INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JONAS GONÇALVES COSMO

RECORRÊNCIAS LINEARES: UMA EXPOSIÇÃO

CAJAZEIRAS
2024

JONAS GONÇALVES COSMO

RECORRÊNCIAS LINEARES: UMA EXPOSIÇÃO

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador:

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.

Cajazeiras

2024

JONAS GONÇALVES COSMO

RECORRÊNCIAS LINEARES: UMA EXPOSIÇÃO

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 28/03/2024

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
VINICIUS MARTINS TEODOSIO ROCHA
Data: 03/04/2024 14:28:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
JOSE IVELTON SIQUEIRA LUSTOSA
Data: 03/04/2024 16:13:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jose Ivelton Siqueira Lustosa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
LEONARDO FERREIRA SOARES
Data: 04/04/2024 19:12:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

C834r Cosmo, Jonas Gonçalves.
Recorrências lineares : uma exposição / Jonas Gonçalves Cosmo.– 2024.

72f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

Orientador(a): Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.

1. Matemátca. 2. Recorrências lineares. 3. Sequência linear. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 51(043.2)

Aos meus amados pais, pelo amor, apoio e inspiração que tornaram possível este momento. Obrigado.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus, que me concedeu saúde, sabedoria e perseverança para superar os desafios e alcançar esta etapa tão importante da minha vida. Agradeço aos meus pais e familiares, que sempre me apoiaram incondicionalmente. Vocês são minha base e inspiração para nunca desistir dos meus sonhos. Agradeço também aos meus amigos, que sempre me alegraram com sua amizade e companheirismo. Agradeço aos meus professores, com os quais aprendi, não apenas conteúdos acadêmicos, mas também lições valiosas para a vida. Este trabalho não seria possível sem a contribuição de todos vocês, e por isso, agradeço do fundo do meu coração.

"Não há estrada real para a Geometria."

Euclides de Alexandria

RESUMO

Desde a antiguidade até os dias de hoje, a noção de recursividade na Matemática é utilizada para resolver problemas de natureza prática e teórica. Este trabalho apresenta uma exposição sobre a teoria das recorrências lineares, com uma abordagem leve, informal e acessível. Iniciamos apresentando alguns exemplos pontuais na história onde a noção de recorrência foi utilizada; em seguida, fazemos um breve apanhado sobre sequências e as formas como elas podem ser definidas, dando especial realce à definição de sequência via recorrência e destacando a importância de encontrar soluções posicionais para essas recorrências. Logo após, definimos recorrência, apresentamos algumas de suas classificações, para então começar a efetivamente resolvê-las. Resumidamente, nossos principais objetivos serão definir, classificar e resolver recorrências lineares, começando com as de primeira ordem e avançando para recorrências de ordens superiores.

Palavras-chave: Recorrência. Relação de recorrência. Recorrência linear. Sequência recorrente. Sequência recursiva.

ABSTRACT

From Antiquity to the present day, the notion of recursion in Mathematics is used to solve problems of a practical and theoretical nature. This work presents an exposition on the theory of linear recurrences, with a light, informal and accessible approach. We begin by presenting some specific examples in History where the notion of recurrence was used; Next, we briefly overview sequences and the ways in which they can be defined, giving special emphasis to the definition of sequence via recurrence and highlighting the importance of finding positional solutions for these recurrences. Afterwards, we define recurrence and present some of its classifications, to then begin to effectively solve them. Therefore, in summary, our main objectives will be to define, classify and solve linear recurrences, starting with first order ones and moving on to higher order recurrences.

Keywords: Recurrence. Recurrence relation. Linear recurrence. Recursive sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Popularmente, quando ouvimos a palavra *recorrência*, ou alguma palavra derivada, como *recorrente*, *recursivo* etc., a ideia que primeiro nos vem à mente é a de um evento que ocorre com “recorrência”, que ele é “recorrente” ou frequente, ou que se repete.

Pois bem, em Matemática, a noção de recursividade, associada à palavra “recorrência” e termos relacionados, tem importância significativa em diversas áreas, como:

- Na programação, na Ciência da Computação e em áreas afins, para a definição de algoritmos recursivos.
- Na Matemática, para a construção de sistemas axiomáticos formais. Grosseiramente, funciona da seguinte forma: assumimos a existência de alguns objetos matemáticos básicos que não precisam de definição, chamados *noções primitivas*; aceitamos como verdadeiras, sem a necessidade de demonstração, um certo conjunto de sentenças, chamadas *axiomas*, envolvendo esses objetos; e selecionamos um conjunto de regras de inferência que serão usadas para provar teoremas. A partir daí, “todo” o restante dos objetos e teoremas dessa teoria serão definidos e demonstrados, em certo sentido, em ‘função’ dos anteriores.

  Em outro contexto, as recorrências também podem ser utilizadas para definir sequências recursivamente. Com esse objetivo, fixam-se alguns de seus termos e define-se uma lei de tal forma que cada termo da sequência depende de alguma maneira de termos anteriores.

Esses exemplos nos indicam que as noções de recorrência, tanto popularmente quanto na Matemática, compartilham um sentido importante: o de repetição. Enquanto que na linguagem popular recorrência significa a repetição de um evento, em Matemática quando dizemos que um objeto é definido por via de recorrência, geralmente isso permite que algum processo pode ser realizado repetidas vezes.

Partindo para o universo matemático, quando se fala em *sequências recorrentes*, quase que imediatamente pensamos na famosa **sequência de Fibonacci**, que leva esse nome em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci, a quem normalmente é atribuído o crédito por ter sido o primeiro a tratar sobre essa sequência e o primeiro a conceber o conceito de recorrência. No entanto, se gastarmos alguns minutos de pesquisa, descobriremos que ambas essas afirmações estão incorretas.

Por exemplo, o filósofo e matemático grego Téon de Esmirna (130 d.C.) já utilizava a noção de recorrência para construir aproximações racionais para $\sqrt{2}$ (BURTON, 2007). Vejamos como:

Sabemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ou seja, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$,

$$\sqrt{2} \neq \frac{x}{y}.$$

Logo,

$$2 \neq \frac{x^2}{y^2}$$
$$\Leftrightarrow 2y^2 \neq x^2.$$

Ora, como $2y^2$ e x^2 são inteiros diferentes, então a distância mínima entre eles é 1. Consideremos, então, a equação

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1. \tag{1.0.1}$$

Essa equação diofantina é um caso particular da chamada equação de Pell, dada por $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, onde $N = 2$ é um inteiro positivo não quadrado perfeito. Podemos reescrever (1.0.1) como

$$\frac{x}{y} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{y^2}}. \tag{1.0.2}$$

A equação (1.0.2) nos diz que, se conseguirmos soluções (x, y) para (1.0.1) com y grande o suficiente, então a razão x/y será uma "boa" aproximação racional para $\sqrt{2}$. O que Téon fez para resolver (1.0.1) foi construir um par de sequências recorrentes relacionadas, x_n, y_n, chamadas respectivamente de *números diagonais* e *números laterais*, da seguinte forma:

1. coloca-se $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; e

2. definimos $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$ e $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $n \geq 2$.

Téon então mostrou que, para todo $n \geq 1$, (x_n, y_n) é solução de (1.0.1):

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n. \tag{1.0.3}$$

E como claramente $\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty$, então $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2}$. Portanto, a sequência

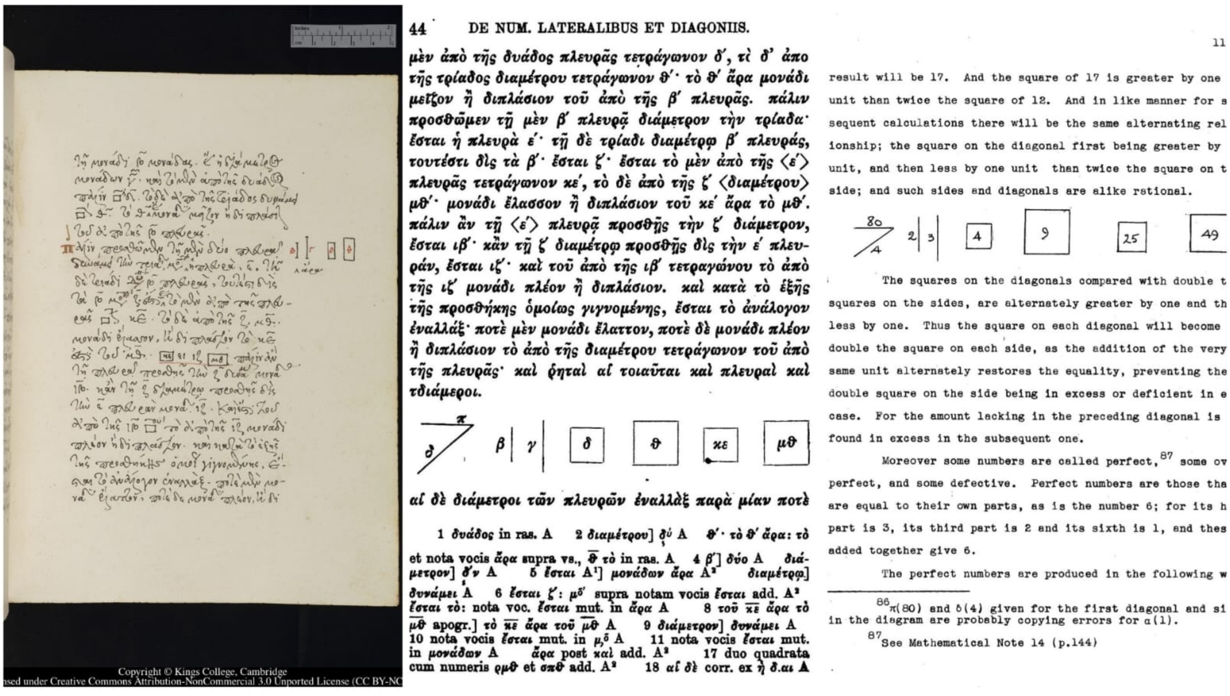
$$\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots \right) \tag{1.0.4}$$

forma sucessivas aproximações racionais para $\sqrt{2}$, podendo seus termos estarem tão próximos de $\sqrt{2}$ quanto quisermos, bastando para isso considerar n suficientemente grande.

Por isso as sequências x_n e y_n são chamadas, respectivamente, de números diagonais e números laterais. A razão entre os números diagonais e os laterais tende para $\sqrt{2}$, assim como a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado de lado 1 é igual a $\sqrt{2}$. Também é interessante notar que, utilizando a equação de Pell em sua forma geral $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, podemos, com um processo análogo, construir sequências (soluções) que formam aproximações racionais para $\sqrt{N}$.

Na Figura 1.1, vemos três imagens que correspondem ao mesmo texto. Da esquerda para a direita: (a) página de uma cópia manuscrita da obra *Sobre a Matemática Útil para o Entendimento de Platão*, de Téon. Embora Téon tenha vivido por volta do século II, essa cópia data do séc. XVI, por isso seu bom estado de conservação. Neste trecho do texto, Téon está discorrendo sobre os números laterais e números diagonais. (b) Uma transcrição do texto. (c) Tradução para o inglês.

Figura 1.1 – Cópia manuscrita; transcrição; tradução.



44 DE NUM. LATERALIBUS ET DIAGONIIS.

μὲν ἀπὸ τῆς δυάδος πλευρᾶς τετράγωνον δ′, τὶ δ' ἀπο τῆς τρίαδος διαμέτρου τετράγωνον ϑ′· τὸ ϑ′ ἄρα μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς β′ πλευρᾶς. πάλιν προσθῶμεν τῇ μὲν β′ πλευρᾷ διάμετρον τὴν τρίαδα· ἔσται ἡ πλευρὰ ε′· τῇ δὲ τρίαδι διαμέτρῳ β′ πλευράς, τουτέστι δὶς τὰ β′· ἔσται ζ′· ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ⟨ε′⟩ πλευρᾶς τετράγωνον κε′, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ζ′ ⟨διαμέτρου⟩ μϑ′· μονάδι ἔλασσον ἢ διπλάσιον τοῦ κε′ ἄρα τὸ μϑ′. πάλιν ἂν τῇ ⟨ε′⟩ πλευρᾷ προσθῇς τὴν ζ′ διάμετρον, ἔσται ιβ′· κἂν τῇ ζ′ διαμέτρῳ προσθῇς δὶς τὴν ε′ πλευράν, ἔσται ιζ′· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ιβ′ τετραγώνου τὸ ἀπὸ τῆς ιζ′ μονάδι πλέον ἢ διπλάσιον. καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς τῆς προσθήκης ὁμοίως γιγνομένης, ἔσται τὸ ἀνάλογον ἐναλλάξ· ποτὲ μὲν μονάδι ἔλαττον, ποτὲ δὲ μονάδι πλέον ἢ διπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· καὶ ῥηταὶ αἱ τοιαῦται καὶ πλευραὶ καὶ τδιάμεροι.

αἱ δὲ διάμετροι τῶν πλευρῶν ἐναλλὰξ παρὰ μίαν ποτὲ

1 δυάδος in ras. A 2 διαμέτρου] δ̧ύ A ϑ′· τὸ ϑ′ ἄρα: τὸ et nota vocis ἄρα supra vs., ϑ̄ τὸ in ras. A 4 β′] δύο A διαμετρον] δ̧ν A 5 ἔσται A¹] μονάδων ἄρα A² διαμέτρῳ] δυνάμει A 6 ἔσται ζ′: μ^{δ′} supra notam vocis ἔσται add. A² ἔσται τὸ: nota voc. ἔσται mut. in ἄρα A 8 τοῦ κ̅ε̅ ἄρα τὸ μ̅ϑ̅ apogr.] τὸ κ̅ε̅ ἄρα τοῦ μ̅ϑ̅ A 9 διάμετρον] δυνάμει A 10 nota vocis ἔσται mut. in μ,ō A 11 nota vocis ἔσται mut. in μονάδων A ἄρα post καὶ add. A² 17 duo quadrata cum numeris ρμϑ et σπϑ add. A² 18 αἱ δὲ corr. ex ἡ δ.αι A

11

result will be 17. And the square of 17 is greater by one unit than twice the square of 12. And in like manner for s sequent calculations there will be the same alternating rel ionship; the square on the diagonal first being greater by unit, and then less by one unit than twice the square on t side; and such sides and diagonals are alike rational.

The squares on the diagonals compared with double t squares on the sides, are alternately greater by one and th less by one. Thus the square on each diagonal will become double the square on each side, as the addition of the very same unit alternately restores the equality, preventing the double square on the side being in excess or deficient in e case. For the amount lacking in the preceding diagonal is found in excess in the subsequent one.

Moreover some numbers are called perfect,[87] some ov perfect, and some defective. Perfect numbers are those tha are equal to their own parts, as is the number 6; for its h part is 3, its third part is 2 and its sixth is 1, and thes added together give 6.

The perfect numbers are produced in the following w

[86] π(80) and δ(4) given for the first diagonal and si in the diagram are probably copying errors for α(1).

[87] See Mathematical Note 14 (p.144)

Fontes: respectivamente: (ESMIRNA, séc. II d.C., p. 35r.); (HILLER et al., 1878, p. 44.); (MACADAM, 1969, p. 119.)

Observa-se também que a linguagem matemática empregada é geométrica e retórica, em detrimento da linguagem simbólica, que só ganhou força a partir do século XVI com o matemático francês François Viète (STENLUND, 2014).

Mesmo assim, esse método de Téon já era conhecido pelos gregos pitagóricos pelo menos desde o final do século V a.C. (KNORR, 1976).

Voltemo-nos agora para a sequência de Fibonacci. Ela é definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$, com $F_0 = 1, F_1 = 2$ (ou $F_0 = F_1 = 1$, ou $F_0 = 0, F_1 = 1$, conforme ocasião), ou seja,

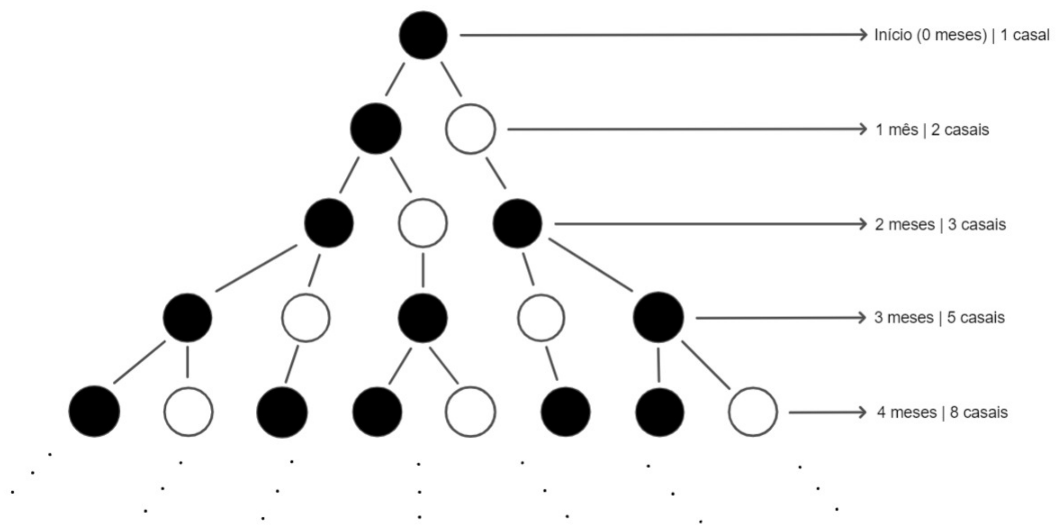
$$\{F_n\}_{n\geq 0} = (F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots). \tag{1.0.5}$$

Fibonacci de fato foi o primeiro matemático ocidental a falar sobre essa sequência, mas não o primeiro na história a estudá-la. Na Índia Antiga, por exemplo, a sequência de Fibonacci já era utilizada pelas autoridades indianas nas ciências métricas pelo menos desde o século V a.C. (SINGH, 1985). Mas vamos entender como Fibonacci chegou a ela.

Em seu livro *Liber Abaci* (1202), Fibonacci imaginou mais ou menos a seguinte situação hipotética envolvendo a reprodução de coelhos: considere um casal de coelhos; eles só podem ser maduros ou jovens; se forem maduros, depois de um mês eles irão reproduzir um casal de coelhos jovens; se forem jovens, depois de um mês eles irão amadurecer. Além disso, nesse processo nenhum casal morre e os casais maduros nunca param de se reproduzir. Sob essas condições, se começarmos com 1 casal de coelhos maduros, quantos casais de coelhos teremos ao total depois de 12 meses?

Se representarmos por círculos pretos os casais maduros e por círculos brancos os casais jovens, essa situação pode ser ilustrada pelo esquema da Figura 1.2.

Figura 1.2 – Reprodução de coelhos ao longo de 4 meses.



Fonte: Do autor, feito no *GeoGebra*.

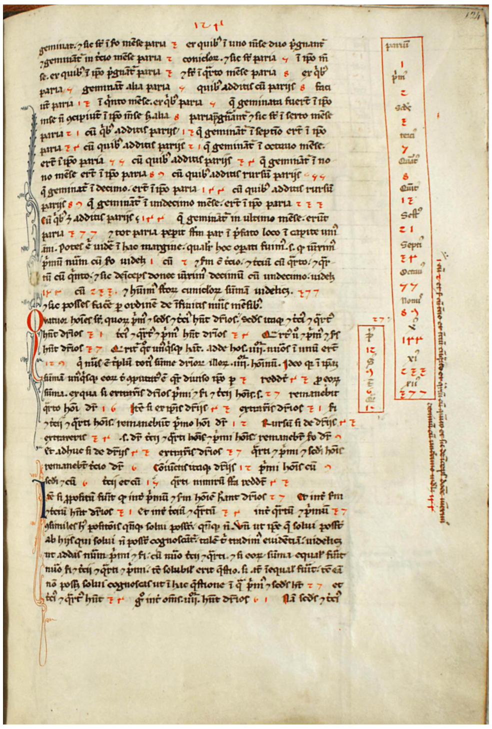
Note que começamos com 1 casal maduro; passado 1 mês, teremos 2 casais, sendo 1 maduro e 1 jovem; depois de 2 meses, teremos 3 casais (2 maduros e 1 jovem), e assim por diante, formando a sequência

$$(F_n) = (1, 2, 3, 5, 8, \ldots). \tag{1.0.6}$$

Continuando esse processo, chegamos a $F_{12} = 377$ casais. Na Figura 1.3 vemos uma página de uma cópia manuscrita do *Liber Abaci* da primeira metade do século XIV, na qual Fibonacci discorre sobre esse problema da reprodução de coelhos. Observe que na margem direita dessa página estão dispostos verticalmente, de cima para baixo, os 13 primeiros números de Fibonacci, sendo 377 o último deles. Note também que o sistema de numeração usado por Fibonacci é o sistema decimal posicional com os algarismos indo-arábicos. Fibonacci foi o principal divulgador e responsável pela difusão desse sistema na Europa, que passou a ser amplamente utilizado. Em (BONCOMPAGNI et al., 1857, p. 284) e (SIGLER, 2002, p. 404) encontramos respectivamente uma transcrição e uma tradução para o inglês para a página mostrada na Figura 1.3.

(Consultar (TOFFALORI et al., 2021) e (VISCA, 2023) para mais informações sobre esse manuscrito. (DEVLIN, 2011) também é outra rica fonte bibliográfica para o leitor que desejar aprofundar os estudos sobre Fibonacci, sequência de Fibonacci e o *Liber Abaci*. Além, é claro, do próprio *Liber Abaci* traduzido (SIGLER, 2002).)

Figura 1.3 – Cópia manuscrita do *Liber Abaci*.



Fonte: (PISANO, 1202).

No entanto, e se quisermos saber quantos casais teríamos ao final de 24 meses? E

36 meses? Esse procedimento de expandir a "árvore" da Figura 1.2 e contar a quantidade de casais não parece muito prático, então seria desejável alguma fórmula que nos auxiliasse a fazer esse cálculo. Essa fórmula é justamente a relação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, que, juntamente com nossas condições iniciais $F_0 = 1, F_1 = 2$, produz a sequência de Fibonacci e nos possibilida calcular seus termos com maior facilidade. Perceba que a observação de que a soma entre dois números de Fibonacci consecutivos produz o número de Fibonacci seguinte não é tão trivial assim considerando apenas nosso processo de reprodução de coelhos. A seguir veremos como chegar a esse resultado.

Chamemos de J_n o número de casais jovens no n-ésimo mês. Além disso, chamemos de M_n a quantidade de casais maduros no n-ésimo mês. Daí, o primeiro resultado a que chegamos é que a quantidade total de casais no n-ésimo mês F_n é

$$F_n = J_n + M_n. \tag{1.0.7}$$

Perceba também que a quantidade de casais jovens no n-ésimo mês é igual à quantidade de casais maduros no mês anterior, pois no mês anterior, os casais jovens amadureceram, e os maduros, ao passar de um mês, continuam maduros e reproduziram um casal cada. Ou seja,

$$J_n = M_{n-1}. \tag{1.0.8}$$

Além disso, como os casais maduros permanecem maduros e os casais jovens amadurecem, então no n-ésimo mês, o número de casais maduros é igual à quantidade de maduros já existentes no mês anterior, somada à quantidade de jovens no mês anterior, porque cada um desses casais jovens amadureceu. Em símbolos,

$$M_n = M_{n-1} + J_{n-1}. \tag{1.0.9}$$

De (1.0.8) e (1.0.9), seguem as equações

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} \tag{1.0.10}$$

e

$$J_n = J_{n-1} + J_{n-2}. \tag{1.0.11}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_n &= J_n + M_n \\ &= (J_{n-1} + J_{n-2}) + (M_{n-1} + M_{n-2}) \\ &= (J_{n-1} + M_{n-1}) + (J_{n-2} + M_{n-2}) \\ &= F_{n-1} + F_{n-2}. \end{aligned} \tag{1.0.12}$$

Com isso, encontramos um modelo para nossa situação. Sob as hipóteses propostas, a quantidade de casais de coelhos no n-ésimo mês pode ser calculada utilizando-se a relação

Tabela 1.1 – Treze primeiros termos da sequência de Fibonacci.

n	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
0	$F_0 = 1$
1	$F_1 = 2$
2	$F_2 = F_1 + F_0 = 2 + 1 = 3$
3	$F_3 = 3 + 2 = 5$
4	$F_4 = 5 + 3 = 8$
5	$F_5 = 8 + 5 = 13$
6	$F_6 = 13 + 8 = 21$
7	$F_7 = 21 + 13 = 34$
8	$F_8 = 34 + 21 = 55$
9	$F_9 = 55 + 34 = 89$
10	$F_{10} = 89 + 55 = 144$
11	$F_{11} = 144 + 89 = 233$
12	$F_{12} = 233 + 144 = 377$

Fonte: Do autor.

de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, sendo $F_0 = 1, F_1 = 2$. Munidos dessa relação, podemos chegar ao mesmo resultado que Fibonacci (ver Tabela 1.1).

Ademais, a importância e utilidade da sequência de Fibinacci não reside apenas no fato de ela conter quantidades de casais de coelhos se reproduzindo, ou no modelo matemático consistindo da relação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ com as condições iniciais $F_0 = 1, F_1 = 2$. Muito mais do que isso, essa sequência se mostra ubíqua, se manifestando na natureza e na arte, expressando a ideia do "belo" (SINHA, 2017), e também aparecendo em variadas situações, muitas vezes de forma inesperada e surpreendente, como por exemplo no mercado de ações (KUMAR, 2014) e em muitas outras áreas. Ademais, por se tratar de uma sequência clássica, iremos utilizá-la ao longo do texto como exemplo para ilustrar diversas propriedades das recorrências.

Veremos na Seção 2.2 que existe mais de uma forma de se definir uma sequência. Por exemplo, podemos definir a *sequência dos números pares positivos dispostos em ordem crescente* como sendo

- a sequência (a_n) tal que

$$a_n = a_{n-1} + 2, \quad \forall n \geq 1, \quad \text{com} \quad a_0 = 2; \text{ ou} \tag{1.0.13}$$

- a sequência (a_n) tal que

$$a_n = 2n + 2, \quad \forall n \geq 0. \tag{1.0.14}$$

A relação (1.0.13) define *recursivamente* a sequência dos números pares positivos, porque cada termo a_n depende de seu antecessor imediato a_{n-1}. Podemos chamar essa regra simplesmente de *recorrência*.

Já a relação (1.0.14) é uma definição *posicional* para essa sequência, porque cada termo a_n depende apenas de n, que é sua posição. Dizemos também que (1.0.14) é a *fórmula fechada* de (1.0.13).

Essas definições (ou regras) são equivalentes, ou seja, (1.0.13) $\Leftrightarrow$ (1.0.14) e, portanto, determinam a mesma sequência. Em particular, (1.0.13) $\Rightarrow$ (1.0.14), isto é, (1.0.14) pode ser deduzido partindo-se de (1.0.13). Vejamos como podemos fazer isso. De (1.0.13), seguem as $n+1$ equações:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_1 &= a_0 + 2 \\
a_2 &= a_1 + 2 \\
a_3 &= a_2 + 2 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 2.
\end{aligned}
$$

Somando-as, obtemos

$$a_n = 2(n+1) = 2n+2.$$

Por várias razões, as definições posicionais são mais almejadas que as recursivas. Por isso, ao definir uma sequência via recorrência, muitas vezes desejamos desenvolver algum procedimento a fim de deduzir sua fórmula fechada, de modo que, encontrar essa fórmula posicional fechada a partir da recorrência é o mesmo que *resolver* essa recorrência. Portanto sua fórmula fechada é sua *solução*. Em outras palavras, resolver uma recorrência significa encontrar sua fórmula fechada.

Dito isso, sabemos que a sequência de Fibonacci é uma recorrência, pois cada um de seus termos F_n depende de seus dois antecessores imediatos, F_{n-1}, F_{n-2}. Então, tendo em mente essa discussão sobre a sequência dos pares positivos, é pertinente a pergunta: a sequência de Fibinacci possui uma fórmula fechada? A resposta é sim, e se começarmos pelos termos $F_0 = 0, F_1 = 1$, então sua fórmula fechada (a qual, neste momento, iremos apenas enunciar, sem demonstração) é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.0.15}$$

Essa fórmula é comumente chamada de “fórmula de Binet”, em homenagem ao matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856). Entretanto, essa fórmula já era conhecida antes de Binet por matemáticos como Daniel Bernoulli, Leonard Euler e Abraham de Moivre, sendo Moivre creditado como o primeiro a chegar a essa fórmula (SILVA, 2017), além de desenvolver um método para resolver uma classe especial de recorrências (que serão definidas no Capítulo 3), chamadas *recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes* (KNUTH, 1997). Esse método generaliza a sequência de Fibonacci e nos permite encontrar fórmulas fechadas para recorrências com algumas características parecidas com as da sequência de Fibonacci. Desde então, até hoje as recorrências são um amplo objeto de pesquisa na Matemática.

Neste trabalho veremos: no capítulo seguinte, um breve apanhado sobre sequências e desenvolveremos um pouco sobre o conceito de recorrência. No capítulo 3, apresentaremos algumas categorizações das recorrências, destacando nosso principal objeto de estudo: as recorrências lineares. Do capítulo 4 em diante, passaremos à efetiva resolução das recorrências lineares, começando pelas de 1ª ordem (capítulo 4), passando pelas de 2ª ordem (capítulo 5), e culminando nas de ordem superior (capítulo 6).

2 RECORRÊNCIAS

2.1 SEQUÊNCIAS

Definição 2.1.1 (Sequência Finita)**.** Segundo (IEZZI; HAZZAN, 2004), chama-se *sequência finita* toda função $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$. Assim, em toda sequência finita, a cada número natural i, com $1\leq i\leq n$, está associado um número real a_i. Ou seja,

$$f=\{(1,a_1),(2,a_2),(3,a_3),\ldots,(n,a_n)\}.$$

Definição 2.1.2 (Sequência Infinita)**.** Ainda segundo (IEZZI; HAZZAN, 2004), chama-se *sequência infinita* toda função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (neste trabalho admitiremos que $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$). Assim, em toda sequência infinita, a cada número natural i, está associado um número real a_i. Ou seja,

$$f=\{(1,a_1),(2,a_2),(3,a_3),\ldots,(n,a_n),\ldots\}.$$

A partir de agora, por uma questão de conveniência, iremos denotar sequências pela lista ordenada $f=(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$, em que $f(i)=a_i$. Outra notação para sequências é $f=(a_i)_{i\in I}$, onde I é um conjunto de índices, geralmente $I=\{1,2,\ldots,n\}$ ou $I=\mathbb{N}$.

Exemplos 2.1.1.

1. (1, 2, 3, 4, 6, 12) é a sequência (finita) dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.

2. $(2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots,\ 2i,\ldots)$ é a sequência (infinita) dos números pares positivos dispostos em ordem crescente.

Sabemos que duas funções $f,g:A\to B$ são iguais se, e somente se, $f(x)=g(x)$, $\forall x\in A$. Assim, sabendo que sequências são funções, diremos que

Definição 2.1.3 (Igualdade de sequências)**.** Duas sequências $f,g:I=\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$ (ou $f,g:I=\mathbb{N}\to\mathbb{R}$) são *iguais* se, e somente se,

$$f(i)=g(i),\quad \forall i\in I.$$

Equivalentemente: duas sequências $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_i)_{i\in I}$ são iguais se, e somente se,

$$a_i=b_i,\quad \forall i\in I.$$

Com isso notamos que, numa sequência, a ordem em que seus termos estão dispostos é importante, ao contrário do que acontece com os conjuntos. Assim, por exemplo, os conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{a, c, b\}$ são iguais, enquanto as sequências (a, b, c) e (a, c, b) são diferentes.

2.2 LEI DE FORMAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Há três formas básicas de se definir uma sequência: por uma propriedade dos termos, pela posição dos termos ou por uma relação de recorrência.

2.2.1 Por uma propriedade dos termos

Para definir uma sequência desta forma precisamos explicitar a propriedade à qual os termos irão obedecer.

Por exemplo: a sequência dos números primos positivos dispostos em ordem crescente é dada por

$$(2, 3, 5, 7, 11, \dots).$$

2.2.2 Pela posição dos termos

Para definir uma sequência desta forma, precisamos escrever a_n como uma expressão de n.

Por exemplo: a sequência definida por $a_n = 2^n - 1$ com $n \geq 1$ é dada por

$$(2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^n - 1, \dots) = (1, 3, 7, 15, \dots, 2^n - 1, \dots).$$

2.2.3 Por uma relação de recorrência

Em Matemática, uma *recorrência** é uma regra matemática que determina uma sequência através de uma relação entre cada termo da sequência com termos anteriores a ele. Assim, em uma recorrência, para que se possa obter um determinado termo, digamos x_n, é preciso que se tenha em mãos aqueles termos anteriores a x_n que são suficientes para fazermos esse cálculo. E, por sua vez, para calcular esses termos anteriores, precisamos ainda de outros termos anteriores, e assim se retrocede até precisarmos utilizar os primeiros termos da sequência. Da mesma forma, se temos à disposição um ou alguns termos, tantos quantos forem suficientes, podemos calcular termos seguintes da recorrência.

* Na literatura encontram-se vários termos e expressões sinônimas de “recorrência”, como: relação de recorrência, sequência recorrente, sequência recursiva, entre outros. Ao longo do texto faremos uso dessas terminologias para nos referir às sequências definidas por/via recorrência, sem maiores esclarecimentos.

Geralmente define-se recorrência da seguinte forma:

1. são fixados os k primeiros termos da sequência, $x_1, x_2, \ldots, x_k$;
2. o n-ésimo termo, x_n, é expresso em função dos k termos imediatamente anteriores a ele, isto é, $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$ ou $x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_n)$.[†]

Em outras palavras, uma recorrência é uma lei matemática que caracteriza uma sequência da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k \\ x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

sendo que, neste texto, chamaremos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$ de *condições iniciais* da recorrência, e $x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ de *equação da recorrência.*

Como exemplo, podemos mais uma vez considerar a recorrência referente à sequência de Fibonacci, que pode ser definida como segue. Fixamos $F_1 = F_2 = 1$, e seus próximos termos serão obtidos pela soma dos dois termos imediatamente anteriores: $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$; $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$, e assim por diante. Mais formalmente, a lei de formação que define a sequência de Fibonacci é a recorrência

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Também é do interesse da Matemática as fórmulas fechadas associadas a essas recorrências. Para os propósitos deste texto, diremos que a *fórmula* (ou *forma*) *fechada* (ou *posicional*), ou o *termo geral* de uma recorrência, é uma expressão que representa um determinado termo da sequência em função apenas de sua posição.

Diremos também que uma fórmula fechada, correspondente à sua recorrência, é uma *solução* da recorrência, e que ela a *resolve*, de modo que, substituindo a referida solução a_n na equação de recorrência, obtemos uma identidade.

Assim, por exemplo, a fórmula fechada para a sequência de Fibonacci é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2.2.1}$$

A dedução dessa fórmula será vista mais adiante no texto. Por enquanto vamos admitir que ela é válida e façamos algumas observações:

[†] Na verdade, existem recorrências cujos termos dependem de todos os termos da sequência anteriores a eles, isto é, k varia com n. (Ver Seção 3.2).

1. Dessa fórmula, é claro que
$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$
e
$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}.$$
Substituindo essas fórmulas na equação recorrente $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, obtemos uma identidade, isto é, uma equação válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Se quisermos calcular o 10º termo da sequência "basta" tomar $n = 10$ em (2.2.1). Assim,
$$F_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = 55.$$

3. Apesar de termos frações e raízes quadradas irracionais nessa expressão, sempre obteremos um resultado inteiro.

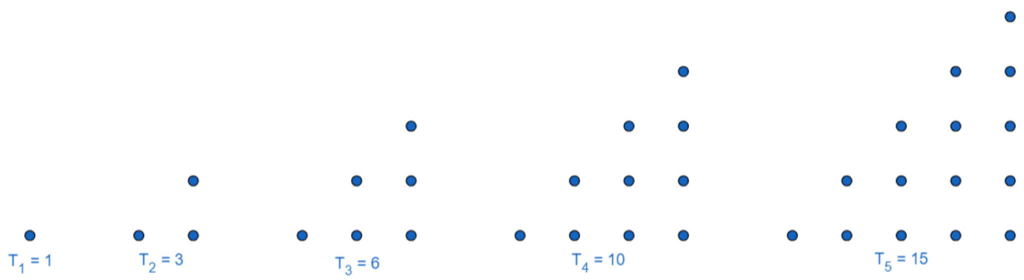
4. Uma desvantagem das sequências recorrentes em relação às fórmulas fechadas é que, enquanto para estas basta substituir n pela posição desejada, para aquelas, é necessário construir toda a sequência, termo a termo, do primeiro até o termo imediatamente anterior ao termo que se deseja calcular. Porém, apesar de em muitas situações ser mais conveniente expressar diretamente o termo em função de sua posição, às vezes é menos trabalhoso calcular os termos da sequência um por um por meio da recorrência, como é o caso da sequência de Fibonacci. Note que, para calcular o 10º termo da sequência de Fibonacci pela fórmula fechada, tal dificuldade se encontra em expandir as expressões $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$. Por outro lado, usando a recorrência, já sabemos que $F_4 = 3$ e $F_5 = 5$. Logo, $F_6 = 5+3 = 8$, $F_7 = 8+5 = 13$, $F_8 = 13+8 = 21$, $F_9 = 21+13 = 34 \Rightarrow F_{10} = 34+21 = 55$. E como havíamos dito, neste caso é bem mais fácil obter um termo usando-se a fórmula de recorrência do que a fórmula fechada.

5. Dada uma sequência em que só são explicitados alguns de seus termos, é preciso tomar cuidado ao tentar deduzir sua fórmula fechada. Para entender isso, considere a sequência $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$. Qual é o 4º termo dessa sequência? A resposta mais natural é 4. Porém, considere também a sequência dada pela fórmula $b_n = 2n^3 - 12n^2 + 23n - 12$. Notamos que $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ e $b_3 = 3$. Calculando o 4º termo, temos $b_4 = 2(4)^3 - 12(4)^2 + 23 \cdot 4 - 12 \Rightarrow b_4 = 16$, isto é, $(b_n) = (1, 2, 3, 16, \dots)$. A sequência (b_n) nos faz perceber que, dada uma certa sequência em que a única informação de que dispomos é uma quantidade finita de seus termos, sempre é possível encontrar outra sequência, diferente da primeira, com esses termos, nas mesmas posições. E por isso, além de alguns termos, precisamos de uma equação de recorrência ou de uma fórmula fechada para bem definir tal sequência.

6. Considere as sequências $(a_n) = (1, 3, 5, \ldots)$ dos números ímpares positivos e $(b_n) = (2, 4, 6, \ldots)$ dos números pares positivos. Observe que a equação de recorrência para (a_n) é $a_{n+1} = a_n + 2$, e a equação de recorrência para (b_n) é $b_{n+1} = b_n + 2$, ou seja, apesar de (a_n) e (b_n) serem sequências diferentes, elas têm a mesma equação de recorrência. Portanto, para defini-las por recorrência, devemos explicitar seus termos iniciais. Assim,
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
e
$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Outro exemplo interessante para ilustrar sequências recorrentes é a sequência dos **Números Triangulares**. A sequência dos Números Triangulares (T_n) é aquela tal que $T_1 = 1$ e $T_n = n + T_{n-1}$, $n \geq 2$, isto é, $(1, 3, 6, 10, \ldots)$. Analisando a sequência, perceba que, primeiramente, ela leva esse nome pelo padrão geométrico triangular que forma, conforme Figura 2.1.

Figura 2.1 – Cinco primeiros Números Triangulares.



Fonte: Do autor, feito no *GeoGebra*.

Em segundo lugar, note que se quisermos calcular um termo qualquer T_n da sequência pela definição dada ($T_n = n + T_{n-1}$), precisamos conhecer seu antecessor imediato T_{n-1}, o qual depende de T_{n-2}, que por sua vez depende de T_{n-3}, e assim por diante. Ou seja, para calcularmos T_n, precisamos conhecer todos os seus antecessores, $T_{n-1}, T_{n-2}, T_{n-3}, \ldots, T_1$. Vejamos, por exemplo, como calcular o termo T_7: começamos calculando T_2 (já temos dado T_1); agora podemos calcular T_3; então calculamos T_4; ... ; e repetimos esse processo até chegarmos em T_7. Ver Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Sete primeiros Números Triangulares.

n	$T_n = n + T_{n-1}$
1	$T_1 = 1$
2	$T_2 = 2 + T_1 = 2 + 1 = 3$
3	$T_3 = 3 + 3 = 6$
4	$T_4 = 4 + 6 = 10$
5	$T_5 = 5 + 10 = 15$
6	$T_6 = 6 + 15 = 21$
7	$T_7 = 7 + 21 = 28$

Fonte: Do autor.

Dizemos, então, que essa sequência está sendo definida via recorrência, pois foi definida por meio de uma regra que nos fornece termos da sequência em função de termos anteriores.

Imagine, porém, que desejamos calcular o termo T_{1000}. Nesse caso, calcular o termo de ordem 1000 da sequência por essa regra não será muito conveniente, pois precisaríamos construir todos os termos da sequência até o de ordem 999, para então podermos calcular T_{1000}. Essa dificuldade nos leva à pergunta: "Existe uma regra para essa mesma sequência que nos forneça os termos diretamente em função de suas posições?". Vamos investigar isso.

Ora, observando as imagens da Figura 2.1, não é difícil se convencer de que o n-ésimo número triangular é dado pela soma dos n primeiros números naturais, ou seja, $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Outra maneira de se chegar a essa fórmula seria somando as equações

$$\begin{aligned} T_2 &= 2 + T_1 \\ T_3 &= 3 + T_2 \\ T_4 &= 4 + T_3 \\ &\vdots \\ T_n &= n + T_{n-1}\,, \end{aligned}$$

obtendo

$$T_n = T_1 + (2 + 3 + \cdots + n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Isso também pode ser demonstrado por Indução Matemática.

A fórmula $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ para os Números Triangulares é chamada de "fórmula fechada" e com ela podemos obter qualquer termo da sequência apenas substituindo o n pela posição do termo desejado. Assim, por exemplo, $T_{1000} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\,500$, resultado cuja obtenção seria bastante trabalhosa pela fórmula de recorrência.

Neste momento percebemos que a sequência dos Números Triangulares e a sequência de Fibonacci possuem algumas similaridades: para calcular um certo termo de ordem n, precisamos de termos anteriores (para a sequência de Fibonacci, o $(n-1)$-ésimo e o $(n-2)$-ésimo; e para a sequência dos Números Triangulares, do $(n-1)$-ésimo) e, por consequência, só é possível efetivamente calcular esse termo se construirmos praticamente todos os termos dessas sequências, a partir do primeiro, até o termo desejado. Buscando superar essa dificuldade, partindo dessas relações de recorrência, através de um certo processo é possível encontrar suas fórmulas posicionais, ou fechadas. E, como já dissemos, nossa principal ênfase neste trabalho será justamente encontrar essas fórmulas fechadas ou algum método/algoritmo para resolver certas classes de recorrências.

Outrossim, antes de continuarmos, é importante informar ao leitor que grande parte do que será visto na teoria das Recorrências nas próximas seções tem uma certa semelhança com a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Assim, tendo isso em mente, se o leitor tiver um conhecimento rudimentar sobre EDOs, ele poderá estabelecer associações entre as definições, teoremas e equações da teoria das EDOs e seus análogos correspondentes na teoria das Recorrências, fazendo as devidas adaptações.

3 CLASSIFICAÇÕES DAS RECORRÊNCIAS

3.1

Existe uma infinidade de tipos de recorrências, muitas delas sendo bastente complexas. Portanto, antes de partirmos para a resolução de recorrências, neste capítulo primeiramente delimitaremos quais tipos nos interessam (as lineares), ou seja, iremos categorizar ou classificar as recorrências.

As recorrências podem ser classificadas quanto a vários critérios.

Existem as recorrências de 1ª ordem e as recorrências de ordem superior, quer dizer, de 2ª ordem em diante. Dizemos que a *ordem* de uma recorrência é a diferença entre o maior e o menor índices dos termos x_i que estão presentes na equação da recorrência. Por exemplo, a recorrência

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma recorrência de 1ª ordem, pois $(n+1) - n = 1$, enquanto que a "recorrência de Fibonacci"

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma recorrência de 2ª ordem (e portanto de ordem superior), pois $(n+2) - n = 2$.

Em geral, uma recorrência de ordem k é dada por

$$\begin{cases} x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k \\ x_{n+k} = f(x_{n+(k-1)}, \cdots, x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

em que f é uma função.

Existem também as recorrências lineares e as não lineares. Dada uma recorrência de ordem k, ela é dita *linear* quando é da forma

$$\begin{cases} x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k \\ x_{n+k} = f_k(n)x_{n+(k-1)} + \cdots + f_1(n)x_n + f_0(n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

em que f_i com $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ são funções de n.

Uma recorrência é *não linear* quando não é linear.

São exemplos de recorrências lineares:

(a) $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_{n+1} = a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 5nb_n + n^2 - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} c_1 = 10, c_2 = 15 \\ c_{n+2} = c_{n+1} - 3\sqrt{n^3}c_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Não são recorrências lineares:

(d) $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 5}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_{n+1} = \frac{2}{y_n - 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} z_1 = 3, z_2 = 14 \\ z_{n+2} = z_{n+1} - \log(z_n + 4), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

As recorrências lineares podem ser *homogêneas* ou *não homogêneas*. Elas são homogêneas quando a parcela $f_0(n)$ da expressão (3.1.1) é igual a zero para todo $n \in \mathbb{N}$, e não homogêneas caso contrário. Tomemos os exemplos (a), (b) e (c), note que (c) é homogênea e (a) e (b) são não homogêneas.

Por fim, as recorrências lineares podem ter *coeficientes constantes* ou *coeficientes não constantes* (*variáveis*). Neste texto, diremos que uma recorrência linear tem coeficientes constantes se ela é tal que as funções f_i da expressão (3.1.1), com $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, são todas constantes (note que não importa se f_0 é constante ou não). Por exemplo, a recorrência de (a) tem coeficientes constantes, enquanto que as recorrências de (b) e (c) não têm.

Com isso, podemos classificar as recorrências em:

- Recorrências de 1ª ordem ou de ordem superior (de 2ª ordem em diante);
- Recorrências lineares ou não lineares;
- Recorrências lineares homogêneas ou recorrências lineares não homogêneas;
- Recorrências lineares com coeficientes constantes ou recorrências lineares com coeficientes não constantes (variáveis).

Para exemplificar, iremos classificar as recorrências vistas até agora.

(1) A recorrência de Fibonacci

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma recorrência de ordem superior (2ª ordem), linear, homogênea com coeficientes constantes;

(2) A recorrência

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

bem como a recorrência

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_{n+1} = a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

são de 1ª ordem, lineares, não homogêneas com coeficientes constantes;

(3) Já a recorrência

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 5nb_n + n^2 - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma recorrência 1ª ordem, linear, não homogênea com coeficientes variáveis;

(4) A recorrência

$$\begin{cases} c_1 = 10, c_2 = 15 \\ c_{n+2} = c_{n+1} - 3\sqrt{n^3}c_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma recorrência de 2ª ordem, linear, homogênea com coeficientes variáveis;

(5) As recorrências

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 5}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_{n+1} = \frac{2}{y_n - 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

são de 1ª ordem e não lineares;

(6) Já a recorrência

$$\begin{cases} z_1 = 3, z_2 = 14 \\ z_{n+2} = z_{n+1} - \log(z_n + 4), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma recorrência de 2ª ordem não linear.

Neste trabalho daremos preferência ao estudo das recorrências lineares.

3.2 A RECORRÊNCIA $x_{n+1} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

Considere a recorrência

$$\begin{cases} x_1 = a, x_2 = b \\ x_{n+1} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Essa recorrência é bastante curiosa, pois, em primeira análise, ela não pode ser classificada segundo os critérios apresentados neste texto. Vejamos porquê: (a) Ordem: note que x_3 depende de seus dois antecessores; x_4 depende de três antecessores; $\ldots$; e x_{n+1} depende de n antecessores. Como essa quantidade de termos anteriores de que um termo geral depende é variável, estamos diante de uma recorrência que, a princípio, não tem uma ordem bem definida.* (b) Linearidade: para que uma recorrência seja linear, é preciso que ela seja classificável por ordem. Como a recorrência da vez não o é, então não é linear; logo, é não linear (em primeira análise).

Estamos destacando a expressão "em primeira análise" porque podemos reescrever nossa recorrência em outros termos. Vejamos.

Calculemos alguns termos da sequência formada:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{a+b}{2}; \\ x_4 &= \frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \frac{3a+3b}{6} = \frac{a+b}{2}; \\ x_5 &= \frac{a+b+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}}{4} = \frac{2a+2b}{4} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Por enquanto temos a sequência $\left(a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \ldots\right)$, o que nos leva a conjecturar que essa sequência segue com todos os seus termos iguais a $\frac{a+b}{2}$ e, portanto, seu termo geral é $x_n = \frac{a+b}{2}$ para $n \geq 3$. Provemos esse fato por Indução:

- Caso base:

$$n = 3 \Rightarrow x_n = x_3 = \frac{a+b}{2};$$

- Hipótese de Indução:

$$x_k = \frac{a+b}{2} \text{ para algum } k \geq 3;$$

* Recorrências desse tipo, que precisam dos n primeiros termos para calcular o de ordem $n+1$, são chamadas de *full-history*, enquanto que recorrências de ordem fixa são chamadas de *finite-history* (KURGALIN; BORZUNOV, 2018).

- Verificando que a propriedade vale para $n = k+1$:

$$x_{k+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-1} + x_k}{k} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-1}}{k} + \frac{x_k}{k}.$$

Mas,

$$x_k = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-1}}{k-1},$$

donde

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-1} = (k-1)x_k.$$

Daí,

$$x_{k+1} = \frac{(k-1)x_k}{k} + \frac{x_k}{k} = \frac{(k-1+1)x_k}{k} = \frac{kx_k}{k}.$$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k = \frac{a+b}{2}.$$

$\square$

Dessa forma, podemos reescrever a recorrência em questão da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = a, x_2 = b, x_3 = \frac{a+b}{2} \\ x_{n+1} = x_n, \forall n \geq 3 \end{cases},$$

que é de 1ª ordem, linear, homogênea, de coeficientes constantes. Outra forma de escrevê-la é a seguinte:

$$\begin{cases} x_1 = a, x_2 = b, x_3 = x_4 = \frac{a+b}{2} \\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \forall n \geq 3 \end{cases},$$

que é de 2ª ordem, linear, homogênea, de coeficientes constantes.

Dessa forma, concluímos que dada uma recorrência, pode haver mais de uma forma recursiva de representá-la e, para cada representação, teremos também uma classificação correspondente.

4 RECORRÊNCIAS LINEARES DE 1ª ORDEM

Este capítulo se divide em três partes. Na primeira, resolvemos as recorrências lineares homogêneas, ou seja, aquelas da forma $x_{n+1} = f(n)x_n$. Na segunda, resolveremos as recorrências lineares não homogêneas da forma $x_{n+1} = x_n + g(n)$. Na terceira parte, finalizaremos resolvendo as recorrências lineares em sua forma geral, dada por $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, através de uma combinação das técnicas anteriormente empregadas para a resolução das recorrências dos tipos $x_{n+1} = f(n)x_n$ e $x_{n+1} = x_n + g(n)$.

4.1 HOMOGÊNEAS

Antes de desenvolvermos esta parte da teoria é pertinente fazermos uma consideração: quando não são explicitados os termos iniciais da recorrência, supõe-se que são constantes arbitrárias quaisquer. Dessa forma, ao chegar na solução, observamos na fórmula parâmetros arbitrários. Nessa forma a solução é chamada de *solução geral*, que "gera" ou "produz" uma família (ou classe ou conjunto) de soluções, de forma que, uma vez escolhidos esses parâmetros (ou seja, os termos iniciais, ou condições iniciais), será determinada uma solução particular, caracterizando uma sequência única. Para além disso, é natural perguntar quantos são esses parâmetros que aparecem na solução geral. Ao que respondemos: depende da ordem da recorrência.

Dito isso, podemos continuar.

As recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas são aquelas expressas pela equação

$$x_{n+1} = f(n)x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para resolvê-la, multiplicamos as equações

$$\begin{aligned} x_2 &= f(1)x_1 \\ x_3 &= f(2)x_2 \\ x_4 &= f(3)x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= f(n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

obtendo

$$x_n = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{4.1.1}$$

Logo, sua solução geral é da forma

$$x_n = C \prod_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Assim, para resolver $x_{n+1} = f(n)x_n$, nosso desafio é saber calcular o produtório $\prod_{k=1}^{n-1} f(k)$.

Exemplo 4.1.1. Considere a recorrência dada por

$$x_{n+1} = (n+1)x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ela é linear homogênea de primeira ordem. Usando a técnica vista para obter a Equação (4.1.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 3x_2 \\ x_4 &= 4x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= nx_{n-1}, \end{aligned}$$

que multiplicando membro a membro, obtemos

$$x_n = x_1 n!$$

.

Em posse da Equação (4.1.1), podemos também escrever a solução diretamente, pois como $f(n) = n+1$, então $\prod_{k=1}^{n-1} f(k) = n!$. Logo, $x_n = x_1 n!$.

Apesar da utilidade da Equação (4.1.1), acreditamos que a técnica usada para a sua obtenção é mais valiosa do que a fórmula em si. Por isso, continuaremos empregando a técnica em detrimento da fórmula, e o mesmo vale para outras fórmulas que porventura apareçam ao longo do texto.

4.2 NÃO-HOMOGÊNEAS DA FORMA $x_{n+1} = x_n + g(n)$

Para resolver recorrências da forma

$$x_{n+1} = x_n + g(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(1) \\ x_3 &= x_2 + g(2) \\ x_4 &= x_3 + g(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + g(n-1), \end{aligned}$$

que somando membro a membro, obtemos

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k). \tag{4.2.1}$$

Assim, para resolver $x_{n+1} = x_n + g(n)$, o desafio é saber calcular o somatório $\sum_{k=1}^{n-1} g(k)$.

Exemplo 4.2.1. Para resolver a recorrência dada por

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = x_n + 3^n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

escrevemos as equações

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 3^1 \\ x_3 &= x_2 + 3^2 \\ x_4 &= x_3 + 3^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

que somando membro a membro, obtemos

$$x_n = x_1 + (3^1 + \cdots + 3^{n-1}) = x_1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$\Rightarrow x_n = x_1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{2}.$$

Mas, $x_1 = 2$, logo

$$x_n = 2 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{2} = \frac{3(3^{n-1} - 1) + 4}{2} = \frac{3^n - 3 + 4}{2}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

4.3 GENÉRICAS

Agora estudaremos as recorrências lineares de 1ª ordem da forma

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para resolver esse tipo de recorrência usaremos uma combinação das técnicas para resolver as recorrências dos tipos $x_{n+1} = f(n)x_n$ e $x_{n+1} = x_n + g(n)$. A técnica consiste em primeiramente, resolver a recorrência homogênea $w_{n+1} = f(n)w_n$, obtendo

$$w_n = w_1 \prod_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Em seguida tomamos uma solução particular não-nula

$$a_n = l \prod_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Depois definimos $y_n = \frac{x_n}{a_n}$ para fazer a substituição $x_n = a_n y_n$, que transforma $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ em $y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{f(n)a_n} = y_n + h(n)$, onde $h(n) = \frac{g(n)}{f(n)a_n}$. Caímos, então, numa nova recorrência que também já sabemos resolver. Dessa forma, por (4.2.1), a solução de $y_{n+1} = y_n + h(n)$ é dada por

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k).$$

Logo,

$$x_n = a_n y_n = \left(l \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \right) \left(y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k) \right).$$

Mas, como $y_1 = \frac{x_1}{a_1}$, temos

$$x_n = \left(l \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \right) \left(\frac{x_1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{f(k)a_k} \right).$$

Exemplo 4.3.1. Consideremos a recorrência dada por

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Vamos primeiramente resolver a recorrência homogênea $w_{n+1} = 3w_n$.

Multiplicando as equações

$$\begin{aligned} w_2 &= 3w_1 \\ w_3 &= 3w_2 \\ w_4 &= 3w_3 \\ &\vdots \\ w_n &= 3w_{n-1} \end{aligned}$$

obtemos

$$w_n = 3^{n-1} w_1$$

e escolhamos a solução particular

$$a_n = 3^{n-1} \cdot l.$$

A mesma fórmula pode ser obtida se observarmos que tal recorrência define uma P.G. de 1º termo w_1 e razão igual a 3. Agora vamos definir $y_n = \frac{x_n}{a_n}$ e façamos a substituição $x_n = a_n y_n$ em $x_{n+1} = 3x_n + 2$, o que nos deixa com

$$a_{n+1} y_{n+1} = 3a_n y_n + 2.$$

Mas, como a_n resolve $w_{n+1} = 3w_n$, então vale $a_{n+1} = 3a_n$, donde

$$3a_n y_{n+1} = 3a_n y_n + 2$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3a_n} = y_n + \frac{2}{3(3^{n-1} \cdot l)}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{2}{l} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

Daí, temos

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \tfrac{2}{l}\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \\
y_3 &= y_2 + \tfrac{2}{l}\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \\
y_4 &= y_3 + \tfrac{2}{l}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + \tfrac{2}{l}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1},
\end{aligned}
$$

que somando membro a membro, obtemos

$$y_n = y_1 + \frac{2}{l}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = y_1 + \frac{2}{l}\left[\frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1}\right]$$

$$\Rightarrow y_n = y_1 + \frac{1}{l}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

Ora, como $x_n = a_n y_n$, então

$$x_n = 3^{n-1} \cdot l \cdot \left(y_1 + \frac{1}{l}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]\right).$$

E como $y_1 = \frac{x_1}{a_1} = \frac{5}{3^{1-1}.l} = \frac{5}{l}$, temos que

$$
\begin{aligned}
x_n &= 3^{n-1} \cdot l \cdot \left(\frac{5}{l} + \frac{1}{l}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]\right) = 3^{n-1} \cdot l \cdot \frac{1}{l}\left[5 + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&= 3^{n-1}\left(6 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = 6 \cdot 3^{n-1} - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} - 1 \\
&= 2 \cdot 3^n - 1.
\end{aligned}
$$

Perceba que não importa qual solução não-nula a_n para $w_{n+1} = 3w_n$ escolhermos (e portanto não importa o valor de $l \neq 0$ que tomemos), sempre chegaremos ao resultado desejado. Vejamos outro exemplo, em que podemos poupar tempo escolhendo o valor de l com mais antecedência:

Exemplo 4.3.2. Vamos resolver a recorrência

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{n}{n-2} \cdot x_n + 3, \forall n \geq 3 \end{cases}.$$

Para resolver a recorrência homogênea $w_{n+1} = \frac{n}{n-2} \cdot w_n$ multiplicamos as equações

$$
\begin{aligned}
w_4 &= \tfrac{3}{3-2} \cdot w_3 \\
w_5 &= \tfrac{4}{4-2} \cdot w_4 \\
w_6 &= \tfrac{5}{5-2} \cdot w_5 \\
&\vdots \\
w_n &= \tfrac{n-1}{(n-1)-2} \cdot w_{n-1},
\end{aligned}
$$

obtendo

$$w_n = w_3\left[\frac{3}{3-2}\cdot\frac{4}{4-2}\cdot\frac{5}{5-2}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{(n-1)-2}\right] = w_3\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{n-3}\right)$$

$$\Rightarrow w_n = \frac{w_3}{2}\cdot(n-1)(n-2).$$

Tomemos, então, a solução

$$a_n = (n-1)(n-2)$$

e assim façamos a substituição $x_n = a_n y_n$ em $x_{n+1} = \frac{n}{n-2}\cdot x_n + 3$, obtendo

$$a_{n+1}y_{n+1} = \frac{n}{n-2}\cdot a_n y_n + 3.$$

Mas, como a_n é solução de $w_{n+1} = \frac{n}{n-2}\cdot w_n$, vale que $a_{n+1} = \frac{n}{n-2}\cdot a_n$, donde

$$\frac{n}{n-2}\cdot a_n y_{n+1} = \frac{n}{n-2}\cdot a_n y_n + 3$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + 3\cdot\frac{n-2}{na_n} = y_n + 3\cdot\frac{n-2}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + 3\cdot\frac{1}{(n-1)n}.$$

Para resolver essa recorrência somamos as equações

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + 3\cdot\tfrac{1}{(3-1)3}\\ y_5 &= y_4 + 3\cdot\tfrac{1}{(4-1)4}\\ y_6 &= y_5 + 3\cdot\tfrac{1}{(5-1)5}\\ &\vdots\\ y_n &= y_{n-1} + 3\cdot\tfrac{1}{[(n-1)-1](n-1)}, \end{aligned}$$

obtendo

$$\begin{aligned} y_n &= y_3 + 3\cdot\left[\frac{1}{(3-1)3} + \frac{1}{(4-1)4} + \frac{1}{(5-1)5} + \dots + \frac{1}{[(n-1)-1](n-1)}\right]\\ &= y_3 + 3\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)}\right] = y_3 + 3S(n), \end{aligned}$$

onde $S(n) = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)}$. Essa é uma conhecida soma “telescópica”, e sabendo-se que

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

podemos calculá-la facilmente:

$$S(n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-2}{2(n-1)}$$

$$\Rightarrow S(n) = \frac{n-3}{2(n-1)}.$$

Logo,

$$x_n = a_n y_n = a_n \left(y_3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{n-3}{n-1} \right).$$

Finalmente, como $a_n = (n-1)(n-2)$, $a_3 = (3-1)(3-2) = 2 \cdot 1 = 2$, $x_3 = 2$ e $y_3 = \frac{x_3}{a_3} = \frac{2}{2} = 1$, temos

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1)(n-2)\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{n-3}{n-1}\right) \\ &= (n-1)(n-2) + \frac{3}{2} \cdot (n-1)(n-2) \cdot \frac{n-3}{n-1} \\ &= (n-1)(n-2) + \frac{3}{2} \cdot (n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (n-2)(5n-11). \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.3 (A Torre de Hanói)**.** Faremos este exemplo por um método alternativo, diferente do que vimos para as recorrências lineares de 1ª ordem.

A Torre de Hanói é um jogo, com várias versões, que consiste de três elementos principais (RUFINO, 2001):

1. uma base horizontal, geralmente com formato retangular ou elíptico;
2. três hastes verticais fixas na base a uma certa distância uma da outra: uma no centro e as outras próximas das extremidades;
3. uma certa quantidade de discos, todos de diâmetros diferentes, que serão encaixados nas hastes.

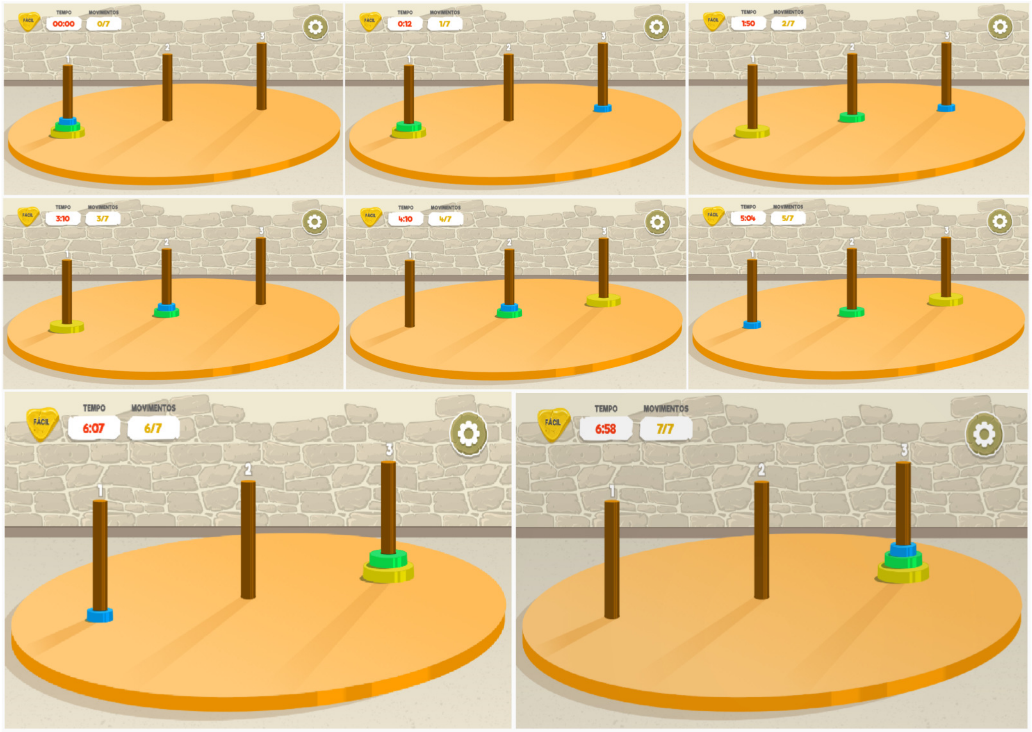
Inicialmente todos os discos devem estar dispostos numa mesma haste (qualquer das três) de modo que o disco de maior diâmetro esteja encostada na base, e os outros discos, de baixo para cima, em ordem decrescente de diâmetro.

O objetivo do jogo é transportar todos os discos da haste inicial para uma das outras duas (qual delas é indiferente), obedecendo às seguintes restrições:

- só é permitido transferir um disco por vez;
- um disco só pode ser posicionado acima de outro se aquele for menor que este.

A Figura 4.1 ilustra um exemplo de uma série de movimentos para alcançar o objetivo do jogo.

Figura 4.1 – Exemplo de rodada: Torre de Hanói com três discos



Fonte: (NOAS/CNEC, 2011)

Note que apesar de ser desnecessário, as regras do jogo não nos impedem de realizar um movimento de "volta" e outros movimentos supérfluos que não nos ajudam a efetivamente concluir o jogo. Dessa forma, pode-se realizar tantos movimentos quanto se deseje a fim de resolver o *puzzle*. Porém, à Matemática interessa aquelas partidas que resolvem o quebra-cabeça com uma quantidade mínima (ou ótima) de movimentos.

Assim, o que faremos a seguir nesta seção é generalizar nosso pensamento, modelando, por uma recorrência, a sequência das quantidades mínimas de movimentos necessários para se atingir o objetivo do jogo.

Chamemos de H_n a quantidade mínima de movimentos necessários para resolver uma Torre de Hanói com n discos. Imagine ainda que queremos resolver uma Torre de Hanói com $n+1$ discos e também calcular H_{n+1}. Ora, para transportar todos os $n+1$ discos de uma haste para outra, precisamos

1. transferir os n discos superiores de uma haste a outra;

2. mover o maior disco (da base) para a outra haste;

3. transportar aqueles mesmos n discos para a haste onde está o maior disco, ficando em cima dele e resolvendo o quebra-cabeça.

Logo, para realizar o primeiro passo, precisamos efetuar H_n movimentos; no segundo passo realizamos um movimento; e no terceiro passo, mais uma vez realizamos H_n movimentos, isto é,

$$H_{n+1} = H_n + 1 + H_n$$
$$\Rightarrow H_{n+1} = 2H_n + 1.$$

Daí, considerando que $H_1 = 1$ (já que, se temos um disco, só precisamos fazer um movimento para mudá-lo de haste), então a sequência que procuramos pode ser definida pela recorrência

$$\begin{cases} H_1 = 1 \\ H_{n+1} = 2H_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Note que estamos diante de uma recorrência de 1ª ordem, linear, não-homogênea com coeficientes constantes, e portanto podemos aplicar o método (ou a fórmula diretamente) que vimos nesta seção. Contudo, como dissemos, resolveremos esta recorrência por meio de um método alternativo.

Considere, então, as equações seguintes:

$$\begin{aligned} H_2 &= 2H_1 + 1 \\ H_3 &= 2H_2 + 1 \\ H_4 &= 2H_3 + 1 \\ &\vdots \\ H_{n-1} &= 2H_{n-2} + 1 \\ H_n &= 2H_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Em seguida, multipliquemos cada equação $H_k = 2H_{k-1} + 1$ por 2^{n-k}, obtendo as equações da forma $2^{n-k}H_k = 2^{n-k+1}H_{k-1} + 2^{n-k}$:

$$\begin{aligned} 2^{n-2}H_2 &= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} \\ 2^{n-3}H_3 &= 2^{n-2}H_2 + 2^{n-3} \\ 2^{n-4}H_4 &= 2^{n-3}H_3 + 2^{n-4} \\ &\vdots \\ 2H_{n-1} &= 4H_{n-2} + 2 \\ H_n &= 2H_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Somando-as, obtemos

$$H_n = H_1 \cdot 2^{n-1} + (1 + 2 + \cdots + 2^{n-2}) = H_1 \cdot 2^{n-1} + \frac{1(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow H_n = H_1 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Mas, como $H_1 = 1$, temos

$$H_n = 1 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$\Rightarrow H_n = 2^n - 1.$$

5 RECORRÊNCIAS LINEARES HOMOGÊNEAS DE 2ª ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

As recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas com coeficientes constantes constituem uma generalização da recorrência de Fibonacci. A solução dessas recorrências irá nos dar algumas "dicas" importantes de como proceder para a resolução de recorrências mais gerais posteriormente.

Neste capítulo, então, estudaremos as recorrências da forma

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \tag{5.0.1}$$

onde $a \neq 0 \neq c$. Perceba que se $a = 0$ ou $c = 0$, caímos numa recorrência de 1ª ordem. Dividindo a Equação (5.0.1) por a, obtemos

$$x_{n+2} + (b/a)x_{n+1} + (c/a)x_n = 0.$$

Fazendo $b/a = p$ e $c/a = q$, chegamos em

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \tag{5.0.2}$$

com $q \neq 0$, que é uma forma equivalente da recorrência inicial. É a recorrência nesse formato que examinaremos. Comecemos nosso estudo provando um resultado importante.

Lema 5.0.1. *Se y_n e z_n são soluções de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, então $w_n = C_1y_n + C_2z_n$ também o é, quaisquer que sejam as constantes complexas C_1 e C_2.**

Demonstração. Para verificar isso basta substituir $w_n = C_1y_n + C_2z_n$ em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e mostrar que a igualdade é verificada:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = w_{n+2} + pw_{n+1} + qw_n$$

$$\begin{aligned} &= (C_1y_{n+2} + C_2z_{n+2}) + p(C_1y_{n+1} + C_2z_{n+1}) + q(C_1y_n + C_2z_n) \\ &= C_1(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) + C_2(z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n). \end{aligned}$$

Mas, como y_n e z_n são soluções de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, então

$$C_1(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) + C_2(z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

□

* A partir deste ponto, sempre que quisermos nos referir a uma constante complexa, usaremos simplesmente a palavra "constante", por uma questão de concisão.

Consideremos ainda a sequência $x_n = \lambda^n$, onde λ é uma constante. Daí, $x_{n+1} = \lambda^{n+1}$ e $x_{n+2} = \lambda^{n+2}$. Substituindo na expressão $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$, vem:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= \lambda^{n+2} + p\lambda^{n+1} + q\lambda^n \\ &= \lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q). \end{aligned}$$

Daí, seguem-se os resultados:

Lema 5.0.2. *Se λ for raiz da equação $t^2 + pt + q = 0$, então $x_n = \lambda^n$ é uma solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.*

Demonstração. Se λ é raiz de $t^2 + pt + q = 0$, então $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, logo, $\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$, donde $x_n = \lambda^n$ é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. □

Reciprocamente,

Lema 5.0.3. *Se $x_n = \lambda^n$ é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, então λ é raiz de $t^2 + pt + q = 0$.*

Demonstração. Se $x_n = \lambda^n$ é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, então $\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$, mas, como $\lambda \neq 0$ (visto que $q \neq 0$), então $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. □

Logo,

Corolário 5.0.1. *$x_n = \lambda^n$ é solução da recorrência $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$ se, e somente se, λ for raiz de $t^2 + pt + q = 0$.*

Demonstração. Segue-se imediatamente dos Lemas (5.0.2) e (5.0.3). □

O Corolário (5.0.1) nos motiva a definir a equação $t^2 + pt + q = 0$ como a *equação característica* associada à recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Como $t^2 + pt + q = 0$ é uma equação polinomial do 2º grau, sabemos que possui duas raízes complexas, que podem ser distintas ou iguais.

Saber se as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica são distintas ou iguais nos ajudará a saber o formato da solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Se as raízes forem distintas, teremos um certo formato de solução; se forem iguais, teremos ainda outro formato. É sobre isso que falaremos nas próximas seções deste capítulo.

5.1 RAÍZES DISTINTAS

Teorema 5.1.1. *Se λ_1 e λ_2 são raízes distintas da equação característica $t^2+pt+q=0$ de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$, então $x_n=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n$ é solução dessa recorrência.*

Demonstração. Pelo Lema (5.0.2), como λ_1 e λ_2 são raízes do polinômio característico, então $y_n=\lambda_1^n$ e $z_n=\lambda_2^n$ resolvem $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$, e pelo Lema (5.0.1), $x_n=C_1y_n+C_2z_n=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n$ é solução da recorrência. □

Obtemos, assim uma família de soluções, "geradas" pelas raízes. Mas será que toda solução da recorrência pertence a essa família? Quer dizer, toda solução é daquela forma? Ou seja, dada qualquer solução x_n, sempre existem constantes C_1 e C_2 tais que $x_n=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n$? A resposta é sim, como garante o teorema que segue.

Teorema 5.1.2. *Se a equação característica $t^2+pt+q=0$ de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ possui raízes distintas λ_1 e λ_2, então toda solução x_n dessa recorrência é da forma $x_n=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n$, ou, equivalentemente, dada uma solução x_n da recorrência, existem constantes C_1 e C_2 tais que $x_n=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n$.*

Demonstração. Provaremos por Indução sobre n.

- Casos-base: queremos mostrar que existem constantes C_1 e C_2 tais que $x_1=C_1\cdot\lambda_1^1+C_2\cdot\lambda_2^1$ e $x_2=C_1\cdot\lambda_1^2+C_2\cdot\lambda_2^2$. Então, resolvendo o sistema

  $$\begin{cases} C_1\cdot\lambda_1+C_2\cdot\lambda_2=x_1 \\ C_1\cdot\lambda_1^2+C_2\cdot\lambda_2^2=x_2 \end{cases}$$

  para C_1 e C_2, obtemos

  $$C_1=\frac{x_2-\lambda_2x_1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)} \quad \text{e} \quad C_2=\frac{x_2-\lambda_1x_1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)},$$

  o que conclui a verificação, pois as raízes são distintas e não-nulas ($\lambda_1\neq0\neq\lambda_2\neq\lambda_1$).

- Hipótese de Indução: supomos que valem $x_k=C_1\cdot\lambda_1^k+C_2\cdot\lambda_2^k$ e $x_{k+1}=C_1\cdot\lambda_1^{k+1}+C_2\cdot\lambda_2^{k+1}$ para algum $k\in\mathbb{N}$.

- Provamos que $x_{k+2}=C_1\cdot\lambda_1^{k+2}+C_2\cdot\lambda_2^{k+2}$.

  Ora, de $x_{k+2}+px_{k+1}+qx_k=0$ vem

  $$\begin{aligned} x_{k+2}=-px_{k+1}-qx_k &= -p(C_1\cdot\lambda_1^{k+1}+C_2\cdot\lambda_2^{k+1})-q(C_1\cdot\lambda_1^k+C_2\cdot\lambda_2^k) \\ &= -C_1\lambda_1^k(p\lambda_1+q)-C_2\lambda_2^k(p\lambda_2+q). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $C_1 \cdot \lambda_1^{k+2} + C_2 \cdot \lambda_2^{k+2}$, obtemos

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= -C_1\lambda_1^k(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) - C_2\lambda_2^k(\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q) + C_1 \cdot \lambda_1^{k+2} + C_2 \cdot \lambda_2^{k+2} \\ &= -C_1\lambda_1^k \cdot 0 - C_2\lambda_2^k \cdot 0 + C_1 \cdot \lambda_1^{k+2} + C_2 \cdot \lambda_2^{k+2} \\ &= C_1 \cdot \lambda_1^{k+2} + C_2 \cdot \lambda_2^{k+2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.1.1. Determinar as soluções da recorrência $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 0$.

Solução. Sua equação característica é $t^2 + 4t - 5 = 0$, de raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -5$. Logo, sua solução é

$$x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-5)^n$$
$$\Rightarrow x_n = C_1 + C_2 \cdot (-5)^n.$$

Se forem explicitados os termos iniciais, x_1 e x_2, encontramos C_1 e C_2 através do sistema

$$\begin{cases} x_1 = C_1 + C_2 \cdot (-5)^1 \\ x_2 = C_1 + C_2 \cdot (-5)^2 \end{cases},$$

obtendo

$$C_1 = \frac{5x_1 + x_2}{6} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{x_2 - x_1}{30}.$$

Logo,

$$x_n = \left(\frac{5x_1 + x_2}{6}\right) + \left(\frac{x_2 - x_1}{30}\right)(-5)^n.$$

Exemplo 5.1.2 (Sequência de Fibonacci)**.** Finalmente iremos provar que a fórmula fechada para a Sequência de Fibonacci é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Ora, já vimos que essa sequência é definida, em termos de recorrência, da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

De $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ vem $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, com equação característica $t^2 - t - 1 = 0$, de raízes $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo, a forma geral de sua solução é dada por

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Mas, das condições iniciais $F_1 = F_2 = 1$, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} F_1 = 1 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ F_2 = 1 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases},$$

o qual nos dá a solução $(C_1, C_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. E portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

Evidentemente, os Teoremas (5.1.1) e (5.1.2) valem tanto para raízes distintas reais quanto para complexas não reais conjugadas. No entanto, para raízes complexas, podemos reescrever a solução $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ de uma forma mais conveniente, que nos poupe de trabalhar com potências grandes de números complexos. Vejamos:

Sejam λ_1 e λ_2 as raízes complexas não reais da equação característica $t^2 + pt + q = 0$ da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Se $\lambda_1 = a + bi$ (e portanto $\lambda_2 = a - bi$), expressemos essas raízes em suas formas polares. Ficamos com $\lambda_1 = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ e $\lambda_2 = \rho(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$, onde ρ é o comprimento (ou módulo ou norma) das raízes, e θ é o argumento. Elevando a n as raízes, obtemos $\lambda_1^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ e $\lambda_2^n = \rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$ (fórmula de Moivre). Logo, as soluções de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são dadas por

$$\begin{aligned} x_n &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ &= C_1\rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] + C_2\rho^n[\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)] \\ &= \rho^n[C_1\cos(n\theta) + iC_1\sin(n\theta) + C_2\cos(n\theta) - iC_2\sin(n\theta)] \\ &= \rho^n[(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)\sin(n\theta)]. \end{aligned}$$

Fazendo $A = C_1 + C_2$ e $B = i(C_1 - C_2)$, concluímos que

$$x_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

é uma família de soluções da recorrência e que toda solução da recorrência é dessa forma.

Exemplo 5.1.3. Para resolver a recorrência $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, escrevemos sua equação característica $t^2 - t + 1 = 0$, de raízes $\lambda_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, daí

$$x_n = C_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Ou, calculamos o comprimento das raízes e seus argumentos, obtendo $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Assim,

$$x_n = 1^n\left[A\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right)\right]$$

$$\Rightarrow x_n = A\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right).$$

5.2 RAÍZES IGUAIS

Agora estudaremos o caso em que as raízes da equação característica da recorrência, λ_1 e λ_2, são iguais, isto é, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Vale destacar que, quando duas raízes de um polinômio de grau 2 são iguais, então elas são reais (já que se fossem complexas, seriam distintas, visto que são conjugadas). Os lemas seguintes serão importantes para nosso objetivo.

Lema 5.2.1. *Se as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $t^2+pt+q=0$ correspondente à recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ são iguais, isto é, se $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, então $2\lambda+p=0$.*

Demonstração. As raízes de $t^2+pt+q=0$ são

$$\lambda = \frac{-p\pm\sqrt{0}}{2} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow 2\lambda+p=0.$$

□

Lema 5.2.2. *Se as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica da recorrência são iguais, então $y_n = n\lambda^n$ é uma solução da recorrência.*

Demonstração. Substituiremos $y_n = n\lambda^n$ em $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ e mostraremos que a igualdade se verifica:

$$\begin{aligned} x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n &= (n+2)\lambda^{n+2}+p(n+1)\lambda^{n+1}+qn\lambda^n \\ &= n\lambda^n(\lambda^2+p\lambda+q)+\lambda^{n+1}(2\lambda+p). \end{aligned}$$

Mas, como λ é raiz do polinômio característico, então $\lambda^2+p\lambda+q=0$ e, pelo Lema (5.2.1), $2\lambda+p=0$. Logo

$$n\lambda^n(\lambda^2+p\lambda+q)+\lambda^{n+1}(2\lambda+p) = n\lambda^n\cdot 0+\lambda^{n+1}\cdot 0 = 0.$$

□

Teorema 5.2.1. *Se as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $t^2+pt+q=0$ correspondente à recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ são tais que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, então*

$$x_n = C_1\cdot\lambda^n + C_2\cdot n\cdot\lambda^n = (C_1+C_2\cdot n)\lambda^n$$

é solução dessa recorrência.

Demonstração. Como λ é raiz da equação característica, então, pelos Lemas (5.0.2) e (5.2.2), $y_n=\lambda^n$ e $z_n=n\lambda^n$ são soluções de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$. Logo, pelo Lema (5.0.1), uma família de soluções da recorrência é dada por

$$x_n = C_1\cdot\lambda^n + C_2\cdot n\cdot\lambda^n.$$

□

Teorema 5.2.2. *Se as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $t^2+pt+q=0$ correspondente à recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ são tais que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, então todas as suas soluções são da forma*

$$x_n = C_1\cdot\lambda^n + C_2\cdot n\cdot\lambda^n.$$

Demonstração. Provaremos por Indução sobre n.

- Casos-base: queremos que $x_1 = C_1\cdot\lambda^1 + C_2\cdot 1\cdot\lambda^1$ e $x_2 = C_1\cdot\lambda^2 + C_2\cdot 2\cdot\lambda^2$. Logo, resolvendo

  $$\begin{cases} C_1\lambda + C_2\lambda = x_1 \\ C_1\lambda^2 + 2C_2\lambda^2 = x_2 \end{cases}$$

  para C_1 e C_2 obtemos

  $$C_1 = \frac{2x_1\lambda - x_2}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{x_2-\lambda x_1}{\lambda^2}$$

  o que conclui a verificação, pois as raízes são não-nulas ($\lambda\neq 0$).

- Hipótese de Indução: supomos que valem $x_k = C_1\cdot\lambda^k + C_2\cdot k\cdot\lambda^k$ e $x_{k+1} = C_1\cdot\lambda^{k+1} + C_2\cdot(k+1)\cdot\lambda^{k+1}$ para algum $k\in\mathbb{N}$.

- Provamos que $x_{k+2} = C_1\cdot\lambda^{k+2} + C_2\cdot(k+2)\cdot\lambda^{k+2}$.

  Ora, de $x_{k+2}+px_{k+1}+qx_k=0$ vem

  $$\begin{aligned} x_{k+2} &= -px_{k+1} - qx_k \\ &= -p(C_1\cdot\lambda^{k+1} + C_2\cdot(k+1)\cdot\lambda^{k+1}) - q(C_1\cdot\lambda^k + C_2\cdot k\cdot\lambda^k) \\ &= -pC_1\lambda^{k+1} - pC_2(k+1)\lambda^{k+1} - qC_1\lambda^k - qC_2k\lambda^k \\ &= -pC_1\lambda^{k+1} - qC_1\lambda^k - pC_2(k+1)\lambda^{k+1} - qC_2k\lambda^k. \end{aligned}$$

  Somando e subtraindo $w_k = C_1\cdot\lambda^{k+2} + C_2\cdot(k+2)\cdot\lambda^{k+2}$, obtemos

  $$\begin{aligned} x_{k+2} &= -C_1\cdot\lambda^{k+2} - pC_1\lambda^{k+1} - qC_1\lambda^k - C_2\cdot(k+2)\cdot\lambda^{k+2} \\ &\quad - pC_2(k+1)\lambda^{k+1} - qC_2k\lambda^k + w_k \\ &= -C_1(\lambda^{k+2} + p\lambda^{k+1} + q\lambda^k) \\ &\quad - C_2\lambda^k[(k+2)\lambda^2 + p(k+1)\lambda + qk] + w_k. \end{aligned}$$

  Mas, como λ é raiz da equação característica, então $\lambda^{k+2}+p\lambda^{k+1}+q\lambda^k=0$, donde

  $$\begin{aligned} x_{k+2} &= -C_1\cdot 0 - C_2\lambda^k[k\lambda^2 + 2\lambda^2 + (pk+p)\lambda + kq] + w_k \\ &= -C_2\lambda^k(k\lambda^2 + 2\lambda^2 + kp\lambda + p\lambda + kq) + w_k \\ &= -C_2\lambda^k(k\lambda^2 + kp\lambda + kq + 2\lambda^2 + p\lambda) + w_k \\ &= -C_2\lambda^k[k(\lambda^2 + p\lambda + q) + \lambda(2\lambda + p)] + w_k. \end{aligned}$$

E como $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 = 2\lambda + p$, já que λ é raiz da equação característica, então

$$x_{k+2} = -C_2\lambda^k[k \cdot 0 + \lambda \cdot 0] + w_k = -C_2\lambda^k \cdot 0 + w_k$$

$$\Rightarrow x_{k+2} = w_k = C_1 \cdot \lambda^{k+2} + C_2 \cdot k + 2 \cdot \lambda^{k+2}.$$

□

Exemplo 5.2.1. Resolver a recorrência $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$.

Solução. Sua equação característica é dada por $t^2 - 2t + 1 = 0$, de raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Logo, sua solução geral é

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n$$

$$\Rightarrow x_n = C_1 + C_2 \cdot n.$$

6 RECORRÊNCIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM SUPERIOR

Neste capítulo estudaremos as recorrências lineares de ordem superior com coeficientes constantes. Daremos início tratando das homogêneas, (que serão nosso enfoque), apresentando o teorema mais importante do trabalho. Ainda quanto às homogêneas, apresentaremos alguns casos particulares importantes. Por fim, concluiremos o capítulo fazendo um estudo sobre as não homogêneas.

6.1 HOMOGÊNEAS

A seguir, veremos o teorema mais importante deste trabalho, que nos dá a forma da solução geral de uma *recorrência linear homogênea com coeficientes constantes* (doravante "*RLHC*", para evitar repetição) de ordem qualquer (MARTINEZ; OUTROS, 2010).

Considere a RLHC, de ordem k, em sua forma geral:

$$\begin{cases} x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1} \\ c_k x_{n+k} + c_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + c_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \end{cases},$$

onde $c_0, c_1, \dots, c_k$ são constantes. Supondo que essa recorrência possua uma solução da forma $x_n = \lambda^n$, onde λ é uma constante, e subtituindo essa solução na equação de recorrência, obtemos

$$c_k \lambda^{n+k} + c_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \cdots + c_0 \lambda^n = 0.$$

Dividindo ambos os membros por λ^n, obtemos a equação polinomial

$$c_k \lambda^k + c_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + c_0 = 0,$$

que, como já vimos, chama-se equação característica da recorrência.

Afirmamos:

Teorema 6.1.1. *Se $x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0$ é uma RLHC de ordem k, com equação característica $\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \cdots + a_0 = 0$, de raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, com multiplicidades respectivamente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, então a forma geral para a solução dessa recorrência é dada por*

$$x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \cdots + Q_r(n)\lambda_r^n,$$

onde Q_i, com $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, são polinômios em n tais que $\deg Q_i < \alpha_i$.*

* "$\deg Q_i$" significa o grau do polinômio Q_i.

Aqui, não demonstraremos esse teorema, por se tratar de tarefa que foge dos nossos objetivos. O leitor, se desejar, pode consultar a demonstração completa e com detalhes em (MARTINEZ; OUTROS, 2010).

Uma vez enunciado o teorema, é natural se perguntar como exatamente é feita a obtenção dos polinômios $Q_i(n)$, o que equivale a encontrar os coeficientes desses polinômios.

A resposta é que, como Q_i são polinômios de grau estritamente menor que α_i, basta supor que os Q_i têm grau $\alpha_i - 1$. Em seguida, aplicamos as condições iniciais, obtendo um sistema linear cujas incógnitas são os coeficientes dos polinômios $Q_i(n)$. Caso exista algum Q_i de grau $\alpha_j < \alpha_i - 1$, os coeficientes c_p dos seus monômios $c_p n^p$ com $p \in \{\alpha_j + 1, \dots, \alpha_i - 1\}$ serão todos nulos.

Note também que como devemos admitir que $\deg Q_i = \alpha_i - 1$, $Q_i(n)$ tem α_i coeficientes; logo, ao todo teremos $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = k$ coeficientes-incógnitas, além de k equações, ou seja, um sistema linear $k \times k$.

Na forma matricial, obtemos uma equação do tipo $\mathbf{M}_{k\times k} \cdot \mathbf{x}_{k\times 1} = \mathbf{v}_{k\times 1}$, onde $\mathbf{M}$ depende das raízes λ_i, $\mathbf{x}$ é o vetor com os coeficientes-incógnitas e $\mathbf{v}$ é o vetor com os termos iniciais. Para termos solução única, deve-se ter $\det \mathbf{M} \neq 0$, ou seja, $\mathbf{M}$ deve possuir inversa $\mathbf{M}^{-1}$. Daí,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}.$$

Nas subseções seguintes iremos examinar o que acontece com o formato da solução geral e da equação matricial associada ao sistema linear correspondente, a depender das raízes da equação característica.

6.1.1 Todas as raízes são simples

Consideremos a RLHC $x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = 0$, de equação característica $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i) = 0$ com raízes simples $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Como cada λ_i tem multiplicidade 1, pelo Teorema (6.1.1), teremos k Q_i's de grau zero, ou seja, devemos considerar $Q_i(n) = c_i$ onde c_i é constante. Logo, a solução dessa recorrência é dada por

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n.$$

Substituindo as condições iniciais $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ nessa equação, obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0 + \dots + c_k\lambda_k^0 = x_0 \\ c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1 + \dots + c_k\lambda_k^1 = x_1 \\ \vdots \\ c_1\lambda_1^{k-1} c_2\lambda_2^{k-1} + \dots + c_k\lambda_r^{k-1} = x_{k-1} \end{cases}.$$

Em forma matricial,

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v},$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_k^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_k^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix},$$

bastente conhecida, é chamada de *Matriz de Vandermonde*. Naturalmente, como por hipótese partimos do formato correto da solução, então a matriz $\mathbf{M}$ é invertível. De fato, é possível mostrar que $\det \mathbf{M} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ (KALMAN, 1984). Além disso, a inversa explícita de $\mathbf{M}$ pode ser vista em (SHENG-LIANG, 2004). Por fim, neste trabalho, para encontrar a inversa $\mathbf{M}^{-1}$, ou resolver o sistema, nos limitaremos ao algoritmo de eliminação gaussiana. Contudo, existe uma variedade de *softwares* específicos que podem ser utilizados para o cálculo de determinantes, matrizes inversas e soluções de sistemas lineares.

Exemplo 6.1.1. Consideremos a RLHC dada por $x_{n+3} - 10x_{n+2} + 31x_{n+1} - 30x_n = 0$. Sua equação característica é dada por $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 31\lambda - 30 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$, de raízes $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$. Pelo Teorema (6.1.1), temos que

$$x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + c_3 \cdot 5^n.$$

Se seus termos iniciais forem dados por x_0, x_1, x_2, então, aplicando na equação, vem:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = x_0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = x_1 \\ 4c_1 + 9c_2 + 25c_3 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}.$$

Temos que $\det \mathbf{M} = (5-3)(5-2)(3-2) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \neq 0$, e

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{-8}{3} & \frac{1}{3} \\ -5 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{-8}{3} & \frac{1}{3} \\ -5 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (15x_0 - 8x_1 + x_2)/3 \\ (-10x_0 + 7x_1 - x_2)/2 \\ (6x_0 - 5x_1 + x_2)/6 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.1.2. Resolver a recorrência $x_{n+3} - 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n = 0$.

Solução. Sua equação característica é dada por

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Perceba que a soma dos coeficientes desse polinômio resulta em zero, logo, $\lambda_1 = 1$ é raiz. Então, dividindo-o por $\lambda - 1$, obtemos a equação $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, de raízes $\lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Portanto, temos uma equação característica com três raízes distintas, uma real e duas complexas conjugadas. Neste caso, sua solução será

$$\begin{aligned} x_n &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n \\ &= C_1\lambda_1^n + \rho^n(C_2\cos(n\theta) + C_3\sin(n\theta)) \\ &= C_1 \cdot 1^n + 1^n\left[C_2\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right) + C_3\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right)\right] \\ &= C_1 + C_2\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right) + C_3\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right). \end{aligned}$$

6.1.2 Raiz única de multiplicidade $k > 1$

Seja a RLHC $x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0$, de equação característica $t^k + a_1t^{k-1} + \cdots + a_k = (t-\lambda)^k = 0$ com raiz única λ, de multiplicidade k. Pelo Teorema (6.1.1), a solução geral dessa recorrência é dada por

$$x_n = (c_0 + c_1n + \cdots + c_{k-1}n^{k-1})\lambda^n.$$

Substituindo as condições iniciais $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nessa equação, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1c_0 + 0c_1 + \cdots + 0c_{k-1} = x_0 \\ \lambda c_0 + \lambda c_1 + \cdots + \lambda c_{k-1} = x_1 \\ \vdots \\ \lambda^{k-1}c_0 + (k-1)\lambda^{k-1}c_1 + \cdots + (k-1)^{k-1}\lambda^{k-1}c_{k-1} = x_{k-1} \end{cases}.$$

Em forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{k-1} & (k-1)\lambda^{k-1} & \cdots & (k-1)^{k-1}\lambda^{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}.$$

Pode-se mostrar que o determinante de $\mathbf{M}$ é dado por $\det\mathbf{M} = sf(k-1)\lambda^{k(k-1)/2} \neq 0$, onde $sf(p) = 1!2!\cdots p!$ é o superfatorial de p (SÁ; SPREAFICO, 2023). Logo, existe inversa $\mathbf{M}^{-1}$.

Em outra abordagem: como $x_n = (c_0 + c_1 n + \cdots + c_{k-1} n^{k-1})\lambda^n$, podemos fazer $c_0 + c_1 n + \cdots + c_{k-1} n^{k-1} = x_n/\lambda^n$ para cada $n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, obtendo o sistema

$$\begin{cases} 1c_0 + 0c_1 + \cdots + 0c_{k-1} = x_0 \\ 1c_0 + 1c_1 + \cdots + 1c_{k-1} = x_1/\lambda \\ \vdots \\ 1c_0 + (k-1)c_1 + \cdots + (k-1)^{k-1} c_{k-1} = x_{k-1}/\lambda^{k-1} \end{cases}.$$

Em forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k-1 & \cdots & (k-1)^{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}'} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1/\lambda \\ \vdots \\ x_{k-1}/\lambda^{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}'}.$$

Como cada linha de $\mathbf{M}$, da 2ª à última, são potências de λ, então

$$\det \mathbf{M} \overset{\dagger}{=} \lambda^{1+2+\cdots+(k-1)} \cdot \det \mathbf{M}' = \lambda^{k(k-1)/2} \cdot \det \mathbf{M}'.$$

Mas, como $\det \mathbf{M} = \lambda^{k(k-1)/2} \cdot sf(k-1)$, então

$$\lambda^{k(k-1)/2} \cdot \det \mathbf{M}' = \lambda^{k(k-1)/2} \cdot sf(k-1)$$

$$\Rightarrow \det \mathbf{M}' = sf(k-1) = 1!2! \cdots (k-1)! \neq 0.$$

Logo, existe inversa $\mathbf{M}^{-1}$.

Exemplo 6.1.3. Considere a RLHC dada por $x_{n+3} - 6x_{n+2} + 12x_{n+1} - 8x_n = 0$, de equação característica $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$. O número 2 é raíz dessa equação. Dividindo o polinômio por $t-2$ obtemos $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$. Logo, essa equação possui apenas uma raiz: $\lambda = 2$, de multiplicidade 3. Daí, pelo Teorema 6.1.1, o formato da solução geral para essa recorrência é dado por

$$x_n = (c_0 + c_1 n + c_2 n^2)2^n.$$

Substituindo as condições iniciais x_0, x_1, x_2 nessa equação, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} 1c_0 + 0c_1 + 0c_2 = x_0 \\ 1c_0 + 1c_1 + 1c_2 = x_1/2 \\ 1c_0 + 2c_1 + 4c_2 = x_2/4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1/2 \\ x_2/4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}.$$

† Isso segue de uma propriedade conhecida dos determinantes: se $\mathbf{M}$ é uma matriz quadrada e multiplicarmos uma de suas fileiras por uma constante α, então o determinante dessa nova matriz $\mathbf{M}'$ é $\det \mathbf{M}' = \alpha \cdot \det \mathbf{M}$.

Temos que $\det \mathbf{M} = 1!2! = 2 \neq 0$, e

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ (-3x_0 + 4x_1 - x_2)/2 \\ (x_0 - 2x_1 + x_2)/2 \end{bmatrix}.$$

6.1.3 Raízes simples e múltiplas

Seja a RLHC $x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0$, de equação característica $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ com raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, de multiplicidades respectivamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Pelo Teorema (6.1.1), a fórmula fechada para essa recorrência é dada por

$$x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \cdots + Q_r(n)\lambda_r^n,$$

onde cada Q_i é um polinômio em n de grau $\alpha_i - 1$. Substituindo as condições iniciais $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nessa equação, obtemos o sistema

$$\begin{cases} Q_1(0)\lambda_1^0 + Q_2(0)\lambda_2^0 + \cdots + Q_r(0)\lambda_r^0 = x_0 \\ Q_1(1)\lambda_1^1 + Q_2(1)\lambda_2^1 + \cdots + Q_r(1)\lambda_r^1 = x_1 \\ \vdots \\ Q_1(k-1)\lambda_1^{k-1} + Q_2(k-1)\lambda_2^{k-1} + \cdots + Q_r(k-1)\lambda_r^{k-1} = x_{k-1} \end{cases},$$

donde

$$\begin{cases} (c_{1,0} + c_{1,1}0 + \cdots + c_{1,\alpha_1-1}0^{\alpha_1-1})\lambda_1^0 + \cdots + (c_{r,0} + c_{r,1}0 + \cdots + c_{r,\alpha_r-1}0^{\alpha_r-1})\lambda_r^0 = x_0 \\ (c_{1,0} + c_{1,1}1 + \cdots + c_{1,\alpha_1-1}1^{\alpha_1-1})\lambda_1^1 + \cdots + (c_{r,0} + c_{r,1}1 + \cdots + c_{r,\alpha_r-1}1^{\alpha_r-1})\lambda_r^1 = x_1 \\ \vdots \\ (c_{1,0} + c_{1,1}(k-1) + \cdots + c_{1,\alpha_1-1}(k-1)^{\alpha_1-1})\lambda_1^{k-1} + \cdots + \\ +(c_{r,0} + c_{r,1}(k-1) + \cdots + c_{r,\alpha_r-1}(k-1)^{\alpha_r-1})\lambda_r^{k-1} = x_{k-1} \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{cases} (\lambda_1^0 c_{1,0} + 0\lambda_1^0 c_{1,1} + \cdots + 0^{\alpha_1-1}\lambda_1^0 c_{1,\alpha_1-1}) + \cdots + (\lambda_r^0 c_{r,0} + 0\lambda_r^0 c_{r,1} + \cdots + 0^{\alpha_r-1}\lambda_r^0 c_{r,\alpha_r-1}) = x_0 \\ (\lambda_1^1 c_{1,0} + 1\lambda_1^1 c_{1,1} + \cdots + 1^{\alpha_1-1}\lambda_1^1 c_{1,\alpha_1-1}) + \cdots + (\lambda_r^1 c_{r,0} + 1\lambda_r^1 c_{r,1} + \cdots + 1^{\alpha_r-1}\lambda_r^1 c_{r,\alpha_r-1}) = x_1 \\ \vdots \\ (\lambda_1^{k-1} c_{1,0} + (k-1)\lambda_1^{k-1} c_{1,1} + \cdots + (k-1)^{\alpha_1-1}\lambda_1^{k-1} c_{1,\alpha_1-1}) + \cdots + \\ +(\lambda_r^{k-1} c_{r,0} + (k-1)\lambda_r^{k-1} c_{r,1} + \cdots + (k-1)^{\alpha_r-1}\lambda_r^{k-1} c_{r,\alpha_r-1}) = x_{k-1} \end{cases}.$$

Daí, vale que

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v},$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & 0\lambda_1^0 & \cdots & 0^{\alpha_1-1}\lambda_1^0 & \cdots & \lambda_r^0 & 0\lambda_r^0 & \cdots & 0^{\alpha_r-1}\lambda_r^0 \\ \lambda_1^1 & 1\lambda_1^1 & \cdots & 1^{\alpha_1-1}\lambda_1^1 & \cdots & \lambda_r^1 & 1\lambda_r^1 & \cdots & 1^{\alpha_r-1}\lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\alpha_1-1}\lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_r^{k-1} & (k-1)\lambda_r^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\alpha_r-1}\lambda_r^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_{1,0} \\ \vdots \\ c_{1,\alpha_1-1} \\ \vdots \\ c_{r,0} \\ \vdots \\ c_{r,\alpha_r-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \lambda_r & \lambda_r & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & \cdots & 2^{\alpha_1-1}\lambda_1^2 & \cdots & \lambda_r^2 & 2\lambda_r^2 & \cdots & 2^{\alpha_r-1}\lambda_r^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^3 & \cdots & 3^{\alpha_1-1}\lambda_1^3 & \cdots & \lambda_r^3 & 3\lambda_r^3 & \cdots & 3^{\alpha_r-1}\lambda_r^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\alpha_1-1}\lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_r^{k-1} & (k-1)\lambda_r^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\alpha_r-1}\lambda_r^{k-1} \end{bmatrix}$$

é chamada, por alguns autores, de *Matriz de Vandermonde Generalizada* (SHENG-LIANG, 2004), pelo fato de a Matriz de Vandermonde usual ser um caso particular dela, bastando considerar que todas as raízes sejam simples. Em (ANIZ; RACHIDI, 2022) o leitor pode conferir uma forma explícita para o determinante de **M** e que esse determinante é não-nulo. Nessa referência também é apresentada a inversa de **M** explicitamente.

Exemplo 6.1.4. Seja a RLHC $x_{n+6} - 10x_{n+5} + 40x_{n+4} - 82x_{n+3} + 91x_{n+2} - 52x_{n+1} + 12x_n = 0$, com equação característica $\lambda^6 - 10\lambda^5 + 40\lambda^4 - 82\lambda^3 + 91\lambda^2 - 52\lambda + 12 = (\lambda - 1)^3(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$, de raízes $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, de multiplicidades, respectivamente, $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$. Considere também que as condições iniciais sejam dadas por $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$. Então, pelo Teorema (6.1.1), a solução geral para essa recorrência é dada por

$$x_n = (a_0 + a_1 n + a_2 n^2)1^n + (b_0 + b_1 n)2^n + c_0 3^n$$

$$\Rightarrow x_n = (a_0 + a_1 n + a_2 n^2) + (b_0 + b_1 n)2^n + c_0 3^n.$$

Aplicando as condições iniciais, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} 1a_0+0a_1+0a_2+1b_0+0b_1+1c_0=0 \\ 1a_0+1a_1+1a_2+2b_0+2b_1+3c_0=1 \\ 1a_0+2a_1+4a_2+4b_0+8b_1+9c_0=2 \\ 1a_0+3a_1+9a_2+8b_0+24b_1+27c_0=3 \\ 1a_0+4a_1+16a_2+16b_0+64b_1+81c_0=4 \\ 1a_0+5a_1+25a_2+32b_0+160b_1+243c_0=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 8 & 24 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 16 & 64 & 81 \\ 1 & 5 & 25 & 32 & 160 & 243 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ c_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}.$$

Temos que $\det \mathbf{M} = 32 \neq 0$, e

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 233/27 & -716/27 & 3665/108 & -2051/108 & 443/108 & -17/108 \\ 62/27 & -302/27 & 883/54 & -254/27 & 109/54 & -2/27 \\ 56/27 & -170/27 & 188/27 & -181/54 & 17/27 & -1/54 \\ -205/27 & 712/27 & -910/27 & 508/27 & -109/27 & 4/27 \\ 31/27 & -221/54 & 293/54 & -173/54 & 41/54 & -1/27 \\ -1/27 & 4/27 & -25/108 & 19/108 & -7/108 & 1/108 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.2 ALGUNS COMENTÁRIOS

Dada uma certa RLHC, a validade do Teorema (6.1.1) garante que partamos do formato correto da sua solução geral, o que evidentemente significa que, para qualquer conjunto de condições iniciais arbitrariamente escolhido, o sistema resultante é sempre possível e determinado. Equivalentemente, podemos dizer que a matriz associada ao sistema tem determinante não-nulo, ou seja, é inversível. No entanto, como visto nos casos examinados, não é tão fácil encontrar uma fórmula explícita para esse determinante ou mostrar que ele é não-nulo, assim como também não é tarefa simples encontrar essa inversa explicitamente.

Essas dificuldades têm seu seio nas raízes do polinômio característico. À medida que se aumenta a quantidade de raízes simples e múltiplas, a matriz **M** vai cada vez mais se complexificando, de modo que, a partir de certo ponto, deixa de ser trivial calcular seu determinante (e mostrar que é não-nulo) e sua inversa.

Entretanto, em (ANIZ; RACHIDI, 2022) podemos encontrar fórmulas explícitas para o determinante da Matriz de Vandermonde Generalizada, bem como a justificativa do porquê de ser não-nulo, além da fórmula explícita para a inversa dessa matriz.

Dessa forma, quando não usamos tais fórmulas explícitas, fazemos uso dos tradicionais métodos para encontrar inversas e resolver sistemas, como o algoritmo de eliminação gaussiana.

Outra dificuldade é quando a RLHC tem uma ordem k alta, pois disso decorre que seu polinômio característico correspondente tem grau k e, portanto, k raízes, que podem ser simples ou múltiplas. Ocorre que só existem fórmulas para raízes de polinômios completos em geral para aqueles de grau menor do que, ou igual a 4 (ABEL, 1824), ou seja, alguns polinômios de grau maior do que, ou igual a 5, possuem raízes que não podem ser expressas por radicais.

Uma ordem elevada também implica em resolver um sistema extenso, ou seja, calcular o determinante de uma matriz de ordem alta e sua inversa.

6.3 NÃO-HOMOGÊNEAS

As recorrências lineares não homogêneas com coeficientes constantes são aquelas que podem ser escritas na forma

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} = g(n), \tag{6.3.1}$$

onde g é uma função de n, também chamada de função *input* ou *entrada* (ELADYI, 2000).

Já sabemos resolver recorrências homogêneas, então se conseguirmos transformar uma recorrência não-homogênea em homogênea, conseguiremos resolvê-la. É o que faz o teorema seguinte.

Teorema 6.3.1. *Se $y_n^{(p)}$ é uma solução particular de $x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = g(n)$, e $y_n^{(h)}$ é a solução geral da recorrência homogênea associada, então a solução geral da recorrência não homogênea é dada por $x_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$.*

Demonstração. Ora, como $y_n^{(h)}$ é a solução geral da recorrência homogênea e $y_n^{(p)}$ é uma solução particular da recorrência não-homogênea, resulta que

$$y_n^{(h)} + a_1 y_{n-1}^{(h)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(h)} = 0$$

$$\Leftrightarrow g(n) + y_n^{(h)} + a_1 y_{n-1}^{(h)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(h)} = g(n)$$

$$\Leftrightarrow (y_n^{(p)} + a_1 y_{n-1}^{(p)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(p)}) + (y_n^{(h)} + a_1 y_{n-1}^{(h)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(h)}) = g(n)$$

$$\Leftrightarrow (y_n^{(p)} + y_n^{(h)}) + a_1(y_{n-1}^{(p)} + y_{n-1}^{(h)}) + \cdots + a_k(y_{n-k}^{(p)} + y_{n-k}^{(h)}) = g(n).$$

E portanto, todas as soluções da recorrência $y_n^{(p)}$ é uma solução particular de $x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = g(n)$ são da forma $x_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$. $\square$

A partir de agora, nossa dificuldade passa a ser encontrar uma solução particular para a recorrência não-homogênea. Um método clássico para a obtenção dessa solução é chamado de 'método dos coeficientes a determinar'. Neste caso, devemos supor que a solução particular tem um certo formato, ao nosso critério. Em seguida, fazemos a substituição dessa solução na recorrência não-homogênea e chegamos num sistema de equações com parâmetros a determinar. Calculamos esses parâmetros e assim encontramos a solução particular. O ponto negativo deste método é justamente conseguir imaginar o formato dessa solução. Para uma função $g(n)$ arbitrária não existe um método para encontrá-la. Entretanto, segundo (ELADYI, 2000),

> Basicamente, o método consiste em adivinhar inteligentemente a forma da solução particular e depois substituir esta função na equação de diferenças. Para um termo não homogêneo $g(n)$ completamente arbitrário, este método não é eficaz. Contudo, regras definidas podem ser estabelecidas para a determinação de uma solução particular por este método se $g(n)$ for uma combinação linear de termos, cada um tendo uma das formas
>
> $$a^n, \quad \sin(bn), \quad \cos(bn), \quad \text{ou} \quad n^k, \tag{2.4.5}$$
>
> ou produtos destas formas, como
>
> $$a^n \sin(bn), \quad a^n n^k, \quad a^n n^k \cos(bn), \ldots. \tag{2.4.6}$$
>
> (ELADYI, 2000, p. 85, tradução livre do autor.).

Ainda segundo essa referência, podemos encontrar uma tabela (Tabela 6.1) com algumas funções $g(n)$ e seus respectivos formatos de soluções particulares.

Em particular, uma classe de função entrada bastante importante é esta apresentada no Teorema (6.3.2) (FINITE..., 2005).

Tabela 6.1 – Formatos de soluções particulares $y_n^{(p)}$ referentes a cada $g(n)$.

$g(n)$	$y_p(n)$
a^n	$c_1 a^n$
n^k	$c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k$
$n^k a^n$	$c_0 a^n + c_1 n a^n + \cdots + c_k n^k a^n$
$\sin bn$, $\cos bn$	$c_1 \sin bn + c_2 \cos bn$
$a^n \sin bn$, $a^n \cos bn$	$(c_1 \sin bn + c_2 \cos bn) a^n$
$a^n n^k \sin bn$, $a^n n^k \cos bn$	$(c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k) a^n \sin(bn)$
	$+(d_0 + d_1 n + \cdots + d_k n^k) a^n \cos(bn)$

Fonte: (ELADYI, 2000, p. 86.)

Teorema 6.3.2. *Seja a função entrada*

$$g(n) = a^n P(n),$$

onde a é uma constante não-nula e P é um polinômio não-nulo de grau maior que, ou igual a zero (se $\deg P = 0$, P é idêntico a uma constante não-nula). Então a recorrência (6.3.1) possui uma solução particular da forma

$$y_n^{(p)} = a^n Q(n) n^\alpha,$$

onde Q é um polinômio tal que $\deg Q \leq \deg P$ e α é a multiplicidade da raiz $t = a$ da equação característica da recorrência homogênea associada (se a não for raiz da equação característica, consideramos que $\alpha = 0$ e $n^\alpha = 1$).

Antes de fazermos alguns exemplos, cabe apresentar o teorema seguinte, que, aliado com o Teorema (6.3.1), nos ajudará a resolver recorrências não homogêneas.

Teorema 6.3.3. *Sejam $x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = g_i(n)$, $1 \leq i \leq r$, r recorrências. Se cada $y_n^{(pi)}$ é solução particular de sua recorrência não homogênea correspondente, então*

$$y_n = y_n^{(p1)} + y_n^{(p2)} + \cdots + y_n^{(pr)} \tag{6.3.2}$$

é uma solução particular da recorrência não homogênea

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = g_1(n) + g_2(n) + \cdots + g_r(n). \tag{6.3.3}$$

Demonstração. Se cada $y_n^{(pi)}$ é solução particular de $x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = g_i(n)$, então

$$y_n^{(p1)} + a_1 y_{n-1}^{(p1)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(p1)} = g_1(n)$$
$$y_n^{(p2)} + a_1 y_{n-1}^{(p2)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(p2)} = g_2(n)$$
$$\vdots$$

$$y_n^{(pr)} + a_1 y_{n-1}^{(pr)} + \cdots + a_k y_{n-k}^{(pr)} = g_r(n).$$

Da soma dessas equações, vem:

$$\sum_{i=1}^{r} y_n^{(pi)} + a_1 \sum_{i=1}^{r} y_{n-1}^{(pi)} + \cdots + a_k \sum_{i=1}^{r} y_{n-k}^{(pi)} = \sum_{i=1}^{r} g_i(n).$$

Fazendo $y_n = y_n^{(p1)} + y_n^{(p2)} + \cdots + y_n^{(pr)}$,

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} = g_1(n) + g_2(n) + \cdots + g_r(n).$$

Ou seja, $y_n = \sum_{i=1}^{r} y_n^{(pi)}$ é solução particular de (6.3.3). □

Exemplo 6.3.1. Resolver a recorrência

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 3^n(2n^2 - 1) + 2^{n+1} + 3n \cdot 2^n + 5. \tag{6.3.4}$$

Primeiramente, vamos reescrever essa recorrência de uma forma mais conveniente:

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 3^n(2n^2 - 1) + 2^n(3n + 2) + 1^n(5). \tag{6.3.5}$$

Agora, vamos resolver a recorrência homogênea associada:

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 0. \tag{6.3.6}$$

Sua equação característica é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \tag{6.3.7}$$

de raízes $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Portanto, pelo Teorema (6.1.1), a solução da homogênea é dada por

$$y_n^{(h)} = c_1 2^n + (c_2 + c_3 n)1^n$$

$$\Rightarrow y_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 + c_3 n. \tag{6.3.8}$$

Em seguida, para obter uma solução particular de (6.3.5), podemos proceder da seguinte forma: estabelecemos os formatos das soluções particulares $y_n^{(p1)}, y_n^{(p2)}, y_n^{(p3)}$ das recorrências

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 3^n(2n^2 - 1), \tag{6.3.9}$$

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 2^n(3n + 2) \tag{6.3.10}$$

e

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 1^n(5), \tag{6.3.11}$$

respectivamente, e daí, pelo Teorema (6.3.3), a sequência $y_n = y_n^{(p1)} + y_n^{(p2)} + y_n^{(p3)}$ será uma solução particular de (6.3.5). Por fim, substituimos y_n em (6.3.5) e calculamos seus parâmetros. Outra alterativa seria primeiramente substituir individualmente cada formato de solução particular em suas respectivas recorrências e encontrar seus parâmetros, para então fazer a soma $y_n = y_n^{(p1)} + y_n^{(p2)} + y_n^{(p3)}$. Para este exemplo, seguiremos pelo segundo método.

Comecemos por encontrar $y_n^{(p1)}$. Ora, como $g_1(n) = 3^n(2n^2 - 1)$ e 3 não é raiz de (6.3.7), então, pelo Teorema (6.3.2), $y_n^{(p1)}$ é da forma

$$y_n^{(p1)} = 3^n(A_0 + A_1 n + A_2 n^2). \tag{6.3.12}$$

Logo,

$$y_{n+1}^{(p1)} = 3^{n+1}(A_0 + A_1(n+1) + A_2(n+1)^2),$$
$$y_{n+2}^{(p1)} = 3^{n+2}(A_0 + A_1(n+2) + A_2(n+2)^2)$$

e

$$y_{n+3}^{(p1)} = 3^{n+3}(A_0 + A_1(n+3) + A_2(n+3)^2).$$

Substituindo essas equações em (6.3.9) e fazendo os cálculos, obtemos $A_0 = -1, A_1 = -6, A_2 = 1/2$. Logo,

$$y_n^{(p1)} = 3^n\left((1/2)n^2 - 6n - 1\right). \tag{6.3.13}$$

Já $g_2(n) = 2^n(3n+2)$, e $y_n^{(p2)}$ é da forma

$$y_n^{(p2)} = 2^n(B_0 + B_1 n)n. \tag{6.3.14}$$

A presença desse fator n^1 ocorre porque 2 é raiz simples da equação característica (6.3.7). Da equação (6.3.14), vem:

$$y_{n+1}^{(p2)} = 2^{n+1}(B_0 + B_1(n+1))(n+1),$$
$$y_{n+2}^{(p2)} = 2^{n+2}(B_0 + B_1(n+2))(n+2)$$

e

$$y_{n+3}^{(p2)} = 2^{n+3}(B_0 + B_1(n+3))(n+3).$$

Substituindo essas equações em (6.3.10), obtemos $B_0 = -23/20, B_1 = 3/4$. Logo,

$$y_n^{(p2)} = 2^n(-23/20 + (3/4)n)n. \tag{6.3.15}$$

Passemos agora ao cálculo de $y_n^{(p3)}$. Como $g_3(n) = 5 = 1^n(5)$ e 1 é raiz dupla de (6.3.7), então $y_n^{(p3)}$ é da forma

$$y_n^{(p3)} = 1^n(C_0)n^2 = C_0 n^2. \tag{6.3.16}$$

Logo,

$$y_{n+1}^{(p3)} = C_0(n+1)^2,$$
$$y_{n+2}^{(p3)} = C_0(n+2)^2$$

e

$$y_{n+3}^{(p3)} = C_0(n+3)^2.$$

Substituindo essas equações em (6.3.11), obtemos $C_0 = -5/2$. Portanto,

$$y_n^{(p3)} = (-5/2)n^2. \tag{6.3.17}$$

Daí, pelo Teorema (6.3.3),

$$\begin{aligned} y_n^{(p)} &= y_n^{(p1)} + y_n^{(p2)} + y_n^{(p3)} \\ &= 3^n \Big((1/2)n^2 - 6n - 1\Big) + 2^n \left((3/4)n - 23/20\right) n - (5/2)n^2. \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

Finalmente, pelo Teorema (6.3.1), a solução geral da recorrência não homogênea (6.3.4) é dada pela soma das equações (6.3.8) e (6.3.18), ou seja,

$$\begin{aligned} x_n &= y_n^{(h)} + y_n^{(p)} \\ &= c_1 2^n + c_2 + c_3 n + 3^n \Big((1/2)n^2 - 6n - 1\Big) + 2^n \left((3/4)n - 23/20\right) n - (5/2)n^2. \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

7 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Como vimos, existem basicamente três formas de se definir uma sequência: segundo alguma propriedade de seus termos, segundo uma fórmula fechada ou segundo uma relação de recorrência. É justamente a essa terceira forma de definição de sequências abordamos no trabalho.

Existem sequências que podem ser definidas por mais de uma dessas regras, ou até pelas três (por exemplo, a *sequência dos números pares positivos dispostos em ordem crescente*). Neste caso, estaríamos diante de três definições equivalentes. Em particular, uma definição implica na outra.

Por vários motivos, as definições posicionais são mais almejadas que as recursivas, e como são equivalentes, é comum procurar algum processo que nos leve da definição recursiva para a posicional, de modo que a fórmula obtida é chamada de solução da recorrência. Logo, resolver uma recorrência significa obter sua fórmula posicional fechada.

Portanto, nossos objetivos principais com esta exposição foram: definir, classificar e resolver certas recorrências, além de apresentar alguns exemplos.

Uma vez definido o que é recorrência e feitas suas classificações, resolvemos os seguintes tipos de recorrências lineares, em ordem:

1. Recorrências lineares de primeira ordem. Fizemos isso em etapas, combinando casos particulares dessa recorrência.

2. Recorrências lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes homogêneas. Aqui, usamos o método da equação característica; duas raízes simples ou uma raiz dupla.

3. Recorrências lineares de ordem superior com coeficientes constantes homogêneas.

4. Recorrências lineares de ordem superior com coeficientes constantes não-homogêneas.

A Tabela (7.1) a seguir, juntamente com a Tabela (6.1), e os Teoremas (6.3.2) e (6.3.3) resumem, os principais resultados deste trabalho.

Tabela 7.1 – Tabela-resumo dos principais resultados obtidos.

Recorrência	(Formato da) Fórmula fechada	Observações
$x_{n+1} = f(n)x_n$	$x_n = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$	
$x_{n+1} = x_n + g(n)$	$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$	
$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$	$x_n = \left(l \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \right) \left(\frac{x_1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{f(k)a_k} \right)$	onde l é uma constante não-nula e a_n é uma solução particular de $x_{n+1} = f(n)x_n$.
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ou $x_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$	onde: λ_1, λ_2 são raízes distintas da equação característica $t^2 + pt + q = 0$; ρ é a magnitude dessas raízes; e θ é o menor argumento dessas raízes.
	$x_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n$	onde $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ são raízes iguais da equação característica.
$x_n + \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n-j} = 0$	$x_n = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j^n$	onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são raízes distintas da eq. característica.
	$x_n = \lambda^n \cdot \left(c_0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j n^j \right)$	onde λ é raiz única da equação característica.
	$x_n = \sum_{j=1}^{r} Q_j(n)\lambda_j^n$	onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são raízes de multiplicidades recpectivamente $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ e cada Q_j é um polinômio tal que $\deg Q_j < \alpha_j$.
$x_n + \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n-j} = g(n)$	$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$	onde $x_n^{(h)}$ é a solução da recorrência homogênea associada, e $x_n^{(p)}$ é uma solução particular dessa recorrência não-homogênea.

Fonte: Do autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sem dúvida, uma das sequências recorrentes mais importantes da história da matemática é a sequência de Fibonacci. Vimos que, para essa sequência, existe uma fórmula fechada, chamada fórmula de Binet. Pensando nisso, um questionamento natural é:

Q: *Existem também fórmulas fechadas para outras recorrências, que se "parecem" com a recorrência que define a sequência de Fibonacci?*

Ora, antes de tudo é preciso definir o que é "se parecer" com essa equação de recorrência. E hoje sabemos que uma recorrência "se parece" com a recorrência de Fibonacci quando ela é uma *recorrência linear homogênea com coeficientes constantes*. Na verdade, esse tipo de recorrência generaliza a recorrência de Fibonacci e nos permite desenvolver técnicas gerais para a resolução de recorrências mais complexas. E para esse tipo de recorrência, a resposta à pergunta ***Q*** é

A: *Sim. Todas as recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes (das quais a recorrência de Fibonacci é um caso particular) possuem fórmula fechada.*

Percebemos, então, a necessidade de se definir e desenvolver classificações para as recorrências, para então resolvê-las em sua generalidade. Com isso em mente, nossa proposta foi apresentar a teoria das recorrências lineares de modo a definir, classificar e resolver recorrências, nessa ordem. Embora as fórmulas encontradas sejam importantes, destacamos também a relavância dos métodos e das técnicas empregados para se chegar em tais fórmulas, porque argumentos análogos podem ser utilizados em outras teorias e contextos. Acreditamos ser mais valioso o processo que nos leva às fórmulas do que as fórmulas em si.

Ademais, o nosso esforço em descobrir essas soluções ou fórmulas, como visto no desenvolvimento do texto, se justifica pela grande variedade de aplicações que as recorrências encontram em diversas áreas.

Vamos agora nos voltar para as dificuldades encontradas. Primeiramente, como a disciplina de *Matemática Discreta* não é tão presente na maioria dos cursos de graduação (o que também é uma das motivações do autor para escrever sobre este tema). É claro que não existe uma literatura tão vasta sobre as recorrências se fizermos uma comparação com a bibliografia existente tratando de Cálculo, por exemplo. Portanto, uma das dificuldades enfrentadas foi justamente encontrar, em repositórios e bancos de dados, respostas a certas questões concernentes ao tema.

Em segundo lugar, outra dificuldade foi em relação aos detalhes técnicos de algumas demonstrações de teoremas, encontradas em buscas bibliográficas.

Apesar disso, acreditamos que atingimos os nossos objetivos em escrever um texto de natureza teórica tratando da teoria das recorrências lineares. Reconhecemos, no entanto, que o texto carece de aplicações mais elaboradas, limitando-se predominantemente a exemplos numéricos.

Portanto, como desdobramentos deste trabalho pode-se ter pesquisas complementares que tragam melhorias, aprimoramentos e acrescente novos elementos, como aplicações mais elaboradas, provar com detalhes todos os teoremas e resolver os mesmos problemas por outros métodos (por exemplo, neste trabalho usamos o método da equação característica, mas existem outros, como o método das funções geradoras).

Por fim, um outro problema interessante que também pode ser objeto de pesquisa é se, em geral, toda sequência recorrente possui uma fórmula fechada.

REFERÊNCIAS

ABEL, N. H. **Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré**. Christiania: [s.n.], 1824. Repr. in *Œuvres complètes*, éd. L. Sylow, S. Lie, t. 1, Christiania : Grøndahl, p.28-33.

ANIZ, C.; RACHIDI, M. Inverse of the generalized vandermonde matrix via the fundamental system of linear difference equations. **International Journal of Advanced Engineering Research and Science**, v. 9, n. 6, p. 106–127, 2022.

BONCOMPAGNI, B. et al. **Liber abbaci**. [S.l.]: Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857. v. 1.

BURTON, D. **The History of Mathematics: An Introduction**. McGraw-Hill, 2007. ISBN 9780073051895. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VDlGAQAAIAAJ>.

DEVLIN, K. **The man of numbers: Fibonacci's arithmetic revolution**. [S.l.]: A&C Black, 2011.

ELADYI, S. **An introduction to difference equations**. [S.l.]: Springer New York, 2000.

ESMIRNA, T. de. **De utilitate mathematicae (Cambridge, King's College, MS 23)**. [s.n.], séc. II d.C. Acesso em: 23 de fevereiro de 2024. Disponível em: <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-KINGS-00023/77>.

FINITE Difference Equations. In: DIFFERENCE Equations: From Rabbits to Chaos. New York, NY: Springer New York, 2005. p. 33–65. ISBN 978-0-387-27645-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/0-387-27645-9_3>.

HILLER, E. et al. **Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium**. [S.l.]: in aedibus BG Teubneri, 1878.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. São Paulo: Atual, 2004.

KALMAN, D. The generalized vandermonde matrix. **Mathematics Magazine**, Taylor Francis, v. 57, n. 1, p. 15–21, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1984.11977069>.

KNORR, W. R. Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation. **Archive for history of exact sciences**, JSTOR, p. 115–140, 1976.

KNUTH, D. E. **The Art of Computer Programming: Fundamental Algorithms, volume 1**. [S.l.]: Addison-Wesley Professional, 1997.

KUMAR, R. Magic of fibonacci sequence in prediction of stock behavior. **International Journal of Computer Applications**, Citeseer, v. 93, n. 11, 2014.

KURGALIN, S.; BORZUNOV, S. The discrete math workbook. **A Companion Manual for Practical Study. Cham: Springer International**, Springer, 2018.

MACADAM, J. D. **Theo Smyrnaeus on arithmetic**. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 1969.

MARTINEZ, F. B.; OUTROS. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Acesso em: 07 ago. 2023.

NOAS/CNEC. **Torre de Hanói**. 2011. Acessado em 26/02/2024. Disponível em: <https://www.noas.com.br/ensino-fundamental-1/matematica/torre-de-hanoi/>.

PISANO, L. **Incipit liber Abbaci compositus a Lionardo filio Bonaccii Pisano in anno Mccij [Manoscritto].** [s.n.], 1202. Acesso em: 23 de fevereiro de 2024. Disponível em: <https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=253>.

RUFINO, E. d. O. Torre de hanoi: jogando com a matemática. 2001.

SÁ, L. S. de; SPREAFICO, E. New approaches for solving interpolation problems and homogeneous linear recurrence relations. **Asian Research Journal of Mathematics**, v. 19, n. 9, p. 263–277, 2023.

SHENG-LIANG, Y. Generalized vandermonde matrices and their lu factorization. In: . [s.n.], 2004. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124106449>.

SIGLER, L. Here begins chapter twelve. In: ______. **Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation**. New York, NY: Springer New York, 2002. p. 259–445. ISBN 978-1-4613-0079-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0079-3_13>.

SILVA, B. A. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017.

SINGH, P. The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval india. **Historia Mathematica**, v. 12, n. 3, p. 229–244, 1985. ISSN 0315-0860. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086085900217>.

SINHA, S. The fibonacci numbers and its amazing applications. **International Journal of Engineering Science Invention**, v. 6, n. 9, p. 7–14, 2017.

STENLUND, S. **The origin of symbolic mathematics and the end of the science of quantity**. [S.l.]: Department of Philosophy, 2014.

TOFFALORI, C.; BENVENUTI, S.; MANCINELLI, S. Il numero prima di fibonacci. 2021.

VISCA, R. La lingua dell'economia in italia. 2023.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC

Assunto:	TCC
Assinado por:	Jonas Cosmo
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jonas Gonçalves Cosmo, ALUNO (201912020002) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 05/04/2024 09:55:13.

Este documento foi armazenado no SUAP em 05/04/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1134606
Código de Autenticação: 983343274a