# UNA FORMA GRÁFICA DE ENSEÑANZA: APLICACIÓN AL DUOPOLIO DE COURNOT.

**Autores:**

García Córdoba, José Antonio; josea.garcia@upct.es

Ruiz Marín, Manuel; manuel.ruiz@upct.es

Sánchez García, Juan Francisco; jf.sanchez@upct.es

Dpto. de Métodos Cuantitativos e Informáticos. Universidad Politécnica de Cartagena.

**Palabras clave:** Duopolio de Cournot, equilibrio, hoja de cálculo.

**Resumen:**

El principal problema que acontece en la enseñanza de materias económicas es la falta de visualización que tiene el alumnado de los conceptos presentados. Una forma sencilla de poder transmitir esos conocimientos consiste en la utilización de equipos informáticos y software de uso general accesible al alumnado como las hojas de cálculo.

En este trabajo, presentamos la aplicación de estos medios informáticos a la explicación de la dinámica del duopolio de Cournot con distintas funciones de demanda, mostrando de forma gráfica, mediante una sencilla programación de la hoja de cálculo, la reacción de una empresa ante las cantidades producidas por su competidor. Estas reacciones se van sucediendo de forma alterna hasta alcanzarse el equilibrio.

## 1.- Introducción y Preliminares.

Es sobradamente conocido el duopolio de Cournot, aunque habitualmente su explicación se suele limitar al cálculo del punto de máximo beneficio para ambas empresas, obviando la evolución dinámica que seguirían dichas empresas en función de las funciones de reacción, que más adelante calcularemos según los distintos tipos de funciones de demanda y de costes de producción, hasta llegar finalmente al punto de máximo beneficio. En este trabajo proponemos una metodología de enseñanza con ordenador para hacer más comprensible el proceso que siguen ambas empresas duopolistas hasta llegar al punto de equilibrio. Para ello, desarrollaremos mediante hoja de cálculo un modelo que muestre gráficamente la evolución de la producción de ambas empresas, dependiendo de las cantidades inicialmente producidas por las mismas, de manera que se observe si la evolución de las producciones tiende hacia el punto de equilibrio o por el contrario tiene un comportamiento caótico.

*Denotaremos por* $(x_1^*, x_2^*)$*, el* ***punto de equilibrio de Cournot,*** *es decir para el nivel de producción* $x_i^*$ *la Empresa i maximiza sus beneficios con i = 1,2.*

Determinaremos las llamadas funciones de reacción, que representan la forma de reaccionar de una empresa respecto de la producción de su oponente, dependiendo de cual sea el tipo de función de demanda que se plantea, con el objetivo de llegar al punto de equilibrio. También analizaremos si se puede alcanzar el punto de equilibrio, mediante un proceso iterativo determinado por las funciones de reacción. Así mismo determinaremos, en los casos en que sea posible, si este punto de equilibrio es único.

*Sea X un espacio métrico compacto y* $f : X \times X \rightarrow X \times X$ *una función continua. Diremos que (x,y) es un punto fijo de f si f(x,y)=(x,y). Llamaremos órbita periódica asociada al punto periódico (x,y) al conjunto* $\{x, y), f(x, y), f^2(x, y), \ldots, f^{n-1}(x, y)\}$.

*Dadas dos aplicaciones f,:X→X y g,:X→X de un espacio métrico compacto X en si mismo, llamaremos aplicación antitriangular o aplicación de Cournot asociada a f y g a una aplicación* $\phi : X \times X \to X \times X$ *definida por* $\phi(x, y) = (f(y), g(x))$.

Denotemos por $x_1, x_2$ las cantidades producidas por la Empresa 1 y la Empresa 2 respectivamente. Por lo tanto $x = x_1 + x_2$ es la cantidad de producto total lanzado al mercado por ambas empresas. Sea $p = p(x)$ la inversa de la función de demanda, $C_i(x_i)$ la función de costes de la Empresa i (i=1,2). Por lo tanto la función de beneficios para la Empresa i viene dada por $B_i(x_i) = x_i p(x) - C_i(x_i)$.

**2.- Desarrollo del juego.**

En esta sección expondremos el juego del Duopolio de Cournot desde un punto de vista dinámico. De hecho veremos que el punto de equilibrio se puede expresar como el punto fijo de una aplicación antitriangular definida por las funciones de reacción de ambas empresas. Consideraremos que las variaciones conjeturales son cero ($\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ para $i \neq j$).

Denotemos por $(x_1^*, x_2^*)$ el punto de equilibrio y $x^* = x_1^* + x_2^*$. Entonces este punto debe satisfacer la ecuación $\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = p(x) + x_i p'(x) - C_i'(x_i) = 0$. Denotemos por $F_i(x_1, x_2) = \frac{\partial B_i}{\partial x_i}$ para i=1,2. Luego $F(x_1^*, x_2^*) = 0$. Bajo la condición de que la función de demanda sea de segunda clase (es decir continua y derivable dos veces con derivada segunda continua) tenemos que $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ es continua. Por otro lado $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*) = p'(x^*) + x_i p''(x^*) = 0$ si y sólo si $x_i^* = \frac{-p'(x^*)}{p''(x^*)}$ para $i \neq j$. Entonces en las condiciones anteriores si $x_i^* \neq \frac{-p'(x^*)}{p''(x^*)}$ para i =1,2, por el Teorema de la función implícita existen entornos $U^i_{x_1^*}$ y $V^i_{x_2^*}$ de $x_1^*$ y $x_2^*$ respectivamente (i= 1, 2) y funciones $r_1 : U^1_{x_1^*} \to V^1_{x_2^*}$ y $r_2 : V^2_{x_2^*} \to U^2_{x_1^*}$ únicas y continuas tales que:

$F_1(r_2(x_2), x_2) = 0$ para todo $x_2 \in V^2_{x_2^*}$ y $F_2(x_1, r_1(x_1)) = 0$ para todo $x_1 \in U^1_{x_1^*}$. Además estas funciones verifican que $r_1(x_1^*) = x_2^*$ y $r_2(x_2^*) = x_1^*$. A estas funciones las llamaremos funciones de reacción. Sea $\phi$ la aplicación antitriangular asociada a $r_1$ y $r_2$, también conocido como Cournot Tatônnement. Entonces se verifica que $\phi(x_1^*, x_2^*) = (r_2(x_2^*), r_1(x_1^*)) = (x_1^*, x_2^*)$, es decir los puntos de equilibrio son puntos fijos de la aplicación antitriangular asociada a las funciones de reacción. Obsérvese que cada iterada de la función antitriangular denota como reacciona cada una de las dos empresas en función de la cantidad producida en el instante anterior por su empresa oponente. Por lo tanto el estudio del comportamiento dinámico de las aplicaciones antitriangulares de alguna manera nos esta explicando que partiendo de unas producciones $(x_1, x_2)$ puede ocurrir:

1.- Se va a alcanzar el punto de equilibrio reaccionando según $r_1$ y $r_2$, es decir, se alcanza el punto fijo de la aplicación antitriangular asociada a $r_1$ y $r_2$ mediante iteradas de ésta.

2.- No es un buen punto de partida para el juego de Cournot, es decir, si partiendo de este punto nunca se llega al equilibrio mediante iteradas, ya sea por un comportamiento cíclico de las empresas (el punto$(x_1, x_2)$ es un punto periódico de la aplicación de Cournot), o simplemente porque la sucesión formada por las iteradas de la aplicación antitriangular no converge.

También, conociendo el comportamiento dinámico de $\phi$ seremos capaces de determinar si el punto de equilibrio es único o no, e incluso si dicho comportamiento es caótico.

## 3.- Cálculo de las funciones de reacción. Comportamiento dinámico del modelo.

### 3.1.- Función de demanda lineal y costes de producción lineales.

Supongamos que la función de demanda es lineal, es decir, p(x)= a – bx, (a,b > 0) y los costes de producción son lineales $C_i(x_i) = f_i + u_i x_i$ donde $f_i$ denota los costes fijos y $u_i$ los costes unitarios de la empresa i, i=1,2. Para este tipo de función de demanda se satisfacen todas las condiciones para aplicar el teorema de la función implícita, obteniendo las siguientes funciones de reacción:

$$r_2(x_2) = \frac{a - u_1}{2b} - \frac{1}{2} x_2$$

$$r_1(x_1) = \frac{a - u_2}{2b} - \frac{1}{2} x_1$$

Por lo tanto, la aplicación antitriangular asociada a estas funciones de reacción sería $\phi(x_1, x_2) = (\frac{a - u_1}{2b} - \frac{1}{2} x_2, \frac{a - u_2}{2b} - \frac{1}{2} x_1)$ Esta aplicación tiene un único punto fijo $(\frac{2u_1 - u_2 - a}{3b}, \frac{2u_2 - u_1 - a}{3b})$. Veamos si este punto fijo se puede alcanzar mediante iteraciones de $\phi$.

$$\phi^{2n}(x_1,x_2) = ((\frac{a-u_1}{2b} - \frac{a-u_2}{4b})\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{4})^i + (\frac{1}{4})^n x_1, (\frac{a-u_2}{2b} - \frac{a-u_1}{4b})\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{4})^i + (\frac{1}{4})^n x_2)$$

de donde deducimos que $\lim_{n\to\infty}\phi^{2n}(x_1,x_2) = (\frac{a-2u_1+u_2}{3b}, \frac{a-2u_2+u_1}{3b})$. Por otra parte,

$$\phi^{2n+1}(x_1,x_2) = (\frac{a-u_1}{2b} - \frac{1}{2}((\frac{a-u_2}{2b} - \frac{a-u_1}{4b})\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{4})^i + (\frac{1}{4})^n x_2), \frac{a-u_1}{2b} - \frac{1}{2}((\frac{a-u_2}{2b} - \frac{a-u_1}{4b})\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{4})^i + (\frac{1}{4})^n x_2))$$

de donde obtenemos que $\lim_{n\to\infty}\phi^{2n+1}(x_1,x_2) = (\frac{a-2u_1+u_2}{3b}, \frac{a-2u_2+u_1}{3b})$. Por lo tanto tenemos que $\lim_{n\to\infty}\phi^{n}(x_1,x_2) = (\frac{a-2u_1+u_2}{3b}, \frac{a-2u_2+u_1}{3b})$. Es decir el punto $(\frac{a-2u_1+u_2}{3b}, \frac{a-2u_2+u_1}{3b})$, es un punto fijo atractivo de $\phi$.

### 3.2 Función de demanda hiperbólica y costes de producción lineales.

En este caso la inversa de la función de demanda es de la forma $p(x) = \frac{b}{x}$. Entonces siguiendo los mismos argumentos descritos anteriormente obtenemos que las funciones de reacción son de la forma:

$$r_1(x_2) = \sqrt{\frac{bx_2}{u_1}} - x_2$$

$$r_2(x_1) = \sqrt{\frac{bx_1}{u_2}} - x_1$$

Para dibujar las orbitas convergentes al punto de equilibrio de la aplicación de Cournot asociada a este modelo debemos asegurarnos de conocer a partir de qué condiciones iniciales tenemos asegurada dicha convergencia. Esta convergencia estará asegurada en el intervalo $(\frac{b}{16u_i}, \frac{b}{4u_i})$ en el cual las funciones de reacción $r_i$ son contractivas para i=1,2. Esto no quiere decir que fuera de $(\frac{b}{16u_1},\frac{b}{4u_1})x(\frac{b}{16u_2},\frac{b}{4u_2})$ no se puedan encontrar condiciones iniciales de manera que la aplicación de Cournot converja al punto de equilibrio mediante iteradas. El punto de equilibrio viene dado por la expresión: $(\frac{bu_2}{(u_1+u_2)^2},\frac{bu_1}{(u_1+u_2)^2})$.

Finalmente de forma análoga a los dos casos anteriores tenemos:

**3.3 Función de demanda lineal y costes de producción cúbicos.**

La función de demanda es lineal, es decir, p(x)= a – bx, (a,b > 0) y los costes marginales de producción son cuadráticos $C_i(x_i) = s_i + t_i x_i + h_i x_i^2$ (h, s > 0 y $t \leq 0$) . Imponemos la condición $t \leq 0$ para que la función de costes tenga sentido económico. Entonces las funciones de reacción serian:

$$r_1(x_2) = \frac{2b + t_1 + \sqrt{(2b + t_1)^2 + 4h_1(a - s_1 - bx_2)}}{-2h_1}$$

$$r_2(x_1) = \frac{2b + t_2 + \sqrt{(2b + t_2)^2 + 4h_2(a - s_2 - bx_1)}}{-2h_2}$$

Para que estas funciones de reacción estén bien definidas, debemos suponer que $s_i \geq a$ para i=1,2, cosa que no supone ninguna restricción ya que a representa el precio máximo al que se puede vender el producto y $s_i$ representa lo que cuesta producir la primera unidad mas los costes fijos de la empresa i =1,2. Pero no sólo nos basta que las funciones de reacción estén bien definidas como funciones sino que necesitamos que tomen valores positivos al representar cantidades para ello se debe verificar que:

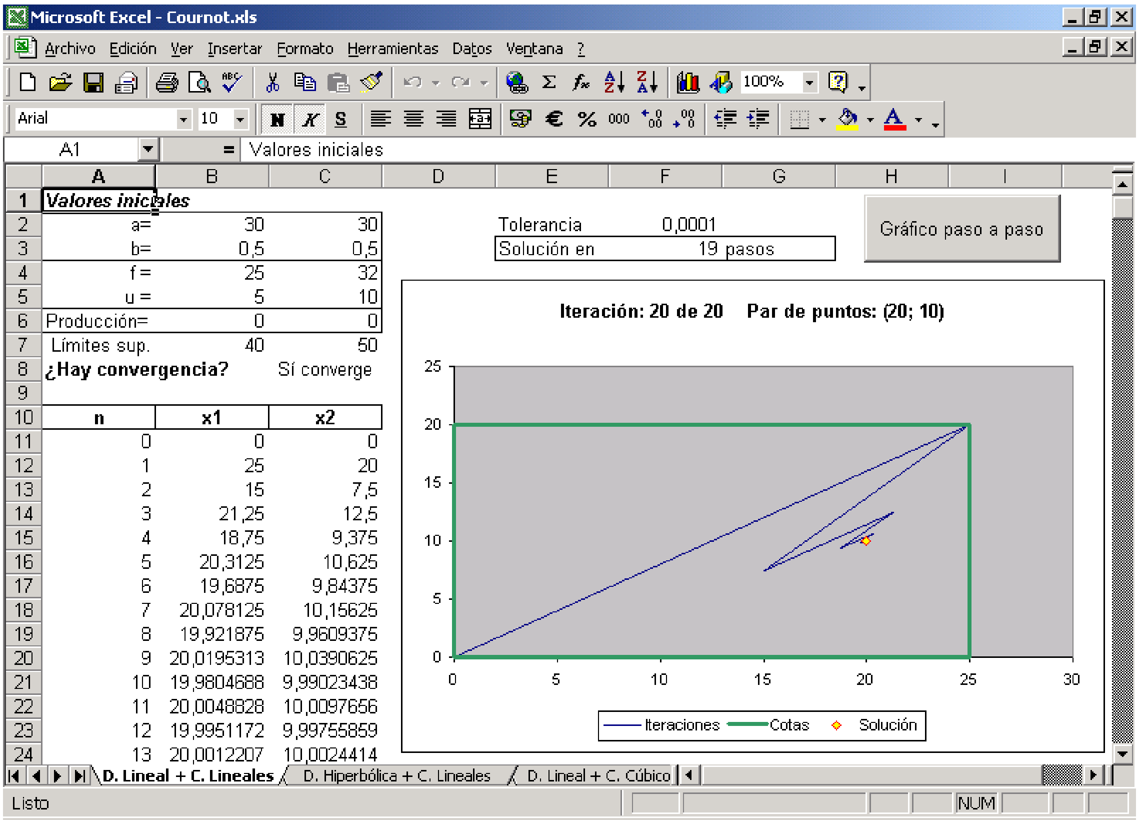
$(x_1,x_2)\in\left(\frac{a-s_2}{b},\frac{(2b+t_2)^2}{4h_2^2b}+\frac{a-s_2}{b}\right)x\left(\frac{a-s_1}{b},\frac{(2b+t_1)^2}{4h_1^2b}+\frac{a-s_1}{b}\right)$. Además para condiciones iniciales en el producto cartesiano de intervalos definido anteriormente las funciones de reacción son contractivas y por lo tanto está asegurada la convergencia al punto de equilibrio.

**4.- Resolución mediante hoja de cálculo**

Para facilitar la comprensión por parte del alumno del duopolio de Cournot y permitir que interactivamente pueda ver las implicaciones que puede tener la cantidad producida de partida de las dos empresas competidoras, hemos recurrido a la hoja de cálculo Excel, software que es de fácil acceso para la mayoría del alumnado, donde hemos representado a partir de las producciones iniciales, cuales son las iteraciones que se dan hasta alcanzarse el punto de máximo beneficio para ambas empresas. Estos cálculos se han efectuado para los tres casos descritos anteriormente, ya que la forma de las funciones de reacción difiere entre unos y otros.

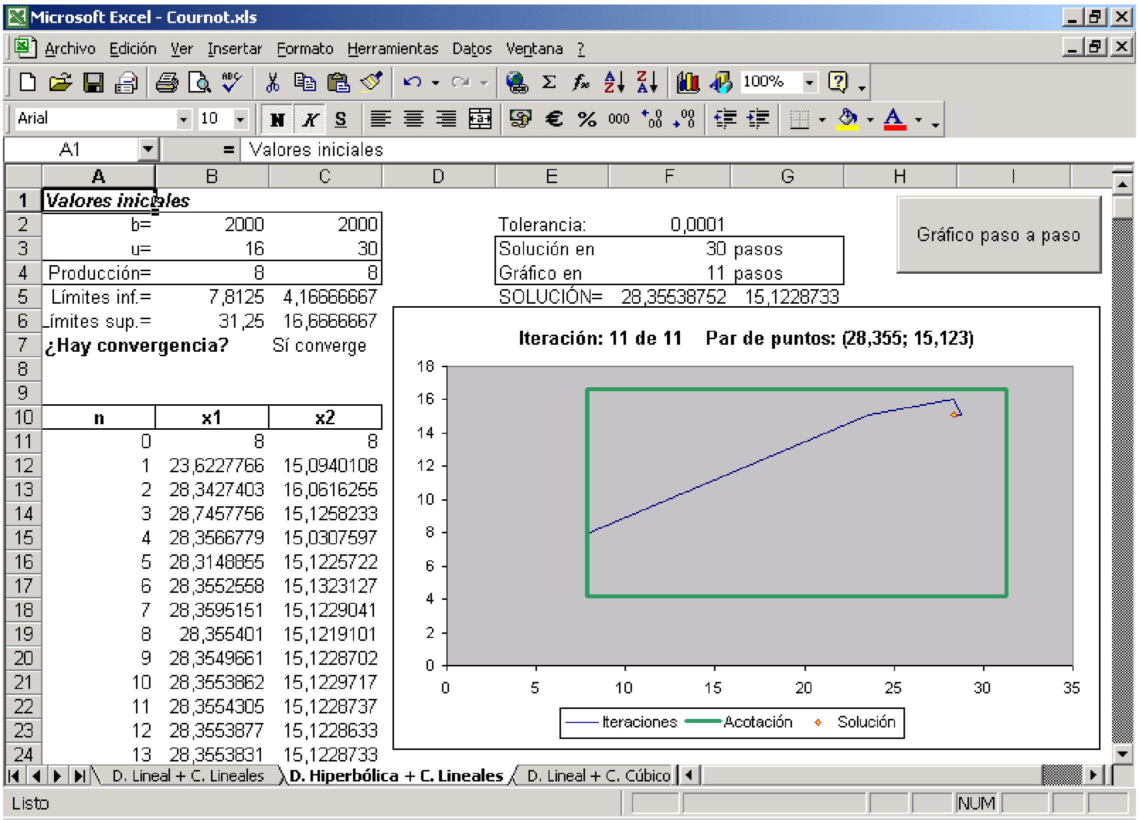
Adicionalmente al cálculo de los ajustes que ocurren hasta llegar al punto de equilibrio, se ha efectuado una representación gráfica para cada modelo en la que se muestran simultáneamente las distintas iteraciones que se producen hasta llegar al punto de equilibrio, la zona en la que está asegurada la convergencia del modelo y el propio punto de equilibrio.

La presentación en el caso de función de demanda lineal y costes de producción lineales es:



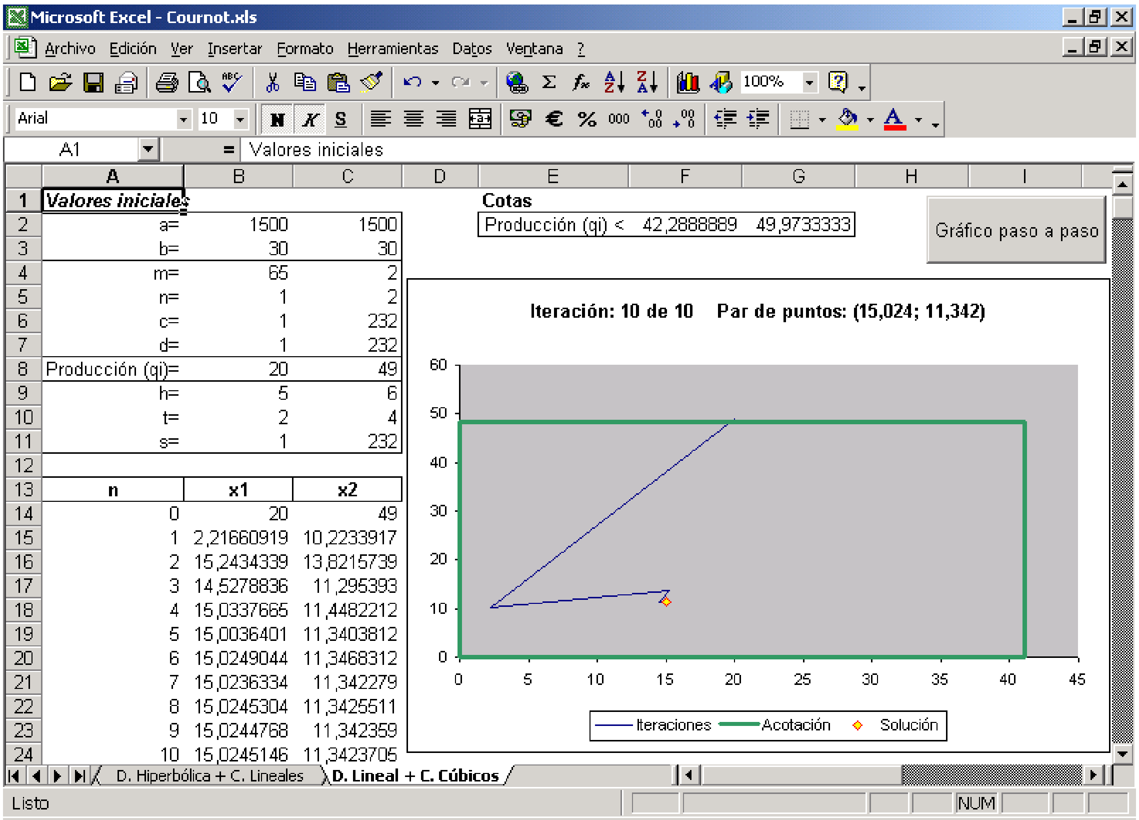

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | *Valores iniciales* | | |
| 2 | a= | 30 | 30 |
| 3 | b= | 0,5 | 0,5 |
| 4 | f = | 25 | 32 |
| 5 | u = | 5 | 10 |
| 6 | Producción= | 0 | 0 |
| 7 | Límites sup. | 40 | 50 |
| 8 | ¿Hay convergencia? | | Sí converge |
| 9 | | | |
| 10 | n | x1 | x2 |
| 11 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 1 | 25 | 20 |
| 13 | 2 | 15 | 7,5 |
| 14 | 3 | 21,25 | 12,5 |
| 15 | 4 | 18,75 | 9,375 |
| 16 | 5 | 20,3125 | 10,625 |
| 17 | 6 | 19,6875 | 9,84375 |
| 18 | 7 | 20,078125 | 10,15625 |
| 19 | 8 | 19,921875 | 9,9609375 |
| 20 | 9 | 20,0195313 | 10,0390625 |
| 21 | 10 | 19,9804688 | 9,99023438 |
| 22 | 11 | 20,0048828 | 10,0097656 |
| 23 | 12 | 19,9951172 | 9,99755859 |
| 24 | 13 | 20,0012207 | 10,0024414 |

En el caso de función de demanda hiperbólica y costes de producción lineales es:

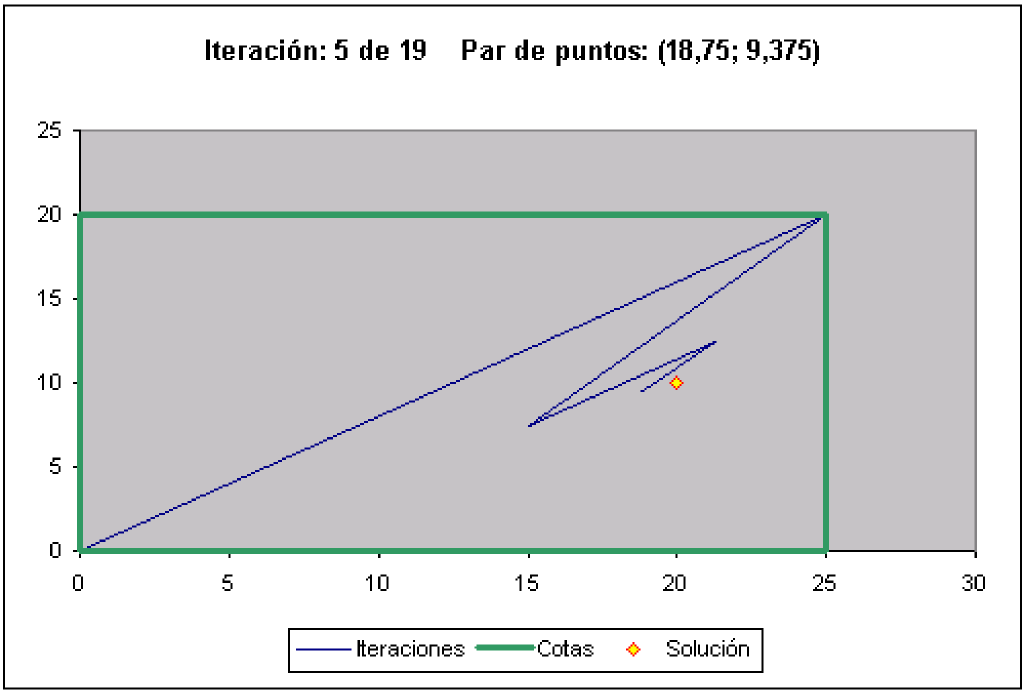



| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | *Valores iniciales* | | |
| 2 | b= | 2000 | 2000 |
| 3 | u= | 16 | 30 |
| 4 | Producción= | 8 | 8 |
| 5 | Límites inf.= | 7,8125 | 4,16666667 |
| 6 | Límites sup.= | 31,25 | 16,6666667 |
| 7 | ¿Hay convergencia? | | Sí converge |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | n | x1 | x2 |
| 11 | 0 | 8 | 8 |
| 12 | 1 | 23,6227766 | 15,0940108 |
| 13 | 2 | 28,3427403 | 16,0616255 |
| 14 | 3 | 28,7457756 | 15,1258233 |
| 15 | 4 | 28,3566779 | 15,0307597 |
| 16 | 5 | 28,3148855 | 15,1225722 |
| 17 | 6 | 28,3552558 | 15,1323127 |
| 18 | 7 | 28,3595151 | 15,1229041 |
| 19 | 8 | 28,355401 | 15,1219101 |
| 20 | 9 | 28,3549661 | 15,1228702 |
| 21 | 10 | 28,3553862 | 15,1229717 |
| 22 | 11 | 28,3554305 | 15,1228737 |
| 23 | 12 | 28,3553877 | 15,1228633 |
| 24 | 13 | 28,3553831 | 15,1228733 |

Y, finalmente, en el caso de función de demanda lineal y costes de producción cúbicos:

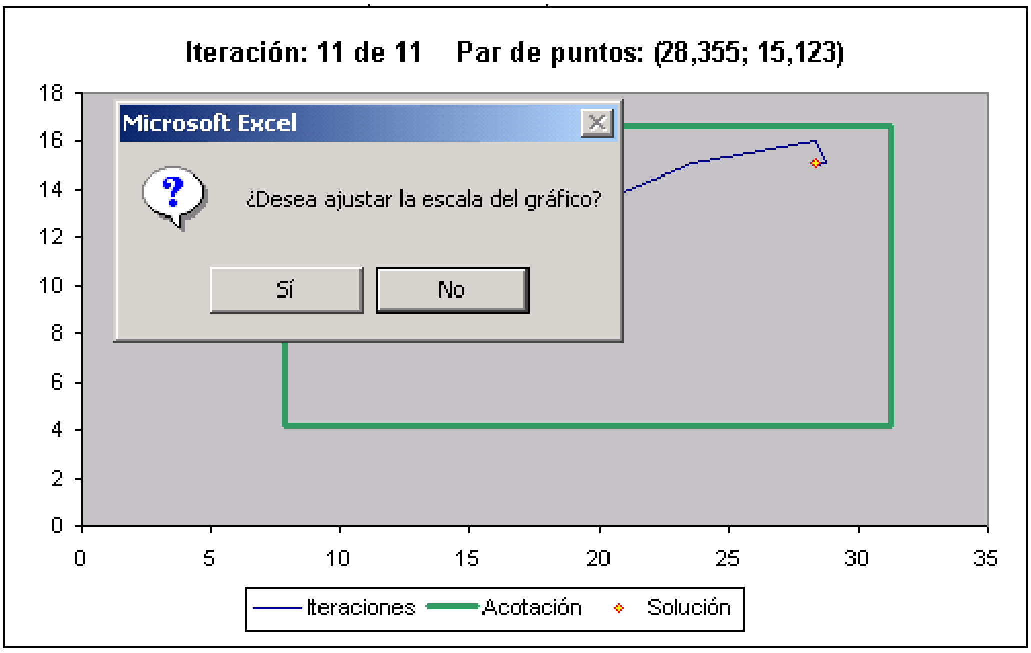


Esta forma de mostrar las soluciones finales no aportaría en principio ninguna novedad respecto al sistema tradicional de enseñanza del duopolio de Cournot. Por este motivo, hemos creado una función de hoja de cálculo que recalcula el gráfico para cualquiera de los modelos, a la cual se accede a través del botón de comando *Gráfico paso a paso*. Al pulsar sobre dicho botón se redibuja el gráfico inicialmente con el área de convergencia y el punto de equilibrio, y comienza a dibujar partiendo del punto de producción inicial, con una ligera demora entre iteraciones, cada uno de los pasos que las empresas siguen de acuerdo con la función de reacción, hasta llegar al punto de equilibrio:

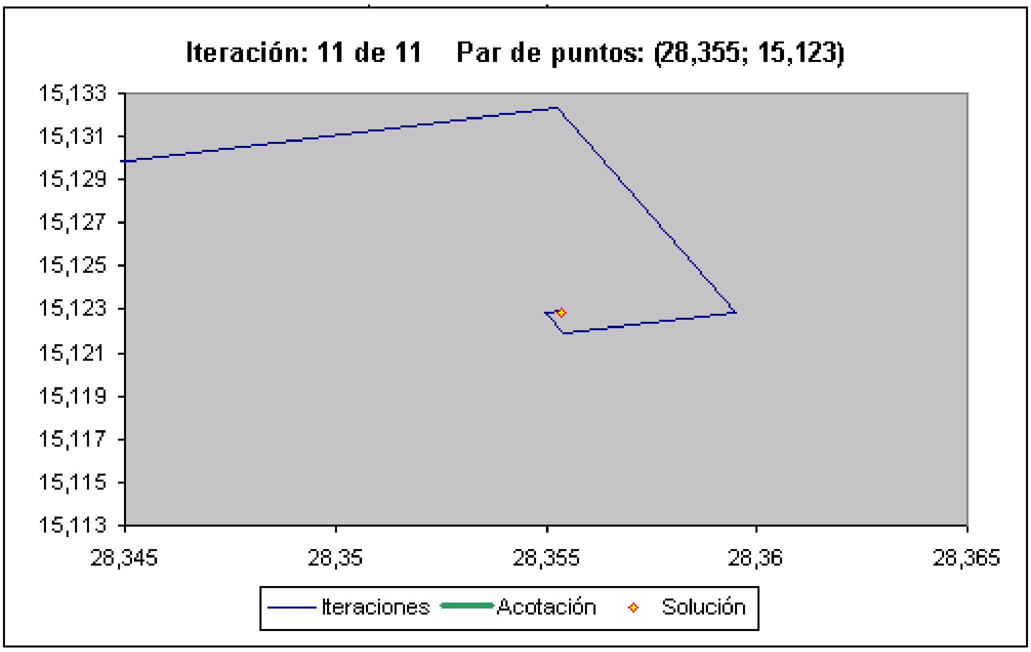



En muchos casos, como en la imagen anterior, es posible que a partir de un determinado momento no se observe la evolución de la trayectoria de los puntos que van ocupando las empresas debido a lo pequeñas que llegan a ser las variaciones. Para remediar este efecto hemos arbitrado 2 soluciones:

- Hemos introducido un factor de tolerancia, a partir del cual entendemos que las diferencias no son significativas, de forma que si el punto obtenido es similar al anterior dejamos de representar el gráfico.
- Si, pese a la solución anterior, deseamos mantener un alto grado de precisión, también se ofrece la posibilidad de ajustar la escala del gráfico según se va solucionando mediante una pregunta que se hace al usuario antes de iniciar la representación:




De esta forma el gráfico se va ajustando llegando a una precisión mayor y pudiéndose observar mejor la trayectoria de las empresas:



## 5.- Conclusiones

Creemos que con modelos como los presentados se puede favorecer la fácil comprensión por parte del alumno de los procesos duopolistas, ya que la utilización de medios gráficos suele hacer más comprensible y más agradable el aprendizaje de procesos económicos. Además, de esta forma es posible involucrar al alumno en la utilización de herramientas ofimáticas generales como la hoja de cálculo, que tan necesarias son actualmente en el mercado laboral.