KONSEP TOPOLOGI NON EPSILON DELTA PADA SISTEM BILANGAN REAL

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP : 131 801 397

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS AIRLANGGA

SURABAYA

1994

TOPOLOGI

KONSEP TOPOLOGI NON EPSILON DELTA PADA SISTEM BILANGAN REAL

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP : 131 801 397

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS AIRLANGGA

SURABAYA

1994

KONSEP TOPOLOGI NON EPSILON DELTA
PADA SISTEM BILANGAN REAL

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP. 131 801 397

Karya tulis ini telah diperiksa dan disetujui
sebagai karya ilmiah bermutu.

Surabaya, 4 Nopember 1994

Mengetahui,	Menyetujui,
Ketua Jurusan Matematika	Kalab Matematika
(Dra. Utami Dyah Purwati)	(Drs. Kartono, M.Kom.)
NIP. 1[illegible]1 123 699	NIP. 131 569 558

ABSTRAK

Konsep topologi pada sistem bilangan real yang terdapat pada beberapa buku analisis didekati dengan suatu pendekatan baru tanpa melibatkan konsep epsilon delta.

KATA PENGANTAR

Rasa syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T., yang atas berkat rahmat dan hidayat-Nya penulis dapat menyelesaikan karya tulis ini.

Pada kesempatan ini tak lupa penulis sampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah berkenan menyetujui hasil karya tulis ini sebagai karya ilmiah bermutu.
2. Kepala Laboratorium Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah berkenan menyetujui hasil karya tulis ini sebagai karya ilmiah bermutu.
3. Semua guru penulis dari Sekolah Dasar sampai perguruan tinggi yang telah melimpahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
4. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan karya tulis ini.

Kemudian kritik dan saran penulis harapkan dari pembaca tulisan ini, untuk perbaikan penulisan selanjutnya.

Surabaya, Oktober 1994

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

Dalam analisis, setiap konsep yang dibangun selalu melibatkan epsilon delta. Akan tetapi dari pengalaman mempelajari analisis dengan melibatkan epsilon delta tidaklah mudah. Sehingga perlu dipikirkan suatu pendekatan lain dalam mempelajari analisis ini, tanpa melibatkan epsilon delta. Dengan pendekatan baru ini diharapkan dapat mempermudah seseorang yang akan mempelajari analisis.

Penelitian ini dilakukan dengan cara mempelajari konsep yang sudah ada dalam analisis, selanjutnya dicari pendekatan baru dari konsep tersebut. Konsep yang diperoleh dengan pendekatan baru ini adalah ekivalen dengan konsep sebelumnya, sehingga untuk mempelajari analisis cukup dipilih salah satu saja.

Kajian penelitian ini dibatasi pada konsep topologi pada sistem bilangan real R, sedangkan untuk pengembangan lebih lanjut akan dilakukan pada penelitian berikutnya.

Pembagian bab dilakukan sebagai berikut :

Bab I, PENDAHULUAN

Di dalam bab ini dijelaskan secara singkat tentang masalah yang akan diteliti dan memuat penjelasan tentang apa yang diberikan dalam bab-bab yang lainnya.

Bab II, KONSEP TOPOLOGI DENGAN EPSILON DELTA PADA SISTEM BILANGAN REAL

Di dalam bab ini diberikan konsep topologi dengan epsilon delta pada sistem bilangan real yang akan didekati dengan pendekatan baru tanpa melibatkan epsilon delta.

Bab III, KONSEP TOPOLOGI NON EPSILON DELTA PADA SISTEM BILANGAN REAL

Di dalam bab ini akan dibicarakan tentang konsep topologi non epsilon delta.

Bab IV, KESIMPULAN

Di dalam bab ini diberikan tentang kesimpulan dari bab-bab sebelumnya.

BAB II

KONSEP TOPOLOGI DENGAN EPSILON DELTA PADA SISTEM BILANGAN REAL

Dalam bab ini akan diberikan konsep-konsep topologi dengan epsilon delta pada sistem bilangan real.

Sebelum membicarakan tentang konsep topologi dengan epsilon delta terlebih dahulu akan diberikan pengertian persekitaran pada sistem bilangan real. Persekitaran titik x dengan jari-jari r dinotasikan dengan $N_r(x)$ didefinisikan sebagai $N_r(x) = \{y \in R : |x-y| < r\}$.

Setelah mengetahui pengertian persekitaran, selanjutnya diberikan tentang pengertian titik-limit.

2.1. Titik-limit

Definisi titik-limit diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 2.1. :

$x \in R$, titik-limit himpunan A, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, belaku $N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.

Selanjutnya akan diberikan suatu syarat cukup apakah suatu himpunan mempunyai titik-limit atau tidak.

Teorema 2.2. :

Setiap himpunan berhingga tidak mempunyai titik-limit.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan berhingga dan sebarang $x \in R$ akan ditunjukkan bahwa x bukan titik-limit himpunan A. Karena A berhingga maka A dapat dituliskan sebagai :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}.$$

Pilih $\varepsilon = \min \{|x - a_i| : i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$, maka $N_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Dengan demikian x bukan titik limit himpunan A. ∎

Dari teorema 2.2. dapat diperoleh dua syarat perlu suatu himpunan mempunyai titik-limit atau tidak. Kedua syarat perlu tersebut diberikan dalam teorema di bawah ini.

Akibat 2.3. :

Jika A mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$**, maka A tak berhingga.**

Bukti : Akibat 2.3. merupakan kontraposisi dari teorema 2.2.

Teorema 2.4. :

Jika x titik-limit himpunan A, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $N_\varepsilon(x) \cap A$ tak berhingga.

Bukti : Andaikan x titik-limit himpunan A dan ada $\varepsilon > 0$, sehingga $N_\varepsilon(x)\cap A$ berhingga. Karena $N_\varepsilon(x)\cap A$ berhingga, maka $N_\varepsilon(x)\cap A$ dapat dituliskan sebagai

$$N_\varepsilon(x)\cap A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}.$$

Pilih $\delta = \min\{|x - a_i| : i = 1,2,3,\ldots,n\}$, maka $N_\delta(x)\cap A = \emptyset$. Dengan demikian x bukan titik limit himpunan A.Kontradiksi.∎

Setelah membicarakan tentang titik-limit, konsep penting lainnya yang perlu dibicarakan adalah titik-terasing dari suatu himpunan.

Definisi 2.5. :

$x \in A$ disebut titik-terasing dari himpunan A, jika x bukan titik-limit himpunan A.

Selanjutnya dibicarakan tentang pengertian titik-dalam, titik-batas, dan titik-luar.

2.2. Titik-dalam, Titik-batas, dan Titik-Luar

Di bawah ini diberikan pengertian titik-dalam, titik-batas, dan titik-luar suatu himpunan.

Definisi 2.6. :

$x \in R$ disebut titik-dalam himpunan A, jika ada $\varepsilon>0$ sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A$.

Definisi 2.7. :

$x \in R$ disebut titik-batas himpunan A, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ $N_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ dan $N_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$.

Teorema 2.8. :

Jika x titik-batas himpunan A dan $x \notin A$, maka x merupakan titik-limit himpunan A.

Bukti : Jika x merupakan titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan $x \notin A$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga x merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A.■

Definisi 2.9. :

$x \in R$ disebut titik-luar himpunan A, jika ada $\varepsilon > 0$, sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A^c$.

Dari definisi 2.9. dan definisi 2.6. dapat disimpulkan bahwa x titik-luar hinmpunan A jika dan hanya jika x titik-dalam himpunan A^c.

2.3. Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Di bawah ini diberikan pengertian himpunan terbuka dan himpunan tertutup beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.10. :

A disebut himpunan terbuka, jika setiap anggotanya merupakan titik-dalam himpunan A.

Definisi 2.11. :

A himpunan tertutup , jika setiap titik-limit himpunan A termuat dalam A.

Selanjutnya diberikan teorema yang menyatakan hubungan antara himpunan terbuka dan tertutup.

Teorema 2.12. :

A himpunan terbuka jika dan hanya jika A^c himpunan tertutup.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbuka dan x titik-limit himpunan A^c. Karena x titik-limit himpunan A^c, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $N_\varepsilon(x) \cap A^c - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga $N_\varepsilon(x)$ bukan merupakan himpunan bagian dari A. Oleh karena itu x bukan titik-dalam himpunan A. Karena A terbuka , maka $x \notin A$ atau $x \in A^c$. Jadi A^c merupakan himpunan tertutup. Sebaliknya ambil sebarang A^c himpunan tertutup dan $x \in A$. Karena $x \notin A^c$, maka x bukan titik-limit himpunan A^c. Oleh karena itu ada $\varepsilon > 0$, sehingga $N_\varepsilon(x) \cap A^c - \{x\} = \emptyset$. Karena $x \notin N_\varepsilon(x) \cap A^c$, maka $N_\varepsilon(x) \cap A^c = \emptyset$. Sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A$. Oleh karena itu x merupakan titik-dalam himpunan A. Dengan demikian A merupakan himpunan terbuka .∎

Akibat 2.13. :

A himpunan tertutup jika dan hanya jika A^c himpunan terbuka .

Dibawah ini diberikan syarat perlu dan cukup untuk menentukan apakah suatu himpunan merupakan himpunan tertutup ditinjau dari titik batas himpunan tersebut.

Teorema 2.14. :

A himpunan tertutup jika dan hanya jika setiap titik-batas himpunan A termuat dalam A.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan tertutup . Andaikan ada titik-batas himpunan A yang tidak termuat dalam himpunan A, misalkan titik-batas tersebut adalah x. Karena $x \notin A$ dan A^c himpunan terbuka, maka ada $\varepsilon > 0$, sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A^c$. Oleh karena itu $N_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Hal ini bertentangan dengan sifat x sebagai titik-batas . Sebaliknya misalkan setiap titik-batas himpunan A termuat dalam himpunan A dan x sebarang anggota A^c. Karena $x \notin A$, maka x bukan titik-batas himpunan A. Sehingga ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ dan $N_\varepsilon(x) \cap A^c = \emptyset$. Karena $N_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$, maka $N_\varepsilon(x) \subseteq A^c$. Oleh karena itu A^c merupakan himpunan terbuka atau dengan kata lain A merupakan himpunan tertutup .∎

Setelah membicarakan tentang syarat perlu dan cukup untuk menentukan apakah suatu himpunan merupakan himpunan terbuka atau tertutup, di bawah ini akan dibicarakan tentang koleksi himpunan terbuka dan tertutup.

Teorema 2.15. :

Misalkan $B \subset R$,

$$\{A_i : A_i \text{ himpunan terbuka untuk setiap } i \in B\}$$

dan

$$\{C_i : C_i \text{ himpunan tertutup untuk setiap } i \in B\},$$

maka :

(i). $\cup_{i\in B} A_i$ merupakan himpunan terbuka

(ii). $\cap_{i\in B} C_i$ merupakan himpunan tertutup

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \cup_{i\in B} A_i$, maka ada $i \in B$ sehingga $x \in A_i$. Karena A_i merupakan himpunan terbuka , maka ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A_i \subset \cup_{i\in B} A_i$. Oleh karena itu $\cup_{i\in B} A_i$ merupakan himpunan terbuka .

(ii). Karena $\{\cap_{i\in B} C_i\}^c = \cup_{i\in B} C_i^c$, maka dengan (i) diperoleh $\cap_{i\in B} C_i$ merupakan himpunan tertutup . ■

Teorema 2.16. :

Untuk $n \in N$, misalkan $\{A_i : A_i, 1 \le i \le n$, himpunan terbuka $\}$, dan $\{C_i : C_i, 1 \le i \le n$, himpunan tertutup $\}$, maka :

(i). $\cap_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan terbuka

(ii). $\cup_{i=1}^{n} C_i$ merupakan himpunan tertutup .

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \cap_{i=1}^{n} A_i$, maka untuk setiap i, berlaku $x \in A_i$. Karena A_i himpunan terbuka , maka ada $\varepsilon_i > 0$ sehingga $N_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$. Pilih $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1,2,\ldots,n\}$, maka $N_{\varepsilon}(x) \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Sehingga $\cap_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan terbuka .

(ii). Karena $\{\cup_{i=1}^{n} C_i\}^c = \cap_{i=1}^{n} C_i^c$, maka dengan (i) diperoleh $\cup_{i=1}^{n} C_i$ merupakan himpunan tertutup .∎

Selanjutnya diberikan pengertian penutup suatu himpunan dan beberapa sifat-sifatnya.

2.4. Penutup Suatu Himpunan

Sebelum membicarakan tentang penutup suatu himpunan terlebih dahulu dibicarakan tentang pengertian himpunan terbatas.

Definisi 2.17. :

Himpunan A disebut :

(i). terbatas, jika ada $M \in R$ sehingga untuk setiap $x,y \in A$, $|x - y| \le M$.

(ii). terbatas ke atas, jika ada $M \in R$ sehingga untuk setiap untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \le M$.

(iii). terbatas ke bawah, jika ada $M \in R$ sehingga untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \ge M$.

Pengertian penutup himpunan yang diberikan dalam definisi di bawah ini dihubungkan dengan himpunan semua titik-limit himpunan tersebut.

Definisi 2.18. :

Jika A' menyatakan himpunan semua titik-limit himpunan A, maka penutup himpunan A adalah himpunan $\bar{A} = A \cup A'$.

Definisi 2.19. :

Himpunan $A \subset X$ disebut rapat dalam X, jika $X \subset \bar{A}$.

Syarat cukup agar suprimum dan infimum suatu himpunan termuat di dalam penutup himpunan tersebut diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.20. :

Jika $A \neq \emptyset$ dan terbatas, maka $\sup A \in \bar{A}$ dan $\inf A \in \bar{A}$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbatas , Misalkan $a = \sup A$ dan $b = \inf A$. Jika $a \notin A$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $N_{\varepsilon}(a) \cap A - \{a\} \neq \emptyset$. Sehingga $a \in A'$. Sedangkan jika $b \notin A$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $N_{\varepsilon}(b) \cap A - \{b\} \neq \emptyset$. Sehingga $b \in A'$. Jadi $a, b \in \bar{A}$.∎

Hubungan antara himpunan tertutup dan penutup suatu himpunan diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.21. :

(i). $\bar{A}$ tertutup .

(ii). A tertutup jika dan hanya jika $A = \bar{A}$.

(iii). $\bar{A}$ himpunan tertutup terkecil yang memuat A.

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \bar{A}^c$, maka $x \notin A'$ dan $x \notin A$. Oleh karena itu ada $\varepsilon > 0$, sehingga $N_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Selanjutnya dari teorema 2.4. $N_\varepsilon(x)$ tidak memuat titik-limit himpunan A, sehingga $N_\varepsilon(x) \cap A' = \emptyset$. Oleh karena itu $N_\varepsilon(x) \cap \bar{A} = \emptyset$. Dengan demikian $N_\varepsilon(x) \subset \bar{A}^c$. Jadi $\bar{A}^c$ terbuka atau $\bar{A}$ tertutup.
(ii). Dari (i) jika $\bar{A} = A$, maka A tertutup. Sebaliknya jika A tertutup , maka $A' \subset A$. Sehingga $\bar{A} = A$.
(iii). Ambil sebarang B himpunan tertutup yang memuat A dan x sebarang anggota A'. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Karena $A \subset B$, maka $N_\varepsilon(x) \cap B - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga $x \in B'$. Dengan demikian $A' \subset B'$. Oleh karena itu $\bar{A} \subset \bar{B}$.■

Konsep topologi selanjutnya yang akan didekati dengan pendekatan *nεδ* adalah himpunan kompak.

2.5. Himpunan Kompak

Sebelum membicarakan tentang himpunan kompak terlebih dahulu dibicarakan tentang selimut terbuka suatu himpunan.

Definisi 2.22. :

Keluarga himpunan terbuka , $\{G_\alpha\}$, disebut selimut terbuka himpunan A, jika $A \subseteq \cup_\alpha G_\alpha$.

Di bawah ini akan dibicarakan tentang pengertian himpunan kompak.

Definisi 2.23. :

A disebut himpunan kompak , jika setiap selimut terbuka himpunan A memuat sub bagian berhingga yang menyelimuti A. Sub bagian tersebut disebut sub selimut berhingga himpunan A.

Salah satu himpunan yang merupakan himpunan kompak adalah himpunan berhingga. Pembuktian himpunan berhingga merupakan himpunan kompak diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.24. :

Setiap himpunan berhingga adalah himpunan kompak .

Bukti : Ambil sebarang A himpunan berhingga, maka A dapat dituliskan sebagai $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Selanjutnya ambil sebarang $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka himpunan A. Maka untuk setiap i ada $G_\alpha^i \in \{G_\alpha\}$ sehingga $a_i \in G_\alpha^i$. Oleh karena itu $\{G_\alpha^i : 1 \le i \le n\}$ merupakan sub selimut berhingga himpunan A. Dengan kata lain A merupakan himpunan kompak.■

Contoh himpunan yang tidak kompak adalah interval terbuka, sedangkan pembuktiannya diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.25. :

Setiap interval terbuka bukan merupakan himpunan kompak.

Bukti : Ambil sebarang interval terbuka, misalkan interval tersebut (u,v). untuk setiap $n \in N$ dengan $v - u > \frac{2}{n}$, misalkan

$$I^n = (u + \frac{1}{n}, v - \frac{1}{n}).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{I^n\}$ merupakan selimut terbuka interval (u,v) yang tidak mempunyai sub selimut berhingga interval (u,v). Ambil sebarang $p \in (u,v)$, maka ada $s > 0$ dan $t > 0$, sehingga $p = u + t$ dan $p = v - s$. Dengan dalil Archimedes diperoleh ada $n \in N$, sehingga $\frac{1}{n} < t$ dan $\frac{1}{n} < s$. Oleh karena itu $p \in I^n$. Dengan demikian $\{I^n\}$ merupakan selimut terbuka interval (u,v). Selanjutnya ambil sebarang

$\{I^k\}$ sub bagian berhingga dari $\{I^n\}$, akan ditunjukkan bahwa $\{I^k\}$ bukan sub selimut berhingga interval (u,v). Pilih y terbesar sehingga $I^y \in \{I^k\}$, maka tidak ada anggota $\{I^k\}$ yang memuat sebarang anggota $(u,u+\frac{1}{y})$. Sehingga $\{I^k\}$ bukan sub selimut berhingga dari (u,v). Oleh karena itu interval (u,v) bukan himpunan kompak . ∎

Syarat cukup agar himpunan bagian dari himpunan kompak merupakan himpunan kompak diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.26. :

Himpunan bagian tertutup dari himpunan kompak merupakan himpunan kompak .

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak dan B sebarang himpunan bagian tertutup dari himpunan A. Ambil sebarang $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka himpunan B. Karena B himpunan tertutup , maka B^c himpunan terbuka . Sehingga $\{G_\alpha\}\cup\{B^c\}$ merupakan selimut terbuka dari himpunan A. Karena A himpunan kompak , maka ada sub selimut berhingga $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$ yang memuat A. Selanjutnya jika $B^c \in \{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$, maka $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\} - \{B^c\}$ merupakan sub selimut berhingga dari B. Sedangkan jika $B^c \notin \{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$, maka $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$

merupakan sub selimut berhingga dari $\mathcal{B}$. Oleh karena itu B merupakan himpunan kompak . ∎

Selanjutnya diberikan syarat cukup agar barisan interval tertutup memuat elemen persekutuan.

Teorema 2.27. :

Jika untuk setiap $i \in N$, misalkan $\bar{I}_{x_i} \in [a_i, b_i]$, $\bar{I}_{x_i} \supseteq \bar{I}_{x_{i+1}}$, $a = \sup\{a_i : i \in N\}$, dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$, maka

$$[a,b] \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{I}_{x_i} .$$

Bukti : Karena untuk setiap $i \in N$, $a_1 \leq b_i$ dan $a_i \leq b_1$, maka $\{a_i : i \in N\}$ terbatas ke atas dan $\{b_i : i \in N\}$ terbatas ke bawah. Sehingga $a = \sup\{a_i : i \in N\}$ dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$ ada. Karena untuk setiap $i \in N$, $a_i \leq b_i$, maka $a \leq b$. Sehingga dengan pendefinisian a dan b diperoleh untuk setiap $i \in N$, $a_i \leq a \leq b \leq b_i$.
Oleh karena itu $[a,b] \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{I}_{x_i}$. ∎

Jika interval terbuka bukan merupakan himpunan kompak, sebaliknya interval tertutup merupakan himpunan kompak. Hal ini dituangkan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.28. :

Untuk setiap $x \in R$, $\overline{I}_x$ kompak .

Bukti : Ambil sebarang $x \in R$ dan $I_x \in \mathcal{I}_x$. Andaikan $\overline{I}_x$ tidak kompak . Misalkan $\overline{I}_x = [u,v]$ dan $\{G_\alpha\}$ merupakan selimut terbuka dari $\overline{I}_x = [u,v]$ yang tidak memiliki sub selimut berhingga yang menyelimuti $\overline{I}_x = [u,v]$. Misalkan $y_1 \in (u,v)$ dengan y_1 merupakan bilangan rasional, maka $\overline{I}_x = [u,y_1] \cup [y_1,v]$ dan salah satu dari $[u,y_1]$ dan $[y_1,v]$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Misalkan yang tidak dapat diselimuti adalah $[u,y_1]$, namakan $\overline{I}_{x_1}$. Dengan mengambil bilangan rasional $y_2 \in \overline{I}_{x_1}$,maka $\overline{I}_{x_1} = [u,y_2] \cup [y_2,y_1]$ dan salah satu dari $[u,y_2]$ dan $[y_2,y_1]$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian dari $\{G_\alpha\}$. Namakan yang tidak dapat diselimuti tersebut dengan $\overline{I}_{x_2}$. Selanjutnya proses ini dilanjutkan sehingga diperoleh :

(a). Untuk setiap $i \in N$, $\overline{I}_{x_i} \supset \overline{I}_{x_{i+1}}$.

(b). Untuk setiap $i \in N$, $\overline{I}_{x_i}$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian dari $\{G_\alpha\}$.

Misalkan Untuk setiap $i \in N$, $\overline{I}_{x_i} = [a_i,b_i]$, maka dengan teorema 2.27. diperoleh $a = \sup\{a_i : i \in N\}$ dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$ merupakan anggota dari $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{I}_{x_i}$. Dari proses pembentukan $\overline{I}_{x_i}$, diperoleh $a = b$. Selanjutnya karena $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{I}_{x_i} \subset \bar{I}_x$, maka ada G_α sehingga $a \in G_\alpha$. Oleh karena itu ada $\varepsilon > 0$, sedemikian hingga $N_\varepsilon(a) \subset G_\alpha$. Menurut pendefinisian a diperoleh ada $i \in N$ sehingga $\bar{I}_{x_i} \subset N_\varepsilon(a) \subset G_\alpha$. Hal ini bertentangan dengan (b). Jadi $\bar{I}_x$ kompak . ∎

Untuk selanjutnya diberikan syarat perlu dan cukup suatu himpunan merupakan himpunan kompak.

Teorema 2.29. :

A kompak jika dan hanya jika A tertutup dan terbatas.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak dan $x \in A^c$. Untuk setiap $p \in A$, dipilih $N_\varepsilon(p)$ dan $N_\delta(x)$ sehingga $N_\varepsilon(p) \cap N_\delta(x) = \emptyset$. Karena $\{N_\varepsilon(p) : p \in A\}$ merupakan selimut terbuka dari A dan A kompak , maka ada $p_1, p_2, \ldots, p_n \in A$, sehingga $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_{\varepsilon_i}(p_i)$. Dari pendefinisian $N_{\varepsilon_i}(p_i)$, diperoleh bahwa untuk setiap i ada $N_{\delta_i}(x)$ sehingga $N_\varepsilon(p_i) \cap N_{\delta_i}(x) = \emptyset$.
Selanjutnya dipilih $N_\delta(x) = \bigcap_{i=1}^{n} N_{\delta_i}(x)$, maka $N_\delta(x) \cap \{\bigcup_{i=1}^{n} N_{\varepsilon_i}(p_i)\} = \emptyset$. Dengan demikian $N_\delta(x) \cap A = \emptyset$, sehingga

$N_\delta(x) \subseteq A^c$. Oleh karena itu A^c terbuka, dengan kata lain A tertutup. Selanjutnya karena $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_{\varepsilon_i}(p_i)$, maka A terbatas ke atas dan ke bawah. Jadi A terbatas. Sebaliknya jika A terbatas, maka untuk setiap $x \in A$, ada interval tertutup [a,b] sehingga $A \subset [a,b]$. Karena A tertutup dan [a,b] kompak, maka menurut teorema 2.26. A kompak. ∎

Selanjutnya diberikan teorema yang menyatakan syarat cukup agar koleksi himpunan kompak memuat elemen persekutuan.

Teorema 2.30. :

Jika $\{K_\alpha\}$ merupakan koleksi himpunan kompak, sehingga irisan setiap sub bagian berhinggannya tidak kosong, maka

$$\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \emptyset.$$

Bukti : Ambil sebarang $\{K_\alpha\}$ koleksi himpunan kompak , sehingga irisan setiap sub bagian berhinggannya tidak kosong. Andaikan $\bigcap_\alpha K_\alpha = \emptyset$, maka $K_\beta \cap \{\bigcap_{\alpha\neq\beta} K_\alpha\} = \emptyset$. Sehingga $K_\beta \subset \{\bigcap_{\alpha\neq\beta} K_\alpha\}^c$ atau $K_\beta \subset \bigcup_{\alpha\neq\beta} K_\alpha^c$. Dengan demikian $\{K_\alpha^c : \alpha \neq \beta\}$ merupakan selimut terbuka dari K_β. Karena K_β kompak , maka ada $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sehingga $K_\beta \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^c$. Dengan demikian diperoleh

$K_\beta \cap \{ \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \} = \emptyset$. Kontradikisi.■

Akibat 2.31. :

Jika $\{K_n\}$ merupakan koleksi himpunan kompak dengan $K_n \supset K_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Sifat Heiene Borel suatu himpunan mempunyai hubungan yang erat dengan himpunan kompak . Di bawah ini diberikan pengertian suatu himpunan yang mempunyai sifat Heiene Borel.

Definisi 2.32. :

Himpunan A disebut bersifat Heine Borel jika setiap selimut terbuka dari A mempunyai sub selimut berhingga yang masih menyelimuti A.

Dengan definisi 2.32. dapat disimpulkan bahwa A kompak jika dan hanya jika A bersifat Heine Borel.

Seperti sifat Heiene Borel yang mempunyai hubungan dengan himpunan kompak , sifat Bolzano Weierstrass juga dapat dihubungkan dengan himpunan kompak . Pengertian himpunan yang mempunyai sifat Bolzano Weierstrass diberikan dalam definisi di bawah ini, sedangkan hubungan antara himpunan kompak dan himpunan yang bersifat Bolzano Weierstrass diberikan dalam teorema 2.35..

Definisi 2.33. :

Suatu himpunan A disebut bersifat Bolzano-Weiestrass jika setiap himpunan berhingganya mempunyai titik-limit yang termuat dalam A.

Telah diketahui bahwa syarat perlu agar suatu himpunan mempunyai titik-limit adalah himpunan tersebut harus tak berhingga. Tetapi tidak semua himpunan tak terhingga mempunyai titik limit, sebagai contoh himpunan bilangan asli tidak mempunyai titik-limit. Di bawah ini diberikan syarat cukup agar himpunan tak berhingga mempunyai titik-limit.

Teorema 2.34. :

Setiap himpunan tak berhingga dan terbatas mempunyai titik-limit .

Bukti : Ambil sebarang A himpunan tak berhingga dan terbatas , maka sup A ada. Karena untuk setiap $N_\varepsilon(\sup A)$, berlaku $N_\varepsilon(\sup A) \cap A - \{\sup A\} \neq \emptyset$, maka sup A merupakan titik-limit himpunan A.∎

Teorema 2.35. :

A kompak jika dan hanya jika A mempunyai sifat Bolzano Weierstrass.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak , maka terdapat dua kemungkinan yaitu A berhingga dan A tak berhingga. Jika A berhingga, maka A tidak mempunyai sub bagian tak berhingga. Sehingga pernyataan jika $B \subseteq A$ dengan B tak berhingga, maka A mempunyai titik-limit selalu bernilai benar. Selanjutnya jika A tak berhingga dan B sub bagian tak berhingga dari A, maka menurut teorema 2.29. dan teorema 2.34. diperoleh B mempunyai titik-limit yang termuat dalam A. Sebaliknya ambil sebarang A himpunan yang mempunyai sifat Bolzano Wierstrass. Andaikan A tidak kompak, maka menurut teorema 2.29. A tidak tertutup atau A tidak terbatas .
Jika A tidak terbatas , maka ada $x \in A$ sehingga A bukan himpunan bagian dari setiap interval terbuka yang memuat x. Selanjutnya untuk setiap $n \in N$, dipilih $I^m=(x-m,x+m)$, maka ada $x_m \in A$ tetapi $x_m \notin I^m$. Dengan demikian barisan $\{x_m\}$ merupakan himpunan bagian tak berhingga dari A, tetapi tidak mempunyai titik-limit . Kontradiksi. Selanjutnya jika A tidak tertutup , maka ada titik-limit dari A yang bukan anggota A, notasikan dengan x. Selanjutnya untuk setiap $m \in N$, dipilih $I^m=(x-\frac{1}{m},x+\frac{1}{m})$. Sehingga untuk setiap $m \in N$, ada $x_m \in A \cap I^m$ dan $x \neq x_m$. Oleh karena itu $S = \{x_m : m \in N\}$ merupakan himpun-

an bagian tak berhingga dari A dan x merupakan titik-limitnya. Selanjutnya ambil sebarang $y \in R$ dengan $y \neq x$, maka ada $t > 0$ sehingga $y = x - t$ atau $y = x + t$. Jika $y = x - t$, maka ada $n \in N$ sehingga $y < x - \frac{1}{n}$. Sehingga dengan memilih $N_{\varepsilon}(y) \subseteq (x - \frac{1}{n-1}, x - \frac{1}{n})$, diperoleh $N_{\varepsilon}(y) \cap S - \{y\} = \emptyset$. Oleh karena itu y bukan titik-limit himpunan S. Jika $y = x + t$, maka ada $n \in N$ sehingga $y > x + \frac{1}{n}$. Sehingga dengan memilih $N_{\varepsilon}(y) \subseteq (x + \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n})$, diperoleh $N_{\varepsilon}(y) \cap S - \{y\} = \emptyset$. Oleh karena itu y bukan titik-limit himpunan S. Jadi S merupakan himpunan bagian tak berhingga dari A yang mempunyai titik-limit tidak dalam A. Kontradiksi. Jadi A himpunan kompak . ∎

BAB III

KONSEP TOPOLOGI NON EPSILON DELTA PADA SISTEM BILANGAN REAL

Dalam bab ini dibicarakan tentang konsep topologi non epsilon delta pada sistem bilangan real. Untuk itu perlu diberikan suatu undefined term dari konsep-konsep yang akan dibangun, dalam hal ini undefined term yang dimaksud adalah interval terbuka $I_x = (u,v)$ dengan $x \in I_x$ dan $x \in R$ (R merupakan sistem bilangan real).

Selanjutnya misalkan $\mathcal{I}_x$ merupakan koleksi semua I_x, dan semua himpunan yang dibicarakan dalam bab ini adalah himpunan bagian dari R.

Pembicaran tentang konsep topologi pada analisis biasanya dimulai dengan membicarakan tentang pengertian titik-limit dalam hal ini titik-limit non epsilon delta (untuk selanjutnya non epsilon delta disingkat $n\varepsilon\delta$).

3.1. Titik-limit

Definisi titik-limit $n\varepsilon\delta$ diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 3.1. :

$x \in R$, titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, belaku **$I_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.**

Karena konsep topologi yang akan dibangun adalah ekivalen dengan konsep sebelumnya, maka di bawah ini diberikan keekivalenan definisi titik-limit $n\varepsilon\delta$ dengan definisi titik-limit sebelumnya.

Teorema 3.2. :

$x \in R$ merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-limit himpunan A.

Bukti : Ambil sebarang x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan $\varepsilon > 0$. Dengan memilih $I_x = N_\varepsilon(x)$, maka $N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Oleh karena itu x merupakan titik-limit himpunan A. Sebaliknya ambil sebarang x titik-limit himpunan A dan $I_x \in \mathcal{I}_x$. Misalkan $I_x = (u, v)$ dan $\varepsilon = \min\{x-u, v-x\}$, maka $\emptyset \neq N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \subset I_x \cap A - \{x\}$. Sehingga x merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A.∎

Salah satu kriteria untuk menentukan apakah suatu himpunan mempunyai titik-limit atau tidak, diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.3. :

Setiap himpunan berhingga tidak mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan berhingga. Jadi A dapat dituliskan sebagai

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ dengan } a_i < a_{i+1},\ i=1,2,\ \ldots, n-1.$$

Selanjutnya ambil sebarang $x \in R$, akan ditunjukkan bahwa x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Maka terdapat tiga kemungkinan ,yaitu $x < a_i$ untuk setiap i, $x > a_i$ untuk setiap i, dan ada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $a_i \leq x < a_{i+1}$. Jika $x < a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $u < x$ dan $x < v < a_i$, untuk setiap i. Jika $x > a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $x > u > a_i$ untuk setiap i, dan $v > x$. Sedangkan jika ada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $a_i \leq x < a_{i+1}$, maka dipilih $a_{i-1} < u = a_i$ jika $a_i < x$ atau $a_{i-1} < u < a_i$ jika $a_i = x$ dan $u < v < a_{i+1}$. Dengan memilih $I_x = (u,v)$, maka $I_x \cap A - \{x\} = \emptyset$. Oleh karena itu x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A.∎

Selanjutnya di bawah ini diberikan dua syarat perlu suatu himpunan mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$.

Akibat 3.4. :

Jika A mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$, maka A tak berhingga.

Teorema 3.5. :

Jika x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, maka untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$ berlaku $I_x \cap A$ tak berhingga.

Bukti : Andaikan x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan ada I_x sehingga $I_x \cap A$ berhingga. Jadi $I_x \cap A$ dapat dituliskan sebagai $I_x \cap A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, dengan $a_i < a_{i+1}$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$. Maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu $x < a_i$ untuk setiap i, $x > a_i$ untuk setiap i, dan ada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $a_i \le x < a_{i+1}$. Jika $x < a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $u<x$ dan $x < v < a_i$, untuk setiap i. Jika $x > a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $x > u > a_i$ untuk setiap i, dan $v > x$. Sedangkan jika ada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $a_i \le x < a_{i+1}$, maka dipilih $a_{i-1} < u = a_i$ jika $a_i < x$ atau $a_{i-1} < u < a_i$ jika $a_i = x$ dan $u < v < a_{i+1}$. Dengan memilih $I_x^1 = (u,v)$, maka $I_x^1 \cap A - \{x\} = \emptyset$. Oleh karena itu x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A. Kontradiksi. ∎

Setelah membicarakan tentang titik-limit $n\varepsilon\delta$, konsep penting lainnya yang perlu dibicarakan adalah titik-terasing dari suatu himpunan.

Definisi 3.6. :

$x \in A$ disebut titik-terasing $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A, jika x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A.

Dengan menggunakan teorema 3.2. dan definisi 3.6. diperoleh teorema dibawah ini yang menjelaskan keekivalenan definisi titik-terasing $n\varepsilon\delta$ dengan definisi titik-terasing sebelumnya.

Teorema 3.7. :

x titik-terasing $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-terasing himpunan A.

Setelah membicarakan tentang titik-limit dan titik-terasing, selanjutnya akan dibicarakan tentang titik-dalam, titik-batas, dan titik-luar suatu himpunan.

3.1.2. Titik-dalam, Titik-batas, dan Titik-Luar

Pengertian titik-dalam $n\varepsilon\delta$ suatu himpunan diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 3.8. :

$x \in R$ disebut titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \subset A$.

Keekivalenan pengertian titik-dalam $n\varepsilon\delta$ dengan pengertian titik-dalam sebelumnya diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.9. :

x titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-dalam himpunan A.

Bukti : Ambil sebarang x titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A, maka ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \subset A$. Misalkan $I_x = (u,v)$ dan $\varepsilon = \min\{x-u, v-x\}$, maka $N_\varepsilon(x) \subset I_x \subset A$. Sehingga x merupakan titik-dalam himpunan A. Sebaliknya ambil sebarang x titik-dalam himpunan A, maka ada $N_\varepsilon(x)$, sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A$. Dengan mengambil $I_x = N_\varepsilon(x)$, maka $I_x \subset A$. Sehingga x merupakan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A.∎

Pengertian titik-batas $n\varepsilon\delta$ suatu himpunan diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 3.10. :

$x \in R$ disebut titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, $I_x \cap A \neq \emptyset$ dan $I_x \cap A^c \neq \emptyset$.

Keekivalenan pengertian titik-batas $n\varepsilon\delta$ dengan pengertian titik-batas sebelumnya diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.11. :

x titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-batas himpunan A.

Bukti : Ambil sebarang x titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan $\varepsilon>0$. Dengan memilih $I_x=N_\varepsilon(x)$, maka $N_\varepsilon(x)\cap A \neq \emptyset$ dan $N_\varepsilon(x)\cap A^c \neq \emptyset$. Sehingga x merupakan titik-batas himpunan A. Sebaliknya ambil sebarang x titik-batas himpunan A dan $I_x \in \mathcal{I}_x$. Misalkan $I_x=(u,v)$ dan $\varepsilon=\min\{x-u,v-x\}$, maka $N_\varepsilon(x)\subset I_x$. Karena $N_\varepsilon(x)\cap A\neq\emptyset$ dan $N_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$, maka $I_x \cap A \neq \emptyset$ dan $I_x \cap A^c \neq \emptyset$. Sehingga x merupakan titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A. ∎

Syarat cukup suatu titik merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ suatu himpunan yang berhubungan dengan titik-batas himpunan tersebut diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.12. :

Jika x titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan $x \notin A$, maka x merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A.

Bukti : Jika x merupakan titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan $x\notin A$, maka untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, berlaku $I_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga x merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A. ∎

Selanjutnya diberikan pengertian titik-luar $n\varepsilon\delta$ suatu himpunan diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 3.13. :

$x \in R$ disebut titik-luar $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika ada $I_x \in \mathcal{I}_x$,

sehingga $I_x \subset A^c$.

Dari definisi 3.13. dan definisi 3.8. dapat disimpulkan bahwa x titik-luar $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c. Sehingga dengan teorema 3.9. diperoleh teorema di bawah ini.

Teorema 3.14. :

x titik-luar $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-luar himpunan A.

Selanjutnya akan dibicarakan tentang pengertian himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ dan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ beserta sifat-sifatnya.

3.1.3. Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Pengertian himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ diberikan dalam definisi di bawah ini. Definisi himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ ini dihubungkan dengan pengertian titik-dalam.

Definisi 3.15. :

A disebut himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, jika setiap anggotanya merupakan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A.

Keekivalenan definisi himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ dengan definisi himpunan terbuka sebelumnya diperoleh dari definisi 3.15. dan teorema 3.9., dan diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.16. :

A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A himpunan terbuka.

Selanjutnya diberikan pengertian himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ yang dihubungkan dengan pengertian titik-limit $n\varepsilon\delta$.

Definisi 3.17. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$, jika setiap titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A termuat dalam A.

Keekivalenan definisi himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ dengan definisi himpunan tertutup sebelumnya diperoleh dari definisi 3.17. dan teorema 3.2., dan diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.18. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A merupakan himpunan tertutup.

Hubungan antara himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ dan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.19. :

A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A^c himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ dan x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c. Karena x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c, maka untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, berlaku $I_x \cap A^c - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga I_x bukan merupakan himpunan bagian dari A. Oleh karena itu x bukan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Karena A terbuka $n\varepsilon\delta$, maka $x \notin A$ atau $x \in A^c$. Jadi A^c merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$. Sebaliknya ambil sebarang A^c himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ dan $x \in A$. Karena $x \notin A^c$, maka x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c. Sehingga ada $I_x \in \mathcal{I}_x$, sehingga $I_x \cap A^c - \{x\} = \emptyset$. Karena $x \notin I_x \cap A^c$, maka $I_x \cap A^c = \emptyset$. Sehingga $I_x \subset A$. Oleh karena itu x merupakan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Dengan demikian A merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$. ∎

Hubungan antara himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ dan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ juga dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

Akibat 3.20. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A^c himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.

Syarat perlu dan cukup untuk menentukan suatu himpunan merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.21. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika setiap titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A termuat dalam A.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$. Andaikan ada titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A yang tidak termuat dalam himpunan A, misalkan titik-batas $n\varepsilon\delta$ tersebut adalah x. Karena $x \notin A$ dan A^c himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ (akibat 3.20), maka ada $I_x \in \mathcal{I}_x$, sehingga $I_x \subset A^c$. Oleh karena itu $I_x \cap A = \emptyset$. Hal ini bertentangan dengan sifat x sebagai titik-batas $n\varepsilon\delta$. Sebaliknya misalkan setiap titik-batas himpunan A termuat dalam himpunan A dan x sebarang anggota A^c. Karena $x \notin A$, maka x bukan titik-batas $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Sehingga ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \cap A \neq \emptyset$ dan $I_x \cap A^c \neq \emptyset$. Karena $I_x \cap A^c \neq \emptyset$, maka $I_x \cap A = \emptyset$. Sehingga $I_x \subset A^c$. Oleh karena itu A^c merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ dan dengan akibat 3.20. A merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$. ∎

Keterbukaan (ketertutupan) gabungan atau irisan himpunan-himpunan terbuka (tertutup) diberikan dalam dua teorema di bawah ini.

Teorema 3.22. :

Misalkan $B \subset R$,

$\{A_i : A_i$ himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ untuk setiap $i \in B\}$

dan

$\{C_i : C_i$ himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ untuk setiap $i \in B\}$,

maka :

(i). $\cup_{i\in B} A_i$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$

(ii). $\cap_{i\in B} C_i$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \cup_{i\in B} A_i$, maka ada $i \in B$ sehingga $x \in A_i$. Karena A_i merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, maka ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \subset A_i \subset \cup_{i\in B} A_i$. Oleh karena itu $\cup_{i\in B} A_i$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.

(ii). Karena $\{\cap_{i\in B} C_i\}^c = \cup_{i\in B} C_i^c$, maka dengan (i) dan akibat 3.20. diperoleh $\cap_{i\in B} C_i$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$. ∎

Teorema 3.23. :

Untuk $n \in N$, misalkan $\{A_i : A_i, 1 \le i \le n$, himpunan terbuka $n\varepsilon\delta\}$, dan $\{C_i : C_i, 1 \le i \le n$, himpunan tertutup $n\varepsilon\delta\}$, maka :

(i). $\cap_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$

(ii). $\cup_{i=1}^{n} C_i$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$.

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \cap_{i=1}^{n} A_i$, maka untuk setiap i, berlaku $x \in A_i$. Karena A_i himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, maka ada

$I_x^i \in \mathcal{I}_x$, sehingga $I_x^i \subset A_i$. Dengan memilih $I_x = \cap_{i=1}^n I_x^i$, maka $I_x \subset \cap_{i=1}^n A_i$. Sehingga $\cap_{i=1}^n A_i$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.

(ii). Karena $\{\cup_{i=1}^n C_i\}^c = \cap_{i=1}^n C_i^c$, maka dengan (i) dan akibat 3.20. diperoleh $\cup_{i=1}^n C_i$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$. ∎

Bentuk himpunan terbuka diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.24. :

Setiap himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ **merupakan gabungan beberapa** I_x **yang saling asing dan paling banyak terhitung.**

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$. Untuk setiap $x \in A$, dipilih $I_x \in \mathcal{I}_x$ terbesar sehingga $I_x \subset A$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in A$, dengan $x \neq y$, berlaku $I_x \cap I_y = \emptyset$ atau $I_x = I_y$. Jika $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, maka ada $z \in I_x \cap I_y$. Sehingga $I_z = I_x \cup I_y$ memuat x dan y. Oleh karena itu dengan pemilihan I_x dan I_y diperoleh $I_x = I_y = I_z$. Selanjutnya dari pengambilan I_x diperoleh $A = \cup_{x\in A} I_x$, dengan setiap I_x saling asing satu dengan yang lainnya. Untuk membuktikan bahwa $\{I_x\}$ paling banyak terhitung, maka dibangun himpunan $G = \{r \in Q : r \in I_x\}$. Karena $G \subset Q$, dan Q terhitung , maka $\{I_x\}$ paling banyak terhitung. ∎

Konsep topologi pada sistem bilangan real selanjutnya adalah penutup suatu himpunan.

3.1.4. Penutup Suatu Himpunan

Sebelum membicarakan tentang penutup suatu himpunan terlebih dahulu akan diberikan definisi himpunan terbatas.

Definisi 3.25. :

Himpunan A disebut :

(i). terbatas, jika untuk setiap $x \in R$, ada $I_x \in \mathcal{S}_x$ sehingga $A \subset I_x$.

(ii). terbatas ke atas, jika ada $x \in R$ sehingga $A \subset (-\infty, x)$.

(iii). terbatas ke bawah, jika ada $x \in R$ sehingga $A \subset (x, \infty)$.

Pengertian penutup suatu himpunan diberikan dalam definisi di bawah ini. Pengertian penutup himpunan ini dihubungkan dengan himpunan semua titik limit.

Definisi 3.26. :

Jika A' menyatakan himpunan semua titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, maka penutup himpunan A adalah himpunan $\bar{A} = A \cup A'$.

Definisi 3.27. :

Himpunan $A \subset X$ disebut rapat dalam X, jika $X \subset \bar{A}$.

Syarat cukup agar suprimum dan infimum suatu himpunan termuat di dalam penutup himpunan tersebut diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.28. :

Jika $A \neq \emptyset$ dan terbatas, maka sup $A \in \bar{A}$ dan inf $A \in \bar{A}$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbatas $n\varepsilon\delta$, Misalkan a = sup A dan b = inf A. Jika $a \notin A$, maka untuk setiap $I_a \in \mathcal{I}_a$, berlaku $I_a \cap A - \{a\} \neq \emptyset$. Sehingga $a \in A'$. Sedangkan jika $b \notin A$, maka untuk setiap $I_b \in \mathcal{I}_b$, $I_b \cap A - \{b\} \neq \emptyset$. Sehingga $b \in A'$. Jadi $a, b \in \bar{A}$. ∎

Hubungan antara penutup suatu himpunan dan himpunan tertutup diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.29. :

(i). $\bar{A}$ tertutup $n\varepsilon\delta$.

(ii). A tertutup $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika $A = \bar{A}$.

(iii). $\bar{A}$ himpunan tertutup terkecil yang memuat A.

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \bar{A}^c$, maka $x \notin A'$ dan $x \notin A$. Oleh karena itu ada $I_x \in \mathcal{I}_x$, sehingga $I_x \cap A = \emptyset$. Selanjutnya dari teorema 3.5. I_x tidak memuat titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, sehingga $I_x \cap A' = \emptyset$. Oleh karena itu $I_x \cap \bar{A} = \emptyset$.

Dengan demikian $I_x \subset \overline{A}^c$. Jadi $\overline{A}^c$ terbuka $n\varepsilon\delta$ atau $\overline{A}$ tertutup $n\varepsilon\delta$.

(ii). Dari (i) jika $\overline{A} = A$, maka A tertutup $n\varepsilon\delta$. Sebaliknya jika A tertutup $n\varepsilon\delta$, maka $A' \subset A$. Sehingga $\overline{A} = A$.

(iii). Ambil sebarang B himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ yang mmemuat A dan x sebarang anggota A'. Maka untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, berlaku $I_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Karena $A \subset B$, maka $I_x \cap B - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga $x \in B'$. Sehingga $A' \subset B'$. Oleh karena itu $\overline{A} \subset \overline{B}$.∎

Konsep topologi selanjutnya adalah himpunan kompak.

3.1.5. Himpunan Kompak

Sebelum membicarakan tentang himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, terlebih dahulu akan dibicarakan tentang selimut terbuka suatu himpunan.

Definisi 3.30. :

Keluarga himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, $\{G_\alpha\}$, disebut selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika $A \subseteq \cup_\alpha G_\alpha$.

Setelah didefinisikan selimut terbuka suatu himpunan, selanjutnya akan diberikan pengertian himpunan kompak $n\varepsilon\delta$.

Definisi 3.31. :

A disebut himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, jika setiap selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan A memuat sub bagian berhingga yang menyelimuti A. Sub bagian tersebut disebut sub selimut berhingga himpunan A.

Salah satu himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ adalah himpunan berhingga. Pembuktian pernyataan ini diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.32. :

Setiap himpunan berhingga adalah himpunan kompak $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan berhingga, maka A dapat dituliskan sebagai $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Selanjutnya ambil sebarang $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Maka untuk setiap i ada $G_\alpha^i \in \{G_\alpha\}$ sehingga $a_i \in G_\alpha^i$. Oleh karena itu $\{G_\alpha^i : 1 \leq i \leq n\}$ merupakan sub selimut berhingga himpunan A. Dengan kata lain A merupakan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$.∎

Selanjutnya setiap interval buka bukan merupakan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, hal ini diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.33. :

Untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, dengan $x \in R$, berlaku I_x bukan himpun-

an kompak $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang $x \in R$ dan $I_x \in \mathcal{G}_x$, maka I_x dapat dituliskan sebagai $I_x = (u,v)$. untuk setiap n, $m \in N$, misalkan $I^{nm} = (u + \frac{1}{n}, v - \frac{1}{m})$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{I^{nm}\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari I_x yang tidak mempunyai sub selimut berhingga dari I_x. Ambil sebarang $p \in I_x$, maka ada $s > 0$ dan $t > 0$, sehingga $p = u + t$ dan $p = v - s$. Dengan dalil Archimedes diperoleh ada $n, m \in N$, sehingga $\frac{1}{n} < t$ dan $\frac{1}{m} < s$. Oleh karena itu $p \in I^{nm}$. Dengan demikian $\{I^{nm}\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari I_x. Selanjutnya ambil sebarang $\{I^{kl}\}$ sub bagian berhingga dari $\{I^{nm}\}$, akan ditunjukkan bahwa $\{I^{kl}\}$ bukan sub selimut berhingga dari I_x. Pilih y terbesar sehingga $I^{yz} \in \{I^{kl}\}$, maka tidak ada anggota $\{I^{kl}\}$ yang memuat sebarang anggota $(u , u + \frac{1}{y})$. Sehingga $\{I^{kl}\}$ bukan sub selimut berhingga dari $\{I^{nm}\}$. Oleh karena itu I_x bukan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$. ∎

Kriteria himpunan bagian suatu himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ merupakan himpunan kompak diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.34. :

Himpunan bagian tertutup $n\varepsilon\delta$ **dari himpunan kompak** $n\varepsilon\delta$ **merupakan himpunan kompak** $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ dan B sebarang himpunan bagian tertutup $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A. Ambil sebarang $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan B. Karena B himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$, maka B^c himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$. Sehingga $\{G_\alpha\}\cup\{B^c\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A. Karena A himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, maka ada sub selimut berhingga $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$ yang memuat A. Selanjutnya jika $B^c \in \{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$, maka $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\} - \{B^c\}$ merupakan sub selimut berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Sedangkan jika $B^c \notin \{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$, maka $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$ merupakan sub selimut berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Oleh karena itu B merupakan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$. ∎

Selanjutnya diberikan syarat cukup agar barisan himpunan yang mempunyai elemen persekutuan.

Teorema 3.35. :

Jika untuk setiap $i \in N$, misalkan $\bar{I}_{x_i} \in [a_i, b_i]$, $\bar{I}_{x_i} \ge \bar{I}_{x_{i+1}}$, $a = \sup\{a_i : i \in N\}$, dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$, maka

$$[a,b] \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{I}_{x_i}.$$

Bukti : Karena untuk setiap $i \in N$, $a_1 \le b_i$ dan $a_i \le b_1$, maka $\{a_i : i \in N\}$ terbatas ke atas dan $\{b_i : i \in N\}$ terbatas ke bawah.

Sehingga $a = \sup\{a_i : i \in N\}$ dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$ ada. Karena untuk setiap $i \in N, a_i \leq b_i$, maka $a \leq b$. Sehingga dengan pendefinisian a dan b diperoleh untuk setiap $i \in N$, $a_i \leq a \leq b \leq b_i$. Oleh karena itu $[a,b] \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{I}_{x_i}$. ∎

Jika interval terbuka bukan merupakan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, sebaliknya interval tertutup merupakan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$. Hal ini diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.36. :

Untuk setiap $x \in R$, $\overline{I}_x$ kompak $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang $x \in R$ dan $I_x \in \mathcal{G}_x$. Andaikan $\overline{I}_x$ tidak kompak $n\varepsilon\delta$. Misalkan $\overline{I}_x = [u,v]$ dan $\{G_\alpha\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari $\overline{I}_x = [u,v]$ yang tidak memiliki sub selimut berhingga yang menyelimuti $\overline{I}_x = [u,v]$. Misalkan $y_1 \in (u,v)$ dengan y_1 merupakan bilangan rasional, maka $\overline{I}_x = [u,y_1] \cup [y_1,v]$ dan salah satu dari $[u,y_1]$ dan $[y_1,v]$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Misalkan yang tidak dapat diselimuti adalah $[u,y_1]$, namakan $\overline{I}_{x_1}$. Dengan mengambil bilangan rasional $y_2 \in \overline{I}_{x_1}$, maka $\overline{I}_{x_1} = [u,y_2] \cup [y_2,y_1]$ dan salah satu dari $[u,y_2]$ dan $[y_2,y_1]$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian dari $\{G_\alpha\}$. Namakan yang tidak dapat diselimuti tersebut dengan $\overline{I}_{x_2}$. Selanjutnya proses ini dilanjutkan sehingga diperoleh :

(a). Untuk setiap $i \in N$, $\bar{I}_{x_i} \supset \bar{I}_{x_{i+1}}$.

(b). Untuk setiap $i \in N$, $\bar{I}_{x_i}$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian dari $\{G_\alpha\}$.

Misalkan Untuk setiap $i \in N$, $\bar{I}_{x_i} = [a_i, b_i]$, maka dengan teorema 3.35. diperoleh $a = \sup\{a_i : i \in N\}$ dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$ merupakan anggota dari $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{I}_{x_i}$. Dari proses pembentukan $\bar{I}_{x_i}$, diperoleh $a = b$. Selanjutnya karena $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{I}_{x_i} \subset \bar{I}_x$, maka ada G_α sehingga $a \in G_\alpha$. Oleh karena itu ada $I_a \in \mathcal{G}_a$, sedemikian hingga $I_a \subset G_\alpha$. Menurut pendefinisian a diperoleh ada $i \in N$ sehingga $\bar{I}_{x_i} \subset I_a \subset G_\alpha$. Hal ini bertentangan dengan (b). Jadi $\bar{I}_x$ kompak *nεδ*. ∎

Syarat perlu dan cukup agar suatu himpunan merupakan himpunan kompak *nεδ* diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.37. :

A kompak *nεδ* jika dan hanya jika A tertutup *nεδ* dan terbatas *nεδ*.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak *nεδ* dan $x \in A^c$. Untuk setiap $p \in A$, dipilih $I_p \in \mathcal{G}_p$ dan $I_x \in \mathcal{G}_x$ sehingga $I_p \cap I_x = \emptyset$.

Karena $\{I_p : p \in A\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari A dan A kompak $n\varepsilon\delta$, maka ada $p_1, p_2, \ldots, p_n \in A$, sehingga $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{p_i}$.

Dari pendefinisian I_{p_i}, diperoleh bahwa untuk setiap i ada I_x^i sehingga $I_{p_i} \cap I_x^i = \emptyset$. Selanjutnya dipilih $I_x = \bigcap_{i=1}^{n} I_x^i$, maka $I_x \cap \{ \bigcup_{i=1}^{n} I_{p_i} \} = \emptyset$. Karena $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{p_i}$ dan $I_x \cap \{ \bigcup_{i=1}^{n} I_{p_i} \} = \emptyset$, maka $I_x \subset A^c$. Oleh karena itu A^c terbuka $n\varepsilon\delta$, dengan kata lain A terbuka $n\varepsilon\delta$. Selanjutnya karena $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{p_i}$, maka untuk setiap $x \in A$, ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $A \subset I_x$. Oleh karena itu A terbatas $n\varepsilon\delta$. Sebaliknya jika A terbatas, maka untuk setiap $x \in A$, ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $A \subset \bar{I}_x$. Karena A tertutup $n\varepsilon\delta$ dan $\bar{I}_x$ kompak $n\varepsilon\delta$, maka menurut teorema 3.34. A kompak $n\varepsilon\delta$. ∎

Selanjutnya diberikan teoremma yang menyatakan syarat cukup agar koleksi himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ memuat elemen persekutuan.

Teorema 3.38. :

Jika $\{K_\alpha\}$ merupakan koleksi himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, sehingga irisan setiap sub bagian berhingganya tidak kosong, maka

$$\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \emptyset.$$

Bukti : Ambil sebarang $\{K_\alpha\}$ koleksi himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, sehingga irisan setiap sub bagian berhinggannya tidak kosong. Andaikan $\bigcap_{\alpha} K_{\alpha} = \emptyset$, maka $K_{\beta} \cap \{ \bigcap_{\alpha \neq \beta} K_{\alpha} \} = \emptyset$. Sehingga $K_{\beta} \subset \{ \bigcap_{\alpha \neq \beta} K_{\alpha} \}^{c}$ atau $K_{\beta} \subset \bigcup_{\alpha \neq \beta} K_{\alpha}^{c}$. Dengan demikian $\{K_{\alpha}^{c} : \alpha \neq \beta\}$ merupakan selimut terbuka *nεδ* dari K_{β}. Karena K_{β} kompak *nεδ*, maka ada $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sehingga $K_{\beta} \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^{c}$. Dengan demikian diperoleh $K_{\beta} \cap \{ \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \} = \emptyset$. Kontradikisi. ∎

Akibat 3.39. :

Jika $\{K_n\}$ merupakan koleksi himpunan kompak *nεδ* dengan $K_n \supset K_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Sifat Heiene Borel suatu himpunan mempunyai hubungan yang erat dengan himpunan kompak *nεδ*. Di bawah ini diberikan pengertian suatu himpunan yang mempunyai sifat Heiene Borel.

Definisi 3.40. :

Himpunan A disebut bersifat Heine Borel jika setiap selimut terbuka *nεδ* dari A mempunyai sub selimut berhingga yang masih menyelimuuti A.

Dengan definisi 3.40. dapat disimpulkan bahwa A kompak *nεδ* jika dan hanya jika A bersifat Heine Borel.

Seperti sifat Heiene Borel yang mempunyai hubungan dengan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, sifat Bolzano Weierstrass juga dapat dihubungkan dengan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$. Pengertian himpunan yang mempunyai sifat Bolzano Weierstrass diberikan dalam definisi di bawah ini, sedanglan hubungan antara himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ dan himpunan yang bersifat Bolzano Weierstrass diberikan dalam teorema 3.43..

Definisi 3.41. :

Suatu himpunan A disebut bersifat Bolzano-Weiestrass jika setiap himpunan berhingganya mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$ yang termuat dalam A.

Telah diketahui bahwa syarat perlu agar suatu himpunan mempunyai titik-limit adalah himpunan tersebut harus tak berhingga. Tetapi tidak semua himpunan tak terhingga mempunyai titik limit, sebagai contoh himpunan bilangan asli tidak mempunyai titik-limit. Di baawah ini diberikan syarat cukup agar himpunan tak berhingga mempunyai titik-limit.

Teorema 3.42. :

Setiap himpunan tak berhingga dan terbatas $n\varepsilon\delta$ mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan tak berhingga dan terbatas *nεδ*, maka sup A ada. Karena untuk setiap $I_{\text{sup } A} \in \mathcal{I}_{\text{sup } A}$, berlaku $I_{\text{supA}} \cap A - \{\text{sup } A\} \neq \emptyset$, maka sup A merupakan titik-limit *nεδ* himpunan A.∎

Teorema 3.43. :

A kompak *nεδ* jika dan hanya jika A mempunyai sifat Bolzano Weierstrass.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak *nεδ*, maka terdapat dua kemungkinan yaitu A berhingga dan A tak berhingga. Jika A berhingga, maka A tidak mempunyai sub bagian tak berhingga. Sehingga pernyataan jika $B \subseteq A$ dengan B tak berhingga, maka A mempunyai titik-limit *nεδ* selalu bernilai benar. Selanjutnya jika A tak berhingga dan B sub bagian tak berhingga dari A, maka menurut teorema 3.37 dan teorema 3.42. diperoleh B mempunyai titik-limit *nεδ* yang termuat dalam A. Sebaliknya ambil sebarang A himpunan yang mempunyai sifat Bolzano Wierstrass. Andaikan A tidak kompak, maka menurut teo-2rema 3.37. A tidak tertutup *nεδ* atau A tidak terbatas *nεδ*. Jika A tidak terbatas *nεδ*, maka ada $x \in A$ sehingga A bukan himpunan bagian dari setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$. Selanjutnya untuk setiap $n, m \in N$, dipilih $I_x^{nm} = (x-n, x+m)$, maka ada $x_m \in A$ tetapi $x_m \notin I_x^{nm}$. Dengan demikian barisan $\{x_m\}$ merupakan himpunan bagian tak berhingga dari A, tetapi tidak mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$. Kontradiksi. Selanjutnya jika A tidak tertutup $n\varepsilon\delta$, maka ada titik-limit $n\varepsilon\delta$ dari A yang bukan anggota A, notasikan dengan x. Selanjutnya untuk setiap $n,m \in N$, dipilih $I_x^{nm} = (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{m})$. Sehingga untuk setiap $n,m \in N$, ada $x_{nm} \in A \cap I_x^{nm}$ dan $x \neq x_{nm}$. Oleh karena itu $S = \{x_{nm} : n,m \in N\}$ merupakan himpunan bagian tak berhingga dari A dan x merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ nya. Selanjutnya ambil sebarang $y \in R$ dengan $y \neq x$, maka ada $t > 0$ sehingga $y = x-t$ atau $y = x+t$. Jika $y = x-t$, maka ada $n \in N$ sehingga $y < x-\frac{1}{n}$. Sehingga dengan memilih $I_y = (x-\frac{1}{n-1}, x-\frac{1}{n})$, diperoleh $I_y \cap S-\{y\} = \emptyset$. Oleh karena itu y bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ hinpunan S. Jika $y=x+t$, maka ada $n \in N$ sehingga $y > x+\frac{1}{n}$. Sehingga dengan memilih $I_y = (x+\frac{1}{n+1}, x+\frac{1}{n})$, diperoleh $I_y \cap S-\{y\} = \emptyset$. Oleh karena itu y bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan S. Jadi S merupakan himpunan bagian tak berhingga dari A yang mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$ tidak dalam A. Kontradiksi. Jadi A himpunan kompak $n\varepsilon\delta$. ∎

BAB IV

KESIMPULAN

Setiap konsep topologi dengan epsilon delta pada sistem bilangan real dapat didekati tanpa menggunakan epsilon delta. Karena konsep yang dibangun adalah ekivalen dengan konsep yang terdahulu, maka untuk mempelajari konsep topologi pada sistem bilangan real cukup dipelajari salah satu saja. Salah satu keuntungan mempelajari konsep topologi tanpa epsilon delta adalah lebih tampak dari pada dengan epsilon delta. Sebab interval terbuka yang dijadikan titik tolak dalam konsep topologi non epsilon delta pada sistem bilangan real adalah lebih mudah dipahami dari pada konsep jarak yang dijadikan titik tolak konsep topologi dengan epsilon delta.

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addision-Wesley Publishing Company,Inc., Reading, Mass., 1974.

Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, third Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1976.