Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 9

*МАТЕМАТИКА*

П. А. КОЗУЛЯЕВ

# К ВОПРОСУ ОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XII 1946)*

Пусть каждому моменту времени $t$ $(-\infty < t < +\infty)$ соответствует случайная величина $x(t)$, математическое ожидание которой

$$M\{x(t)\}=0, \tag{1}$$

а вторые моменты

$$B(\tau)=M\{x(t\pm\tau)\,x(t)\} \tag{2}$$

зависят только от разности времен $\tau$. Тогда случайная функция $x(t)$ определяет одномерный, „стационарный в широком смысле" ([1]), случайный процесс. Как известно, вторые моменты такого процесса удовлетворяют равенству

$$B(\tau)=bR(\tau), \tag{3}$$

где $R(\tau)$—корреляционная функция, а

$$b=M\{x^2(t)\}=\text{const}. \tag{4}$$

Проблема линейной экстраполяции стационарных случайных процессов была поставлена перед автором А. Н. Колмогоровым. Некоторые вопросы этой проблемы, относящиеся к дискретным стационарным процессам, были изложены в его работах ([2–4]) и в заметке автора ([5]).

В данном случае вопрос состоит в том, что для непрерывного стационарного процесса $x(t)$ с заданными $b$ и $R(\tau)$ рассматриваются всевозможные суммы вида:

$$s(t)=\sum_{k=1}^{n} a_k x(t-\eta_k), \quad 0\leqslant \eta_k \leqslant T, \tag{5}$$

составляются средние квадратические отклонения

$$\mu^2(\lambda, s)=M\{x(t+\lambda)-s(t)\}^2 \tag{6}$$

и ставятся следующие задачи:

1. При заданных $\lambda>0$ и $T\geqslant 0$ найти нижнюю грань $\min\mu^2(\lambda, T)$ средних квадратических отклонений $\mu^2(\lambda, T)$ для всех допустимых сумм $s(t)$.

2. Так как, вообще говоря, эта нижняя грань не достигается при конечном числе слагаемых сумм (5), то найти нижнюю грань $\min\mu^2(\lambda, T, n)$ для этих сумм с заданным числом $n$ их членов.

3. Если нижняя грань $\min \mu^2(\lambda, T, n)$ достигается при каких-либо определенных значениях $\eta_k$ и $a_k$, то найти их.

Во всех этих задачах, наряду с рассмотрением случая конечного $T$, представляет интерес рассмотрение случая $T=+\infty$, в котором условие $0 \leqslant \eta_k \leqslant T$ сводится к условию $\eta_k \geqslant 0$.

Вообще говоря, $\mu^2(\lambda, T, n)$ для конечных сумм бывают больше, чем $\mu^2(\lambda, T)$. Однако существуют исключительные случаи, при рассмотрении которых увеличение числа членов в сумме $s(t)$ не улучшает точности „прогноза" величины $x(t+\lambda)$. Например, имеет место следующая, вероятно многим известная,

Теорема 1. *Если корреляционная функция*

$$R(\tau)=q^{\tau}, \quad 0<q<1, \quad \tau \geqslant 0, \tag{7}$$

*то минимальное значение*

$$\mu^2(\lambda, s)=\mu^2(\lambda, \infty)=1-q^{2\lambda} \tag{8}$$

*достигается для суммы*

$$s(t)=q^{\lambda} x(t). \tag{9}$$

Естественным дальнейшим шагом будет рассмотрение случаев, в которых наилучшие результаты достигаются двучленными суммами $s(t)$. Задачей настоящей заметки и является сообщение одного результата в этом направлении. Мы будем рассматривать суммы вида

$$s^*(t)=a_1 x(t)+a_n x(t-T). \tag{10}$$

Для таких сумм, в единственно интересном случае

$$|R(T)|<1, \tag{11}$$

среднее квадратическое отклонение $\mu^2(\lambda, s^*)$ принимает минимальчое значение при

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{R(\lambda)-R(T) R(T+\lambda)}{1-R^2(T)}, \\ a_n &= \frac{R(T+\lambda)-R(T) R(\lambda)}{1-R^2(T)}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Соответствующее этим коэффициентам $a_1$ и $a_n$ наименьшее значение среднего квадратического отклонения $\mu^2(\lambda, s^*)$ определяется равенством

$$\min \mu^2(\lambda, T, {}^*)=\frac{1-R^2(\lambda)-R^2(T+\lambda)-R^2(T)+2R(T) R(\lambda) R(T+\lambda)}{1-R^2(T)}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Если в пределах* $0<\eta_k<T$ *выполняется условие*

$$a_1 R(\eta_k)+a_n R(T-\eta_k)-R(\lambda+\eta_k)=0, \tag{14}$$

*то*

$$\min \mu^2(\lambda, T)=\min \mu^2(\lambda, T, {}^*) \tag{15}$$

*и*

$$\min \mu^2(\lambda, s)>\min \mu^2(\lambda, T, {}^*) \tag{16}$$

*для любой суммы* $s$ *вида* (5), *у которой*

$$\sum_{1<k<n} a_k x(t-\eta_k) \not\equiv 0, \quad 0<\eta_k<T. \tag{17}$$

Условие (14), в частности, выполняется при любом $T \geqslant 0$, когда корреляционная функция случайного процесса задается равенством (7). Отсюда весьма просто выводится сформулированная выше теорема 1. Легко далее видеть, что условие (14) теоремы 2 выполняется, если корреляционная функция $R(\tau)$ линейна на сегменте $[0, T+\lambda]$. Этот частный случай теоремы 2 совпадает с результатом автора ([5]), относящимся к экстраполяции стационарных случайных последовательностей.

Формулы (12) и (13) получаются обычными методами теории множественной корреляции. Чтобы доказать теорему 2, надо сравнить средние квадратические отклонения (6) для сумм (5) и (10). Для этого достаточно записать очевидные равенства:

$$\mu^2(\lambda, s) = M\{x(t+\lambda) - s(t)\}^2 = M\Big\{x(t+\lambda) - \Big[a_1 x(t) + \sum_{1<k<n} a_k x(t-\eta_k) + a_n x(t-T)\Big]\Big\}^2 = \mu^2(\lambda, s^*) + M\Big(\sum_{1<k<n} a_k x(t-\eta_k)\Big)^2 + 2\sum_{1<k<n} a_k\{a_1 R(\eta_k) + a_n R(T-\eta_k) - R(\lambda+\eta_k)\}, \tag{18}$$

и теорема будет полностью доказана.

Полученные результаты показывают, что для наилучшего „прогноза" будущего состояния $x(t+\lambda)$ случайного процесса $x(t)$, корреляционная функция которого на сегменте $[t-T, t]$ удовлетворяет условию (14), необходимо и достаточно брать только два его прошедших состояния $x(t)$ и $x(t-T)$ с коэффициентами (12), а все промежуточные состояния следует отбросить, потому что они точности „прогноза" не улучшают.

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Поступило
23 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Khintchine, Math. Ann., **109**, 604 (1934). [2] A. Kolmogoroff, C. R., **208**, 2043 (1939). [3] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, 315 (1941). [4] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 2, № 6 (1941). [5] П. А. Козуляев, ДАН, **30**, № 1 (1941).