Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 9

ФИЗИКА

В. Л. ГИНЗБУРГ

К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. II

(Представлено академиком В. А. Фоком 29 III 1939)

Для понимания природы трудностей квантовой электродинамики весьма важно выяснить, какие из встречающихся в теории расходящихся выражений имеют классические аналоги и какие носят чисто квантовый характер. Как раз этот вопрос в отношении расходимостей, связанных с поперечным электромагнитным полем, остается не вполне ясным. Дело в том, что обычно расчет трансверсальных расходимостей проводится в предположениях, делающих невозможным сравнение квантовых результатов с привычными классическими. Именно в этих расчетах не пренебрегают реакцией излучения на электрон, в то время как классические выражения для энергии взаимодействия электрона с его собственным полем и энергии увлекаемого им поперечного поля получаются всегда для стационарного случая (речь все время идет о равномерно движущемся электроне). Если в классической теории, по аналогии с квантовой постановкой задачи, предположить, что при $t=0$ имеется равномерно движущийся электрон, а энергия поперечного поля равна нулю, то при адиабатическом включении взаимодействия электрона с полем он, как это было показано в сообщении I (ДАН, XXIII, № 8, 1939), излучает свое увлекаемое стационарное поле, только если пренебрегать реакцией излучения. Физический смысл этого результата ясен. Действительно, учет реакции приводит к тому, что по мере излучения электрон замедляется, замедлившись же, он начинает иначе излучать и т. д. В итоге в конце процесса включения электрон будет обладать не начальным импульсом $\vec{p}$, а некоторым другим, меньшим, а излученная им энергия конечно не будет равна энергии поля, увлекаемого в стационарном случае электроном с начальным импульсом.

Помимо энергии увлекаемого поля в H (см. I, 14) появляется энергия взаимодействия электрона с его собственным полем, равная в сумме с первой энергии возмущения E_p. При этом

$$E_p = -\frac{4\pi e^2}{m^2}\sum_{\lambda}\frac{(\vec{p}\,\vec{e}_\lambda)^2}{\nu_\lambda^2} = -\frac{4e^2}{3\pi c^3}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m^2}\right)\int_0^{\nu_{\max}} d\nu, \tag{1}$$

если оборвать спектр на частоте $\nu_{\max}$. Таким образом для точечного электрона E_p расходится, как $\int_0^{\nu_{\max}} d\nu$ при $\nu_{\max}\to\infty$. Напомним, что в соответствующем расчете мы пренебрегали также членом $\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2(r)$ в (I, 1).

Особенно важно то, что, как показано в (1), в точности такой же результат получается в квантовой теории. Отсюда мы заключаем, что расходимость, получающаяся от члена $-\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A}$ в (I, 1), носит классический характер.

При получении выражения (1) мы не пользовались теорией возмущений, но интересно отметить, что второе приближение этой теории приводит к тем же результатам. Второе приближение для энергии возмущения, обусловленного членами $-\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A}$ и $\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$ в (I, 1), имеет вид:

$$E'' = \sum_{m\neq 0} \frac{|(m| -\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A}|0)|^2}{E_0 - E_m} + \left(0\left|\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2\right|0\right) = E_1'' + \left(0\left|\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2\right|0\right). \quad (2)$$

Точное вычисление E_1'' приводит к сложному выражению, указанному Валлером ([2]). Заметим, что выражение Валлера, дающее расходящийся результат и при $\vec{p}=0$, именно для этого значения $\vec{p}$ неверно. Легко видеть, что $E_1''=0$, если $\vec{p}=0$. Получающийся результат, справедливый и для (1), согласно которому E_1'' [или E_p в случае (1), при $\nu_{\max}\to\infty$] равно бесконечности при $\vec{p}\neq 0$ и $E_1''=E_p=0$ при $\vec{p}=0$, объясняется следующим образом. Если электрон покоится, то его поперечное поле вообще равно нулю (имеющиеся в квантовом случае нулевые состояния осцилляторов поля не меняют дела, так как важно среднее значение поля) и следовательно $E_1''=E_p=0$; если же точечный электрон движется, то при сколь угодно малом $\vec{p}$ энергия его поперечного поля бесконечна.

Пренебрежение реакцией означает, что мы считаем энергию и импульс электрона в состояниях 0 и m одинаковыми, откуда $E_0 - E_m = -\hbar\nu_m$. При этом для E_1'' получаем выражение (1). Изменение энергии поперечного поля после включения возмущения во втором приближении и при пренебрежении реакцией равно:

$$U = \int \Psi_1^* H_{tr}\Psi_1 dq - \int \Psi_0^* H_{tr}\Psi_0 dq = -E_1'' = -E_p\ *. \quad (3)$$

В (3) Ψ_1 и Ψ_0 — соответственно функции первого и нулевого приближений, H_{tr} определено согласно (I, 5), а через q обозначена совокупность координат частицы и поля. Для изменения во втором приближении энергии взаимодействия получаем:

$$V = \int \Psi_1^*\left(-\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A}\right)\Psi_1 dq - \int \Psi_0^*\left(-\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A}\right)\Psi_0 dq = 2E_1'' = 2E_p. \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) находятся в соответствии с (I, 14). Вычисление второго члена в (2) приводит, вне зависимости от того, пренебрегать или не пренебрегать реакцией, к следующему результату:

$$E_2'' = \left(0\left|\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2\right|0\right) = \frac{e^2\hbar}{\pi mc^3}\int_0^{\nu_{\max}} \nu d\nu. \quad (5)$$

---

* Это вычисление воспроизводит по существу результаты Смирнова, на которые мы ссылались в сообщении I.

E_2'' отлично от нуля из-за того, что $(0|q_{\lambda i}^2|0)=\frac{\hbar}{2\nu_\lambda}\neq 0$, т. е. из-за колебаний осцилляторов поля в нулевом состоянии. Следовательно расходимость от члена $\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$ носит чисто квантовый характер.

Розенфельд ([3]) полагал, что от этой расходимости можно освободиться так же, как от нулевой энергии в H_{tr}. Мнение Розенфельда однако основано на неверном, хотя и часто в квантовой электродинамике применяемом, преобразовании. Как видно из (I, 4), в выражение для $\vec{A}$ входят только координаты поля $q_{\lambda i}$, а в H_{tr} и $q_{\lambda i}$ и $p_{\lambda i}$. Если мы имеем дело с чистым полем излучения, то $q_{\lambda i}$ подчиняются однородному осцилляторному уравнению, и можно просто выразить $p_{\lambda i}=\dot{q}_{\lambda i}$ через $q_{\lambda i}$, т. е. исключить из H_{tr} импульсы. После этого с помощью канонического преобразования H_{tr} снова принимает вид суммы энергий осцилляторов [см. подробнее у Гейтлера ([4])], но при этом в выражении для $\vec{A}$ появляются и импульсы и координаты поля. В общем случае, когда в поле есть частицы, $q_{\lambda i}$ подчиняются уравнениям (I, 6), и их зависимость от времени неизвестна. Поэтому указанное преобразование при наличии частиц недопустимо, и мы не видим способа, который привел бы к одновременному присутствию в $\vec{A}$ и координат и импульсов. Поскольку способ исключения расходимости от члена с $\vec{A}^2$, предложенный Розенфельдом, основан именно на перестановке некоммутирующих множителей в $\vec{A}^2$, мы должны признать его неправильным. Можно конечно, пользуясь связью между $(0|q_{\lambda i}^2|0)$ и $(0|p_{\lambda i}^2|0)$, ввести в интегральные выражения импульсы, а в дальнейшем и «исключить» расходимость этих выражений; мы не считаем однако, что подобное исключение лучше простого вычеркивания неприятных членов.

В случае электрона, подчиняющегося уравнению Паули, можно, если пренебречь реакцией и членом с $\vec{A}^2$ в операторе энергии, получить следующий результат (см. I): помимо уже установившихся членов, к энергии возмущения прибавляется выражение, равное сумме энергии взаимодействия магнитного момента электрона с его собственным магнитным полем и энергии поля этого момента. Упомянутая энергия возмущения равна

$$E_\mu=-4\pi\sum_\lambda \mu_0^2\left(\vec{\sigma}\left[\frac{\vec{k}_\lambda}{|\vec{k}_\lambda|}\vec{e}_\lambda\right]\right)=-\frac{e^2\hbar^2}{2\pi m^2c^5}\int\limits_0^{\nu_{\max}}\nu^2 d\nu. \tag{6}$$

Здесь $\mu_0=\frac{\hbar e}{2mc}$, а $\vec{\sigma}$ — спиновой вектор Паули ($\sigma_{x_i}^2=1$; $\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}+\sigma_{x_j}\sigma_{x_i}=0$ при $i\neq j$). Тот же результат получается в классической теории магнитного электрона, если принять, что $\vec{\mu}^2=\frac{3\hbar^2e^2}{4m^2c^2}$, т. е. считать магнитный момент электрона равным значению, принимаемому в квантовой теории. Отсюда ясна классическая природа (6). Выражение (6) можно получать и во втором приближении теории возмущений, если пренебрегать реакцией. Кроме того легко показать, что изменение энергии поперечного поля после включения возмущения, равное энергии магнитного поля, создаваемого моментом $\vec{\mu}$, равно $-E_\mu$. Изменение энергии взаимодействия равно $2E_\mu$.

Для электрона, описываемого уравнением Дирака, точные выражения второго приближения энергии возмущения (возмущающий член $-e\vec{\alpha}\vec{A}$) получены Валлером [2] и Вайскопфом [5]. В случае, которым мы ниже ограничимся, когда электрон покоится, эта энергия в точности равна E_2'' [см. [5]].

Если разбить энергию возмущения во втором приближении E'' на часть, связанную с переходами электрона в состояния с положительной энергией $E''_{w_m>0}$, и часть, связанную с переходами в состояния с отрицательной энергией $E''_{w_m<0}$, то точные выражения для $E''_{w_m>0}$ и $E''_{w_m<0}$ получаются очень громоздкими. При этом конечно $E''_{w_m<0}+E''_{w_m>0}=$ $=E''=E_2''$. Если же считать энергию электрона в конечном состоянии w_m равной энергии начального состояния $w_0=mc^2$ при вычислении $E''_{w_m>0}$ и равной $-mc^2$ при вычислении $E''_{w_m<0}$, то получаем:

$$E''_{w_m=mc^2}=-\frac{e^2\hbar^2}{2\pi m^2c^5}\int\limits_0^{\nu_{\max}}\frac{\nu^2d\nu}{1-\left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^2}\,*. \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}E''_{w_m=-mc^2}=\frac{e^2\hbar}{\pi mc^3}\int\limits_0^{\nu_{\max}}\nu d\nu+\frac{e^2\hbar^2}{2\pi m^2c^5}\int\limits_0^{\nu_{\max}}\frac{\nu^2d\nu}{1-\left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^2}+\\+\frac{e^2\hbar}{\pi mc^3}\int\limits_0^{\nu_{\max}}\frac{\left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^2\nu d\nu}{2+\frac{\hbar\nu}{mc^2}-\left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^2}\,.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для покоящегося электрона, если пренебречь реакцией, мы должны ожидать получения для E'' выражения $E_\mu+E_2''$, вытекающего из теории Паули. Дело однако в том, что в теории Дирака полностью пренебрегать реакцией, т. е. считать $w_m=w_0$ и $\vec{p}_m=\vec{p}_0$, повидимому нельзя, не исключая одновременно из рассмотрения явлений, связанных со спином. Действительно, описание магнитных свойств электрона и спина проявляется в теории Дирака не в наличии особых дополнительных членов в уравнении, а, говоря, формально, в зависимости амплитуд волновых функций от $\vec{p}$. Если же мы считаем в нашей задаче, что $\vec{p}_m=\vec{p}_0=0$ вместо $\vec{p}_m=\pm\hbar\vec{k}_m$, то мы по существу отбрасываем эту зависимость и действительно получаем $E''_{w_m>0}=0$.

Выражение (7) получено при условии

$$w_m=w_0=mc^2,\quad \text{но}\quad \vec{p}_m=\pm\hbar\vec{k}_m\neq\vec{p}_0.$$

Поэтому (7) можно сравнивать с выражением (6) теории Паули, полученным при условии полного пренебрежения реакцией, лишь в области

* Разделение E'' на $E''_{w_m>0}$ и $E''_{w_m<0}$ применялось уже Беком [5]. Бек указывает, что при условии $\frac{\hbar\nu}{mc^2}\ll 1$ для $E''_{w_k=mc^2}$ получается выражение, равное энергии поля магнитного момента, а $E''_{w_m<0}$ расходится, как $\int\limits_0^{\max}\nu d\nu$ при $\nu_{\max}\to\infty$. Отсутствие у Бека дискуссии характера и результатов сделанных приближений лишило нас возможности ограничиться ссылкой на эту работу.

частот, в которых $\vec{p}_m$ мало по сравнению с mc, т. е. если $\frac{\hbar\nu}{mc^2} \ll 1$. При этом и на самом деле (6) и (7) идентичны.

Переходы в состояния с отрицательной энергией ни в коем случае не могут считаться происходящими без реакции, так как в этом случае $w_0 - w_m \geqslant 2mc^2$, т. е. Δw очень велико. Уже поэтому искать в классической теории аналогов выражению (8) трудно, даже если не обращать внимания на то, что $w_m < 0$.

Заметим также, что расходящееся выражение E_2'', появляющееся в теориях Шредингера и Паули от члена $\frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2$, в случае теории Дирака входит в $E''_{w_m=0}$, т. е. связано с переходами в отрицательные состояния. Этот результат связан с тем известным, указанным И. Е. Таммом (7), обстоятельством, что рассеяние на покоящемся электроне, обусловливаемое в теории Шредингера членом с $\vec{A}^2$, в теории Дирака вызывается переходами в промежуточные состояния с отрицательной энергией. Изменения, которые может внести теория «дырок» (8), нами не рассматривались.

Оптическая лаборатория.
Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета.

Поступило
17 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Waller, ZS. f. Phys., **62** 673 (1930). [2] L. Rosenfeld, ZS. f. Phys., **70**, 454 (1931). [3] W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation (1936). [4] V. Weisskopf, ZS. f. Phys. **89**, 27 (1934). [5] G. Beck, C. R. Acad. Sc. (Paris), **207**, 528 (1938). [6] Ig. Tamm, ZS. f. Phys., **62**, 545 (1930). [7] V. Weisskopf, ZS. f. Phys., **90**, 817 (1934).