

Modelo en red para la solución numérica de la ecuación de Laplace, 2-D, con condiciones de contorno arbitrarias. Una aplicación a ingeniería civil: construcción de redes de flujo

Pablo Ortiz*, Iván Alhama Manteca*

* Estudiante Máster de Ing. De Caminos (UPCT)

*Profesor de la Escuela de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos y de Ingeniería de Minas. (UPCT)

Unidad Predepartamental de Ing. Civil. Edificio de Minas. Pase Alfonso XIII 48, 30202 Cartagena

Teléfono: 968 321278

Email: pog@alu.upct.es, ivan.alhama@upct.es

Resumen. Se presenta un modelo basado en el método de simulación por redes para la solución numérica de la ecuación de Laplace sujeta a determinadas condiciones de contorno. El diseño del modelo es relativamente simple y su simulación inmediata, con un programa de resolución de circuitos eléctricos. Mediante pequeñas modificaciones, el modelo es capaz de aplicarse a medios homogéneos y heterogéneos. Se presenta una aplicación del mismo a problemas de flujo de aguas subterráneas bajo presas en medios bicapa.

1. Modelo en red de la ecuación de Laplace

Si bien existen soluciones analíticas y semianalíticas de esta ecuación para medios lineales, (porosos y saturados) homogéneos y heterogéneos, con diferentes condiciones de contorno, su uso es complejo, pues se trata de series matemáticas de convergencia lenta [1, 2]. En este trabajo se propone una solución numérica muy precisa basada en el método de redes [3]. Éste consiste en la simulación de un modelo en red cuyo circuito se resuelve con un código estándar. Los conocimientos del usuario son, básicamente, los fundamentos de teoría de circuitos, que se adquieren en los primeros cursos de carreras técnicas o científicas. Tanto el diseño del modelo en red para un volumen elemental del dominio, como su simulación, requieren pocas reglas de programación y escasa manipulación matemática. Por otro lado, la implementación del modelo completo en forma de archivo de texto, incluyendo las condiciones de contorno, sigue reglas muy intuitivas

La ecuación de Laplace para flujo de agua en medios porosos es:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Para medios bicapas horizontales, como el estudiado en este trabajo, la ecuación anterior se aplica a cada capa sin más que cambiar la conductividad hidráulica (k). El modelo en red de un volumen finito se diseña a partir de la ecuación en diferencias finitas, derivada de la anterior:

$$\frac{\Phi_{k,2} - \Phi_{k,0}}{\Delta x^2/2} + \frac{\Phi_{k,4} - \Phi_{k,0}}{\Delta x^2/2} + \frac{\Phi_{k,1} - \Phi_{k,0}}{\Delta y^2/2} + \frac{\Phi_{k,3} - \Phi_{k,0}}{\Delta y^2/2} = 0 \quad (2)$$

Usando la nomenclatura de la Fig. 1, con un diseño simétrico en relación al nudo central, y asumiendo que cada término de la ecuación (2) es una corriente eléctrica (asociada a una rama del circuito) que se

balancea con las restantes en el centro de la celda, el modelo queda constituido por cuatro resistencias eléctricas (simétricamente dispuestas) de valor:

$$R_1 = \frac{\Delta V_1}{i_1} \quad R_2 = \frac{\Delta V_2}{i_2} \quad (3)$$

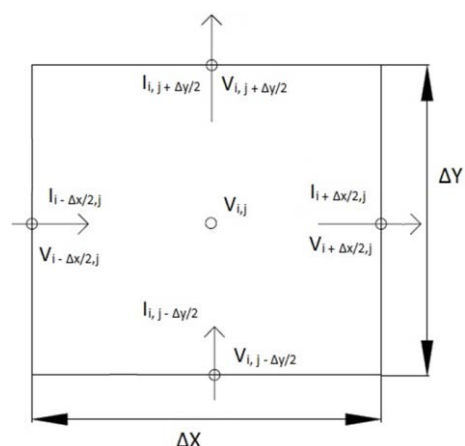


Figura 1. Nomenclatura de un elemento de volumen

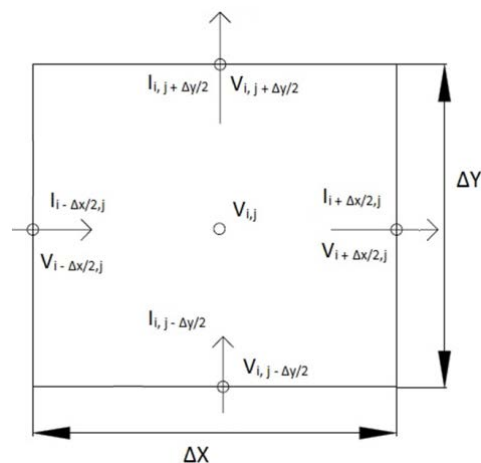


Figura 2. Modelo en red del elemento de volumen

La conexión entre los $N_x \times N_y$ volúmenes elementales se hace por medio de contactos eléctricos ideales. En relación con las condiciones de contorno, que en este trabajo son de primera y segunda clase, se implementan mediante fuentes constantes (para la condición Dirichlet) o resistencias de valor infinito (para la condición homogénea de Neuman).

Una vez diseñado el modelo en red y elaborado como un archivo de texto mediante reglas sencillas e intuitivas, su simulación se lleva a cabo con tiempos de simulación despreciables en Pspice [4], un código de versión educativa libre.

2. Modelo físico

Como aplicación de la ecuación de Laplace, 2-D, resolveremos la construcción de redes de flujo de agua subterránea bajo presas ("seepage flow"), un interesante problema de ingeniería civil resuelto habitualmente de forma gráfica. La configuración física del problema se muestra en la Figura 3. Una presa de espesor dado separa dos regiones sometidas a un gradiente piezométrico constante de forma que, debido a éste se induce un flujo de agua (ley de Darcy), que es necesario cuantificar para el diseño y seguridad de la presa.

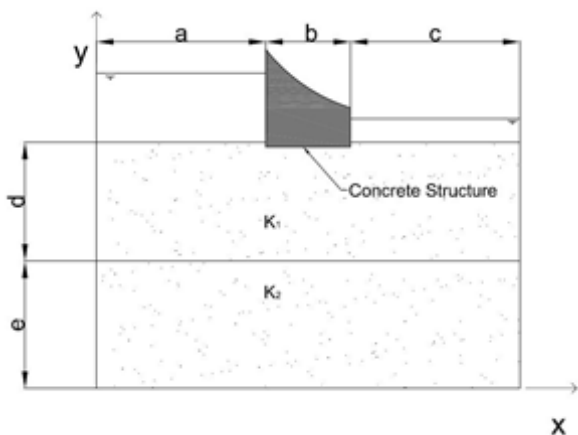


Figura 3. Esquema físico de la presa

Se considera que el medio está constituido por dos capas de espesores y longitud determinada (Tabla 1). Abordaremos los casos 1 a 3, cuyas características físicas se recogen en la Tabla 2. La longitud del

medio es suficientemente grande como para despreciar la influencia de las regiones lejanas a la presa. Se toma como gradiente hidráulico la unidad.

Tabla 1. Parámetros geométricos

Dimensiones del problema	
a	15 m
b	5 m
c	15 m
d	5 m
e	5 m

Las paredes laterales, la de fondo y la base de la presa son impermeables al flujo.

Tabla 2. Casos estudiados

Casos	Permeabilidades	
1	$K_1 = K_2 = k_x = k_y = 10^{-6} \text{ m/s}$	
2	$K_1 = 10^{-6} \text{ m/s}$	$K_1 = 3 K_2$
3	$K_1 = 3 K_2$	$K_2 = 10^{-6} \text{ m/s}$

3. Simulaciones

Las Figuras 4 a 6 muestran los resultados de las simulaciones de los casos 1 a 3, respectivamente. Se muestran las líneas iso-piezométricas (10 en total) que ilustran las distribuciones de carga hidráulica en el dominio. Es inmediato comprobar el efecto distorsionador que produce la anisotropía del dominio (casos 2 y 3).

En relación con las líneas de flujo, se ha resuelto también la ecuación de la función de corriente (también de Laplace), variable cuya representación proporciona la trayectoria las partículas de agua,

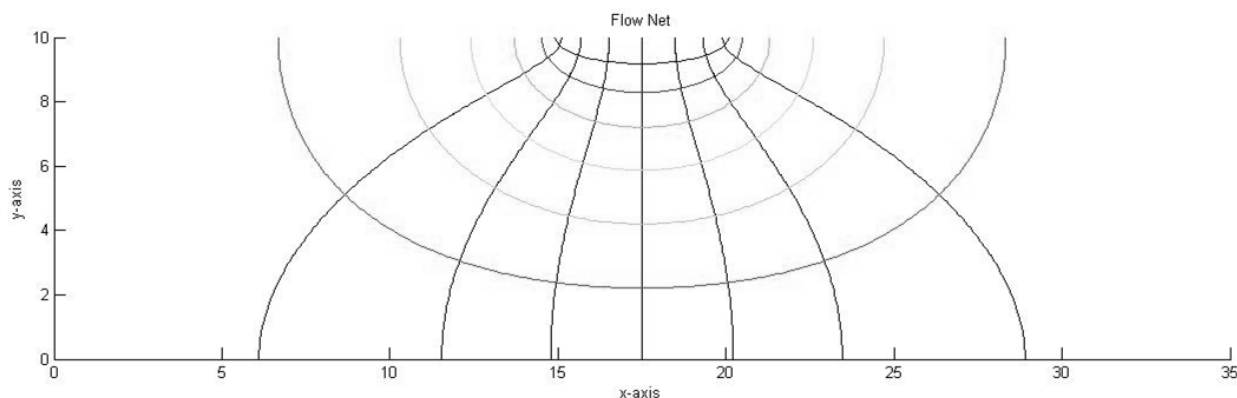


Figura 4. Caso 1 (Capas de suelo con igual permeabilidad)

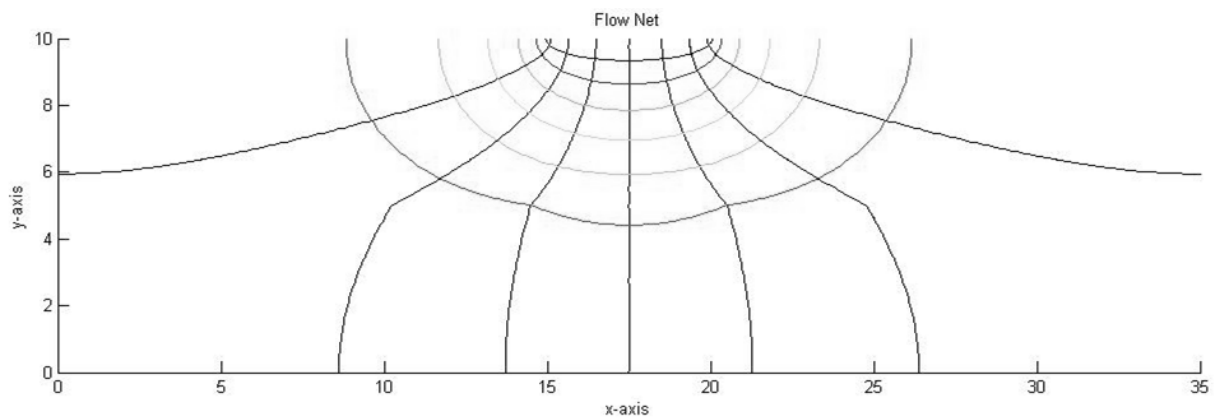


Figura 5. Caso 2 (Capa superior con menor permeabilidad que la inferior)

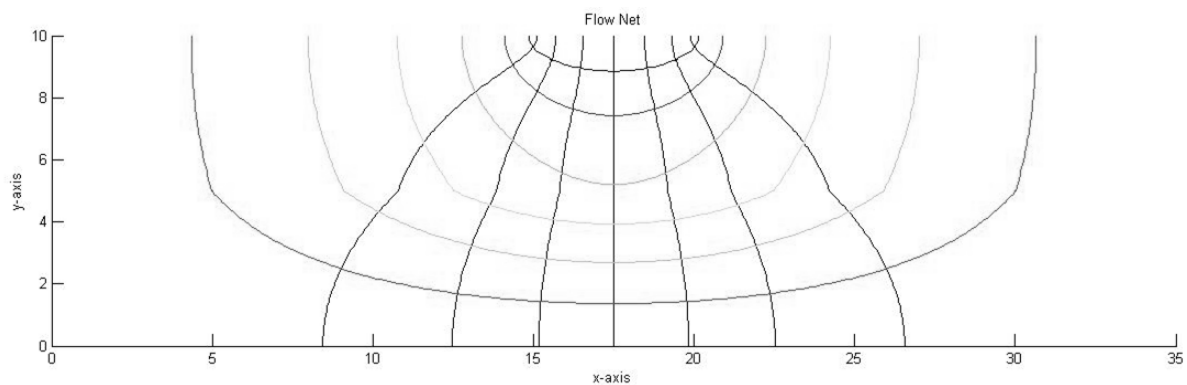


Figura 6. Caso 3 (Capa superior con mayor permeabilidad que la inferior)

usando un modelo en red análogo al anterior. Puede apreciarse, igualmente, la distorsión de estas líneas en relación con la anisotropía y comprobar cómo se desvían hacia el medio de mayor permeabilidad. Se ve, claramente como pierde la perpendicularidad de las líneas equipotenciales y de flujo con el cambio de permeabilidad en el medio

A partir de estos gráficos es fácil deducir el resto de variables de interés en ingeniería civil: caudal de descarga, subpresión en la base de la presa, sifonamiento...

Para mallas refinadas del 100×100 , los tiempos de computación son del orden 10 s.

Agradecimientos

Agradecemos al grupo de investigación 'Simulación por redes' de la UPCT la colaboración prestada para diseñar el modelo y resolver algunos problemas relacionados con simulación en Pspice.

Referencias

- [1] Azizi, F. (2000) "Applied analyses in geotechnics." Taylor and Francis, New York.
- [2] Das, B.M. (2008) "Advanced Soil Mechanics." Taylor and Francis, New York (2008).
- [3] C.F. González-Fernández. Horno J. (2002). "Heat Transfer and the Network Simulation Method." Ed. Research Signpost, Kerala (2002).
- [4] PSPICE, 6.0: (1994). Microsim Corporation, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718.