

Pada kesempatan ini tak lupa penulis sampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah berkenan menyetujui hasil karya tulis ini sebagai karya ilmiah bermutu.
2. Kepala Laboratorium Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah berkenan menyetujui hasil karya tulis ini sebagai karya ilmiah bermutu.
3. Semua guru penulis dari Sekolah Dasar sampai perguruan tinggi yang telah melimpahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
4. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan karya tulis ini.

Kemudian kritik dan saran penulis harapkan dari pembaca tulisan ini, untuk perbaikan penulisan selanjutnya.

Surabaya, Oktober 1994

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Misalkan f suatu fungsi bernilai positif yang didefinisikan pada $x > 0$. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ dikatakan divergen jika untuk setiap $A > 0$, ada n_0 sedemikian hingga $\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq A$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Permasalahan yang timbul adalah bagaimana menentukan n_0 terkecil, yang dinotasikan dengan n_A.

Untuk $f(x) = \frac{1}{x}$, jika $\exp(A - \gamma) = m + \delta$, A dan m bilangan bulat positif, $0 \leq \delta < 1$, serta

$$\gamma = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \ln n\right),$$

Comtet telah menemukan bahwa $n_A = m$ atau $n_A = m + 1$.

Selanjutnya untuk f monoton turun, Boas telah mendefinisikan suatu fungsi ω, yang disebutnya sebagai fungsi Comtet, yang bersifat $n_A = m + 1$, jika $\delta > \omega(A)$ dan $n_A = m$, jika $\delta \leq \omega(A)$ dengan h invers dari g,

$$g(x) = \int_1^x f(t)\, dt,\ h(A - C_1) = m + \delta\ ,$$

serta

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - g(n) \right).$$

Untuk $A \geq 2$, A bilangan bulat, Wrench dan yang lainnya menyatakan bahwa $\omega(A) = \frac{1}{2}$ bermanfaat sebagai fungsi Comtet dari S_n, walaupun untuk $A = 2(1)1000$ tidak benar.

Kemudian dengan rumus penjumlahan Euler-Maclaurin untuk A bilangan bulat positif, Boas menemukan bahwa untuk S_n, ada $\omega(A)$ berbentuk :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} m^{-1} - \frac{1}{48} m^{-2} + O(m^{-3}),$$

serta untuk $A \geq 2$ ada $\omega(A)$ antara

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} m^{-1} - \frac{1}{47} m^{-2} \text{ dan } \frac{1}{2} + \frac{1}{24} m^{-1} - \frac{1}{49} m^{-2} .$$

Duane W. DeTemple dan Shun Hwa Wang menyatakan bahwa dengan mengikuti pembuktian Boas, pembatasan A bilangan bulat pada hasil yang diperoleh Boas adalah tidak perlu. Pernyataan ini perlu diperbaiki sebab ada $A \in [2, S_{10}(1)]$ sedemikian hingga $\delta > \frac{1}{2} + \frac{1}{24} m^{-1} - \frac{1}{49} m^{-2}$ tetapi $n_A \neq m + 1$.

Kemudian Duane W. DeTemple dan Shun Hwa Wang dengan representasi bulat tengah memperbaiki hasil yang diperoleh Boas, yaitu untuk $A \in R^+$, ada $\omega(A)$ berbentuk

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} (m+\tfrac{1}{2})^{-1} - \frac{37}{5760} (m+\tfrac{1}{2})^{-3} + O(m+\tfrac{1}{2})^{-5},$$

dan untuk $A \geq 2$ ada $\omega(A)$ antara

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-3}$$

dan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-3}.$$

Dalam tulisan ini akan dibicarakan tentang representasi bulat tengah dari S_n serta penerapannya dalam menentukan nilai n_A dan fungsi Comtet dari S_n.

Sedangkan sistematika tulisan ini adalah sebagai berikut :

Bab I. Pendahuluan

Dalam bab ini diberikan secara singkat tentang masalah yang akan diteliti dan memuat penjelasan tentang apa yang dibahas dalam bab-bab lainnya.

Bab II. Polinomial Bernoulli

Dalam bab ini akan dibahas tentang pengertian polinomial Bernoulli beserta sifat-sifatnya yang akan digunakan dalam mencari representasi bulat tengah dari S_n.

Bab III. Rumus Penjumlahan Half Integer dari S_n

Dalam bab ini akan dibahas tentang proses mendapatkan representasi bulat tengah dari S_n.

Bab IV. Penerapan Rumus Penjumlahan Half Integer dari S_n

Dalam bab ini akan dibahas tentang penerapan representasi bulat tengah dari S_n dalam menentukan syarat cukup untuk menentukan nilai n_A, dan dalam mencari salah satu fungsi Comtat dari S_n.

Bab V. Kesimpulan

Dalam bab ini akan diberikan kesimpulan dari pembahasan bab-bab sebelumnya.

BAB II

POLINOMIAL BERNOULLI

Dalam bab ini akan dibicarakan tentang polinomial Bernoulli beserta beberapa sifat-sifatnya. Sifat polinomial Bernoulli yang dibahas dalam bab ini adalah sifat yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya, khususnya di dalam interval $[0,\frac{1}{2}]$.

Polinomial Bernoulli :

$$B_o = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2}\ ,\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}\ ,\ \ldots$$

dapat didefinisikan dalam bermacam-macam cara , tetapi untuk keperluan tulisan ini, polinomial Bernoulli dikarakteristikkan sebagai selesaian dari skema berulang

$$\left.\begin{array}{ll} B_o = 1, & B_n'(x) = n\ B_{n-1}(x), \\ \int_0^1 B_n(x)\ dx = 0, & n = 1,2,3,\ldots \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Untuk setiap n, B_n merupakan polinomial derajat n. Sebab andaikan B_n tidak berderajat n, misalkan

$B_n(x) = A_o x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-n} x^n + \ldots + A_m$, dengan $m \neq n$.

Terdapat dua kemungkinan nilai m, yaitu $m < n$ atau $m > n$.

Jika $m > n$, maka

$$B_n^{(n)}(x) = \frac{m!A_o}{(m-n)!}\,x^{m-n} + \frac{(m-n)!A_1}{(m-n+1)!}\,x^{m-n-1} + \ldots + n!A_{m-n}.$$

Hal ini bertentangan dengan $B_n^{(n)}(x) = n!B_o(x) = n!$.

Sedangkan jika $m < n$, maka $B_n^{(n)}(x) = 0$. Hal ini juga bertentangan dengan $B_n^{(n)}(x) = n!$.

Jadi untuk setiap n, B_n merupakan polinomial derajat n.

Selanjutnya selesaian dari (2.1) adalah tunggal, sebab andaikan ada lebih dari satu selesaian dari (2.1), misalkan $\{P_n\}$ dan $\{Q_n\}$ merupakan dua barisan yang berbeda dan merupakan selesaian dari (2.1) dengan $P_o(x) = Q_o(x) = 1$. Karena dua barisan di atas berbeda, maka ada bilangan bulat positif n sedemikian hingga $P_n(x) \neq Q_n(x)$. Hal ini berarti ada $d \in [0,n]$ dan $A_o \neq 0$, A_1, ..., $A_d \in R$ sedemikian hingga :

$$P_n(x) - Q_n(x) = A_o\,x^d + A_1\,x^{d-1} + \ldots + A_d.$$

Tetapi

$$A_o = \int_0^1 A_o\,dx = \frac{1}{d!}\int_0^1 \{P_n^{(d)}(x) - Q_n^{(d)}(x)\}\,dx$$

$$= \frac{n!}{d!(n-d)!}\int_0^1 \{P_{n-d}(x) - Q_{n-d}(x)\}\,dx = 0.$$

Hal ini bertentangan dengan $A_o \neq 0$.

Jadi selesaian dari (2.1) adalah tunggal.

Selanjutnya jika $B_n(x)$ selesaian dari (2.1), maka $(-1)^n B_n(1-x)$ bersifat :

1. Untuk $n = 0$, $(-1)^n B_n(1-x) = (-1)^o B_o(1-x) = 1$
2. Untuk $n = 1,2,$ ...

$$\{(-1)^n B_n(1-x)\}' = n\ (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-x)$$

dan

$$\int_0^1 (-1)^n B_n(1-x)\ dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_n(x)\ dx = 0.$$

Dari sifat $(-1)^n B_n(1-x)$ di atas dapat disimpulkan bahwa $(-1)^n B_n(1-x)$ merupakan selesaian dari (2.1).

Oleh karena itu

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x) \tag{2.2}$$

Juga jika $B_n(x)$ selesaian dari (2.1), maka $2^{n-1}\{B_n(\frac{x}{2})+B_n(\frac{1+x}{2})\}$ bersifat :

1. Untuk $n = 0$,

$$2^{n-1}\{B_n(\tfrac{x}{2}) + B_n(\tfrac{1+x}{2})\} = 2^{0-1}\{B_0(\tfrac{x}{2}) + B_0(\tfrac{1+x}{2})\} = 1$$

2. Untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\{2^{n-1}\{B_n(\tfrac{x}{2}) + B_n(\tfrac{1+x}{2})\}\}' = n\{2^{(n-1)-1}\{B_{n-1}(\tfrac{x}{2}) + B_{n-1}(\tfrac{1+x}{2})\}\}$$

dan

$$\int_0^1 2^{n-1}\{B_n(\tfrac{x}{2})+B_n(\tfrac{1+x}{2})\}dx = 2^n\{\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(x)dx\} = 0.$$

Dari sifat $2^{n-1}\ \{B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{1+x}{2})\}$ di atas dapat disimpulkan bahwa $2^{n-1}\{B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{1+x}{2})\}$ merupakan selesaian dari (2.1).

Oleh karena itu

$$B_n(x) = 2^{n-1}\ \{B_n(\tfrac{x}{2}) + B_n(\tfrac{1+x}{2})\}. \tag{2.3}$$

Dari (2.2) diperoleh bahwa $B_{2n+1}(x)$ mempunyai simetri gasal $x = \frac{1}{2}$, yaitu $B_{2n+1}(x) = -B_{2n+1}(1-x)$ dan $B_{2n}(x)$

mempunyai simetri genap $x = \frac{1}{2}$, yaitu $B_{2n}(x) = B_{2n}(1-x)$.

Selanjutnya dari (2.1) diperoleh :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = n\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = 0$$

untuk $n = 2,3,4,\ldots$.

Dengan memilih $x = 0$ dalam (2.2) dan (2.3) diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} &B_{2n}(1) = B_{2n}(0), && B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0 \\ &B_n(\tfrac{1}{2}) = -(1-2^{1-n})B_n(0), && B_{2n+1}(\tfrac{1}{2}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

Dari (2.4) diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} &B_2(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{12}, \quad B_4(\tfrac{1}{2}) = \frac{7}{240} \\ &B_6(\tfrac{1}{2}) = -\frac{31}{1344}, \quad B_8(\tfrac{1}{2}) = \frac{127}{3840}. \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

Selanjutnya akan diberikan sebuah lema yang akan digunakan dalam pembahasan bab berikutnya.

LEMA 2.1. :

Untuk setiap $k \geq 1$, ada x_k dengan $0 < x_k < \frac{1}{2}$ sedemikian hingga $(-1)^k B_{2k}(x) < 0$ untuk $0 \leq x < x_k$ dan $(-1)^k B_{2k}(x) > 0$ untuk $x_k < x \leq \frac{1}{2}$.

BUKTI :

Lema ini akan dibuktikan dengan induksi.

Untuk $k = 1$.

Dari (2.1), $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$, sehingga

$$B_1(x) < 0 \text{ untuk } 0 < x < \tfrac{1}{2}. \qquad (2.6)$$

Dari (2.1) $B_2'(x) = 2B_1(x)$ sehingga dengan (2.6) diperoleh :

$$B_2 \text{ turun pada } 0 < x < \tfrac{1}{2} \qquad (2.7)$$

Dari (2.4), $B_2(0)$ dan $B_2(\frac{1}{2})$ berlainan tanda, sehingga dari (2.7) diperoleh :

ada x_1 dengan $0 < x_1 < \frac{1}{2}$ sedemikian hingga

$$\left.\begin{array}{ll} (-1)^1 B_2(x) < 0 & \text{pada } 0 \le x < x_1 \\ B_2(x) = 0 & \text{pada } x = x_1 \\ (-1)^1 B_2(x) > 0 & \text{pada } x_1 < x < \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

Misalkan untuk sebarang bilangan bulat positif n, ada x_n dengan $0 < x_n < \frac{1}{2}$ sedemikian hingga

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^n B_{2n}(x) < 0 \text{ untuk } 0 \le x < x_n \\ (-1)^n B_{2n}(x) > 0 \text{ untuk } x_n < x \le \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa :

ada x_{n+1} dengan $0 < x_{n+1} < \frac{1}{2}$ sedemikian hingga

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{n+1}B_{2(n+1)}(x)<0 \text{ untuk } 0 \leq x < x_{n+1} \\ (-1)^{n+1}B_{2(n+1)}(x)>0 \text{ untuk } x_{n+1}<x\leq \frac{1}{2}.\end{array}\right\} \quad (2.10)$$

Terdapat dua kemungkinan nilai n, yaitu n bilangan genap dan n bilangan gasal.

Untuk n genap. Karena n genap, dari (2.9) diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l}B_{2n}(x) < 0 \text{ untuk } 0 \leq x < x_n \\ B_{2n}(x) > 0 \text{ untuk } x_n < x \leq \frac{1}{2}.\end{array}\right\} \quad (2.11)$$

Dari (2.1) $B'_{2n+1}(x) = (2n+1)B_{2n}(x)$, sehingga dengan (2.11) diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l}B_{2n+1}(x) \text{ turun, pada } 0 < x < x_n \\ B_{2n+1}(x) \text{ tetap, pada } x = x_n \\ B_{2n+1}(x) \text{ naik , pada } x_n < x \leq \frac{1}{2}.\end{array}\right\} \quad (2.12)$$

Dari (2.4) $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$, sehingga dengan (2.12) diperoleh :

$$B_{2n+1}(x) < 0 \text{ pada } 0 < x \leq \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

Dari (2.1) $B'_{2(n+1)}(x)= 2(n+1)B_{2n+1}(x)$, sehingga dengan (2.13) diperoleh :

$$B_{2(n+1)}(x) \text{ turun pada } 0 < x \leq \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Dari (2.4) $B_{2(n+1)}(0)$ dan $B_{2(n+1)}(\frac{1}{2})$ berlainan tanda , sehingga dengan (2.14) diperoleh :

ada x_{n+1} dengan $0 < x_{n+1} < \frac{1}{2}$ sedemikian hingga

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{n+1} B_{2(n+1)}(x) < 0 \text{ untuk } 0 \le x < x_{n+1} \\ (-1)^{n+1} B_{2(n+1)}(x) > 0 \text{ untuk } x_{n+1} < x \le \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad (2.15)$$

Untuk n gasal. Karena n gasal, dari (2.9) diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} B_{2n}(x) > 0 \text{ untuk } 0 \le x < x_n \\ B_{2n}(x) < 0 \text{ untuk } x_n < x \le \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad (2.16)$$

Dari (2.1) $B'_{2n+1}(x) = (2n+1)B_{2n}(x)$, sehingga dengan (2.16) diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} B_{2n+1}(x) \text{ naik, pada } 0 < x < x_n \\ B_{2n+1}(x) \text{ tetap, pada } x = x_n \\ B_{2n+1}(x) \text{ turun, pada } x_n < x \le \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad (2.17)$$

Dari (2.4) $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$, sehingga dengan (2.17) diperoleh :

$$B_{2n+1}(x) > 0 \text{ pada } 0 < x \le \frac{1}{2}. \qquad (2.18)$$

Dari (2.1) $B'_{2(n+1)}(x) = 2(n+1)B_{2n+1}(x)$, sehingga dengan (2.18) diperoleh :

$$B_{2(n+1)}(x) \text{ naik pada } 0 < x \le \frac{\;}{2}. \qquad (2.19)$$

Dari (2.4) $B_{2(n+1)}(0)$ dan $B_{2(n+1)}(\frac{1}{2})$ berlainan tanda , sehingga dengan (2.19) diperoleh :

ada x_{n+1} dengan $0 < x_{n+1} < \frac{1}{2}$ sedemikian hingga

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{n+1}B_{2(n+1)}(x)<0 \text{ untuk } 0 \le x < x_{n+1} \\ \\ (-1)^{n+1}B_{2(n+1)}(x)>0 \text{ untuk } x_{n+1} < x \le \frac{1}{2}.\end{array}\right\} \quad (2.20)$$

Polinomial Bernoulli beserta sifat-sifatnya di atas akan digunakan dalam mencari representasi bulat tengah dari S_n, yang akan disajikan dalam bab berikut ini.

BAB III

REPRESENTASI BULAT TENGAH DARI S_n

Untuk mendapatkan representasi bulat tengah dari S_n diperlukan sebuah deret yang didefinisikan sebagai berikut :

$$g_m(x,n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \{(j - x)^{-m} - (-1)^m (j + x)^{-m}\}, \qquad (3.1)$$

dengan $m \geq 2$, $n \geq 0$ dan $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Deret $g_m(x,n)$ di atas memegang peranan penting dalam mendapatkan representasi bulat tengah dari S_n. Sifat-sifat deret $g_m(x,n)$ yang akan banyak digunakan untuk mendapatkan representasi bulat tengah dari S_n diberikan dalam lema di bawah ini.

LEMA 3.1. :

Deret yang didefinisikan pada (3.1) bersifat :

1. **$g_m(x,n)$ konvergen uniform**
2. **$g_m(x,n)$ kontinu**
3. **$g_m'(x,n) = m\, g_{m+1}(x,n)$**
4. **$g_m(x,n)$ naik**
5. **$g_{2m}(0,n) = 0$**
6. **$g_{2m}(\frac{1}{2},n) = (n + \frac{1}{2})^{-2m}$.**

BUKTI :

1. Karena pada interval $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, berlaku $|(j-x)^{-m} - (j+x)^{-m}| \leq (j-x)^{-m} + (j+x)^{-m}$ untuk setiap $j \geq n+1$ dengan $\sum_{j=n+1}^{\infty} \{(j-x)^{-m} + (j+x)^{-m}\}$ konvergen, maka dengan uji M-Weierstrass diperoleh :

$$g_m(x,n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \{(j - x)^{-m} - (-1)^m(j + x)^{-m}\}$$

konvergen uniform pada interval $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

2. Karena pada interval $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $(j-x)^{-m} - (-1)^m(j+x)^{-m}$ kontinu untuk setiap $j \geq n + 1$ dan deret $g_m(x,n)$ konvergen uniform, maka $g_m(x,n)$ kontinu pada interval $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

3. Dari (3.1) dan lema 3.1. bagian 1, diperoleh :

$$g'_m(x,n) = (m+1)g_{m+1}(x,n) \text{ pada interval } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}.$$

4. Karena untuk setiap $j \geq n + 1$, $(j - x)^{-m} - (-1)^m(j + x)^{-m} \geq (j - x)^{-m} - (j + x)^{-m} > 0$, maka $g_m(x,n) > 0$. Sehingga dengan bagian 3 lema 3.1. $g_m(x,n)$ naik pada interval $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

5. $g_{2m}(0,n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \{(j-0)^{-2m} - (-1)^{2m}(j+0)^{-2m}\} = 0.$

6. Untuk sebarang $p > n + 1$,

$$\sum_{j=n+1}^{p} \{(j-\tfrac{1}{2})^{-2m} - (-1)^{2m}(j+\tfrac{1}{2})^{-2m}\} = (n + \tfrac{1}{2})^{-2m} - (p + \tfrac{1}{2})^{-2m}.$$

Sehingga

$$g_{2m}(\tfrac{1}{2},n) = \lim_{p\to\infty} \sum_{j=n+1}^{p} \{(j - \tfrac{1}{2})^{-2m} - (-1)^{2m}(j + \tfrac{1}{2})^{-2m}\}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \{(n + \tfrac{1}{2})^{-2m} - (p + \tfrac{1}{2})^{-2m}\} = (n + \tfrac{1}{2})^{-2m}. \blacksquare$$

Selanjutnya akan dicari representasi bulat tengah dari S_n.

Dengan integrasi biasa diperoleh :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{(j-x)^{-1} + (j+x)^{-1}\}dx = \ln (j+\tfrac{1}{2}) - \ln (j-\tfrac{1}{2}), \qquad (3.2)$$

dan dengan satu kali integrasi parsial diperoleh :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{(j-x)^{-1} + (j+x)^{-1}\}dx = \frac{1}{j} - \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x)\{(j-x)^{-2} - (j+x)^{-2}\}dx. \qquad (3.3)$$

Dari (3.2) dan (3.3) diperoleh :

$$\ln (j+\tfrac{1}{2}) - \ln (j-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{j} - \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x)\{(j-x)^{-2} - (j+x)^{-2}\} dx.$$

Sehingga

$$\sum_{j=n+1}^{m} \{\ln (j+\tfrac{1}{2}) - \ln (j-\tfrac{1}{2})\} = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j} - \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x) \sum_{j=n+1}^{m} \{(j-x)^{-2} - (j+x)^{-2}\} dx$$

atau

$$\ln\left(m+\tfrac{1}{2}\right) - \ln\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = S_m - S_n - \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x) \sum_{j=n+1}^{m} \{(j-x)^{-2}-(j+x)^{-2}\}dx.$$

Oleh karena itu

$$S_n = S_m - \ln\left(m+\tfrac{1}{2}\right) + \ln\left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x) \sum_{j=n+1}^{m} \{(j-x)^{-2}-(j+x)^{-2}\}dx. \qquad (3.4)$$

Karena pada interval $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $B_1(x)$ terbatas dan kontinu, dan $\sum_{j=n+1}^{m} \{(j-x)^{-2}-(j+x)^{-2}\}$ konvergen uniform ke fungsi kontinu $g_2(x,n)$ (dari lema 3.1. bagian 1), maka $B_1(x) \sum_{j=n+1}^{m} \{(j-x)^{-2}-(j+x)^{-2}\}$ konvergen uniform ke fungsi kontinu $B_1(x)g_2(x,n)$ pada interval $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

sehingga untuk $m \to \infty$, persamaan (3.4) menjadi :

$$S_n = \gamma + \ln\left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x)\, g_2(x,n)\, dx \qquad (3.5)$$

dengan $\gamma = \lim\limits_{m\to\infty} \{S_m - \ln\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\}$.

$\lim\limits_{m\to\infty} \{S_m - \ln\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\}$ ada, karena $\int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x)\, g_2(x,n)\, dx < \infty$.

Selanjutnya dengan satu kali integrasi parsial pada suku terakhir (3.5) diperoleh :

$$S_n = \gamma + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-2} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_2(x)\, g_3(x,n)\, dx. \qquad (3.6)$$

Representasi bulat tengah dari S_n dibentuk melalui persamaan (3.6). Untuk itu diperlukan lema di bawah ini.

LEMA 3.2.

Untuk setiap $k \geq 1$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\, g_{2k+1}(x,n)\, dx = -\frac{B_{2k+2}(\frac{1}{2})}{2k+2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-2k-2} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k+2}(x)\, g_{2k+3}(x,n)\, dx.$$

BUKTI :

Dengan menggunakan persamaan (2.1), (2.4), dan lema 3.1. diperoleh :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\, g_{2k+1}(x,n)\, dx = \frac{1}{2k+1}\int_0^{\frac{1}{2}} g_{2k+1}(x,n)dB_{2k+1}(x)$$

$$= \frac{1}{2k+1} B_{2k+1}(x) g_{2k+1}(x,n)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k+1}(x) g_{2k+2}(x,n)\, dx$$

$$= 0 - \frac{1}{2k+2}\int_0^{\frac{1}{2}} g_{2k+2}(x,n)dB_{2k+2}(x)$$

$$= -\frac{1}{2k+2}B_{2k+2}(x)g_{2k+2}(x,n)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k+2}(x)g_{2k+3}(x,n)dx$$

$$= -\frac{B_{2k+2}(\frac{1}{2})}{2k+2}(n+\frac{1}{2})^{-2k-2} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k+2}(x)\ g_{2k+3}(x,n)\ dx. \blacksquare$$

Dengan menggunakan lema 3.1. dan lema 3.2., jika persamaan (3.6) diintegralkan dengan integrasi parsial sebanyak 2k-2 kali, maka akan diperoleh teorema di bawah ini.

TEOREMA 3.3. :

Untuk setiap $k \geq 1$,

$$S_n = \gamma + \ln(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{24}(n+\frac{1}{2})^{-2} - \frac{7}{960}(n+\frac{1}{2})^{-4} + \frac{31}{8604}(n+\frac{1}{2})^{-6} - \frac{127}{30720}(n+\frac{1}{2})^{-8} - \ldots - \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{2k}(n+\frac{1}{2})^{-2k} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\ g_{2k+1}(x,n)\ dx. \qquad (3.7)$$

Karena ruas kanan pada persamaan (3.7) di atas memuat variabel bulat tengah $(n+\frac{1}{2})$, persamaan (3.7) disebut representasi bulat tengah dari S_n.

Selanjutnya untuk menentukan nilai n_A dan fungsi

Comtet dari S_n diperlukan taksiran dari $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)g_{2k+1}(x,n)dx$ dan taksiran nilai γ. oleh karena itu di bawah ini akan dicari taksiran dari $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)g_{2k+1}(x,n)\,dx$ dan taksiran dari nilai γ.

Pertama akan dicari taksiran untuk $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\, g_{2k+1}(x,n)\, dx$. Dari lema 2.1. diperoleh bahwa ada x_k dengan $0 < x_k < \frac{1}{2}$, sedemikian hingga $(-1)^k B_{2k}(x) < 0$ pada interval $0 < x < x_k$ dan $(-1)^k B_{2k}(x) > 0$ pada interval $x_k < x < \frac{1}{2}$, sehingga dengan sifat $g_{2k+1}(x,n)$ yang naik pada interval $0 < x_k < \frac{1}{2}$ diperoleh :

$$(-1)^k B_{2k}(x)g_{2k+1}(x,n) > (-1)^k B_{2k}(x)g_{2k+1}(x_k,n)$$

pada interval $0 < x_k < \frac{1}{2}$.

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}(-1)^k \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)g_{2k+1}(x,n)dx &> (-1)^k \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)g_{2k+1}(x_k,n)\, dx \\ &= (-1)^k g_{2k+1}(x_k,n) \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\, dx \\ &= (-1)^k g_{2k+1}(x_k,n)\frac{1}{2}\int_0^{1} B_{2k}(x)\, dx.\end{aligned}$$

Sehingga dengan (2.1) diperoleh :

$$(-1)^k \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x) g_{2k+1}(x,n)dx > 0, \qquad (3.8)$$

sebab $\int_0^1 B_{2k}(x)\ dx = 0.$

Selanjutnya dari (3.8) dan lema 3.2. diperoleh :

$$0 < (-1)^k \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x) g_{2k+1}(x,n)dx$$

$$< \frac{\left| B_{2k+2}(\frac{1}{2}) \right|}{2k+2} (n + \tfrac{1}{2})^{-2k-2} \qquad (3.9)$$

Selanjutnya akan dicari taksiran dari nilai γ. Jika pada persamaan (3.7) diambil $n = 10$ dan $k = 3$, maka akan diperoleh :

$$S_{10} = \gamma + \ln(10\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}(10\tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{7}{960}(10\tfrac{1}{2})^{-4} + \frac{31}{8604}(10\tfrac{1}{2})^{-6} +$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_6(x)\ g_7(x,10)\ dx \qquad (3.10)$$

atau

$$\gamma = S_{10} - \ln(10\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{24}(10\tfrac{1}{2})^{-2} + \frac{7}{960}(10\tfrac{1}{2})^{-4} - \frac{31}{8604}(10\tfrac{1}{2})^{-6} -$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_6(x)\ g_7(x,10)\ dx.$$

Sehingga dengan ketelitian 10^{-9} diperoleh :

$$\gamma = 0.577215665 - \int_0^{\frac{1}{2}} B_6(x)\ g_7(x,10)\ dx. \qquad (3.11)$$

Jika pada persamaan (3.9) diambil $k = 3$ dan $n = 10$, maka akan diperoleh :

$$0 < (-1)^3 \int_0^{\frac{1}{2}} B_6(x)\, g_7(x,10)\, dx$$

$$< \frac{\left|B_8(\frac{1}{2})\right|}{8} (10\tfrac{1}{2})^{-8} < 2.8 \times 10^{-11} \qquad (3.12)$$

Dari (3.11) dan (3.12) diperoleh :

$$0.577215665 < \gamma < 0.577215665 + 2.8 \times 10^{-11}.$$

Oleh karena itu dengan mengambil ketelitian 10^{-9} diperoleh :

$$\gamma = 0.577215665. \qquad (3.13)$$

Karena $\lim_{m\to\infty} \{S_m - \ln (m + \frac{1}{2})\} = \lim_{m\to\infty} \{S_m - \ln m\}$, dengan $\lim_{m\to\infty} \{S_m - m\}$ merupakan konstanta Euler, maka γ juga merupakan konstanta Euler.

Selanjutnya akan dibicarakan tentang penerapan representasi bulat tengah dari S_n.

BAB IV

PENERAPAN REPRESENTASI BULAT TENGAH DARI S_n

Pertama akan dibahas tentang penerapan representasi bulat tengah dari S_n dalam menentukan syarat cukup untuk menentukan nilai n_A yang merupakan bilangan bulat terkecil sedemikian hingga $S_{n_A} \geq A$, dengan $A \in R^+$. Selanjutnya $\exp(A - \gamma)$ dengan γ konstanta Euler dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari sebuah bilangan bulat positif m dan sebuah bilangan $\delta \in [0,1)$.

Kemudian di bawah ini akan diberikan lema yang memberikan batas atas serta batas bawah dari nilai n_A.

LEMA 4.1. :

Diberikan sebarang bilangan positif $A \geq 2$. Jika

$$\exp(A - \gamma) = m + \delta,$$

dengan $\delta \in [0,1)$, m bilangan bulat positif dan γ konstanta Euler, maka $m \leq n_A \leq m+1$.

BUKTI :

Karena $B_1(x) < 0$ dan $g_2(x,n) > 0$ pada interval

$0 < x < \frac{1}{2}$, maka

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_1(x) g_2(x,n)\, dx < 0.$$

Sehingga dari (3.5) diperoleh :

$$S_n > \gamma + \ln\,(n + \tfrac{1}{2}). \qquad (4.1)$$

Jika pada (4.1) diambil $n = m + 1$, maka akan diperoleh :

$$S_{m+1} > \gamma + \ln\,(m + 1\tfrac{1}{2}) > \gamma + \ln\,(m + \delta) = A.$$

Oleh karena itu

$$n_A \le m + 1 \qquad (4.2)$$

Untuk mendapatkan batas bawah dari n_A, akan digunakan persamaan (3.7) dengan mengambil $k = 1$, yaitu :

$$S_n = \gamma + \ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}\,(n + \tfrac{1}{2})^{-2} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_2(x)\, g_3(x,n)\, dx. \qquad (4.3)$$

Dari (3.8) diperoleh $\int_0^{\frac{1}{2}} B_2(x) g_3(x,n)\, dx < 0$. Sehingga dengan (4.3) diperoleh :

$$S_n < \gamma + \ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}\,(n + \tfrac{1}{2})^{-2}. \qquad (4.4)$$

Jika pada (4.4) diambil $n = m-1$, diperoleh :

$$\begin{aligned} S_{m-1} &< \gamma + \ln\,(m - \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}\,(m - \tfrac{1}{2})^{-2} \\ &= A - \ln\,(m+\delta) + \ln\,(m-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}\,(m-\tfrac{1}{2})^{-2} \\ &\le A - \ln m + \ln\,(m-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}\,(m-\tfrac{1}{2})^{-2} \end{aligned}$$

$$= A - \ln \left[(m-\tfrac{1}{2})\{1 + \tfrac{1}{2}(m-\tfrac{1}{2})^{-1}\}\right] + \ln (m-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24} (m-\tfrac{1}{2})^{-2}$$

$$= A - \ln \{1 + \tfrac{1}{2} (m-\tfrac{1}{2})^{-1}\} + \frac{1}{24} (m-\tfrac{1}{2})^{-2}.$$

Oleh karena itu, jika pertidaksamaan $\ln (1 + x) > x - \frac{1}{2} x^2$ untuk $x > 0$ digunakan, diperoleh :

$$S_{m-1} < A - \tfrac{1}{2} (m-\tfrac{1}{2})^{-1} + \{\tfrac{1}{2} (m-\tfrac{1}{2})^{-1}\}^2 + \frac{1}{24} (m-\tfrac{1}{2})^{-2}$$

$$= A - \tfrac{1}{2} (m-\tfrac{1}{2})^{-1} + \tfrac{1}{6} (m-\tfrac{1}{2})^{-2} < A.$$

Sehingga

$$n_A \geq m. \tag{4.5}$$

Dari (4.2) dan (4.5) diperoleh $m \leq n_A \leq m + 1$ atau dengan kata lain $n_A = m$ atau $n_A = m + 1$. ∎

Lema di atas sama dengan yang telah dihasilkan oleh Comtet, tetapi dengan pembuktian yang berbeda.

Setelah diketahui bahwa $n_A = m$ atau $n_A = m + 1$, selanjutnya akan diberikan sebuah teorema yang membicarakan tentang syarat cukup untuk menentukan apakah $n_A = m$ atau $n_A = m + 1$.

TEOREMA 4.2. :

Diberikan sebarang bilangan positif $A \geq 2$. Jika

$$\exp(A - \gamma) = m + \delta,$$

dengan γ konstanta Euler, m bilangan bulat positif dan $\delta \in [0,1)$. Maka :

1. Jika $\delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka $n_A = m$.

2. Jika $\delta \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka $n_A = m + 1$.

BUKTI :

1. Jika $\delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3}$, maka $m + \delta \leq (m+\frac{1}{2})\{1 + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-2} - \frac{7}{960}(m+\frac{1}{2})^{-4}\}$. Sehingga

$$\ln (m+\delta) \leq \ln (m+\tfrac{1}{2}) + \ln \{1 + \tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}$$

atau

$$A - \gamma \leq \ln (m+\tfrac{1}{2}) + \ln \{1+\tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}.$$

Oleh karena itu dengan menggunakan pertidaksamaan $\ln (1 + x) < x$, $x > 0$, diperoleh :

$$A - \gamma < \ln (m + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(m + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-4}$$

atau

$$A < \gamma + \ln (m+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}. \qquad (4.6)$$

Selanjutnya jika pada persamaan (3.7) diambil $k = 2$, maka akan diperoleh :

$$S_n = \gamma + \ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(n + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-4} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_4(x) g_5(x,n)\,dx. \qquad (4.7)$$

Dari (3.8) diperoleh :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_4(x)\; g_5(x,n)\; dx > 0.$$

Sehingga dengan (4.7) diperoleh :

$$S_n > \gamma + \ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(n + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(n + \tfrac{1}{2})^{-4} \qquad (4.8)$$

Selanjutnya jika pada persamaan (4.8) diambil $n = m$, maka akan diperoleh :

$$S_m > \gamma + \ln\,(m+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-4}. \qquad (4.9)$$

Dari persamaan (4.6) dan (4.9) diperoleh :

$S_m > A$, sehingga dengan lema 4.1. $n_A = m$.

Oleh karena itu untuk $A \geq 2$,

jika $\delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\,(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}\,(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka $n_A = m$.

2. Jika $\delta \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka

$$m + \delta > (m+\tfrac{1}{2})\{1 + \tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{6}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}.$$

Sehingga

$$\ln(m+\delta) > \ln(m+\tfrac{1}{2}) + \ln\{1 + \tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{6}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}$$

atau

$$A - \gamma > \ln(m+\tfrac{1}{2}) + \ln\{1 + \tfrac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{6}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}.$$

Oleh karena itu dengan menggunakan pertidaksamaan $\ln(1 + x) > x - \frac{1}{2}x^2$, $x > 0$, diperoleh :

$$A - \gamma > \ln(m + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(m + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{6}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-4} - \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{24}(m + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{6}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-4}\}^2. \qquad (4.10)$$

Selanjutnya jika pada persamaan (3.7) diambil $k = 3$, maka diperoleh :

$$S_n = \gamma + \ln(n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(n + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(n + \tfrac{1}{2})^{-4} + \tfrac{31}{8064}(n+\tfrac{1}{2})^{-6} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_6(x)g_7(x,n)\,dx. \qquad (4.11)$$

Dari (3.8) diperoleh :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_6(x)\, g_7(x,n)\,dx < 0.$$

Sehingga dengan (4.11) diperoleh :

$$S_n - \gamma < \ln(n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(n + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(n + \tfrac{1}{2})^{-4} + \tfrac{31}{8064}(n + \tfrac{1}{2})^{-6}. \qquad (4.12)$$

Jika pada persamaan (4.12) diambil $n = m$, maka diperoleh :

$$s_m - \gamma < \ln\,(m + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-2} -$$

$$\frac{7}{960}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-4} + \frac{31}{8064}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-6}. \qquad (4.13)$$

Dari (4.10) dan (4.13) diperoleh :

$$s_m < A,$$

jika

$$\ln(m + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}(m + \tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{7}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-4} +$$

$$\frac{31}{8064}(m + \tfrac{1}{2})^{-6} \le \ln\,(m + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2}$$

$$- \frac{6}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{24}(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{6}{960}(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}^2$$

atau

$$- \frac{1}{960}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-4} + \frac{31}{8064}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-6} +$$

$$\frac{1}{2}\{\frac{1}{24}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{6}{960}\,(m+\tfrac{1}{2})^{-4}\}^2 \le 0. \qquad (4.14)$$

Karena $\frac{31}{8064} < \frac{54}{24^3}$, maka (4.14) terpenuhi jika

$$- \frac{1}{960}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-4} + \frac{54}{24^3}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-6} +$$

$$\frac{1}{2}\,\{\,\frac{1}{24}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{6}{960}\,(m + \tfrac{1}{2})^{-4}\,\}^2 \le 0. \qquad (4.15)$$

Dengan memisalkan $x = \frac{1}{24}\,(m + \frac{1}{2})^{-2}$, maka (4.15) berubah menjadi

$$-\frac{3}{5}\,x^2 + 54\,x^3 + \frac{1}{2}\,(x - \frac{18}{5}\,x^2)^2 \le 0,$$

sehingga

$$x^2(-\frac{3}{5} + 54x + \frac{1}{2}(1 - \frac{18}{5}x)^2 \leq 0. \qquad (4.16)$$

Karena $x^2 > 0$, maka (4.16) terpenuhi, jika

$$-\frac{3}{5} + 54x + \frac{1}{2}(1 - \frac{18}{5}x)^2 \leq 0$$

atau

$$324x^2 + 2520x - 5 \leq 0.$$

Oleh karena itu (4.16) terpenuhi jika :

$$324x^2 + 2520x - 5 \leq 0. \qquad (4.17)$$

Pertidaksamaan (4.17) terpenuhi oleh $0 < x < 0.0019$.

Jika $A \geq \gamma + \ln 5 \approx 2.186653577...$, maka $m \geq 5$. Sehingga untuk $A \geq \gamma + \ln 5 \approx 2.186653577...$, diperoleh :

$0 < x = \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-2} < 0.0014$ yang merupakan himpunan bagiandari selesaian (4.17).

Oleh karena itu untuk $A \geq \gamma + \ln 5 \approx 2.186653577...$,

Jika $\delta \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1}-\frac{6}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3}$, maka $n_A = m + 1$. (4.18)

Karena untuk $2 \leq A < \gamma + \ln 5 \approx 2.186653577...$, $m = 4$, maka cukup ditinjau pada $m = 4$.

Misalkan

$$\delta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$$

dan

$$\delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}.$$

Untuk $m = 4$,

$$\delta_1 = = 0.50917241... \text{ dan } \delta_2 = 0.509190672... .$$

Karena $\gamma + \ln(4+\delta_2) = 2.08333335...$, maka untuk setiap A dalam interval $A \in [2, 2.08333335...)$, $\delta < \delta_2$. Sehingga sekarang cukup ditinjau pada nilai A dalam interval $[2.08333335..., 2.18665377...)$.

Karena $S_4 = 2.083333333\overline{3}$ dan $S_5 = 2.28333\overline{3}$, maka untuk nilai A dalam interval $[2.08333335..., 2.18665377...)$ $n_A = 4+1 = 5$.

Oleh karena itu, untuk $2 \le A < \gamma + \ln 5$,

jika $\delta \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1}-\frac{6}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3}$, maka $n_A = m + 1$. (4.19)

Dari (4.18) dan (4.19) dapat disimpulkan bahwa :

untuk $A \ge 2$,

$$\text{jika } \delta \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3}, \text{ maka } n_A = m+1. \blacksquare$$

Selanjutnya untuk sebarang bilangan positif A, misalkan $\exp(A - \gamma) = m + \delta$, dengan γ konstanta Euler , m bilangan bulat positif dan $\delta \in [0,1)$. Jika $\delta \in I_m = (a,b)$ dengan

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3} \quad \text{dan}$$

$$b = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3},$$

maka teorema 4.2. tidak dapat menentukan apakah $n_A = m$ atau $n_A = m + 1$.

Karena panjang interval $I_m = \frac{1}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka untuk $A \ge 2$

($m \geq 4$), ukuran total nilai δ dengan nilai $n_A$nya tidak dapat ditentukan oleh teorema 4.2. adalah

$$\frac{1}{960} \sum_{m=4}^{\infty} (m + \frac{1}{2})^{-3}. \tag{4.21}$$

Selanjutnya untuk sebarang bilangan positif A, misalkan $\exp(A - \gamma) = m + \delta$, dengan γ konstanta Euler , m bilangan bulat positif dan $\delta \in [0,1)$. Kemudian perhatikan fungsi $\omega : R^+ \longrightarrow R$, dengan

$$\omega(A) = \exp(S_m - \gamma) - m. \tag{4.22}$$

Sifat fungsi ω yang ada hubungannya dengan pembahasan tulisan ini diberikan dalam lema dibawah ini.

LEMA 4.3. :

Fungsi ω yang didefinisikan pada (4.22) bersifat :

1. Jika $\delta \leq \omega(A)$, maka $n_A = m$

2. Jika $\delta > \omega(A)$, maka $n_A = m + 1$.

BUKTI :

Misalkan A sebarang bilangan positif. Misalkan

$$\exp(A - \gamma) = m + \delta,$$

γ konstanta Euler, m bilangan bulat positif dan $\delta \in [0,1)$.

1. jika $\delta \leq \omega(A)$, maka $m + \delta \leq m + \omega(A)$. Sehingga

$$\exp(A - \gamma) \leq \exp(S_m - \gamma).$$

Oleh karena itu $A \leq S_m$, sehingga dengan lema 4.1. $n_A = m$.

2. jika $\delta > \omega(A)$, maka $m + \delta > m + \omega(A)$. Sehingga

$$\exp(A - \gamma) > \exp(S_m - \gamma).$$

Oleh karena itu $S_m < A$, sehingga dengan lema 4.1. $n_A = m+1$. ∎

Selanjutnya semua fungsi yang bersifat seperti sifat fungsi ω yang diberikan dalam lema 4.3. oleh Boas disebut fungsi Comtet.

Penerapan selanjutnya dari representasi bulat tengah dari S_n adalah menentukan salah satu fungsi Comtet dari S_n. Teorema di bawah ini memberikan salah satu bentuk fungsi Comtet dari s_n.

TEOREMA 4.4.

Diberikan sebarang bilangan positif A. Jika

$$\exp(A - \gamma) = m + \delta,$$

dengan γ konstanta Euler, m bilangan bulat positif dan $\delta \in [0,1)$, maka ada $\omega(A)$ berbentuk :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\left(m + \frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{37}{5760}\left(m + \frac{1}{2}\right)^{-3} + O\left(m + \frac{1}{2}\right)^{-5}.$$

BUKTI :

Misalkan

$$S_m = \gamma + \ln\ (m + \tfrac{1}{2}) + r_m, \qquad (4.23)$$

maka dengan (3.7)

$$r_m = \frac{1}{24}\ (m + \tfrac{1}{2})^{-2} - \frac{7}{960}\ (m + \tfrac{1}{2})^{-4} + \ldots\ . \qquad (4.24)$$

Dari (4.22) $\omega(A) = \exp\ (S_m - \gamma) - m$, sehingga dengan (4.23) diperoleh :

$$\omega(A) = \exp\{\ln\ (m+\tfrac{1}{2}) + r_m\} - m = (m+\tfrac{1}{2})\ \exp\ (r_m) - m.$$

Sehingga

$$\omega(A) = \frac{1}{2} + (m + \tfrac{1}{2})\ \exp(r_m - 1) \qquad (4.25)$$

Jika pada suku terakhir persamaan (4.25) diekspansikan dengan deret Taylor, maka diperoleh :

$$\omega(A) = \frac{1}{2} + (m+\tfrac{1}{2})\{r_m + \frac{1}{2} r_m^2 + \frac{1}{6} r_m^3 + \ldots\}. \qquad (4.26)$$

Jika r_m yang diberikan pada (4.24) dimasukkan ke (4.26), maka diperoleh :

$$\omega(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\ (m+\tfrac{1}{2})^{-1} - \frac{37}{5760}\ (m+\tfrac{1}{2})^{-3} + O(m+\tfrac{1}{2})^{-5}. \ \blacksquare$$

Walaupun fungsi Comtet sangat berperan dalam menentukan nilai n_A, tetapi sangat disayangkan bahwa fungsi Comtet selain yang diberikan dalam persamaan (4.22) dan teorema 4.4. belum dapat ditentukan secara pasti. Dengan menggunakan representasi bulat tengah dari S_n, hanya dapat ditentukan batas-batas dari $\omega(A)$. Teorema di bawah ini memberikan batas-batas untuk $\omega(A)$.

TEOREMA 4.5. :

Diberikan sebarang bilangan positif A.Jika

$$\exp(A - \gamma) = m + \delta,$$

dengan γ konstanta Euler, m bilangan bulat positif dan $\delta \in [0,1)$, maka ada $\omega(A)$ antara :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3} \text{ dan } \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3}.$$

BUKTI :

Misalkan

$$\delta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m+\frac{1}{2})^{-3}$$

dan

$$\delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}.$$

Pertama andaikan $\omega(A) < \delta_1$.

Karena $0 < \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1}\{1 - \frac{7}{40}(m+\frac{1}{2})^{-2}\} < \frac{1}{24}$, maka

$$0 < \delta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m+\frac{1}{2})^{-1}\{1 - \frac{7}{40}(m+\frac{1}{2})^{-2}\} < \frac{1}{2} + \frac{1}{24} < 1.$$

Sehingga

$$0 < \delta_1 < 1 \qquad (4.27)$$

Selanjutnya jika $\omega(A) < 0$, ambil $\delta = \frac{\delta_1}{2}$, sedangkan jika $\omega(A) > 0$, ambil $\delta = \frac{\omega(A) + \delta_1}{2}$.

Dengan pengambilan δ di atas dan dengan (4.27) diperoleh :

$$0 < \delta < \delta_1 < 1 \text{ dan } \omega(A) < \delta \tag{4.28}$$

Misalkan m suatu bilangan bulat positif, pilih A sedemikian hingga $A = \gamma + \ln(m + \delta)$. Dari (4.28) $\delta > \omega(A)$, sehingga dengan lema 4.3. diperoleh $n_A = m + 1$. Tetapi hal ini bertentangan dengan hasil yang diperoleh dari teorema 4.2., sebab $\delta < \delta_1$, sehingga $n_A = m$.

Oleh karena itu

$$\omega(A) \geq \delta_1 \tag{4.29}$$

Selanjutnya andaikan $\omega(A) > \delta_2$.

Karena $0 < \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1}\{1 - \frac{6}{24}(m + \frac{1}{2})^{-2}\} < \frac{1}{24}$, maka

$$0 < \delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1}\{1 - \frac{6}{40}(m + \frac{1}{2})^{-2}\} < \frac{1}{2} + \frac{1}{24} < 1.$$

Sehingga

$$0 < \delta_2 < 1 \tag{4.30}$$

Selanjutnya jika $\omega(A) > 1$, ambil $\delta = \frac{\delta_2}{2}$, sedangkan jika $\omega(A) < 1$, ambil $\delta = \frac{\omega(A) + \delta_2}{2}$.

Dengan pengambilan δ di atas dan dengan (4.30) diperoleh :

$$0 < \delta_2 < \delta < 1 \text{ dan } \omega(A) > \delta \tag{4.31}$$

Misalkan m suatu bilangan bulat positif, pilih A sedemikian hingga $A = \gamma + \ln(m + \delta)$. Dari (4.31) $\delta < \omega(A)$, sehingga dengan lema 4.3. diperoleh $n_A = m$. Tetapi hal ini bertentangan dengan hasil yang diperoleh dari teorema 4.2., sebab $\delta > \delta_1$, sehingga $n_A = m + 1$.

Oleh karena itu

$$\omega(A) \leq \delta_2 \tag{4.32}$$

Dari (4.29) dan (4.32) dapat disimpulkan bahwa ada $\omega(A)$ antara δ_1 dan δ_2. ∎

Selanjutnya perhatikan hasil penggunaan rumus penjumlahan Euler-Maclaurin untuk S_n dalam menentukan syarat cukup untuk menentukan nilai n_A, yaitu :

Untuk $A \geq 2$, dengan A bilangan bulat positif.

Jika $\exp(A - \gamma) = m + \delta$, maka

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Jika } \delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} m^{-1} - \frac{1}{47} m^{-2}, \text{ maka } n_A = m \\ \text{2. Jika } \delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} m^{-1} - \frac{1}{49} m^{-2}, \text{ maka } n_A = m + 1. \end{array}\right\} \tag{4.33}$$

Sehingga ukuran total nilai δ dengan nilai $n_A$nya tidak dapat ditentukan oleh syarat cukup (4.33) adalah :

$$\frac{2}{2303} \sum_{m=4}^{\infty} m^{-2}. \tag{4.34}$$

Jika teorema 4.2. dan (4.33) serta (4.21) dan (4.34) dibandingkan, maka penggunaan representasi bulat tengah dari S_n dalam hal menentukan nilai n_A mempunyai dua kelebihan dibandingkan dengan penggunaan rumus penjumlahan

Euler-Maclaurin. Kelebihan tersebut adalah :

1. Tidak membatasi nilai A (A tidak hanya bilangan bulat positif tetapi bilangan nyata positif).
2. Ukuran total nilai δ dengan nilai n_A yang tidak dapat ditentukan adalah lebih kecil.

BAB V

KESIMPULAN

Dengan menggunakan representasi bulat tengah dari S_n, yaitu :

$$S_n = \gamma + \ln(n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}(n + \tfrac{1}{2})^{-2} - \tfrac{7}{960}(n + \tfrac{1}{2})^{-4} + \tfrac{31}{8604}(n + \tfrac{1}{2})^{-6} - \tfrac{127}{30720}(n + \tfrac{1}{2})^{-8} - \ldots - \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{2k}(n + \tfrac{1}{2})^{-2k} + \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(x)\, g_{2k+1}(x,n)\, dx,$$

dengan $k \geq 1$, diperoleh :

Misalkan $A \in R^+$. Jika $\exp(A - \gamma) = m + \delta$, maka

1. Untuk $A \geq 2$,

   jika $\delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{7}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka

   $n_A = m$, dan

   jika $\delta \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(m + \frac{1}{2})^{-1} - \frac{6}{960}(m + \frac{1}{2})^{-3}$, maka

   $n_A = m + 1$.

2. Ada fungsi Comtet ω, berbentuk

$$\omega(A) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{24}(m + \tfrac{1}{2})^{-1} - \tfrac{37}{5760}(m + \tfrac{1}{2})^{-3} + O(m + \tfrac{1}{2})^{-5}.$$

4. Untuk $A \geq 2$, ada $\omega(A)$ antara

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{24}(m + \tfrac{1}{2})^{-1} - \tfrac{7}{960}(m + \tfrac{1}{2})^{-3}.$$

dan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\left(m + \frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{6}{960}\left(m + \frac{1}{2}\right)^{-3}$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Duane W. DeTemple dan Shun Hwa Wang, *Half Integer Approximation for The Partial Sums of The Harmonic Series,* **Journal Mathematical Analysis and Application,** 160 (1991), 149-156

2. R.P. Boas, *Growth of Partial Sums of Divergent Series,* **Journal Mathematical Computing,** 31 (1977), 257-264

3. L. Comtet, Problem 5346, **Journal American Mathematical Monthly,** 74 (1967),209

4. D.H. Lehmer, *A New Approach to The Bernoulli Polynomials,* **Journal American Mathematical Monthly,** 95 (1988), 905-911

5. Knopp, Konrad, *Theory and Application of Infinite Series,* Hafner Publishing Company, New York, Second (English) Edition, 1947