

# FORMULACIÓN FRECUENCIAL DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE PARA MODELOS DEFORMABLES

Rafael Berenguer Vidal<sup>(1)</sup>, Juan Morales Sánchez<sup>(2)</sup>, Pedro José García Laencina<sup>(2)</sup>,  
José Luis Sancho Gómez<sup>(2)</sup>, Rafael Verdú Monedero<sup>(2)</sup>

rberenguer@pdi.ucam.edu, {juan.morales, pedroj.garcia, josel.sancho, rafael.verdu}@upct.es

<sup>(1)</sup>Dpto. de Ciencias Politécnicas, Universidad Católica San Antonio de Murcia.

<sup>(2)</sup>Dpto. de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, Universidad Politécnica de Cartagena.

**Abstract**—Deformable models, i.e., active contours and active meshes, are useful tools in image processing and computer vision, because of their ability to take the shape of real 2D/3D objects. The original formulation of the models is defined on the spatial domain and it is based on the minimization of an energy functional through the Euler-Lagrange differential equations. In this paper, a new formulation is proposed in the frequency domain, for the adaptation process of the contours and meshes to the external forces. The presented frequency approach provides an easier and more computationally efficient implementation, allowing the use of deformable models to a greater number of areas.

## I. INTRODUCCIÓN

Los modelos deformables son estructuras dinámicas utilizadas en el procesado de imagen y en visión por computador, para el análisis de la forma y movimiento de objetos en imágenes 2D y 3D, debido a su capacidad de adaptación a objetos con formas diversas. Los primeros modelos definidos, los llamados contornos activos [1], han sido ampliamente utilizados en numerosas aplicaciones [2], [3], [4]. La formulación inicial de estas estructuras unidimensionales, definida en el dominio del espacio, basa el núcleo del proceso iterativo, en la inversión de una matriz a bandas [5]. Este procedimiento, aunque eficaz, es poco eficiente computacionalmente. Además, cuando se extrapola este proceso a las llamadas superficies deformables, estructuras bidimensionales en el espacio, el núcleo de la iteración resultante no puede adoptar una formulación matricial tan sencilla [6]. Se han propuesto diferentes alternativas al planteamiento original [7], pero la formulación presentada sigue siendo en parte compleja.

En este artículo, se describe una nueva formulación obtenida directamente a partir de la transformación a la frecuencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que rigen el comportamiento del modelo deformable. Esta aproximación, permite una formulación sencilla e implementable numéricamente, de forma eficiente, tanto para el caso de los contornos como para las superficies activas. La estructura del artículo se resume a continuación. En la sección II se describe la formulación de los contornos activos en el espacio, se traslada esta formulación al dominio frecuencial para contornos cerrados y se describen las extensiones necesarias para su aplicación a los contornos abiertos. Posteriormente, se amplía en la sección III esta formulación a las superficies deformables cerradas, y abiertas mediante el empleo de extensiones. Las conclusiones y trabajo futuro cierran el artículo.

## II. FORMULACIÓN DE LOS CONTORNOS ACTIVOS

### A. Formulación en el dominio del espacio

Un contorno activo o *snake* es una curva paramétrica variante en el tiempo  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))^T$  en el espacio  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , donde  $x, y$  y  $z$  son las funciones coordenadas,  $s \in [0, L]$  es el parámetro del dominio espacial y  $t$  es el tiempo. La forma del contorno que describe un objeto es gobernada por un funcional de energía con componentes internos y externos [1],  $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v})$ . La energía interna de deformación  $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ ,

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (1)$$

es descrita por los parámetros de elasticidad  $\alpha(s)$  y rigidez  $\beta(s)$ .  $\mathcal{P}(\mathbf{v})$  representa el conjunto de las fuerzas que se aplican sobre el contorno. En este término se pueden incluir fuerzas procedentes de información externa, como la obtenida de una imagen. Asimismo, se pueden añadir otras fuerzas internas no lineales definidas dentro del propio contorno, como la limitación de distancia constante entre nodos vecinos o condiciones sobre el área, para el caso de contornos cerrados.

Para la implementación práctica, el contorno se divide en  $N$  elementos utilizando la formulación de elementos finitos,  $\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{v}_n$ . Para cada función coordenada  $x, y$  y  $z$  del contorno activo, cada elemento se construye geoméricamente mediante una función de forma y sus parámetros. Dado que las funciones coordenada son independientes entre sí, tendremos un vector de parámetros para cada una, aplicando el proceso que se describe a continuación, de forma independiente a cada uno de estos vectores.  $\mathbf{v}_n^x(s, t) = \mathbf{u}_n^x(t)\mathbf{N}(s)$ , representa el vector para la coordenada  $x$ , siendo análogas las expresiones para  $y$  y  $z$ . Agrupando los parámetros de forma de los  $N$  elementos en el vector  $\mathbf{u}(t)$ <sup>1</sup>, el funcional de energía se minimiza mediante las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange [5]:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d \mathbf{u}(t)}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(s, t), \quad (2)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez y  $\mathbf{q}$  es el vector de

<sup>1</sup>Con el fin de simplificar la notación, se suprime los superíndices  $x, y$  y  $z$  que indican la coordenada.

fuerzas externas el cual depende de la posición de la curva en cada instante  $t$ . Estas matrices son a bandas (los valores no nulos están confinados en el entorno de la diagonal principal), y se construyen mediante la superposición de las submatrices de cada elemento ponderado por el valor de sus parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez.

Para resolver la ecuación del movimiento (2), supondremos que el contorno bajo análisis es cerrado, estudiando el caso de contornos abiertos en el apartado II-C. La variable tiempo está discretizada,  $t = \xi\Delta t$ , siendo  $\Delta t$  el incremento de tiempo y  $\xi \in \mathbb{N}$  el índice de iteración. Se emplea la notación  $\mathbf{u}(\xi\Delta t) = \mathbf{u}_\xi$  y las derivadas temporales de  $\mathbf{u}(t)$  se reemplazan por sus aproximaciones discretas, generando el siguiente sistema iterativo de segundo orden:

$$\mathbf{u}_\xi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{u}_{\xi-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{A} = \mathbf{M}/(\Delta t)^2 + \mathbf{C}/\Delta t + \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{M}/(\Delta t)^2 + \mathbf{C}/\Delta t$ ,  $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{M}/(\Delta t)^2$  y el vector  $\mathbf{q}_{\xi-1}$  contiene las fuerzas externas en el instante  $t = (\xi - 1)\Delta t$ .

### B. Formulación en el dominio de la frecuencia

Con el fin de plantear el sistema (3) en el dominio de la frecuencia, es necesario establecer un conjunto de suposiciones. En la práctica, es habitual asumir que la masa y amortiguamiento son constantes dentro de cada elemento. Asimismo, en la mayoría de aplicaciones, estos dos parámetros no varían y se mantienen constantes para todos los elementos del contorno,  $m_n = m$  y  $c_n = c$ . De esta forma, (3) se puede formular como:

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_\xi = \\ & = \left( \frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_{\xi-1} + \left( \frac{-m}{\Delta t^2} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_{\xi-2} + \mathbf{q}_{\xi-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la matriz de forma de tamaño  $N \times N$ , la cual es una matriz circulante definida por su primera fila  $\mathbf{f}$ . Utilizando diferencias finitas como función de forma, este vector de forma  $1 \times N$  es  $\mathbf{f} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$  [8]. Asumiendo asimismo, que el contorno es cerrado y que los parámetros estáticos, elasticidad y rigidez, no varían a lo largo del contorno, esto es,  $\alpha_n = \alpha$  y  $\beta_n = \beta$ , la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  es también una matriz circulante y queda completamente definida por su primera fila  $\mathbf{k}$ , llamado núcleo espacial de rigidez [8].

El resultado de multiplicar una matriz circulante con un vector es equivalente a realizar una convolución circular de la primera fila de la matriz con dicho vector [9]. Definiendo las variables  $\eta = m/\Delta t^2 + c/\Delta t$ ,  $\gamma = \Delta t \ c/m$ ,  $a_1 = 1 + (1 + \gamma)^{-1}$ ,  $a_2 = -(1 + \gamma)^{-1}$ , la ecuación (4) puede escribirse como:

$$\eta^{-1}(\eta\mathbf{f} + \mathbf{k}) \otimes \mathbf{u}_\xi = a_1 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1}\mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (5)$$

donde  $\otimes$  indica la convolución circular entre secuencias de longitud  $N$ . Aplicando la *Transformada Discreta de Fourier (DFT)* a la convolución circular de dos secuencias, se obtiene el producto de sus *DFT*'s,

$$\eta^{-1}(\eta + \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{u}}_\xi = a_1 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1} + a_2 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2} + \eta^{-1}\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}, \quad (6)$$

donde  $\hat{\mathbf{k}}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_\xi$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{\xi-2}$  y  $\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}$  son las *DFT*'s de  $N$  puntos de sus respectivas secuencias espaciales. Así, las operaciones

matriciales se convierten en el producto del espectro de las señales y es posible aislar  $\hat{\mathbf{u}}_\xi$  de la parte izquierda de la ecuación (6),

$$\hat{\mathbf{u}}_\xi = \hat{\mathbf{h}} (a_1 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1} + a_2 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2} + \eta^{-1}\hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}). \quad (7)$$

El vector  $\hat{\mathbf{h}} = \eta(\eta + \hat{\mathbf{k}})^{-1}$  representa el filtro inverso de  $\hat{\mathbf{k}}$ ,  $\eta$  es la masa global, relacionada con el ancho de banda del filtro  $\hat{\mathbf{h}}$ ,  $\gamma$  representa la relación entre amortiguamiento y masa, y las constantes  $a_1$  y  $a_2$  son los coeficientes de segundo orden de la ecuación en diferencias.

### C. Contornos activos abiertos

El planteamiento del proceso iterativo en el dominio de la frecuencia, requiere que la señal a procesar sea periódica, condición aplicable inicialmente sólo a los contornos cerrados. Para una *snake* abierta, la minimización de su funcional de energía no puede ser realizada mediante una señal periódica que determine el contorno. No obstante, es posible realizar un filtrado lineal e invariante en el tiempo, aplicando el filtro invariante en el espacio definido en la ecuación (7) sobre una *snake extendida*.

Esta *snake extendida* comprende, el contorno inicial abierto visible más unas extensiones ocultas unidas a los extremos de ésta, construidas a partir de los parámetros de esa misma *snake*. El nuevo contorno estará constituido por  $2N$  nodos,  $N$  nodos de la *snake visible*, más  $N$  nodos de las extensiones.

La ecuación discreta de movimiento empleada para la estimación de la posición y forma del contorno abierto es,

$$\mathbf{v}_\xi = a_1 \mathbf{u}_{\xi-1} + a_2 \mathbf{u}_{\xi-2} + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_\xi = \left( \mathbf{h}^{+0} \otimes \mathbf{v}_\xi^{+\mathbf{d}_\xi} \right)^-, \quad (9)$$

donde  $\mathbf{u}_\xi$  es el vector de nodos de la *snake visible*,  $\mathbf{d}_\xi$  se corresponde con las extensiones,  $\otimes$  denota la convolución circular,  $\mathbf{q}_{\xi-1}$  es el vector de fuerzas externas,  $\mathbf{h}$  es el filtro, los coeficientes  $\eta$ ,  $a_1$ , y  $a_2$  son los utilizados en la ecuación (5). El operador  $\mathbf{x}^{+y}$  representa el resultado de unir los dos vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  de longitud  $N$  y  $\mathbf{z}^-$  es un vector que contiene los primeros  $N$  elementos de los  $2N$  puntos del vector  $\mathbf{z}$ .

Dado que el filtrado se realiza sobre la *snake extendida*  $[\mathbf{v}_\xi^{+\mathbf{d}_\xi}]$  de tamaño  $2N$  nodos, el filtro  $\mathbf{h}$  también debe tener una longitud de  $1 \times 2N$ . Por tanto, para los contornos abiertos se trabaja con un *filtro extendido*  $[\mathbf{h}^{+0}]$ , el cual se forma de la siguiente manera,

$$\mathbf{h}^{+0} = [\mathbf{h}_0 \dots \mathbf{h}_{N/2-1} \quad \mathbf{0}_0 \dots \mathbf{0}_{N-1} \quad \mathbf{h}_{N/2} \dots \mathbf{h}_{N-1}] \quad (10)$$

En cada iteración, tras el filtrado sobre la *snake extendida* (9), se extrae la parte *visible* de  $\mathbf{u}_\xi$ , de tamaño  $1 \times N$ , y se almacena en  $\mathbf{u}_{\xi-1}$ , la cual junto con el valor de la iteración anterior  $\mathbf{u}_{\xi-2}$ , permite calcular  $\mathbf{v}_\xi$  para la siguiente iteración (8). A partir de  $\mathbf{v}_\xi$  se calculan las extensiones  $\mathbf{d}_\xi$ , de tamaño  $1 \times N$ , utilizadas en (9), de acuerdo a,

$$\mathbf{d}_\xi[n] \begin{cases} \mathbf{v}_\xi[N-1] + \lambda n'(\mathbf{v}_\xi[N-1] - \mathbf{v}_\xi[N-2]) & n < N/2 \\ \mathbf{v}_\xi[0] + \lambda n''(\mathbf{v}_\xi[1] - \mathbf{v}_\xi[0]) & n \geq N/2, \end{cases} \quad (11)$$

donde  $n \in [0, N-1]$ ,  $n' = n+1$ ,  $n'' = n-N$  y el subíndice  $\xi$  representa la iteración. El coeficiente  $\lambda = \beta/(\alpha + \beta)$ , determina el carácter de las extensiones como muestra la Fig. 1, mostrando como casos extremos,

- Un caso elástico  $\lambda = 0$ , debido a que  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ . Representa la minimización de la energía de la 1ª derivada de la señal, manteniendo un valor constante.
- Un caso rígido  $\lambda = 1$ , debido a que  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ . Se corresponde con la minimización de la energía de la 2ª derivada de la señal, manteniendo su pendiente constante.

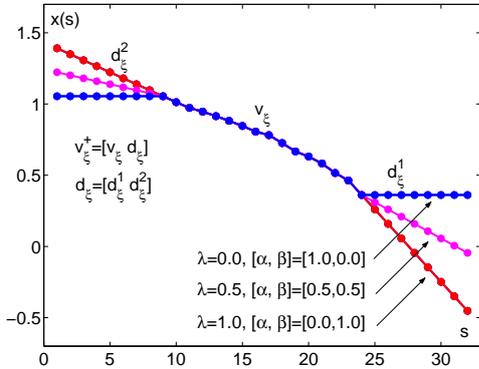


Fig. 1. Extensiones para una coordenada del contorno en función de  $\lambda$ .

### III. FORMULACIÓN DE LAS SUPERFICIES DEFORMABLES

#### A. Superficies deformables cerradas

Una superficie deformable o malla activa es una estructura tridimensional paramétrica variante en el tiempo,  $\mathbf{v} \equiv v(s_1, s_2, t) = (x(s_1, s_2, t), y(s_1, s_2, t), z(s_1, s_2, t))$ , donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las funciones coordenadas,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $s_1 \in [0, L_1]$  y  $s_2 \in [0, L_2]$  son los parámetros del dominio bidimensional espacial y  $t$  es el tiempo. Al igual que en los contornos activos, la forma y la evolución de la superficie deformable, se encuentra gobernada por un funcional de energía,

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}), \quad (12)$$

formado por fuerzas internas y externas. El componente de energía de las fuerzas internas se define por,

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{v}) + \mathcal{S}_\beta(\mathbf{v}), \quad (13)$$

donde

$$\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{v}) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \alpha_1 \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_1} \right|^2 + \alpha_2 \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_2} \right|^2 ds_1 ds_2, \quad (14)$$

$$\mathcal{S}_\beta(\mathbf{v}) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \beta_1 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s_1^2} \right|^2 + \beta_2 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s_2^2} \right|^2 + \beta_{12} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s_1 \partial s_2} \right|^2 ds_1 ds_2, \quad (15)$$

$\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los parámetros de elasticidad de la malla en cada una de las dimensiones espaciales  $s_1$  y  $s_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_{12}$  son los parámetros de rigidez.  $\mathcal{P}(\mathbf{v})$  al igual que en los contornos activos, representa el conjunto de fuerzas que se aplica sobre la malla, pudiendo incluirse en este término fuerzas procedentes de información externa como de una imagen u objeto tridimensional, u otras fuerzas no lineales definidas sobre la propia malla, como limitaciones en la distancia entre nodos vecinos.

Con la formulación propuesta en el dominio de la frecuencia, la extensión al caso bidimensional es directa. En este

caso será necesario utilizar la DFT bidimensional sobre la variable  $\mathbf{u}_\xi[n_1, n_2]$  que contiene los parámetros de forma de la superficie deformable para cada iteración  $\xi$ . Suponiendo mallas activas cerradas y siguiendo el mismo razonamiento presentado en el apartado II-B, se puede llegar a la minimización del funcional de energía (12) con una ecuación de movimiento equivalente a (7),

$$\hat{\mathbf{u}}_\xi(\bar{\omega}) = \hat{\mathbf{h}}(\bar{\omega}) (a_1 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-1}(\bar{\omega}) + a_2 \hat{\mathbf{u}}_{\xi-2}(\bar{\omega}) + \eta^{-1} \hat{\mathbf{q}}_{\xi-1}(\bar{\omega})), \quad (16)$$

donde  $\bar{\omega} = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  hacen referencia a las dos dimensiones del dominio frecuencial, y  $\eta$ ,  $a_1$ , y  $a_2$  se corresponden con los definidos en la ecuación (5).

El movimiento de la malla puede expresarse en el dominio espacial haciendo uso de la *Transformada Discreta Inversa de Fourier Bidimensional* ( $DFT2D^{-1}$ ), de manera que (16) pasa a ser la siguiente ecuación en diferencias,

$$\mathbf{u}_\xi[\bar{n}] = \mathbf{h}[\bar{n}] \otimes (a_1 \mathbf{u}_{\xi-1}[\bar{n}] + a_2 \mathbf{u}_{\xi-2}[\bar{n}] + \eta^{-1} \mathbf{q}_{\xi-1}[\bar{n}]), \quad (17)$$

donde  $\bar{n} = \{n_1, n_2\}$ ,  $n_1$  y  $n_2$  referencian a las dimensiones espaciales discretizadas,  $\mathbf{u}_\xi[\bar{n}]$  es una matriz de tamaño  $N_1 \times N_2$ , correspondiente a los nodos de cada una de las coordenadas, y  $\mathbf{h}[\bar{n}]$  es un filtro paso bajo (pseudoinverso del filtro  $\mathbf{k}[\bar{n}]$  que contiene la representación de las derivadas)[8].

Notar que análogamente a los contornos activos, la malla activa quedará definida por 3 matrices,  $\mathbf{u}_\xi^x$ ,  $\mathbf{u}_\xi^y$  y  $\mathbf{u}_\xi^z$ , para los parámetros de cada función coordenada, aplicándose el proceso descrito a cada coordenada de forma independiente.

#### B. Superficies deformables abiertas

La solución basada en las extensiones propuesta en el apartado II-C puede aplicarse también al caso bidimensional para mallas activas abiertas. Definiendo  $\mathbf{z}_\xi[\bar{n}]$  como una componente de la malla bidimensional de tamaño  $N_1 \times N_2$ , y  $\mathbf{d}_\xi[\bar{n}]$  como las extensiones de la malla, la malla extendida  $\mathbf{z}\#\mathbf{d}$  queda de la siguiente manera<sup>2</sup>,

$$\mathbf{z}\#\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^t & \mathbf{d}^l & \mathbf{d}^r \\ \mathbf{d}^l & \mathbf{z} & \mathbf{d}^r \\ \mathbf{d}^b & \mathbf{d}^b & \mathbf{d}^4 \end{bmatrix}$$

donde los superíndices  $t$ ,  $b$ ,  $l$ ,  $r$  significan superior, inferior, izquierda y derecha, respectivamente, mientras que los superíndices numéricos hacen referencia a las cuatro esquinas de la malla extendida.

Para construir las extensiones, se aplica un razonamiento similar al realizado en la ecuación (11) obteniendo<sup>3</sup>,

$$\mathbf{d}^t = [1 \ \frac{N_2}{2} \ 1]^T \mathbf{z}_{t,*} + \lambda_2 [1 \ \dots \ \frac{N_2}{2}]^T (\mathbf{z}_{t,*} - \mathbf{z}_{t-1,*}), \quad (18)$$

$$\mathbf{d}^l = \mathbf{z}_{*,l} [1 \ \frac{N_1}{2} \ 1] + \lambda_1 (\mathbf{z}_{*,l} - \mathbf{z}_{*,l-1}) [\frac{N_1}{2} \ \dots \ 1], \quad (19)$$

$$\mathbf{d}^1 = \frac{1}{2} ((\mathbf{d}_{*,l}^t - \mathbf{d}_{*,l-1}^t) [\frac{N_1}{2} \ \dots \ 1] + \mathbf{d}_{*,l}^t [1 \ \frac{N_1}{2} \ 1] + [\frac{N_2}{2} \ \dots \ 1]^T (\mathbf{d}_{t,*}^l - \mathbf{d}_{t-1,*}^l) + [1 \ \frac{N_2}{2} \ 1] \mathbf{d}_{t,*}^l), \quad (20)$$

<sup>2</sup>Con el fin de simplificar la notación, se han omitido los subíndices  $\xi$  que identifican cada iteración, y la variable espacial discreta  $\bar{n}$ .

<sup>3</sup>Las extensiones  $d^b$ ,  $d^r$  y  $d^2$ ,  $d^3$ ,  $d^4$  se generan de la misma forma que  $d^t$ ,  $d^l$  y  $d^1$  respectivamente, pero en cada caso, con las filas y columnas correspondientes.

donde  $\lambda_i = \beta_i / (\alpha_i + \beta_i)$  para  $i = \{1, 2\}$ , y los subíndices  $t, *$  y  $*, l$  denotan respectivamente, la fila superior y la columna situada más a la izquierda de cada matriz. Notar que las ecuaciones (18) y (19) representan la extensión 2D de la ecuación (11) y la ecuación (20) es la interpolación bilineal entre las extensiones adyacentes de la malla.

El carácter de las extensiones, al igual que ocurre en los contornos activos, depende de los coeficientes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . La Fig. 2 muestra que valores  $\lambda_i = 0$  generan extensiones con valor constante, mientras que con  $\lambda_i = 1$ , las extensiones mantienen la pendiente de la malla.

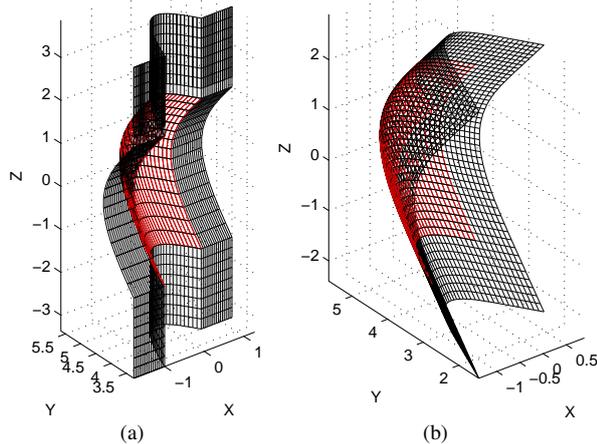


Fig. 2. Carácter de las extensiones en los 2 casos extremos: (a)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , (b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . La malla visible es la parte interior (en rojo), mientras que las extensiones se corresponden con el borde (en negro).

Al igual que en el caso unidimensional, el empleo de extensiones requiere una extensión del filtro  $h$  de la ecuación (17) de forma similar al realizado en (10).

Dependiendo de la existencia o no de las extensiones, la malla evoluciona en el proceso iterativo de distinta manera, tal y como muestra la Fig. 3,

- 1) Si no se fijan extensiones, la malla adopta la forma de un toroide, quedando por tanto, cerrada (Fig. 3(a)).
- 2) Si las extensiones superiores e inferiores o las de la derecha e izquierda no existen, la malla queda abierta en una dimensión y cerrada en la otra (Fig. 3(b)).
- 3) Si la malla visible está totalmente rodeada de extensiones ocultas, la forma resultante será de una malla totalmente abierta (Fig. 3(c)).

#### IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha planteado una formulación basada en la transformación frecuencial de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que controlan la adaptación de los contornos y superficies activas según las fuerzas internas de deformación y externas fijadas por el problema. Dado que el empleo de la formulación frecuencial, requiere una periodicidad en el modelo a adaptar, se han presentado las extensiones ocultas necesarias para la aplicación de esta formulación en el caso de contornos y superficies abiertas. Este nuevo planteamiento, permite el empleo de los modelos deformables de una forma eficiente en aplicaciones que requieran una elevada velocidad de adaptación o el uso de modelos con un elevado número de nodos.

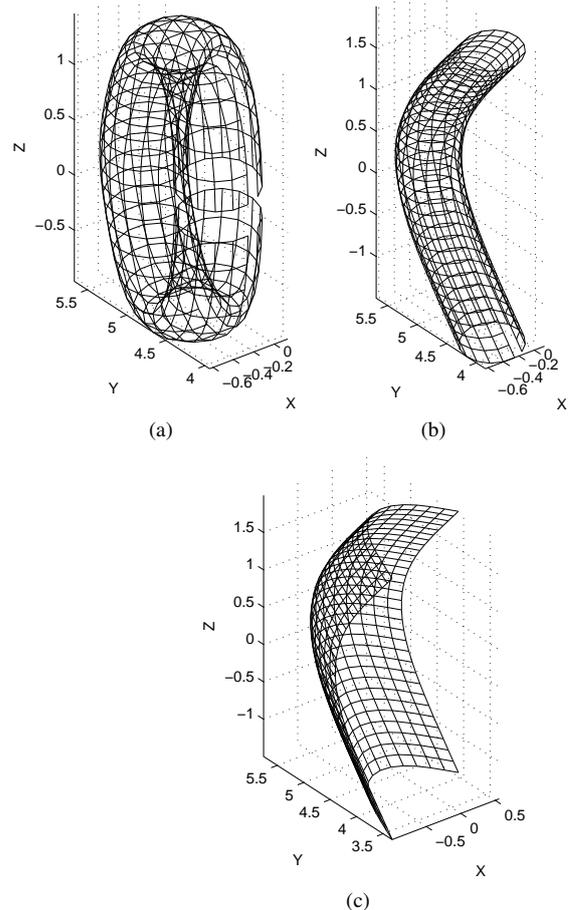


Fig. 3. Evoluciones de la malla en función de las extensiones: (a) Cerrada, (b) Abierta en una dimensión, (c) Abierta

Como líneas de desarrollo futuro, en la actualidad se trabaja en el estudio de diferentes procedimientos para la extracción de la información en objetos tridimensionales que permita una mayor velocidad y precisión en la adaptación por parte de la malla activa.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por el *Ministerio de Ciencia y Tecnología*, bajo el proyecto TEC2006-13338/TCM

#### REFERENCES

- [1] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *Int. J. of Computer Vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.
- [2] D. N. Metaxas, *Physics-based deformable models, applications to computer vision, graphics and medical imaging*, Kluwer, 1996.
- [3] A. Singh, D. Goldgof, and D. Terzopoulos, Eds., *Deformable Models in Medical Image Analysis*. IEEE Computer Society Press, 1998.
- [4] R. Verdú *et al.*, "3D mechanical characterization of artificial muscles with stereoscopic computer vision and active contours," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, September 2003.
- [5] J. Liang, T. McInerney, and D. Terzopoulos, "United snakes," *Medical Image Analysis*, vol. 10, no. 2, pp. 215–233, April 2006.
- [6] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass, "Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion," *Artificial Intelligence*, vol. 36, pp. 91–123, 1988.
- [7] L. D. Cohen and I. Cohen, "Finite-element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 15, no. 11, pp. 1131–1147, November 1993.
- [8] L. Weruaga, R. Verdú, and J. Morales, "Frequency domain formulation of active parametric deformable models," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 26, no. 12, pp. 1568–1578, 2004.
- [9] P. J. Davis, *Circulant Matrices*. Wiley-Interscience, NY, 1979.