Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza. **22:** 141–150, (2003).

Soluciones de equilibrio en un problema generalizado del de Lagrange-Poisson: condiciones necesarias y suficientes de estabilidad

J. A. Vera y A. Vigueras

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena.

Paseo Alfonso XIII, 52. 30203 Cartagena (Murcia), Spain

Abstract

In this paper, we consider the problem of motion of a symmetrical gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field, where the potential function adopts the form $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathrm{K}_3)$, the gyrostatic momentum and the position vector of the center of mass are on the axis of symmetry. First, we obtain the equilibrium positions of this problem; then, by means of the Energy-Casimir method, we give sufficient conditions of stability for some of these equilibria and, by spectral methods, we obtain necessary conditions of stability. The obtained results generalize the previous papers [7], [8],[9], [1] and [2].

1 Introducción

El problema que consideramos en este trabajo, es el del movimiento de un giróstato fijo por uno de sus puntos O, perteneciente a su parte rígida, para el cual el momento angular relativo de su parte móvil, S_2, con respecto a la rígida, S_1, también denominado momento girostático es constante. Como es habitual, con origen en O se consideran dos sistemas de referencia uno fijo o inercial $OX_1X_2X_3$ y otro móvil $Ox_1x_2x_3$, fijo en el cuerpo (en nuestro caso en la parte rígida del giróstato), y cuyos ejes están dirigidos según las direcciones principales de inercia del giróstato en O. Parte de la literatura concerniente a este problema está dedicada al estudio de posiciones de equilibrio y de su estabilidad para un giróstato con un punto fijo ([3], [7] y [8]). Así, Rumiantsev haciendo uso del segundo método de Lyapunov investiga la estabilidad de ciertos movimientos de un giróstato pesado simétrico (el potencial del que derivan las fuerzas es aproximado por $U^{(1)}$), obteniendo para la solución de equilibrio:

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_3^0, k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1$$

la siguiente condición necesaria y suficiente de estabilidad

$$(I_3\omega_3^0 + l)^2 - 4I_1 m_0 z_0 > 0$$

donde $I_1 = I_2$, I_3 son los momentos de inercia de S, $(0, 0, l)$ es el momento girostático y (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas del centro de masas de S. Más recientemente en [1] y [2] se aplica el mismo método para estudiar la estabilidad de soluciones de equilibrio cuando el potencial es aproximado por $U^{(2)}$, obteniendo para la solución de equilibrio anterior, que también existe ahora, la siguiente condición necesaria y suficiente de estabilidad

$$(I_3\omega_3^0 + l)^2 > 4I_1(m_0 z_0 - m_1(I_1 - I_3))$$

donde $m_0 = mg$, $m_1 = 3g/r$, siendo m la masa total del giróstato, g la aceleración de la gravedad a la distancia fija r del centro de atracción P (que se supone fijo en la parte negativa del eje OX_3) al punto fijo O. Condición que pone de manifiesto no sólo la influencia de la posible elección del momento girostático, sino también de la aproximación del potencial que estemos utilizando.

El problema que vamos a considerar en este trabajo, es el estudio de la estabilidad de las soluciones de equilibrio de un giróstato de revolución con un punto fijo bajo un potencial axialmente simétrico $U(k_3)$, siendo U una función verificando condiciones suficientes de diferenciabilidad, dajo hipótesis análogas a las del caso de Lagrange-Poisson para el sólido rígido con un punto fijo; así, extendemos nuestro anterior trabajo [9], obteniendo todas las soluciones de equilibrio existentes y dando, según los casos, condiciones necesarias y suficientes de estabilidad.

Vamos a utilizar como herramientas de estudio de la estabilidad de dichas soluciones el método de la Energía-Casimir, que proporciona condiciones suficientes para la estabilidad Lyapunov de soluciones de equilibrio para sistemas mecánicos con simetría y el análisis espectral para determinar condiciones necesarias ver al respecto [5] , [6] y [9].

2 Ecuaciones de Lie-Poisson de un giróstato en un potencial Newtoniano.

Para aplicar el resultado anterior hemos de describir el sistema mecánico en cuestión como un sistema de Poisson con una cierta función hamiltoniana h.

El espacio de configuración es $\mathbf{SO(3)}$, y la función hamiltoniana viene dada por:

$$h = \frac{1}{2}(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_2} + \frac{\pi_3^2}{I_3}) + U(k_1, k_2, k_3)$$

donde, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ es el momento angular del giróstato S, $\mathbf{k}$ =(k_1, k_2, k_3) el vector de Poisson y la función U satisface condiciones adecuadas de diferenciabilidad.

El sistema hamiltoniano anterior está definido en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{e(3)}^* \cong \mathbf{so(3)}^*(\mathbf{R}^3)^*$, siendo $\mathbf{e(3)}$ el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie $\mathbf{E(3)}$, grupo de los movimientos de $\mathbf{R}^3$. La herramienta adecuada para realizar esto se basa en el Teorema de Reducción del Producto Semidirecto de álgebras de Lie ([4]). En la proposición 2.1 de [9] se daban los siguientes resultados:

La estructura geométrica asociada al movimiento de un giróstato con un punto fijo O y momento girostático constante, viene dada por el corchete de Lie-Poisson, definido en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{e(3)}^*$ *por la fórmula:*

$$\{F, G\}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{k}) = -(\boldsymbol{\pi} + \mathbf{l}) \cdot (\nabla_\pi F \ \times \nabla_{\boldsymbol{\pi}} G) - \mathbf{k} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\pi}} F \ \times \nabla_{\mathbf{k}} G + \nabla_{\mathbf{k}} F \ \times \nabla_{\boldsymbol{\pi}} G)$$

siendo $F, G \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ *el momento angular del giróstato* S, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ *el vector de Poisson y* $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ *el momento girostático.*

El tensor de Poisson asociado a dicho corchete está dado por la matriz:

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi_3 - l_3 & \pi_2 + l_2 & 0 & -k_3 & k_2 \\ \pi_3 + l_3 & 0 & -\pi_1 - l_1 & k_3 & 0 & -k_1 \\ -\pi_2 - l_2 & \pi_1 + l_1 & 0 & -k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En tanto que las ecuaciones de Lie-Poisson asociadas al hamiltoniano h anterior se expresan por las fórmulas:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h \ \times (\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) - \nabla_{\mathbf{k}} h \ \times \mathbf{k}$$
$$\dot{\mathbf{k}} = -\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h \ \times \mathbf{k}$$

Si el momento girostático es nulo dichas ecuaciones se reducen a las correspondientes al sólido rígido con un punto fijo.

El problema posee dos funciones de Casimir dadas por las siguientes fórmulas:

$$\phi_1((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k})$$
$$\phi_2(\| \mathbf{k} \|^2)$$

siendo ϕ_1, ϕ_2, *sendas funciones diferenciables. Además del hamiltoniano, dicho sistema posee, en general, dos integrales del movimiento, en involución.*

Y en el caso particular de un giróstato simétrico ($I_1 = I_2$), con momento girostático $\mathbf{l} = (0, 0, l)$, bajo un potencial axialmente simétrico $U(k_3)$, tenemos las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_1 &= \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3}\right)\pi_2\pi_3 - \frac{l\pi_2}{I_2} + k_2\frac{\partial U}{\partial k_3}\\
\dot{\pi}_2 &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}\right)\pi_1\pi_3 + \frac{l\pi_1}{I_1} - k_1\frac{\partial U}{\partial k_3}\\
\dot{\pi}_3 &= 0; \qquad \dot{k}_1 = \frac{k_2\pi_3}{I_3} - \frac{k_3\pi_2}{I_2}\\
\dot{k}_2 &= \frac{k_3\pi_1}{I_1} - \frac{k_1\pi_3}{I_3}; \dot{k}_3 = \frac{k_1\pi_2}{I_2} - \frac{k_2\pi_1}{I_1}
\end{aligned}$$

Luego dicho problema posee una nueva integral del movimiento:

$$\pi_3 = \pi_3^0 \ (cte)$$

3 Determinación de soluciones de equilibrio.

De las ecuaciones del movimiento de nuestro problema, se deduce fácilmente que para todo equilibrio del campo hamiltoniano $\mathbf{X}_h$, debe ser $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, siendo $\boldsymbol{\omega}= (\frac{\pi_1}{I_1}, \frac{\pi_2}{I_1}, \frac{\pi_3}{I_3})$ la velocidad angular de S (es decir del sistema solidario con su parte rígida) y $\omega \in \mathbf{R}$. Además, todo equilibrio está sujeto a las siguientes ligaduras:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 k_1 + \pi_2 k_2 + (\pi_3 + l)k_3 = v_0, v_0 \in \mathbf{R}\\
&k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1
\end{aligned}$$

Fácilmente se verifica que los puntos de $\mathbf{R}^3 \times \ \mathbf{S}^2$:

$$\begin{aligned}
E_1 &= (0, 0, \pi_3^0, 0, 0, 1)\\
E_2 &= (0, 0, \pi_3^0, 0, 0, -1)
\end{aligned}$$

son soluciones de equilibrio del problema planteado.

Por otro lado, según sea la función U podrán existir otros equilibrios relativos. Para buscar equilibrios distintos de los anteriores, estos deben tener la siguiente expresión:

$$E_3 = (I_1\omega k_1, I_1\omega k_2, I_3\omega k_3, k_1, k_2, k_3), \ (con \ \ \omega > 0)$$

donde se determinarán los valores de los parámetros involucrados. Ahora bien, los puntos E_3 son soluciones de equilibrio si y sólo si son puntos críticos de la función:

$$f := \frac{1}{2}(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_1} + \frac{\pi_3^2}{I_3}) + U(k_3) + \lambda((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \mathbf{k}) + \mu(\|\mathbf{k}\|^2)$$

con los mulplicadores a determinar y verificando las restricciones anteriores. Realizando los cálculos correspondientes tenemos las siguientes relaciones:

$$\lambda= -\omega, \quad \mu=\frac{I_1\omega^2}{2}, \quad U'(k_3) + \omega^2 k_3(I_1 - I_3) - \omega l = 0$$

la última ecuación nos permitirá calcular ω en ciertos casos. Veamos a continuacion algunos casos particulares de interés.

1 Supongamos que $U(k_3) = m_0 k_3$ entonces tenemos la relación:

$$m_0 + \omega^2 k_3 (I_1 - I_3) - \omega l = 0$$

por tanto:

$$k_3 = \frac{\omega l - m_0}{\omega^2 (I_1 - I_3)}$$

que existirá si y sólo si:

$$\left| \frac{\omega l - m_0}{\omega^2 (I_1 - I_3)} \right| < 1$$

ya que debe ser $|k_3| < 1$.

2 Supongamos que $U(k_3) = m_0 k_3 + \dfrac{m_1}{2}(I_3 - I_1) k_3^2$ entonces tenemos la relación:

$$m_0 + m_1 (I_3 - I_1) k_3 + \omega^2 k_3 (I_1 - I_3) - \omega l = 0$$

de la que obtenemos:

$$k_3 = \frac{\omega l - m_0}{(\omega^2 - m_1)(I_1 - I_3)}$$

verificándose esta igualdad si y sólo si:

$$\left| \frac{\omega l - m_0}{(\omega^2 - m_1)(I_1 - I_3)} \right| < 1$$

4 Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de los equilibrios $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$

Nos centraremos, básicamente, en obtener condiciones necesarias de estabilidad y consignar las condiciones suficiente que ya fueron obtenidas en nuestro trabajo [9].

4.1 Estabilidad de la solución E_1

Dicha solución corresponde al movimiento del giróstato alrededor de la vertical en sentido ascendente.

4.1.1 Condición necesaria de estabilidad de la solución E_1.

Utilizaremos estabilidad espectral para obtener condiciones necesarias de estabilidad del giróstato. Para ello vamos a linealizar las ecuaciones de Lie-Poisson en el punto de equilibrio $E_1 = (\boldsymbol{\pi}_e, \mathbf{k}_e) = (0, 0, \pi_3^0, 0, 0, 1)$. Las ecuaciones linealizadas son:

$$\dot{\delta\boldsymbol{\pi}} = \delta\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}_e + (\boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{l}) \times \delta\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h + \delta\mathbf{k} \times \nabla_{\boldsymbol{\pi}} h + \mathbf{k}_e \times \delta\nabla_{\mathbf{k}} h$$
$$\dot{\delta\mathbf{k}} = \delta\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{k}_e \times \delta\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h$$

Y evaluando las ecuaciones anteriores en el plano tangente, en el punto E_1, a la órbita coadjunta en el álgebra de Lie $\mathbf{e(3)}^*$:

$$\{(\delta\boldsymbol{\pi},\delta\mathbf{k}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \ / \ \delta(\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{l}) \cdot \ \boldsymbol{k}_e + (\boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{l}) \cdot \delta\mathbf{k} = \mathbf{0}, \delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_e = \mathbf{0}\}$$

Las ecuaciones linealizadas se reducen a:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta\pi_1} \\ \dot{\delta\pi_2} \\ \dot{\delta k_1} \\ \dot{\delta k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b & 0 & c \\ -a-b & 0 & -c & 0 \\ 0 & d & 0 & a \\ -d & 0 & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\pi_1 \\ \delta\pi_2 \\ \delta k_1 \\ \delta k_2 \end{pmatrix}$$

con $a = \dfrac{\pi_3^0}{I_3}$, $b = -\dfrac{\pi_3^0 + l}{I_1}$, $c = U'(1)$, $d = -\dfrac{1}{I_1}$.

El polinomio característico asociado a dichas ecuaciones resulta ser:

$$\lambda^4 + \left(2ab + b^2 + 2a^2 + 2dc\right)\lambda^2 + (b^2a^2 + 2a^3b - 2dca^2 + a^4 - 2adbc + c^2d^2)$$

Cuando el discriminante del polinomio anterior es menor que cero, al menos una de las raices características tiene parte real positiva, luego la solución de equilibrio es inestable. El discriminante resulta ser:

$$\begin{gathered}(2ab + b^2 + 2a^2 + 2dc)^2 - 4(b^2a^2 + 2a^3b - 2dca^2 + a^4 - 2adbc + c^2d^2) = \\ (2a+b)^2\,(b^2 + 4dc)\end{gathered}$$

Luego, en general, cuando se verifique la condición $(b^2 + 4dc) < 0$, habrá inestabilidad del sistema. Sustituyendo los valores anteriores en dicha expresión, se deduce que habrá inestabilidad si se verifica que:

$$\left(\frac{\pi_3^0 + l}{I_1}\right)^2 - \frac{4U'(1)}{I_1} < 0$$

Por tanto, una condición necesaria para que la solución de equilibrio $\mathbf{E}_1$, *del problema del movimiento de un giróstato simétrico, con un punto fijo O en un campo de potencial* $U(k_3)$, *y con momento girostático constante l, alrededor del tercer eje principal de inercia, sea estable, en sentido de Lyapunov, es que se verifique la siguiente desigualdad:*

$$(\pi_3^0 + l)^2 \geq 4I_1U'(1)$$

4.1.2 Condición suficiente de estabilidad de la solución E_1.

Mediante el método de la Energía-Casimir, en [9] obtuvimos el siguiente resultado:

Una condición suficiente para que la solución de equilibrio $\mathbf{E}_1$, *del problema del movimiento de un giróstato simétrico, con un punto fijo O en un campo de potencial* $U(k_3)$

y con momento girostático constante l, alrededor del tercer eje principal de inercia, sea estable, en sentido de Lyapunov, es que:

$$(\pi_3^0 + l)^2 > 4I_1U'(1)$$

4.2 Estabilidad de la solución E_2.

Esta solución corresponde físicamente a la rotación del giróstato alrededor de la vertical en sentido descendente.

4.2.1 Condición necesaria de estabilidad de la solución E_2

Análogamente, de las ecuaciones linealizadas del movimiento, por razonamientos similares a los anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Una condición necesaria para que la solución de equilibrio E_2, sea estable, en sentido de Lyapunov, es que se verifique la siguiente desigualdad:

$$(\pi_3^0 + l)^2 \geq -4I_1U'(-1)$$

4.2.2 Condición suficiente de estabilidad de la solución E_2

Mediante el método de la Energía-Casimir, en [9] obtuvimos también el siguiente resultado:

Una condición suficiente para que la solución de equilibrio $\mathbf{E}_2$*, sea estable, en sentido de Lyapunov, es que se verifique:*

$$(\pi_3^0 + l)^2 > -4I_1U'(-1)$$

5 Estabilidad de las soluciones $\mathbf{E}_3$.

5.0.3 Condiciones necesarias de estabilidad de las soluciones E_3.

Las ecuaciones de Lie-Poisson linealizadas en torno al punto de equilibrio $E_3 = (\boldsymbol{\pi}_e, \mathbf{k}_e) = (I_1\omega k_1, I_1\omega k_2, I_3\omega k_3, k_1, k_2, k_3)$, (*con* $\omega > 0$) son:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\pi}} = \delta\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}_e + (\boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{l}) \times \delta\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h + \delta\mathbf{k} \times \nabla_{\boldsymbol{\pi}} h + \mathbf{k}_e \times \delta\nabla_{\mathbf{k}} h$$
$$\delta\dot{\mathbf{k}} = \delta\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{k}_e \times \delta\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h$$

donde $|k_3| < 1$, y pueden expresarse en la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta\pi_1} \\ \dot{\delta\pi_2} \\ \dot{\delta\pi_3} \\ \dot{\delta k_1} \\ \dot{\delta k_2} \\ \dot{\delta k_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 & U'(k_3) & k_2U''(k_3) \\ -a & 0 & c & -U'(k_3) & 0 & -k_1U''(k_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{k_3}{I_1} & \dfrac{k_2}{I_3} & 0 & \omega k_3 & -\omega k_1 \\ \dfrac{k_3}{I_1} & 0 & -\dfrac{k_1}{I_3} & -\omega k_3 & 0 & +\omega k_1 \\ -\dfrac{k_2}{I_1} & \dfrac{k_1}{I_1} & 0 & \omega k_2 & -\omega k_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\pi_1 \\ \delta\pi_2 \\ \delta\pi_3 \\ \delta k_1 \\ \delta k_2 \\ \delta k_3 \end{pmatrix}$$

siendo ahora los coeficientes $a = \dfrac{(I_1 - I_3)\omega k_3 - l}{I_1}$, $b = \dfrac{(I_1 - I_3)\omega k_2}{I_1}$, $c = \dfrac{(I_3 - I_1)\omega k_1}{I_1}$.

Restringiéndonos al plano tangente a la órbita coadjunta a través del punto E_3 :

$$\{(\delta\boldsymbol{\pi},\delta\mathbf{k}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \ / \ \delta(\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}_e + (\boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{l}) \cdot \delta\mathbf{k} = \mathbf{0}, \delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_e = \mathbf{0}\}$$
$$E_3 = (\boldsymbol{\pi}_e, \mathbf{k}_e)$$

Obtenemos para el polinomio característico del movimiento reducido la siguiente expresión:

$$I_1^2\lambda^4 + p\lambda^2 + q$$

con los coeficientes p y q dados por:

$$\begin{aligned} &p = I_1(1 - k_3^2)U''(k_3) - 2I_1k_3U'(k_3) + I_1^2(\omega^2 + a^2) \\ &q = I_1a\omega k_3(1 - k_3^2)U''(k_3) - I_1a\omega(1 + k_3^2)U'(k_3) + k_3^2U'(k_3)^2 \ . \\ &-k_3(1 - k_3^2)U''(k_3)U'(k_3) + \omega^2I_1^2a^2 \end{aligned}$$

Entonces, una condición necesaria para que la solución de equilibrio E_3 sea espectralmente estable es que se verifiquen las desigualdades siguientes:

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p^2 - 4q \geq 0$$

En el caso particular de que sea $k_3 = 0$ y el potencial de la forma $U(k_3) = m_0k_3 + U_1(k_3)$, con $U_1'(0) = 0$, entonces existe una solución de equilibrio dada por:

$$E_3 = \left(\ \pi_1 = \frac{I_1m_0}{l}k_1, \quad \pi_2 = \frac{I_1m_0}{l}k_2, \quad \pi_3 = 0, \quad k_1, \quad k_2, \quad k_3 = 0 \ \right).$$

El polinomio característico asociado a dicha solución de equilibrio será:

$$\lambda^4(\lambda^2I_1^2l^2 + (l^4 + m_0^2I_1^2 - U''(0)l^2I_1))$$

Entonces, una condición necesaria de estabilidad para esta última solución será:

$$l^4 + m_0^2I_1^2 - U''(0)l^2I_1 \geq 0$$

La aplicación del método de la Energía-Casimir a dichos equilibrios para obtener condiciones suficientes de estabilidad no proporciona información al ser la forma cuadrática semidefinida y será necesario abordarlos por otros métodos.

6 Conclusiones

Se han obtenido las soluciones de equilibrio para este problema generalizado de Lagrange-Poisson. Se dan condiciones necesarias de estabilidad para todas ellas utilizando el análisis espectral, y para el caso de las soluciones de equilibrio E_1 y E_2, utilizando el método de la energía-Casimir, se dan condiciones suficientes de estabilidad. Dichos resultados son válidos para cualquier elección del potencial $U(k_3)$ verificando dichas condiciones; de modo que particularizando adecuadamente el potencial $U(k_3)$ se reducen a las dadas en los trabajos citados en los siguientes casos:

a) $U(k_3) = mgz_0k_3$ (giróstato pesado$U^{(1)}$). Las condiciones obtenidas se reducen a las dadas por Rumiantsev en [7] y [8].

b) $U(k_3) = mgz_0k_3 + \dfrac{3g(I_3 - I_1)}{2r}k_3^2$ (giróstato simétrico en campo $U^{(2)}$). En este caso extendemos los resultados de [1], [2] y [9].

Queda de manifiesto la importancia de la posible elección del momento girostático, así como de la aproximación del potencial considerada a la hora de estudiar la estabilidad de soluciones del sistema, o la posible estabilización de ciertos equilibrios.

Además, estos resultados pueden ser aplicados a otros problemas como el de la estabilidad de las soluciones de equilibrio de un giróstato simétrico bajo el potencial $U^{(3)}$ o en el seno de un fluido incompresible. El problema del estudio de condiciones suficientes de estabilidad de E_3 queda abierto, así como el estudio de las fronteras de los dominios de estabilidad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el MECD (Proyecto n^o PB98-1576).

Referencias

[1] Cavas, J. A. y Vigueras, A.: 1996, "Stability of certain rotations of a gyrostat analogous to that of Lagrange and Poisson in a Newtonian force field", Proceedings of the Fourth International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics, 129-136.

[2] Cavas, J. A., Molina, R, y Vigueras, A.: 1995, "Soluciones de equilibrio y estabilidad de un problema generalizado de Lagrange-Poisson", Actas (electrónicas) del XIV CEDYA/IV CMA, 9 pgs.(Internet: http://www-ma1.upc.es/cedya/comu.html).

[3] Leimanis, E.: 1965, "The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point", Springer Verlag.

[4] Marsden, A., Ratiu, T., Weinstein A.: 1984, "Semidirect products and reduction in mechanics", Transactions of the American Mathematical Society, 281, 147-177.

[5] Ortega, J. P.: Symmetry, Reduction and Stability in Hamiltonian systems. Tesis doctoral, Universidad de California.

[6] Ortega, J. P. y Ratiu, T. S.: 1999, "Stability of Hamiltonian Relative Equilibria", Nonlinearity 12(3), 693-720.

[7] Rumiantsev, V. V.: 1961, "On the stability of motion of gyrostats", J. Appl. Math. Mech., 25, 9-19.

[8] Rumiantsev, V. V.: 1961, "On the stability of motion of certain types of gyrostats", J. Appl. Math. Mech., 25, 1158-1169.

[9] Vera, J. A. y Vigueras, A.: 2002, "Estabilidad de ciertos equilibrios de un giróstato simétrico bajo un potencial con simetría axial $\mathbf{U}(\mathbf{k}_3)$", en "Métodos de dinámica orbital y rotacional" (Proc. IV Jorn de Trab. en Mecánica Celeste), 175-181. Ed. Servicio de Publ. Univ. de Murcia.