EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD DE SOLUCION DE UN SISTEMA DE TIMOSHENKO CON MEMORIA

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:

Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda

Asesor:

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

CHIMBOTE – PERÚ

2021

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO

Yo, Dr. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIÉRREZ, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TIMOSHENKO CON MEMORIA", elaborada por el (la) magíster Víctor Hilario Tarazona Miranda para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, Agosto de 2021

Milton Milciades Cortez Gutiérrez

ASESOR

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TIMOSHENKO CON MEMORIA"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

Dra. Yheni Farfán Machaca

PRESIDENTE

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

SECRETARIO

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

VOCAL

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a Dios, quien con su bendición me ha llenado de sabiduría y paciencia en este proceso. De la misma manera, lo dedico a mi esposa Zoraida e hijos, quienes fueron un gran soporte y motivación en este proceso.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a mi asesor Milton Cortez, quien fue un gran apoyo en este proceso investigativo.

Mi profundo agradecimiento a la Universad Nacional del Santa por abrirme las puertas y permitirme realizar esta tesis.

Finalmente, agradezco a mi familia por su apoyo incondicional y emocional en todo este proceso.

RESUMEN

En la presente investigacion se estudia el comportamiento asintótico de sistemas disipativos con aplicaciones a modelados de vigas. Especificamente se estudia la existencia, unicidad, dependencia continua y el comportamiento asintotico de un sistema de Timoshenko con memoria total en el desplazamiento transversal y en el angulo de rotacion y con condición frontera de tipo Dirichlet. Asi como, se proporciona una breve revisión sobre resultados teóricos de análisis funcional, espacios L^p, espacios de Sobolev y semigrupos de operadores lineales. Para demostrar la existencia, la unicidad y el decaimiento exponencial de la solución, se reescribe el modelo como un problema de Cauchy de primer orden en el tiempo. Se demuestra la existencia y unicidad de solución usando la teoría de semigrupos y el corolario de Liu y para demostrar la estabilidad exponencial del semigrupo de contracciones de clase C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, asociado al sistema disipativo usamos el Teorema de Gearhart .

Palabras claves:

Semigrupo, estabilidad exponencial, memoria, sistema de Timoshenko, ecuaciones en derivadas parciales.

ABSTRACT

In the present investigation the asymptotic behavior of dissipative systems with applications to beam modeling is studied. Specifically, the existence, uniqueness, continuous dependence and asymptotic behavior of a Timoshenko system with total memory in the transverse displacement and in the rotation angle and with a Dirichlet-type boundary condition are studied . As well as, a brief review on theoretical results of functional analysis, L^p spaces, Sobolev spaces and semigroups of linear operators is provided. To prove the existence, uniqueness, and exponential decay of the solution, the model is rewritten as a first order Cauchy problem in time. The existence and uniqueness of the solution are proved using the theory of semigroups and the Liu's corollary and to prove the exponential stability of the semigroup of class contractions C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, to the dissipative system, Gearhart's Theorem is used.

Keywords:

Semigroup, exponential stability, memory, Timoshenko system, partial differential equations.

INDICE

Hoja de conformidad del asesor ii
Hoja de aprobación del jurado evaluador iii
Dedicatoria iv
Agradecimiento v
Resumen vi
Abstract vii
Indice viii

INTRODUCCIÓN x
CAPITULO I : PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 1
1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación 2
1.2. Antecedentes de la investigación 4
1.3. Formulación del problema de investigación 7
1.4. Delimitación del estudio 8
1.5. Justificacion e importancia de la investigación 8
1.6. Objetivos de la investigación: General y específicos 9
CAPITULO II : MARCO TEÓRICO **10**
2.1. Fundamentos teóricos de la investigación 11
2.2. Bases Teoricas 12
2.2.1 Analisis Funcional 12
2.2.2 Espacios $L^p(\Omega)$ 16
2.2.3 Espacios de Sobolev 21
2.2.4 Semigrupos: Definiciones y teoremas 26
2.3. Marco conceptual (Definiciones seleccionadas para demostrar hipótesis y definiciones de términos necesarios) 31
CAPITULO III : MARCO METODOLÓGICO **33**
3.1. Hipótesis central de la investigación 34
3.2. Variables e indicadores de la investigación 34
3.3. Métodos de la investigación 35

3.4. Diseño o esquema de la investigación 35
3.5. Población y muestra 36
3.6. Actividades del proceso investigativo 36
3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación 36
3.8. Procedimiento para la recolección de datos (Validación y confiabilidad de los instrumentos. 36
3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos. 36
CAPITULO IV : RESULTADOS Y DISCUSIÓN 38
4.1 Resultados 39
4.1.1 El problema de Timoshenko con memoria total 39
4.1.2 Existencia y unicidad 41
4.1.2.1 Energia del sistema y espacio de fase 41
4.1.2.2 Existencia del semigrupo 44
4.1.2.3 El generador infinitesimal del semigrupo asociado al sistema de Timoshenko con memoria total 49
4.1.3 Estabilidad exponencial 62
4.2 Discusión 74
CAPITULO V : CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 75
5.1. Conclusiones 76
5.2. Recomendaciones 76

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 77

ANEXOS 80
Anexo N° 1: Matriz de consistencia 80

Introducción

El análisis de estructuras es muy importante en la alta ingeniería, debido a la necesidad de conocer el comportamiento de diferentes objetos como: esfuerzos, deformaciones y desplazamientos; y esto se da a los diferentes tipos de carga a las que pueden estar sometidos. Para ello dividimos la estructura, dependiendo de su forma y de las cargas que soporta, en componentes estructurales con comportamiento conocido, tales como barras, vigas, placas y otros. Entre ellos, destacan las vigas, por su amplio grado de aplicación, como la de Euler-Beournulli (teoría clásica), la de Timoshenko (primer orden) y la de Reddy (tercer orden).

El estudio de los modelos para vigas con cargas actuantes internas o externamente es importante para el desarrollo de la alta ingeniería, pues la viga es un modelo de estructura flexible ampliamente utilizado en proyectos de estructura y mecánica, tales como proyectos de puentes, edificios, alas de aviones, plataformas de petróleo, entre otros. (A. Malacarne, (2014)). En las ultimas décadas, importantes mecanismos disipativos fueron utilizados para estabilizar estructuras modernas en ingeniería cuando son sometidas a oscilaciones no deseables. De modo que conocer y entender los efectos de algunos mecanismos disipativos se torna fundamental para controlar el movimiento de grandes estructuras cuyas oscilaciones son modeladas por ecuaciones diferenciales parciales que evoluciona con el tiempo.

Las tecnologías y aplicaciones modernas a la ciencia requieren modelos matemáticos que faciliten el cálculo de las deformaciones y tensiones con suficiente precisión y sin un análisis matemático excesivo.

En la actualidad, para estudiar la buena colocación, existencia, unicidad o cualquier otro tipo de propiedades de una ecuación diferencial parcial o de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales o de un sistema disipativo, existe un método recientemente introducido por Z. Lui y S. Zheng, (1999), que puede ser aplicada a las clases de ecuaciones de tipo diferencial parcial, la cual es la teoría de semigrupos, que lo transforma a una ecuación de primer orden en la variable temporal, del tipo $U_t = AU$, $U(0) = U_0$.

La conducta de sistemas disipativos de tipo asintótica son una rama creciente para la investigación en Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). En tal sentido, algunos métodos analíticos para tener como resultado el decaimiento de las soluciones de un sistema son: el método de la energía dado por Muñoz (2008), el método de Nakao, el método de Kormonik, el método de Zuazua y más recientemente el método introducido por Guesmia, entre otros, las cuales se aplican a una variedad de problemas disipativos.

A lo largo del tiempo, diversos autores han introducido diferentes tipos de mecanismos de disipación para estabilizar las oscilaciones. En ese sentido, tenemos la disipación provocada por la fricción la cual actúa uniforme en todo el material. Cuando la disipación se produce debido al intercambio de temperatura entre el material y el medio ambiente, tenemos el sistema termoelástico.

También existe la posibilidad de que el material constitutivo tenga la propiedad de recuperar su posición debido a la viscosidad, en ese caso, la disipación es de tipo memoria.

A lo largo de los últimos años, muchos investigadores han estudiado el tema de la estabilización del sistema de Timoshenko y la búsqueda de la disipación minima, donde las soluciones presentan decaimiento uniforme y se estabilizan a medida que el tiempo crece indefinidamente. Para lograr este objetivo se han introducido diversos tipos de mecanismos disipativos y se han obtenido varios resultados de estabilidad.

Muchos estudios se han realizado con la presencia de un solo control o termino disipativo sobre el angulo de rotación, encontrando que el sistema de Timoshenko tiene estabilidad exponencial cuando la velocidad de las ondas son iguales y en caso contrario estabilidad polinomial.Por otro lado la presencia de controles o términos disipativos tanto en el angulo de rotación como en el desplazamiento transversal, los estudios muestran que el sistema de Timoshenko es estable para cualquier solución débil y sin ninguna restricción en las constantes del sistema dado.

En la presente investigación, se realiza el análisis de un sistema lineal de Timoshenko con memoria total que actúan en el angulo de rotación y en el desplazamiento transversal del sistema. Estableceremos resultados de la buena colocación y estabilidad asintótica para el sistema bajo ciertas condiciones impuestas en la función relajación, independientemente de las velocidades de propagación de las ondas.

La estructura de esta tesis se detalla a continuación. En el Capitulo I se tiene el problema de investigación. En el Capitulo II realizamos el marco teorico en la que enunciamos algunos resultados importantes para su desarrollo. En el Capitulo III desarrollamos el marco metodológico. En el Capitulo IV se presentan los resultados y la discusión a través del uso de la teoría de semigrupos. Por último, el Capitulo V menciona las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

CAPITULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

La teoría de vigas fue introducida en el siglo XVIII cuando el problema de vigas transversales vibrantes fueron formulados en términos de ecuaciones diferenciales parciales de movimiento, fuerzas externas, condiciones de contorno y condiciones iniciales.

Las vigas constituyen un importante tema de investigación, tanto en ingeniería como en matemática. En el campo de la teoría del control, existe un interés en conocer el comportamiento de la energía asociada con los modelos dinámicos. A través del tiempo, muchos investigadores han analizado esta tarea, produciendo muchos resultados sobre el comportamiento asintótico de los modelos de vigas, considerando mecanismos disipativos, como de fricción o viscoelástico y otros, las cuales pueden actuar en todo el dominio o solo en la frontera.

En las ultimas décadas, importantes mecanismos disipativos fueron utilizados para estabilizar estructuras modernas en ingeniería cuando son sometidas a oscilaciones no deseables. De modo que conocer y entender los efectos de algunos mecanismos disipativos se torna fundamental para controlar el movimiento de grandes estructuras cuyas oscilaciones son modeladas por ecuaciones en derivadas parciales que evoluciona con el tiempo.

En el transcurso del tiempo muchos autores han introducido diferentes tipos de mecanismos de disipación para estabilizar las oscilaciones. Entre ellos tenemos: la disipación provocada por la fricción la cual actúa uniforme en todo el material; la disipación producido por el intercambio de temperatura entre el material y el medio ambiente, en ese caso tenemos el sistema termoelástico; la disipación que se produce cuando el material constitutivo tiene la propiedad de recuperar su posición debido a la viscosidad, en ese caso es de tipo memoria.

El modelo deTimoshenko para describir la vibración de una viga gruesa es dado por

$$(P):\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \end{cases}$$

donde t denota la variable tiempo, x es la variable espacio a lo largo de la viga de longitud L, en su configuración de equilibrio, φ es el desplazamiento transversal de la viga y ψ es el angulo de rotación del filamento de la viga.Las constantes positivas ρ_1, ρ_2, k y b denotan respectivamente, la densidad (la masa por unidad de longitud), el momento polar de inercia de una sección transversal, el modulo de corte y el modulo de elasticidad de Young's a veces llamado el momento de inercia de una sección transversal.

Con la notación anterior, definimos la energía total de la viga por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + b|\varphi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 \right] dx.$$

Si al modelo (P) le añadimos condiciones de frontera del tipo Dirichlet, tenemos que $\frac{d}{dt}E(t)=0$, en $(0,\infty)$. Por lo tanto, el sistema (P) es conservativo, lo que significa que la solución no decae.

Recientemente, han analizado una cantidad importante de investigaciones sobre el tema de la estabilización del sistema de Timoshenko y la búsqueda de la disipación minima, por la cual las soluciones decaen uniformemente a medida que el tiempo crece indefinidamente. Para lograr este objetivo se han introducido diversos tipos de mecanismos disipativos y se han obtenido varios resultados de estabilidad.

En presencia de controles o términos disipativos tanto en el angulo de rotación como en el desplazamiento transversal, los estudios muestran que el sistema de Timoshenko es estable para cualquier solución débil y sin ninguna restricción en las constantes ρ_1, ρ_2, k y b. Entre ellos podemos citar los trabajos de: Kim & Renardy (1987), Raposo et al. (2008) y Messaoudi & Mustafa (2008).

En el caso de un solo control o termino disipativo sobre el angulo de rotación, la tasa de decaimiento depende en gran medida de las constantes ρ_1, ρ_2, k y b, precisamente si $\frac{k}{\rho_1}=\frac{b}{\rho_2}$ (velocidad de las ondas son iguales) se cumple, los resultados muestran que obtenemos tasas de decaimiento similares a las de presencia de dos controles. A partir de ello, se puede citar los trabajos de Ma et al. (2011),Guesmia & Messaoudi (2009), Messaoudi & Houari (2009) y también el trabajo de Muñoz & Racke (2008). En caso contrario, se ha demostrado que el sistema de Timoshenko no es exponencialmente estable, incluso para funciones de relajación que decaen exponencialmente, en ese caso se pueden obtener algunas estimaciones de decaimiento polinomial para la solución fuerte.Esto se ha demostrado en el trabajo de Alabau (2007) para el caso de una retroalimentación interna, y en los trabajos realizados por Messaoudi & Houari (2009) y Tarazona (2018) para el caso de una historia infinita.

El principal problema relacionado con la estabilidad en presencia del termino historia o memoria es determinar la clase más grande de nucleos que se denota por g que garantizan la estabilidad y la mejor relación entre las tasas de decaimiento del nucleo g y las soluciones del sistema considerado.

Un problema interesante surge cuando la disipación actúa de diferentes formas sobre el dominio considerado, o incluso, cuando el mecanismo de disipación es efectivo solo en una parte de su dominio. Situaciones así ocurren, por ejemplo, cuando tratamos con vigas formadas por más de un tipo de material, los cuales presentan diferentes viscosidades, incluso puede suceder que parte de la viga este hecho de un material puramente elástico, por lo tanto, sin una disipación efectiva sobre él, y otra parte que consiste en un material que presenta algún tipo de disipación, por ejemplo, un material viscoelástico. El modelo matemático para sistemas con esa característica es llamado el problema de transmisión.

Matematicamente, un problema de transmisión consiste en un problema de valor inicial y de contorno para una ecuación hiperbólica y cuyo operador elíptico correspondiente tiene coeficientes continuos. Por lo tanto, no podemos esperar que las soluciones de un problema de transmisión, si las hay, sean regulares en todo el dominio. Cuando se trata de problemas de transmisión, es interesante estudiar la conducta asintótica de las soluciones e investigar que propiedades individuales de cada material se conservan en esta unión.

En este marco de ideas se estudia el efecto disipativo causado por la memoria total del sistema de Timoshenko, para ello introduciremos la teoría de semigrupos y usando el teorema de Gearhart se demuestra la estabilidad exponencial.

1.2 Antecedentes de la investigación

1.2.1. Antecedentes internacionales

Greatti (2018) en el estudio Existencia de solución y estabilidad exponencial de los sistemas de Timoshenko viscoelastico y termoelástico, desarrollo un estudio motivado por el trabajo de Alves, Caixeta, Jorge y Rodriguez, primero con un sistema de Timoshenko termoelastico con condiciones de frontera de tipo Dirichlet o Dirichlet-Neumann modelado por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x + m\theta_x = 0 \text{, en } (0,L)\times(0,\infty)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = 0 \text{, en } (0,L)\times(0,\infty)$$

$$\rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_{xt}+\psi_t) = 0 \text{, en } (0,L)\times(0,\infty)$$

$$\rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_{xt} = 0 \text{, en } (0,L)\times(0,\infty)$$

en que empleando la teoría de semigrupos lineales y el teorema de Pruss encuentra existencia de solución y la estabilidad exponencial del sistema. Luego, se estudia el sistema de Timoshenko viscoelastico con condiciones de frontera de tipo Dirichlet modelado por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x + k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x+\psi)_x(t-s)ds = 0,$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + b\int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(t-s)ds + k(\varphi_x+\psi) - k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x+\psi)(t-s)ds = 0,$$

dando condiciones al nucleo se halla existencia y unicidad de solución empleando la teoría de semigrupos y en cuanto a la estabilidad exponencial esta es obtenida por el método de la energía.

Apalara (2016) en el estudio “Uniform decay in weakly dissipative Timoshenko system with internal distributed delay feedbacks”,modelada por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x + \gamma_1\varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma_2(s)\varphi_t(x,t-s)ds = 0, \text{ en } (0,1)\times(0,\infty)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) = 0, \text{ en } (0,1)\times(0,\infty)$$

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(1,t) = 0, \ t>0$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \text{ en } (0,1)$$

$$\varphi_t(x,-t) = f_0(x,t), \text{ en } (0,1)\times(0,\tau_2).$$

donde f_0 es la función historia, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 : [\tau_1,\tau_2] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $0 \le \tau_1 < \tau_2$, considera un sistema de Timoshenko unidimensional con amortiguación por friccion lineal y un retardo distribuido que actua sobre la ecuación de desplazamiento. Bajo suposiciones adecuadas sobre el peso del retardo y las velocidades de las ondas, establece la buena colocación del sistema y demuestra que la disipación a través del amortiguamiento por friccion es lo suficientemente fuerte como para estabilizar uniformemente el sistema incluso en presencia del retardo. Emplea la teoría de semigrupos de operadores lineales y demuestra la existencia y unicidad usando el teorema de Hille Yosida y para la estabilidad de la energía utiliza la técnica de los multiplicadores.

Zhiyong Ma et al. (2011) en el estudio “Exponential stability for a Timoshenko type system with history”, modelada por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x = 0$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^{\infty} g(s)\psi_{xx}(t-s)ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_{tx} = 0$$

$$\rho_3\theta_{tt} - \beta\theta_{txx} - \beta\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0$$

con constantes positivas $\rho_1,\rho_2,\rho_3,k,b,\beta,\delta$ junto con condiciones iniciales,

$$\varphi(.,0) = \varphi_0, \ \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \ \psi(,.0) = \psi_0, \ \psi_t(,.0) = \psi_1, \ \theta(,.0) = \theta_0$$

y condiciones frontera, $\varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0$, consideraron los sistemas vibratorios hiperbólicos de tipo Timoshenko ajustados a una ecuación de calor que modelan un efecto disipativo esperado a través de la conducción de calor. Usando la técnica de semigrupos los autores demuestran el resultado de estabilidad exponencial con suposiciones sobre la función de relajación del historial pasado g decayendo exponencialmente para el caso de igual velocidad de onda.

Said-Houari y Rahali (2011) en el estudio “A stability result for a Timoshenko system with past history and a delay term in the internal feedback”, modelada por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0,\ \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \left(0,\infty\right)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x,t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) + \mu_1\psi_t + \mu_2\psi_t(x,t-\tau) = 0$$

con constantes positivas μ_1, μ_2, ρ_1, ρ_2, b, k y τ es el retardo, junto con condiciones iniciales

$$\varphi\left(x,0\right) = \varphi_0,\ \varphi_t\left(x,0\right) = \varphi_1,\ \psi\left(x,0\right) = \psi_0,\ \psi_t\left(x,0\right) = \psi_1,\ \psi_t\left(x,t-\tau\right) = f_0(x,t-\tau)$$

y condiciones frontera, $\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi\left(0,t\right) = \psi(1,t) = 0$; bajo un supuesto adecuado entre el peso del retardo y el peso de la amortiguación demuestran la buena colocación y usando el método de semigrupos y el teorema de Hille Yosida la existencia y unicidad de solución del modelo dado. Asimismo, demuestran la estabilidad exponencial usando el método de la energía introduciendo el funcional de Lyapunov.

Raposo et al. (2005) en el estudio “Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings”, modelado por

$$\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + u_t = 0,\ \text{en}\ \left]0,L\right[\times \left]0,\infty\right[$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \psi_t = 0,\ \text{en}\ \left]0,L\right[\times \left]0,\infty\right[$$

$$u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0,\ \ t > 0,$$

consideran un sistema lineal de ecuaciones de viga de tipo Timoshenko con termino disipativo por friccion, la existencia y unicidad de soluciones fuertes lo demuestran por la teoría de semigrupos. Además demuestran el decaimiento exponencial usando el método desarrollado por Liu y Zheng (1999) donde utilizan un argumento de contradicción al combinar el teorema de Gearhart con una técnica de EDP.

1.2.2 Antecedentes nacionales

Tarazona (2018) en el trabajo “Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria)”, modelada por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0,\ \text{en}\ (0,L) \times (0,\infty)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x,t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0,\ \text{en}\ (0,L) \times (0,\infty)$$

con condiciones iniciales,

$$\varphi(.,0) = \varphi_0, \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \psi(.,0) = \psi_0, \psi_t(.,0) = \psi_1,\ \text{en}\ (0,L)$$

con condiciones frontera tipo Dirichlet, se analiza el sistema vibratorio de Timoshenko con historia pasada actuando solamente en el angulo de rotación. Aplicando la teoría de semigrupos, propiedades del resolvente de un generador infinitesimal y el corolario de Liu se obtiene la existencia y unicidad de soluciones del sistema planteado; asimismo, se analiza que la disipación dada por el termino historia es lo suficientemente fuerte para producir estabilidad exponencial, si la velocidad de las ondas son iguales. Dado el caso, que la velocidad de las ondas no son iguales, se evidencia que la energía de primer orden decae polinomialmente.

Pariona (2015) en el estudio Estabilidad lineal para un sistema de Timoshenko, modelada por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0\,,\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + d\psi_t = 0\,,\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty)$$

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0\,,\ t \geq 0$$

con constantes positivas ρ_1, ρ_2, k, b y d; considera un sistema de Timoshenko con disipación friccional, usando la teoría de semigrupos demuestra la existencia y unicidad de soluciones. Usando el método de la energía demuestra el decaimiento exponencial y esto se cumple si la velocidad de las ondas son iguales. De lo contrario, no es exponencialmente estable. Además demuestra que el sistema de Timoshenko presenta la propiedad de estabilidad lineal, esto es el tipo de semigrupo que debe ser igual a la cota superior del espectro.

1.3 Formulación del problema de investigación

Consideramos el siguiente sistema lineal de Timoshenko con memoria total,

$$\rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x - b\varphi_{xx} + \int_0^{+\infty} g_1(s)\varphi_{xx}(x,t-s)ds = 0, en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \qquad (1)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^{+\infty} g_2\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)ds + k\left(\varphi_x + \psi\right) = 0, en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \qquad (2)$$

con condiciones iniciales,

$$\varphi\left(x,0\right) = \varphi_0\left(x\right), \varphi_t\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), \psi\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right), \psi_t\left(x,0\right) = \psi_1\left(x\right), x \in \left(0,L\right) \quad (3)$$

y con condiciones frontera,

$$\varphi\left(0,t\right) = \varphi\left(L,t\right) = \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0; t \geq 0 \qquad (4)$$

donde $\rho_1,\ \rho_2,\ b,\ k$ son constantes positivas, las funciones φ y ψ son respectivamente el desplazamiento transversal de una viga y el angulo de rotación y la función $g_i:[0,\infty[\rightarrow\mathbb{R}$, $i=1,2$ es el nucleo de defraccion la cual tiene las siguientes hipótesis,

$g_i(t)>0$, $t\geq 0$; $\tilde{b}_i=(b-\int_0^\infty g_i(s)ds)>0$ y existen constantes positivas k_0,k_1,k_2 tal que: $-k_0g_i(t)\leq g_i'(t)\leq -k_1g_i(t)$; $|g_i''(t)|\leq k_2g_i(t)$, $t\geq 0$

¿Cómo demostrar analíticamente la existencia, la unicidad y la estabilidad de la solución de un sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total, usando la teoría de semigrupos de operadores lineales?

1.4 Delimitación del estudio

El problema estudiado solo esta centrado en la estabilidad exponencial de la solución impuesto por el termino disipativo memoria y las condiciones dadas para el nucleo.

1.5 Justificación e importancia de la investigación

La justificación radica en que los sistemas de Timoshenko con memoria total, es un modelo que se expresa en términos de una ecuación en derivadas parciales (EDP), la cual no depende solamente de lo que este sucediendo ahora en el material, sino que depende también de lo que ha sucedido antes, es decir, de su memoria, además interviene en un sin fín de problemas de la física e ingeniería y la actualidad de los resultados hacen necesaria una presentación detallada y didáctica de estos temas, la cual no existe en la literatura.

La importancia de este trabajo consiste en que las vigas con cargas actuantes internamente y externamente sirven para el desarrollo de la alta ingeniería, ya que la viga es un modelo estructural flexible, utilizado en proyectos de puentes por esta razón, un estudio como el que proponemos será necesario para quien desee iniciarse en estos temas.

1.6 Objetivos de la investigación: General y Especificos

1.6.1 Objetivo general

Determinar la existencia, la unicidad y la estabilidad exponencial de la solución del sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total.

1.6.2 Objetivo especifico

Demostrar la existencia y unicidad de la solución del sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total.

Demostrar la estabilidad exponencial de la solución del sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1 FUNDAMENTOS TEORICOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo, se analiza el comportamiento asintótico, la existencia y unicidad de la solución del sistema de Timoshenko con memoria total . El estudio de los materiales con memoria surge de los artículos pioneros de Boltzmann y Volterra, en los que buscaban una extensión del concepto de material elástico. La teoría del material elástico suponía que el valor de la tensión local en un tiempo t depende de la historia de la deformación local hasta t. En general, en los materiales con el valor local de alguna cantidad constitutiva como la tensión, flujo de calor, corriente eléctrica, la polarización y magnetización, etc en un momento t depende de la historia de las variables de estado como la deformación, la temperatura, los campos eléctricos y magnéticos, entre otros. La hipótesis de que la historia remota de una variable tiene menos influencia que sus valores en el pasado reciente, fue planteada en la mecánica continua moderna como el principio de memoria que se disipa por Bernard Coleman y Walter Noll.

En los últimos años, el estudio de la estabilización de modelos matemáticos involucra estructuras flexibles sujetas a vibraciones, han sido estimulados por el creciente número de preguntas de interés practico. Entre estos modelos, podemos destacar aquellos relacionados con la ingeniería estructural moderna, que requieren mecanismos de control activos para estabilizar estructuras intrínsecamente inestables o que tienen una amortiguación natural muy débil, como, por ejemplo, los modelos que describen los desplazamientos de vigas. En esta parte, presentaremos un breve resumen de los estudios referentes a modelos de este tipo y que guardan una mayor correlación con las que estudiamos.

Las vigas constituyen un importante tema de investigación, tanto en ingeniería como en matemática. En el campo del análisis matemático, especialmente en la teoría del control, existe un interés en conocer el comportamiento de la energía asociada con los modelos dinámicos. Durante los últimos años, muchos matemáticos se han dedicado a esta tarea, produciendo muchos resultados sobre el comportamiento asintótico de los modelos de vigas, considerando mecanismos disipativos, como de fricción o viscoelástico que actúan en todo el dominio o solo en la frontera.

El estudio de la conducta de sistemas disipativos de tipo asintótica es una rama fuerte y creciente para la investigación en ecuaciones de tipo diferencial parcial. Para encontrar dicho comportamiento muchos autores han utilizado diferentes métodos analíticos tales como el método de la energía y el que explora las propiedades disipativas del semigrupo asociado al sistema.

En la literatura revisada hemos encontrado sistemas acoplados como de Timoshenko, de Bresse y otros con uno o dos o mas términos disipativos, que actúan de tal manera que muchos autores para el caso de la existencia y unicidad de solución usan la teoría de semigrupo o el método de Faedo Galerkin y para el comportamiento asintótico emplean el teorema de Pruss o el teorema de Gearhart o el método de la energía o la técnica de los multiplicadores.

Para el desarrollo de este trabajo vamos a revisar algunos conceptos y resultados importantes como el análisis funcional, los espacios L^p , los espacios de Sobolev, semigrupos de clase C_0 y la estabilidad, las cuales no serán demostrados aunque estas pueden ser fácilmente encontradas en las referencias citadas.

2.2 Bases Teoricas

2.2.1 Análisis Funcional

Definición 2.1.1

Sea $(X,+,\bullet,K)$ un espacio vectorial sobre $K=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se llama norma a toda aplicación $\|\bullet\|: X\to\mathbb{R}^{+}$ tal que satisface:

$(i)\|x\|\geq 0, \forall x\in X$ y $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.

$(ii)\|\beta x\|=|\beta|\|x\|, \forall\beta\in K, x\in X$.

$(iii)\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|; \forall x,y\in X$.

Al par (X , $\|\bullet\|$) se le llama espacio normado.

Definición 2.1.2

Sean (X , $\|\bullet\|$) un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X .

(i) La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x\in X$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|x_n-x\|<\varepsilon$, para todo $n>n_0$.

(ii) La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$, para todo $m,n>n_0$.

Definición 2.1.3

Un espacio vectorial normado $(X,\|\bullet\|_X)$ se llama espacio de Banach si (X,d) es completo, donde d es la métrica inducida por la norma $\|\bullet\|_X$; es decir cuando toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X con respecto a la norma $\|\bullet\|_X$.

Definición 2.1.4

Sean X,Y espacios de Banach y $A: D(A)\subset X\to Y$ un operador lineal con dominio $D(A)$.

i) A es acotado, si existe una constante $C\geq 0$ tal que $\|Au\|_Y\leq C\|u\|_X$, $\forall u\in D(A)$.

ii) A es densamente definido, sí $\overline{D(A)}=X$.

iii) A es cerrado, si su gráfico $G(A)=\{(u,A(u))\in X\times Y: u\in D(A)\}$, es un subespacio cerrado de donde $X\times Y$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{X\times Y}=\left(\|\cdot\|_X^2+\|\cdot\|_Y^2\right)^{1/2}$

Observación 2.1.5:

Sea $(X,\|\bullet\|_X)$ un espacio normado. $\mathcal{L}(X)$ es el espacio vectorial de todos los operadores lineales acotados $A: X\to X$. $\mathcal{L}(X)$ es un espacio normado con la norma definida por $\|A\|_{\mathcal{L}}=\sup\{\|Ax\|_X : x\in X, \|x\|_X=1\}$.

Definición 2.1.6

Sean X e Y espacios vectoriales normados y $T: X\to Y$ un operador lineal.

Diremos que T es continuo en $b\in X$ si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0; \|x-b\|_X\le\delta\Rightarrow\|T(x)-T(b)\|_Y<\varepsilon$$

Teorema 2.1.7

Sean X e Y dos espacios vectoriales normados y $T: X\to Y$ un operador lineal. Entonces T es acotado si y solamente si, T es continuo.

Demostración: Vease Greatti (2018)

Definición 2.1.8

Sea $X\neq\{0\}$ un espacio vectorial normado complejo y $A: D(A)\subseteq X\to X$ un operador lineal. Un valor regular λ de A es un número complejo tal que

1. Existe el operador $(A-\lambda I)^{-1}$.
2. $(A-\lambda I)^{-1}$ es un operador lineal acotado.
3. El dominio de $(A-\lambda I)^{-1}$ es denso en X.

Definición 2.1.9

Definimos el conjunto resolvente de A como el conjunto

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}/\lambda \text{ es valor regular de } A\}.$$

El conjunto $\sigma(A)=\mathbb{C}-\rho(A)$ se llama el espectro de A.

Proposición 2.1.10

Dado X un espacio de Banach y A un operador invertible tal que $A^{-1}\in\mathcal{L}(X)$.

Si $B \in$ L (X) es tal que $\|B\|$L < $1/\|A^{-1}\|$L entonces el operador $A+B$ es lineal, acotado e invertible.

Demostración: Vease Muñoz (2008).

Corolario 2.1.11

Sean X, Y espacios de Banach y $A: X \to Y$ un operador lineal acotado. Si A es biyectivo entonces $A^{-1}: Y \to X$ es un operador lineal acotado.

Demostración: Vease Kreyszig (1989).

Definición 2.1.12

Sean X un espacio vectorial, $\|\bullet\|_1$ y $\|\bullet\|_2$ dos normas en X . Diremos que $\|\bullet\|_1$ es equivalente a $\|\bullet\|_2$ cuando existen constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \forall x \in X .$$

Definición 2.1.13

Sean X e Y dos $\mathbb{C}$- espacios vectoriales. Una aplicación $B: X \times Y \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal si satisface:

$i) B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z), \forall x, y \in X, \forall z \in Y$

$ii) B(x, y+z) = B(x,y) + B(x,z), \forall x \in X, \forall y, z \in Y$

$iii) B(\alpha x, y) = \alpha B(x,y), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

$iv) B(x, \alpha y) = \overline{\alpha} B(x,y), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Definición 2.1.14

Sea X un $\mathbb{C}$- espacio vectorial. Diremos que una forma sesquilineal $B: X \times X \to \mathbb{C}$ es un producto interno si

$i) B(x,y) = \overline{B(y,x)}, \forall x, y \in X$

$ii) B(x,x) \in \mathbb{R}$ y $B(x,x) \geq 0, \forall x \in X$.

$iii) B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Denotaremos un producto interno en X por $(\cdot,\cdot)_X$.

Definición 2.1.15

Sean X e Y espacios vectoriales normados. Diremos que la aplicación $B: X \to Y$ es antilineal cuando

$$B(\alpha x + y) = \overline{\alpha} B(x) + B(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Definición 2.1.16

Sea X un espacio vectorial normado. Diremos que una forma sesquilineal $B: X \times X \to K$ es

$i)$ continua si existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1 \|u\|_X \|v\|_X , \quad \forall u,v \in X$$

$ii)$ coerciva si existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}(B(u,u)) \geq C_2 \|u\|_X^2 , \forall u \in X$$

Definición 2.1.17

Sean X un espacio vectorial y $(.,.)_X$ un producto interno en $X \times X$. Diremos que una norma en X definida por $\|x\|_X = \sqrt{(x,x)_X}$ proviene de un producto interno $(.,.)_X$.

Definición 2.1.18

Sea $(X, \|\bullet\|_X)$ un espacio de Banach. Diremos que X es un espacio de Hilbert cuando la norma $\|\bullet\|_X$ proviene de un producto interno.

Teorema 2.1.19 (Lax Milgram)

Sea $a: H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal continua y coerciva en el espacio de Hilbert H. Entonces, para cada funcional antilineal continuo f sobre H, existe un único $z \in H$ tal que

$$f(x) = a(x,z), \forall x \in H .$$

Demostración: Vease Brezis (2010).

Teorema 2.1.20

Todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Demostración: Vease Kreyszig (1989).

Teorema 2.1.21 (Teorema del Grafico Cerrado)

Sean X, Y espacios de Banach y $A: X \to Y$ un operador lineal. Si A es cerrado, entonces es acotado.

Demostración: Vease Brezis (2010).

Teorema 2.1.22 (Operador Cerrado)

Sean X, Y espacios normados y $A: D(A) \subset X \to Y$ un operador lineal acotado.

i)Si $D(A)$ es un subconjunto cerrado de X, entonces A es cerrado.

ii)Si A es cerrado e Y es un espacio de Banach, entonces $D(A)$ es un subconjunto cerrado de X.

Demostración: Vease Kreyszig (1989).

Teorema 2.1.23

Sean H un espacio de Hilbert e Y un subespacio de H. Entonces:

i) H es reflexivo.

ii) Si H es separable, entonces Y es separable.

iii) Si Y es cerrado en H, entonces $Y=\left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$ y $H=Y\oplus Y^{\perp}$.

iv) Y es denso en H, si y solo si, $Y^{\perp}=\{0\}$.

Demostración: Vease Kreyszig (1989).

2.2.2 Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 2.1.24

Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $0<p<\infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ al espacio vectorial de las clases de funciones $f:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $|f|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue en Ω, osea,

$$L^p(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{C}\,/\,f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|^p\,dx<\infty\}$$

Tenemos que $L^p(\Omega)$ es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall f\in L^p(\Omega)$$

Definición 2.1.25

Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función. Llamamos el supremo esencial de f en Ω al número

$$\sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|=\inf\{K:|f(x)|\le K, \text{casi todo punto en } \Omega\}$$

Definición 2.1.26

Diremos que la función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es esencialmente acotado cuando

$$\sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|<\infty.$$

Definición 2.1.27

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ al espacio vectorial de las clases de funciones $f:\Omega\to\mathbb{C}$ medibles Lebesgue que son esencialmente acotadas en Ω, osea,

$L^\infty(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{C}: f$ es esencialmente acotado c.t en $\Omega\}$,

el cual es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega} ess\left|f(x)\right|, \forall f\in L^\infty(\Omega)$$

Teorema 2.1.28

Si $1\le p\le\infty$ entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Vease Adams (2003).

Proposición 2.1.29

Si $a\ge 0, b\ge 0$ y $p\ge 1$ entonces $(a+b)^p\le 2^p(a^p+b^p)$.

Demostración:

Observemos que: $\left(\max\{a,b\}\right)^p=\max\{a^p,b^p\}\le(a^p+b^p)$

Luego obtenemos,

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\le\left(2\max\{a,b\}\right)^p\\ &\le 2^p(a^p+b^p)\end{aligned}$$

Lema 2.1.30

Si $a\ge 0, b\ge 0$ y $p>1, q>1$ son tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ entonces $ab\le\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

Demostración: Vease Kesavan (2009).

Lema 2.1.31

Sean $a\ge 0, b\ge 0$ y $p>1, q>1$ tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Entonces, $ab\le\varepsilon a^p+c(\varepsilon)b^q$, $\forall\varepsilon>0$.

Demostración:

Observemos que: $ab=\left(p\varepsilon\right)^{1/p}\dfrac{ab}{\left(p\varepsilon\right)^{1/p}}$

$$= ((p\varepsilon)^{1/p} a)(\frac{b}{(p\varepsilon)^{1/p}})$$

Aplicando el lema 2.1.30, tenemos

$$ab \leq \frac{1}{p}((p\varepsilon)^{1/p} a)^p + \frac{1}{q}(\frac{b}{(p\varepsilon)^{1/p}})^q$$

$$= \varepsilon a^p + \frac{b^q}{q(p\varepsilon)^{q/p}}$$

Hacemos $c(\varepsilon) = \frac{1}{q(p\varepsilon)^{q/p}}$ y en la expresión anterior obtenemos,

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q, \forall \varepsilon > 0.$$

Lema 2.1.32

Sea X un espacio vectorial con producto interno $\langle \bullet, \bullet \rangle_X$.

Entonces $\left|\langle x, y\rangle_X\right| \leq \|x\|_X \|y\|_X, \forall x, y \in X$.

Demostración: Vease Oliveira (2012).

Teorema 2.1.33

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean p y q exponentes conjugados con $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\| fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \| f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Demostración: Vease Adams (2003).

Teorema 2.1.34

El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, con producto interno dado por,

$$(u,v) = \int u(x)\bar{v}(x)dx, \quad \forall u,v \in L^2(\Omega).$$

Demostración: Vease Adams (2003).

Definición 2.1.35

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos el soporte de ϕ como el conjunto

$$\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Denotaremos por $C_0(\Omega) = \{\phi \in C(\Omega) : \operatorname{supp}(\phi)$ es compacto$\}$.

Definición 2.1.36

Definimos el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ como el espacio vectorial

$C_0^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to K \,/\, f$ es infinitamente diferenciable y con soporte compacto}.

Proposición 2.1.37

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $1 \leq p < \infty$ entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Demostración: Vease Adams (2003).

Definición 2.1.38

Sea $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L_{loc}^p(\Omega)$ al espacio vectorial de las clases de funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medibles lebesgues tal que $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$, para todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto.

Teorema 2.1.39 (Du Bois Raymond)

Sea $u \in L_{loc}^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

Entonces $u = 0$ casi siempre en Ω.

Demostración: Vease Cavalcanti (2009).

Proposición 2.1.40

Si $u \in L_{loc}^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi_x(x)dxu = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que $u = C$ casi siempre en Ω.

Demostración: Vease Brezis (2010).

Definición 2.1.41

Sean $1 \leq p \leq \infty$, $T > 0$ y $\left(X, \|\bullet\|_X\right)$ un espacio de Banach. El espacio $L^p(0,T;X)$ es el espacio vectorial de la clase de funciones $u : (0,T) \to X$, medibles, tal que $\|u(.)\|_X \in L^p(0,T)$.

En $L^p(0,T;X)$ se define la norma, $\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$.

Por $L^\infty(0,T;X)$ estaremos denotando al espacio vectorial de las funciones o clases medibles $u:(0,T)\to X$ tal que $\sup\limits_{t\in(0,T)} ess\|u(t)\|_X < \infty$.

En este espacio definimos la norma $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup\limits_{t\in(0,T)} ess\|u(t)\|_X$.

Lema 2.1.42

Sea X un espacio de Banach y $1\le p\le\infty$. El espacio $(L^p(0,T;X),\|.\|_{L^p(0,T;X)})$ es un espacio de Banach.

Demostración: Vease Adams (2003).

Lema 2.1.43

Sea $u(\cdot,t)\in L^2(0.L)$ para $t>0$. Entonces,

$$\mathrm{Re}\int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(.,t)\|^2_{L^2(0,L)}, \forall t>0.$$

Demostración:

Sea $u\in L^2(0,L)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(.,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u(x,t)|^2\,dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)\overline{u(x,t)}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}u(x,t)\overline{u(x,t)}dx\end{aligned}$$

Pero recuerde que $2\,\mathrm{Re}\,z = z+\bar{z}$, $\forall z\in\mathbb{C}$, luego tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(.,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \frac{1}{2}\int_0^L (u_t(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{u_t(x,t)})dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^L 2\,\mathrm{Re}(u_t(x,t)\overline{u(x,t)})dx\\ &= \mathrm{Re}\int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)}dx\end{aligned}$$

Definición 2.1.44

Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^+) \bigcap C^1(\mathbb{R}^+)$ tal que $g'(s) \le 0 \le g(s), \forall s \in \mathbb{R}^+$ y H un espacio de Hilbert. Definimos,

$$L_g^2(\mathbb{R}^+, H) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \to H : \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_H^2 \, ds < \infty \right\}$$

el cual es un espacio de Hilbert provisto con un producto interno y norma dados por,

$$(\eta, \xi)_{L_g^2} = \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \xi(s))_H \, ds,$$

$$\|\eta\|_{L_g^2} = (\int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_H^2 ds)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $\eta, \xi \in L_g^2$.

2.2.3 Espacios de Sobolev

Definición 2.1.45

Sean $1 \le p \le \infty, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ y $u, g \in L^p(\Omega)$.

Diremos que g es la derivada débil de orden α de u cuando

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición 2.1.46

Sean $1 \le p \le \infty$ y $m \in \mathbb{Z}_+$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como el subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$ dado por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \text{ existen las derivadas débiles de orden } \alpha \text{ con } |\alpha| \le m \}.$$

En el caso que $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

En el caso en que $N = 1$ denotaremos las derivadas débiles de u de orden uno y dos (cuando existen) por u_x y u_{xx}, respectivamente.

Teorema 2.1.47

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$,$1 \le p \le \infty$ es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} , \quad p=\infty .$$

Demostración: Vease Evans (1998).

Teorema 2.1.48

Los espacios $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ son espacios de Hilbert con producto interno dado por

$$\left(u,v\right)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \left(D^{\alpha}u, D^{\alpha}v\right)_{L^2(\Omega)} , \quad \forall u,v \in H^m .$$

Demostración: Vease Evans (1998).

Definición 2.1.49

Sea $1 \le p < \infty$. El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ se define como

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}^{W^{m,p}} .$$

Teorema 2.1.50 (Desigualdad de Poincaré)

Supongamos que Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

a) Si Ω es acotado, entonces, para todo $1 \le p < \infty$,existe una constante $C_p > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} , \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) .$$

b) Si Ω es conexo de frontera de clase C^1, entonces para todo $1 \le p < \infty$ existe una constante $C_p > 0$, tal que

$$\|u-(u)_{\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \le C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} , \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) ,$$

donde $(u)_{\Omega}$ es la media de u sobre Ω, osea,

$$(u)_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u(x)dx .$$

Demostración: Vease Brezis (2010)..

Observación 2.1.51

Denotaremos los espacios de las funciones de $L^2(\Omega)$ y de $H^1(\Omega)$ que poseen media nula, respectivamente, por $L_*^2(\Omega)$ y $H_*^1(\Omega)$, osea,

$$L_*^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u(x)dx = 0 \right\}$$

$$H_*^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u(x)dx = 0 \right\}$$

Como consecuencia de las desigualdades de Poincaré obtenemos que tanto en el espacio $H_0^1(\Omega)$ como en el espacio $H_*^1(\Omega)$, las normas

$$\|u\|_1 = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ y } \|u\|_2 = \|u_x\|_{L^2(\Omega)},$$

son equivalentes.

Teorema 2.1.52

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $1 \le p \le \infty$. Si $u \in W^{1,p}(I)$, entonces existe una función $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ casi siempre en I. Además de eso,

$$\int_a^b u_x dx = \tilde{u}(b) - \tilde{u}(a),$$

para cualquier $a, b \in \bar{I}$.

Demostración: Vease Brezis (2010).

Teorema 2.1.53

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $1 \le p \le \infty$. Si $u, v \in W^{1,p}(I)$, entonces $uv \in W^{1,p}(I)$ y, además de eso, $(uv)_x = u_x v + u v_x$ y

$$\int_a^b u_x v dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u v_x dx$$

para cualquier $a, b \in \bar{I}$.

Demostración: Vease Brezis (2010).

Teorema 2.1.54

Sea $u \in W^{1,p}(a,b)$. Entonces, $u \in W_0^{1,p}(a,b)$ si y solamente si, $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$, donde $\tilde{u}$ es un representante continuo de u.

Demostración: Vease Brezis (2010).

Proposición 2.1.55

Dados $K \ge 0$ y $h \in L^2(0,L)$. La ecuación $-w_{xx} + Kw = h$ posee una única solución $w \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$.

Demostración:

En el espacio $H_0^1(0,L)$ con la norma $\| \ \|_{H_0^1}$ se define la aplicación

$B[.,.]: H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\to\mathbb{C}$ por

$$B[w,w^*] = K\int_0^L w\overline{w^*}dx + \int_0^L w_x\overline{w_x^*}dx. +$$

De la definición se sigue que $B[\bullet,\bullet]$ es una forma sesquilineal.

Por otro lado $B[\bullet,\bullet]$ es continua, en efecto usando la desigualdad de Holder tenemos,

$$\begin{aligned}\left|B[w,w^*]\right| &\le K\|w\|_{L^2}\|w^*\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2}\|w_x^*\|_{L^2}\\ &\le (K+1)\|w\|_{H^1}\|w^*\|_{H^1}\\ &\le C\|w\|_{H_0^1}\|w^*\|_{H_0^1}.\end{aligned}$$

Además la aplicación $B[\bullet,\bullet]$ es coerciva, en efecto

$$\begin{aligned}B[w,w^*] &= K\|w\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2\\ &\ge \|w_x\|_{L^2}^2 = \|w\|_{H_0^1}^2 .\end{aligned}$$

Ahora definimos $\Gamma: H_0^1(0,L)\to\mathbb{C}$ como,

$$\Gamma(w^*) = \int_0^L hw^*dx$$

De la definición se sigue que Γ es lineal.

De otro lado de las desigualdades de Holder y Poincare se sigue que Γ es acotado, es decir, $\left|\Gamma(w^*)\right|\le C\|w^*\|_{H_0^1}$, donde $C = C_p\|h\|_{L^2}$.

Como $H_0^1(0,L)$ es un espacio de Hilbert, aplicando el Teorema de Lax-Milgran se concluye que existe un único $w\in H_0^1(0,L)$ tal que

$$K\int_0^L w\overline{w^*}dx + \int_0^L w_x\overline{w_x^*}dx = \int_0^L h\overline{w^*}dx\,,\quad \forall w^*\in H_0^1(0,L)$$

De donde se sigue que,

$$\int_0^L w_x\phi_x dx = -\int_0^L (Kw-h)\phi dx\,,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(0,L)\,.$$

De la última igualdad y teniendo en cuenta la definición de derivada débil obtenemos que $\phi\in H^2(0,L)$ y $w_{xx} = Kw - h$.

Teorema 2.1.56 (Sobolev, Gagliardo, Niremberg)

Sea $1 \le p < n$ y $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$. Entonces, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$.

Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \le C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: Vease Muñoz (2004).

Corolario 2.1.57

Si I es un intervalo no acotado y $u \in W^{1,p}(I)$, con $1 \le p < \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

Demostración: Vease Brezis (2010).

Lema 2.1.58

Supongamos que g satisface: $g(t) > 0$; $\exists k_0, k_1 > 0$: $-k_0 g(t) \le g'(t) \le -k_1 g(t), \forall t \ge 0$;

$b_0 = \int_0^\infty g(s)ds, \tilde{b} := b - b_0 > 0$. Entonces, para todo $\theta \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1(0,L))$ con

$\theta_s \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1(0,L))$, $\theta(0) = 0$, tenemos $\lim_{s\to\infty} g(s)\|\theta_x(s)\|_{L^2}^2 = 0$.

Demostración:

Hacemos: $h(s) = g(s)\|\theta_x(s)\|_{L^2}^2$

Como $\theta \in L_g^2$ obtenemos que $h \in L^1(0,\infty)$. Luego derivando tenemos,

$$h'(s) = g'(s)\|\theta_x(s)\|_{L^2}^2 + 2g(s)\langle\theta_x, \theta_{xs}\rangle_{L^2}$$

Aplicando las hipótesis sobre g se tiene que $\int_0^\infty h'(s)ds < \infty$, es decir $h' \in L^1(0,\infty)$.

Como $h \in L^1(0,\infty)$ y $h' \in L^1(0,\infty)$ obtenemos $h \in W^{1,1}(0,\infty)$ y por el corolario 2.1.57 se concluye que $\lim_{s\to\infty} h(s) = 0$, es decir, $\lim_{x\to\infty} g(s)\|\theta_x(s)\|_{L^2}^2 = 0$.

Lema 2.1.59

Supongamos que $\theta \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1(0,L))$, con $\theta_s \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1(0,L))$ y $\theta(0) = 0$, y sea

$u \in L^2(0,L)$, entonces $\int_0^\infty g(s)\int_0^L u\frac{d\theta}{ds}dxds = -\int_0^\infty g'(s)\int_0^L \theta u dxds$

Demostración:

Aplicando integración por partes y $\theta(0)=0$ tenemos,

$$\int_0^\infty g(s)\int_0^L u\frac{d}{ds}\theta dxds=\int_0^L u\lim_{B\to\infty}g(B)\theta(B)-\int_0^L u\int_0^\infty g'(s)\theta dsdx$$

Luego, aplicando la desigualdad de Holder, la desigualdad de Poincare y el lema 2.1.58, tenemos

$$0\le\lim_{B\to\infty}\left|\int_0^L ug(B)\theta(B)dx\right|\le C_p\|u\|_{L^2}\lim_{B\to\infty}g(B)\|\theta_x(B)\|_{L^2}^2=0$$

Como $\lim_{B\to\infty}\left|\int_0^L ug(B)\theta(B)dx\right|=0$ por propiedad se tiene $\lim_{B\to\infty}\int_0^L ug(B)\theta(B)dx=0$.

Así obtenemos, $\int_0^\infty g(s)\int_0^L u\frac{d}{ds}\theta dxds=-\int_0^L u\int_0^\infty g'(s)\theta dsdx$.

2.2.4 Semigrupos: Definiciones y Teoremas

En esta parte, todos los espacios vectoriales están definidos sobre un cuerpo $IK=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.60

Sea X un espacio de Banach. Una familia de operadores lineales y acotados $\{S(t)\}_{t\ge 0}\subset L(X)$ es llamado un semigrupo de operadores lineales acotados en X o simplemente semigrupo en X, si

i) $S(0)=I$, donde I es el operador identidad de $L(X)$.

ii) $S(t+s)=S(t)S(s)$, $\forall t,s\ge 0$.

Definición 2.1.61

Sea X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ un semigrupo en X. El operador lineal $A:D(A)\subset X\to X$ definido por

i) $D(A)=\left\{u\in X:\lim_{t\to 0}\frac{S(t)u-u}{t}\ \ existe\right\}$

ii) $Au=\lim_{t\to 0}\frac{S(t)u-u}{t}$, $\forall u\in D(A)$.

es llamado el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t\ge 0}$.

Observación 2.1.62

i) $D(A)=\{u\in X : Au\in X\}$ es el dominio del operador A .

ii) $S(t)=e^{tA}$, $\forall t\geq 0$ es un semigrupo en X con generador infinitesimal A, donde $A\in \mathrm{L}(X)$.

Definición 2.1.63

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo en X. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado uniformemente continuo, sí $\lim_{t\to 0}\|S(t)-I\|_{L(X)}=0$.

Teorema 2.1.64

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo en X .

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo, si y solo si, $S(t)=e^{tA}$, $\forall t\geq 0$, para algún $A\in L(X)$.

Demostración. Vease Moreira (2012).

Definición 2.1.65

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo en X .

i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado de clase C_0 o C_0 - semigrupo, si $\lim_{t\to 0} S(t)u=u$, $\forall u\in X$.

ii) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado fuertemente continuo, si $\lim_{t\to r} S(t)u=S(r)u$, $\forall u\in X$.

Proposición 2.1.66

Sean X un espacio de Banach y un semigrupo en X .

i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0 - semigrupo, si y solo si, es fuertemente continuo.

ii) Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo, entonces es un C_0 - semigrupo.

Demostración. Vease Pazy (1983).

Definición 2.1.67

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 - semigrupo. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado uniformemente acotado, si existe una constante $M\geq 1$ tal que $\|S(t)\|\leq M$, $\forall t\geq 0$.

Sí $M=1$, es llamado un C_0 - semigrupo de contracciones.

Corolario 2.1.68

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 - semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces $D(A)$ es denso en X y A es un operador lineal cerrado.

Demostración. Vease Pazy (1983).

Definición 2.1.69

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Se denotan por $A^0 = I$ y $A^1 = A$. Supongamos que A^{n-1} este bien definido, entonces se define A^n como

$$D(A^n) = \left\{u \in X : u \in D(A^{n-1}) \text{ y } A^{n-1}u \in D(A)\right\}$$

$$A^n u = A(A^{n-1}u), \ \forall u \in D(A^n).$$

Definición 2.1.70

Sean X un espacio de Banach, X^* su dual y $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. Se denota el valor de $u^* \in X^*$ en $u \in X$, por $\left\langle u, u^* \right\rangle_{X \times X^*}$.

Para cada $u \in X$, se define el conjunto dualidad $F(u) \subset X^*$, como

$$F(u) = \left\{u^* \in X^* : \left\langle u, u^* \right\rangle_{X \times X^*} = \|u\|^2 = \|u^*\|^2 \right\}.$$

A es llamado disipativo, si para cada $u \in D(A)$, se tiene $\operatorname{Re}\left\langle Au, u^* \right\rangle_{X \times X^*} \leq 0$, $\forall u^* \in F(u)$.

Observación 2.1.71

Si $X = H$ es un espacio de Hilbert, entonces por el teorema de representación de Riesz, se obtiene: A es disipativo, si y solo si, $\operatorname{Re}\left\langle Au, u \right\rangle_H \leq 0$, $\forall u \in D(A)$.

Teorema 2.1.72

Sean H un espacio de Hilbert y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A.

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0- semigrupo de contracciones, si y solo si, A es disipativo.

Demostración: Vease Muñoz (2008).

Lema 2.1.73

Sea A un operador lineal cerrado en un espacio de Hilbert H tal que $0 \in \rho(A)$. Si $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$ entonces existe $w \in \mathbb{R}$ con $\|A^{-1}\|^{-1} \leq |w| < \infty$ tal que $\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$ y

$$\sup\left\{\left\|\left(i\beta I - A\right)^{-1}\right\|; |\beta| < |w|\right\} = \infty .$$

Demostracion: Vease Lazaro (2015)

Corolario 2.1.74

Si $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador lineal y cerrado en un espacio de Hilbert H y $0 \in \rho(A)$. Si $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$ entonces existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ y existen sucesiones $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ y $\{U_n\}_{n\geq 1} \subset D(A)$ tales que:

$i)$ $|\lambda_n| < |\lambda_0|, \forall n \geq 1$ y $\lambda_n \to \lambda_0$.

$ii)$ $\|U_n\|_H = 1$, $\forall n \geq 1$

$iii)$ $\|(i\lambda_n I - A)U_n\|_H \to 0$

Demostración: Vease Lazaro (2015)

Corolario 2.1.75

Si $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador lineal y cerrado en un espacio de Hilbert H y $0 \in \rho(A)$. Si $\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup \left\|\left(i\lambda I - A\right)^{-1}\right\|_{L(H)} = \infty$ entonces existen sucesiones

$\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ y

$\{U_n\}_{n\geq 1} \subset D(A)$ tales que:

$i)$ $|\lambda_n| \to +\infty$

$ii)$ $\|U_n\|_H = 1, \forall n \geq 1$

$iii)$ $\|(i\lambda_n I - A)U_n\|_H \to 0$

Demostración: Vease Liu&Zheng (1999)

Teorema 2.1.76

Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal disipativo.

$i)$ Si $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = H$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$, $\forall \lambda > 0$.

$ii)$ Si $\operatorname{Im}(I - A) = H$, entonces $\overline{D(A)} = H$.

Demostracion: Vease Pazy (1983).

Teorema 2.1.77 (Lumer – Phillips)

Sean H un espacio de Hilbert y $A: D(A) \subset H \to H$ un operador lineal con $\overline{D(A)} = H$ definido.

i) Si A es disipativo y existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A) = H$, entonces A es generador infinitesimal de un C_0- semigrupo de contracciones.

ii) Si A es generador infinitesimal de un C_0- semigrupo de contracciones, entonces A es disipativo y $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = H$, $\forall \lambda > 0$.

Demostración. Ver Pazy (1983).

Colorario 2.1.78 (Corolario de Liu)

Sean H un espacio de Hilbert y $A: D(A) \subset H \to H$ un operador lineal disipativo con dominio $D(A)$ denso en H. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 .

Demostración. Vease Muñoz (2008).

Teorema 2.1.79

Si $A: D(A) \subset X \to X$ es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 sobre X, y $U_0 \in D(A)$. Entonces el problema de Cauchy abstracto o también llamado problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} U_t = AU, t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

tiene una única solución fuerte o clásica U tal que,

$$U \in C([0,\infty[, D(A)) \cap C^1([0,\infty[, X)$$

Demostración: Vease Zheng (2004).

Definición 2.1.80

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Decimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, si existen constantes $\mu > 0$ y $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{-\mu t}$, $\forall t \geq 0$.

Teorema 2.1.81 (Gearhart)

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo de contracciones sobre un espacio de Hilbert H, generado por A. El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, si y solo si

a) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y

b) $\limsup\limits_{|\alpha|\to+\infty} \left\| (i\alpha I - A)^{-1} \right\|_{L(H)} < \infty$.

Demostración. Vease Gearhart (1978).

Teorema 2.1.82 (Pruss – Huang – Renardy)

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo sobre un espacio de Hilbert H,generado por A. El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$es exponencialmente estable, si y solo si,

a) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y

b) Existe $C > 0$ tal que $\left\| (i\alpha I - A)^{-1} \right\|_{L(H)} \leq C$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Vease Pruss (1984).

2.3 Marco Conceptual

Semigrupos: Un semigrupo de operadores lineales es una extensión de la exponencial de una matriz elevada al exponencial de un operador lineal posiblemente no acotado y definido en general sobre espacios de Banach. La teoría de semigrupos se desarrollo para resolver EDP, pues mediante esta teoría podemos conocer el comportamiento asintótico de soluciones mediante el estudio de ciertos operadores lineales.

Existencia de solución: Se establece resolviendo el problema y encontrando al menos una función que verifica las condiciones de regularidad dadas.

Unicidad de solución: Se busca demostrar que el problema dado tiene una única solución y si se repite en condiciones idénticas se espera los mismos resultados.

Estabilidad de un sistema: Se le denomina sistema estable, cuando la energía asociada al mismo tiende a cero mientras el tiempo va al infinito.

Problema bien puesto: Es el problema que posee ciertas características como: la existencia de solución, unicidad de solución y dependencia continua con con respecto a las condiciones del este.

Metodo de la energía: Consiste en trabajar con la energía asociada al sistema para encontrar un comportamiento asintótico o polinomial.

Memoria: El termino de convolucion usual, $g * \psi_{xx}(x,t) = \int_0^t g(s)\psi_{xx}(x,t-s)ds$ representa el efecto de memoria con una función g de valor real de clase C^2 y para $t = +\infty$ se llama historia.Este termino lleva información de todos los instantes $s < t$ hacia dentro del material en el instante t. Sirve como un termino de amortiguamiento para la estabilidad del sistema.

Memoria total: Es la memoria que interviene en cada ecuación del sistema acoplado.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLOGICO

3.1. Hipótesis central de la investigación

La solución del sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total existe, es única y tiene estabilidad exponencial.

3.2. Variables e indicadores de la investigación

3.2.1. Definición conceptual

Variable1: Existencia y Unicidad

Teorema 1.

Sea H un espacio de Hilbert y el operador lineal $A: D(A) \subset H \to H$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0. Si $U_0 \in D(A)$, entonces el problema abstracto de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} U_t = AU, t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{array} \right. \qquad \ldots(5)$$

tiene una única solución $U(t) = S(t)U_0$

satisfaciendo $U \in C\big(0, +\infty), D(A)\big) \cap C^1(0, +\infty), H)$.

Teorema 2. (Existencia y Unicidad)

Sea g_i el núcleo y $U_0 \in D(A)$, entonces el problema (5) presenta una única solución tal que $U \in C\big(\mathbb{R}^+, D(A)\big) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H)$.

Variable 2: Estabilidad Exponencial

Teorema 3. (Método desarrollado por Z. Lui y S. Zheng)

Si $U_0 \in H$ es una solución del sistema dado entonces la solución decae exponencialmente con relación al tiempo. Esto es, se presentan constantes positivas C_1 y γ tal que $E(t) \leq C_1 E(0) e^{-\gamma t}$.

3.2.2. Definición operacional

Variable 1: Existencia y Unicidad

Existe y es única la solución del sistema dado si se cumple que el operador lineal asociado al problema abstracto de Cauchy es un generador infinitesimal de un semigrupo teniendo en cuenta los teoremas 1 y 2.

Variable 2: Estabilidad Exponencial

La estabilidad exponencial del sistema se cumple si la energía asociada al sistema decae exponencialmente cuando el tiempo crece indefinidamente; teniendo en cuenta el teorema 3.

3.2.3. Indicadores

Variable 1: Existencia y Unicidad

- Transformar el sistema dado en un problema abstracto de Cauchy.
- Demostrar que el operador lineal asociado al problema abstracto de Cauchy es un generador infinitesimal de un semigrupo.

Variable 2: Estabilidad Exponencial

- Transformar las ecuaciones del sistema introduciendo la variable memoria y con condiciones para el núcleo g_i.
- Determinar que la energía asociada al sistema decae exponencialmente con respecto al tiempo.

3.3. Métodos de la Investigación

El método es hipotético deductivo. Bernal (2006) menciona “es el conjunto de teorías y definiciones básicas, elaborando en forma deductiva las consecuencias empíricas de las Hipótesis. En tal sentido llega a las conclusiones a través de un procedimiento de cálculo formal”.

Tipo Básica. Hernández, Fernández y Baptista (2010) “Básica; porque busca ampliar los conocimientos y teorías”

3.4. Diseño o esquema de la investigación

El diseño es no experimental. Hernández, Fernández y Baptista (2010) menciona “Las investigaciones no experimentales no manipulan o varían a las variables; sino se estudian fenómenos en su estado natural dado un contexto para después analizarlos”.

3.5. Población y muestra

La población es definida como el conjunto de personas, animales, cosas, etc con una misma característica, en esta investigación es el sistema de Timoshenko y la muestra considerándose una parte representativa de la población en la presente investigación es el sistema de Timoshenko (1)-(4) con memoria total.

3.6. Actividades del proceso investigativo

.Introducción de las nuevas variables, $\eta_1(x,t,s)=\varphi(x,t)-\varphi(x,t-s)$ y $\eta_2(x,t,s)=\psi(x,t)-\psi(x,t-s)$ para transformar el sistema en un problema abstracto de Cauchy.

. Obtención de la energía, del espacio de fase y del dominio del operador lineal.

. Determinación de que el operador lineal es disipativo.

. Determinación de que el operador lineal es un generador infinitesimal.

. Obtención de estimativas a priori.

. Obtención de la estabilidad de la solución.

3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación

La técnica usada es el análisis documental: “Se recolecta información de revistas, artículos, libros sobre el sistema de Timoshenko (1) – (4) ”. Los instrumentos son las fichas de contenido y fichas bibliográficas.

3.8. Procedimiento para la recolección de datos

Consulta a especialistas en ecuaciones en derivadas parciales en particular en el tema de semigrupos.

Selecciona material bibliográfico en bibliotecas especializadas.

Desarrolla definiciones operacionales y procedimientos para la estabilidad de la solución.

3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos.

Una de las técnicas es la revisión de bibliografía especializada, es decir libros, tesis y artículos de la materia. Utilizando resultados del análisis funcional y de la teoría de semigrupos, entre ellos: los espacios L^p, el teorema de Lax Milgran, los espacios de Sobolev, el teorema de Lummer Phillips, corolario de Liu, teorema de Pruss, teorema de Gearhart y el método de la energía o método de los multiplicadores, se logra demostrar la existencia de solución, la unicidad de la solución y la estabilidad de la solución del sistema (1) – (4).

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSION

4.1 Resultados

En este trabajo demostraremos la estabilidad exponencial, la existencia y la unicidad de solución del sistema de Timoshenko con memoria total usando resultados de la teoría de semigrupos, como el corolario de Liu y el teorema de Gearhart.

4.1.1 El problema de Timoshenko con memoria total

En este capitulo vamos a analizar la existencia y unicidad de solución del problema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x - b\varphi_{xx} + \int_0^{+\infty} g_1(s)\varphi_{xx}(x,t-s)ds = 0, en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^{+\infty} g_2\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)ds + k\left(\varphi_x + \psi\right) = 0, en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \tag{1.2}$$

con condiciones iniciales

$$\varphi\left(x,0\right) = \varphi_0\left(x\right), \varphi_t\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), \psi\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right), \psi_t\left(x,0\right) = \psi_1\left(x\right), x \in \left(0,L\right) \tag{1.3}$$

y condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$\varphi\left(0,t\right) = \varphi\left(L,t\right) = \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0; t \geq 0 \tag{1.4}$$

donde ρ_1, ρ_2, k y b son constantes positivas.

Las funciones φ y ψ son respectivamente, el desplazamiento transversal de una viga y el angulo de rotación.

Nuestro interés principal es analizar la conducta asintotica de las soluciones de dicho sistema , usaremos para tal efecto los resultados de Gearhart. Para resolver este problema usaremos la teoría de semigrupos, para ello se debe hacer algunas modificaciones en nuestro sistema inicial (1.1)-(1.4), introducimos el siguiente cambio según la idea de Dafermos:

$$\eta_1^t(x,s) := \varphi(x,t) - \varphi(x,t-s) \tag{1.5}$$

$$\eta_2^t\left(x,s\right) := \psi\left(x,t\right) - \psi\left(x,t-s\right) \tag{1.6}$$

Luego tenemos,

$$\varphi_{xx}(x,t-s) = \varphi_{xx}(x,t) - \eta_{1xx}^t(x,s)$$

$$\psi_{xx}\left(x,t-s\right) = \psi_{xx}\left(x,t\right) - \eta_{2xx}^t\left(x,s\right)$$

Entonces reemplazando en (1.1) y (1.2), el sistema inicial (1.1)-(1.4) es reescrito como

$$\rho_1\varphi_{tt}-\tilde{b}_1\varphi_{xx}-\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}(x,s)ds-k(\varphi_x+\psi)_x=0 \qquad (1.7)$$

$$\rho_2\psi_{tt}-\tilde{b}_2\psi_{xx}-\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds+k(\varphi_x+\psi)=0 \qquad (1.8)$$

$$\eta_{1t}+\eta_{1s}-\varphi_t=0 \qquad (1.9)$$

$$\eta_{2t}+\eta_{2s}-\psi_t=0 \qquad (1.10)$$

las condiciones iniciales son dadas por

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\psi(x,0)=\psi_0(x),\psi_t(x,0)=\psi_1(x),x\in(0,L) \qquad (1.11)$$

$$\eta_{1,0}(x,s)=\varphi_0(x,0)-\varphi_0(x,-s),\ \eta_{2,0}=\psi_0(x,0)-\psi_0(x,-s) \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \qquad (1.12)$$

y con condiciones de frontera

$$\varphi(0,t)=\varphi(L,t)=\psi(0,t)=\psi(L,t)=\eta_i^t(0,s)=\eta_i^t(L,s)=0; s,t\geq 0,\ i=1,2 \qquad (1.13)$$

La función $g_i:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, es conocida como núcleo de defraccion y tiene las siguientes hipótesis:

$$g_i(t)>0, \exists k_0,k_1,k_2>0: -k_0g_i(t)\leq g_i'(t)\leq -k_1g_i(t),\ |g_i''(t)|\leq k_2g_i(t), \forall t\geq 0 \qquad (1.14)$$

$$\tilde{b}_i:=\left(b-\int_0^{+\infty} g_i(s)ds\right)>0,\ i=1,2 \qquad (1.15)$$

Además se demuestra que $\int_0^{\infty} g_i(s)ds$ converge , en efecto:

Multiplicando a la desigualdad $g_i'(t)\leq -k_1g_i(t)$, $\forall t\geq 0$, por e^{k_1t}, obtenemos $\frac{d}{dt}\left\{e^{k_1t}g_i(t)\right\}\leq 0$, $\forall t\geq 0$

Luego integrando de 0 a t obtenemos $e^{k_1t}g_i(t)-g_i(0)\leq 0$, $\forall t\geq 0$ es decir $g_i(t)\leq g_i(o)e^{-k_1t}$, $\forall t\geq 0$.

De igual manera obtenemos $g_i(0)e^{-k_0t}\leq g_i(t)$, $\forall t\geq 0$.

Ahora juntando los resultados anteriores e integrando de 0 a ∞ obtenemos

$$\int_0^\infty g_i(0)e^{-k_0 t}dt \le \int_0^\infty g_i(t)dt \le \int_0^\infty g_i(0)e^{-k_1 t}dt\,,$$

lo que implica que $\int_0^\infty g_i(t)dt$ converge.

Hacemos: $b_0 = \int_0^\infty g_i(s)ds > 0,$ para $i = 1,2$.

Por la hipótesis (1.14) sobre el nucleo g es posible definir $L_g^2\left(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)\right)$ como el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrable con valores en $H_0^1(0,L)$ definidas en el espacio de medida $\left(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L), |g|\,ds\right)$ provisto del producto interno $\left\langle \zeta^1;\zeta^2\right\rangle_{L_g^2} = \int_0^L\int_0^\infty g(s)\zeta_x^1(s)\overline{\zeta_x^2}(s)dsdx$

y la norma $\|\zeta\|_{L_g^2} = \left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)\left|\zeta_x(s)\right|^2 dsdx\right)^{1/2}$

4.1.2. Existencia y unicidad

En esta parte se expresa el sistema (1.7) – (1.13) como un problema abstracto de Cauchy con el fin de mostrar que se acepta una única solución, utilizando el corolario de Liu. En primer lugar, se determina la energía relacionada al sistema (1.7) – (1.13) , luego la existencia del semigrupo asociado al sistema (1.7) – (1.13) y, finalmente, que el operador definido es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0.

4.1.2.1 Energia del sistema y espacio de fase

Hallaremos la energía relacionada al sistema (1.7) - (1.13), para ello multiplicamos por φ_t y ψ_t en las ecuaciones (1.7) y (1.8) respectivamente y aplicando producto interno en $L^2(0,L)$ se obtiene:

$$\langle \rho_1\varphi_{tt},\varphi_t\rangle - \langle \tilde{b}_1\varphi_{xx},\varphi_t\rangle - \langle \int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds,\varphi_t\rangle - \langle k(\varphi_x+\psi)_x,\varphi_t\rangle = 0$$

$$\langle \rho_2\psi_{tt},\psi_t\rangle - \langle \tilde{b}_2\psi_{xx},\psi_t\rangle - \langle \int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds,\psi_t\rangle + \langle k(\varphi_x+\psi),\psi_t\rangle = 0$$

Luego,

$$\rho_1\int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t dx - \tilde{b}_1\int_0^L \varphi_{xx}\varphi_t dx - \int_0^L\left(\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds\right)\varphi_t dx - k\int_0^L(\varphi_x+\psi)_x\varphi_t dx = 0 \qquad (1.16)$$

$$\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\psi_t dx - \tilde{b}_2\int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx - \int_0^L(\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds)\psi_t dx + k\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi_t dx = 0 \quad (1.17)$$

Luego integrando por partes, usando (1.9), (1.10) y condiciones de frontera (1.13), tenemos

- $$\rho_1\int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1|\varphi_t|^2 dx \qquad (1.18)$$

- $$-\tilde{b}_1\int_0^L \varphi_{xx}\varphi_t dx = -\tilde{b}_1[\varphi_x\varphi_t|_0^L - \int_0^L \varphi_x\varphi_{tx}dx]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \tilde{b}_1|\varphi_x|^2 dx \qquad (1.19)$$

- $$-\int_0^L(\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds)\varphi_t dx = -[\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)ds)\varphi_t|_0^L - \int_0^L(\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)ds)\varphi_{tx}dx]$$
$$= \int_0^L(\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)[\eta_{1t}^t(x,s)+\eta_{1s}^t(x,s)]_x ds)dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|\eta_{1x}^t(x,s)\right|^2 dsdx$$
$$+\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)\eta_{1sx}^t(x,s)dsdx \qquad (1.20)$$

- $$-k\int_0^L(\varphi_x+\psi)_x\varphi_t dx = -k[(\varphi_x+\psi)\varphi_t|_0^L - \int_0^L(\varphi_x+\psi)\varphi_{tx}dx]$$
$$= k\int_0^L(\varphi_x+\psi)\varphi_{tx}dx \qquad (1.21)$$

- $$\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\psi_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2|\psi_t|^2 dx \qquad (1.22)$$

- $$-\tilde{b}_2\int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx = -\tilde{b}_2[\psi_x\psi_t|_0^L - \int_0^L \psi_x\psi_{tx}dx]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \tilde{b}_2|\psi_x|^2 dx \qquad (1.23)$$

- $$-\int_0^L(\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds)\psi_t dx = -[\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)ds)\psi_t|_0^L - \int_0^L(\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)ds)\psi_{tx}dx]$$

$$= \int_0^L \left(\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)[\eta_{2t}^t(x,s) - \eta_{2s}^t(x,s)]_x \, ds \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|\eta_{2x}^t(x,s)\right|^2 dsdx$$

$$+ \int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)\eta_{2sx}^t(x,s)dsdx \qquad (1.24)$$

Luego sustituyendo (1.18), (1.19), (1.20), (1.21), (1.22), (1.23) y (1.24) en (1.16)-(1.17) se obtiene,

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(\rho_1\int_0^L|\varphi_t|^2 dx + \rho_2\int_0^L|\psi_t|^2 dx + \tilde{b}_1\int_0^L|\varphi_x|^2 dx + \tilde{b}_2\int_0^L|\psi_x|^2 dx + \int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|\eta_{1x}^t(x,s)\right|^2 dsdx$$

$$+ \int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|\eta_{2x}^t(x,s)\right|^2 dsdx + k\int_0^L|\varphi_x + \psi|^2 dx] = -\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)\eta_{1sx}^t(x,s)dsdx -$$

$$\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)\eta_{2sx}^t(x,s)dsdx$$

$$(1.25)$$

Se define la energía del sistema como

$$E(t) := \frac{1}{2}\left\{ \rho_1\int_0^L|\varphi_t|^2 dx + \rho_2\int_0^L|\psi_t|^2 dx + \tilde{b}_1\int_0^L|\varphi_x|^2 dx + \tilde{b}_2\int_0^L|\psi_x|^2 dx + k\int_0^L|\varphi_x + \psi|^2 dx \right.$$

$$\left. + \int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\left|\eta_{1x}^t(x,s)\right|^2 dsdx + \int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\left|\eta_{2x}^t(x,s)\right|^2 dsdx \right\} \qquad (1.26)$$

Luego reemplazando (1.26) en (1.25) obtenemos,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)\eta_{1sx}^t(x,s)dsdx - \int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)\eta_{2sx}^t(x,s)dsdx \qquad (1.27)$$

De (1.14) se tiene $g_i'(s) \le 0, \forall i = 1,2$, de (1.5) tenemos $\eta_{ix}^t(x,0) = 0, \forall i = 1,2$ y del lema 2.1.5.8 en los términos del lado derecho de (1.27) obtenemos,

$$-\int_0^L\int_0^{+\infty} g_i(s)\eta_{ix}^t(x,s)\eta_{isx}^t(x,s)dsdx = -\int_0^L (\lim_{w\to\infty}\int_0^w \frac{1}{2}g_i(s)\frac{d}{ds}\left|\eta_{ix}^t(x,s)\right|^2)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^L \left\{ \lim_{w\to\infty}(g_i(w)\left|\eta_{ix}^t(x,w)\right|^2 - g_i(0)\left|\eta_{ix}^t(x,0)\right|^2 \right.$$

$$\left. -\int_0^w g_i'(s)\left|\eta_{ix}^t(x,s)\right|^2 ds) \right\} dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^L \left\{ \lim_{w\to\infty}(g_i(w)\left|\eta_{ix}^t(x,w)\right|^2 \right.$$

$$\left. -\int_0^w g_i'(s)\left|\eta_{ix}^t(x,s)\right|^2 ds) \right\} dx$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{w\to\infty} g_i(w)\left\|\eta_{ix}^t(x,w)\right\|_{L^2}^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_i'(s)\left|\eta_{ix}^t(x,s)\right|^2 dsdx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_i'(s)\left|\eta_{ix}^t(x,s)\right|^2 dsdx$$

$$\le -\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_i(s)\left|\eta_{ix}^t(x,s)\right|^2 dsdx$$

$$\le 0,\ \ \forall i=1,2 \qquad (1.28)$$

De (1.28) en (1.27) se obtiene,

$$\frac{d}{dt}E(t)\le 0, \text{ para todo } t\ge 0 \qquad (1.29)$$

Por consiguiente, la energía relacionada al sistema (1.7) – (1.10) es decreciente y en consecuencia el sistema es disipativo.

A continuación, se determina el espacio de fase H relacionado al sistema (1.7) – (1.13), de (1.26) para que la energía este bien definida, debemos tener que,

$\varphi_t, \psi_t, \varphi_x, \psi_x, (\varphi_x+\psi) \in L^2(0,L)$ y $\eta_1^t \in L_{g_1}^2, \eta_2^t \in L_{g_2}^2$

Puesto que $\varphi_x, \psi_x \in L^2(0,L)$ y por las condiciones frontera (1.13) se sigue que, $\varphi, \psi \in H_0^1(0,L)$. Tomando $U=(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\eta_1^t,\eta_2^t)^T$, donde T denota el operador transpuesta, y de (1.26), definimos el espacio de fase H, dado por

$$\mathrm{H}=H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))\times L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))$$

(1.30)

4.1.2.2 Existencia del semigrupo

Con el objetivo de evidenciar la existencia de soluciones se utiliza la teoría de semigrupo. Por ello, se replantea el modelo inicial (1.7) – (1.13) mediante un sistema de primer orden a través del tiempo con condiciones iniciales, es decir,

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{dU(t)}{dt}=AU(t)\\ U(0)=U_0\end{array}\right. \tag{1.31}$$

denominado Problema de valor inicial abstracto o Problema de Cauchy.

Considerando $U=(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\eta_1^t,\eta_2^t)^T$, tenemos del sistema (1.7) – (1.13)

$$\varphi_t=\varphi_t$$

$$\varphi_{tt}=\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}\varphi_{xx}+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty}g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds+\frac{k}{\rho_1}\left(\varphi_x+\psi\right)_x$$

$$\psi_t=\psi_t$$

$$\psi_{tt}=\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty}g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds-\frac{k}{\rho_2}\left(\varphi_x+\psi\right)$$

$$\eta_{1t}^t=\varphi_t-\eta_{1s}^t$$

$$\eta_{2t}^t=\psi_t-\eta_{2s}^t$$

Luego,

$$U_t=\begin{pmatrix}\varphi_t\\ \varphi_{tt}\\ \psi_t\\ \psi_{tt}\\ \eta_{1t}^t\\ \eta_{2t}^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I & 0 & 0 & 0 & 0\\ (\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty}g_1(s)\partial_x^2 ds & 0\\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0\\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2}I+\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\partial_x^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty}g_2(s)\partial_x^2 ds\\ 0 & I & 0 & 0 & -\partial_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\partial_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi_t\\ \psi\\ \psi_t\\ \eta_1^t\\ \eta_2^t\end{pmatrix}$$

donde, $U(0)=\begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \varphi_t(0)\\ \psi(0)\\ \psi_t(0)\\ \eta_1^t(0)\\ \eta_2^t(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\\ \psi_0\\ \psi_1\\ \eta_{1,0}^t\\ \eta_{2,0}^t\end{pmatrix}=U_0$

y el operador lineal $A:D(A)\subset \mathrm{H}\rightarrow \mathrm{H}$ es definido por

$$A=\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\partial_x^2 ds & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{-k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2}I+\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\partial_x^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\partial_x^2 ds \\ 0 & I & 0 & 0 & -\partial_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\partial_s \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

donde $D(A)$ es el dominio del operador A y U satisface formalmente (1.31).

Por definición, el dominio del operador A es el conjunto sobre el cual el operador está bien definido sobre el espacio de fase, esto es,

$$D(A)=\{U\in \mathrm{H} : AU\in \mathrm{H}, \eta_i^t(x,0)=0, i=1,2\}$$

Tener en cuenta, que para la elección de $D(A)$, A debe ser un operador cerrado y densamente definido sobre H. Asi para $U=(\varphi,u,\psi,v,\eta_1^t,\eta_2^t)^T$ tenemos,

$$AU=\begin{pmatrix} u \\ (\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\varphi_{xx}+\frac{k}{\rho_1}\psi_x+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds \\ v \\ -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x-\frac{k}{\rho_2}\psi+\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds \\ u-\eta_{1s}^t \\ v-\eta_{2s}^t \end{pmatrix}\in \mathrm{H}$$

de donde

$$u\in H_0^1(0,L) \quad (1.33)$$

$$(\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\varphi_{xx}+\frac{k}{\rho_1}\psi_x+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds\in L^2(0,L) \quad (1.34)$$

$$v\in H_0^1(0,L) \quad (1.35)$$

$$-\frac{k}{\rho_2}\varphi_x-\frac{k}{\rho_2}\psi+\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds\in L^2(0,L) \quad (1.36)$$

$$u-\eta_{1s}^t\in L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L)) \quad (1.37)$$

$$v-\eta_{2s}^t\in L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L)) \quad (1.38)$$

Como $\psi \in H_0^1(0,L)$ se deduce que $\psi_x \in L^2(0,L)$, luego en (1.34) se obtiene $(\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\varphi_{xx}+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds \in L^2(0,L)$

De la misma forma, en (1.36) se obtiene,

$$\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds \in L^2(0,L)$$

De (1.33) se tiene que $u_x \in L^2(0,L)$ y como $\int_0^{+\infty} g_1(s)ds < b$ se obtiene $u \in L_{g_1}^2$ de ahí en (1.37) tenemos, $\eta_{1s}^t \in L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))$.

De igual manera se obtiene, $\eta_{2s}^t \in L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))$.

Por lo tanto, el dominio del operador A es definido por

$$D(A)=\Big\{U \in H: u,v \in H_0^1(0,L);(\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\varphi_{xx}+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds \in L^2(0,L)$$

$$\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds \in L^2(0,L);\eta_{is}^t \in L_{g_i}^2;\eta_i^t(x,0)=0;i=1,2\Big\}$$

En el espacio H definimos el producto interno a partir de la energía, dado por

$$\langle U,V\rangle_{\mathrm{H}}=\langle (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6),(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)\rangle_{\mathrm{H}}$$

$$=\rho_1\langle u_2,v_2\rangle_{L^2}+\rho_2\langle u_4,v_4\rangle_{L^2}+\tilde{b}_1\langle u_{1x},v_{1x}\rangle_{L^2}+\tilde{b}_2\langle u_{3x},v_{3x}\rangle_{L^2}$$

$$+k\langle u_{1x}+u_3,v_{1x}+v_3\rangle_{L^2}+\langle u_5,v_5\rangle_{L_{g_1}^2}+\langle u_6,v_6\rangle_{L_{g_2}^2}$$

$$=\rho_1\int_0^L u_2\bar{v}_2dx+\rho_2\int_0^L u_4\bar{v}_4dx+\tilde{b}_1\int_0^L u_{1x}\bar{v}_{1x}+\tilde{b}_2\int_0^L u_{3x}\bar{v}_{3x}dx$$

$$+k\int_0^L (u_{1x}+u_3)\overline{(v_{1x}+v_3)}dx+\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)u_{5x}\bar{v}_{5x}dsdx+\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)u_{6x}\bar{v}_{6x}dsdx \quad (1.39)$$

Asi H es un espacio de Hilbert y su correspondiente norma es dada por

$$\|U\|_{\mathrm{H}}^2=\rho_1\|u_2\|_{L^2}^2+\rho_2\|u_4\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\|u_{3x}\|_{L^2}^2+k\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}^2+\|u_5\|_{L_{g_1}^2}^2+\|u_6\|_{L_{g_2}^2}^2$$

(1.40)

Lema 4.1

Definimos la norma de la suma,

$$\|U\|_S=\|u_1\|_{H_0^1}+\|u_2\|_{L^2}+\|u_3\|_{H_0^1}+\|u_4\|_{L^2}+\|u_5\|_{L_{g_1}^2}+\|u_6\|_{L_{g_2}^2}$$

La norma $\|U\|_{\mathrm{H}}$ es equivalente a la norma $\|U\|_S$.

Demostración:

Por demostrar,

$$C_1\|U\|_S \le \|U\|_{\mathrm{H}} \le C_2\|U\|_S\,, \quad C_1>0, C_2>0$$

De la desigualdad triangular y de la proposición 2.1.29 se tiene,

$$\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}^2 \le (\|u_{1x}\|_{L^2}+\|u_3\|_{L^2})^2 \le 4(\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|u_3\|_{L^2}^2)$$

Luego tenemos,

$$\|U\|_{\mathrm{H}}^2 \le \rho_1\|u_2\|_{L^2}^2+\rho_2\|u_4\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\|u_{3x}\|_{L^2}^2+4k(\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|u_3\|_{L^2}^2)+\|u_5\|_{L^2_{g_1}}^2+\|u_6\|_{L^2_{g_2}}^2$$

$$\le \max\left\{\tilde{b}_1,4k\right\}\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\rho_1\|u_2\|_{L^2}^2+\max\left\{\tilde{b}_2,4k\right\}(\|u_3\|_{L^2}^2+\|u_{3x}\|_{L^2}^2)+\rho_2\|u_4\|_{L^2}^2$$

$$+\|u_5\|_{L^2_{g_1}}^2+\|u_6\|_{L^2_{g_2}}^2$$

$$\le \max\left\{\tilde{b}_1,4k\right\}\|u_1\|_{H_0^1}^2+\rho_1\|u_2\|_{L^2}^2+\max\left\{\tilde{b}_2,4k\right\}\|u_3\|_{H_0^1}^2+\rho_2\|u_4\|_{L^2}^2+\|u_5\|_{L^2_{g_1}}^2+\|u_6\|_{L^2_{g_2}}^2$$

$$\le \frac{C_2^2}{6}(\|u_1\|_{H_0^1}^2+\|u_2\|_{L^2}^2+\|u_3\|_{H_0^1}^2+\|u_4\|_{L^2}^2+\|u_5\|_{L^2_{g_1}}^2+\|u_6\|_{L^2_{g_2}}^2)$$

$$\le \frac{C_2^2}{6}(\|U\|_S^2+\|U\|_S^2+\|U\|_S^2+\|U\|_S^2+\|U\|_S^2+\|U\|_S^2)$$

$$\le C_2^2\|U\|_S^2, \quad \text{con } \frac{C_2^2}{6}=\max\left\{\rho_1,\rho_2,4k,1,\tilde{b}_1,\tilde{b}_2\right\}.$$

de donde,

$$\|U\|_{\mathrm{H}} \le C_2\|U\|_S \tag{1.41}$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad de Poincare y la desigualdad triangular se tiene,

$\|u_3\|_{H_0^1} \le C\ \|u_{3x}\|_{L^2}$ y

$\|u_1\|_{H_0^1} \le C\ \|u_{1x}\|_{L^2} \le C\ (\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}+\|u_3\|_{L^2})$

Luego tenemos,

$$\|U\|_S \le C\ (\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}+\|u_3\|_{L^2})+\|u_2\|_{L^2}+\|u_3\|_{H_0^1}+\|u_4\|_{L^2}+\|u_5\|_{L^2_{g_1}}+\|u_6\|_{L^2_{g_2}}$$

$$\le C\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}+\|u_2\|_{L^2}+C(\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}+\|u_{1x}\|_{L^2})+C\|u_{3x}\|_{L^2}+\|u_4\|_{L^2}$$

$$+\|u_5\|_{L^2_{g_1}}+\|u_6\|_{L^2_{g_2}}$$

$$\leq \frac{2C}{k}\|U\|_{\mathrm{H}}+\frac{1}{\rho_1}\|U\|_{\mathrm{H}}+\frac{C}{\tilde{b}_1}\|U\|_{\mathrm{H}}+\frac{C}{\tilde{b}_2}\|U\|_{\mathrm{H}}+\frac{1}{\rho_2}\|U\|_{\mathrm{H}}+\|U\|_{\mathrm{H}}+\|U\|_{\mathrm{H}}$$

$$\leq C_3\|U\|_{\mathrm{H}}, \quad \text{con } C_3=\max\left\{\frac{2C}{k},\frac{1}{\rho_1},\frac{1}{\rho_2},\frac{C}{\tilde{b}_1},\frac{C}{\tilde{b}_2},1\right\} > 0.$$

de donde,

$$\|U\|_S \leq C_3\|U\|_{\mathrm{H}} \tag{1.42}$$

De las expresiones (1.41) y (1.42) obtenemos,

$$C_1\|U\|_S \leq \|U\|_{\mathrm{H}} \leq C_2\|U\|_S, \quad C_1>0, C_2>0$$

4.1.2.3 El generador infinitesimal del semigrupo asociado al sistema de Timoshenko con memoria total

A continuación, se demuestra que el operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. Por ello, se emplea el corolario al teorema de Lumer Phillips (corolario de Liu), el cual implanta que todo operador lineal disipativo con dominio denso es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0, si el $0\in\rho(A)$. Es decir para ello debemos demostrar:

. El operador A es disipativo: $\mathrm{Re}\langle AU;U\rangle \leq 0$, $\forall U\in D(A)$

. $D(A)$ es denso en H : $\overline{D(A)}=H$

. $0\in\rho(A)$: $\exists A^{-1}$ y A^{-1} es un operador limitado.

Teorema 4.2

El operador A dado en (1.32) es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.

Demostración:

Debemos verificar que A es disipativo, $0\in\rho(A)$ y $D(A)$ es denso en H.

Afirmación 1: El operador A es disipativo, es decir: $\mathrm{Re}\langle AU,U\rangle_H \leq 0$.

En efecto, sea $U=\left(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\eta_1^t,\eta_2^t\right)^t \in D(A)$, luego tenemos

$$\langle AU,U\rangle_H = \left\langle (\varphi_t, \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x + \frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta^t_{1xx}(x,s)ds, \psi_t, -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x - \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta^t_{2xx}(x,s)ds, \varphi_t - \eta^t_{1s}, \psi_t - \eta^t_{2s}); \left(\overline{\varphi}, \overline{\varphi_t}, \overline{\psi}, \overline{\psi_t}, \overline{\eta}\right)\right\rangle_H$$

$$= \rho_1 \left\langle \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x + \frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta^t_{1xx}(x,s)ds, \overline{\varphi_t}\right\rangle_{L^2}$$

$$+\rho_2 \left\langle -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x - \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta^t_{2xx}(x,s)ds, \overline{\psi_t}\right\rangle_{L^2}$$

$$+\tilde{b}_1\left\langle \varphi_{tx}, \overline{\varphi_x}\right\rangle_{L^2} + \tilde{b}_2\left\langle \psi_{tx}, \overline{\psi_x}\right\rangle_{L^2} + k\left\langle \varphi_{tx}+\psi_t, \overline{\varphi_x+\psi}\right\rangle_{L^2}$$

$$+\left\langle \varphi_t - \eta^t_{1s}, \overline{\eta}^t_{1x}\right\rangle_{L^2_{g_1}} + \left\langle \psi_t - \eta^t_{2s}, \overline{\eta}^t_{2s}\right\rangle_{L^2_{g_2}}$$

$$= \rho_1\int_0^L [(\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1} + \frac{k}{\rho_1})\varphi_{xx} + \frac{k}{\rho_1}\psi_x + \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta^t_{1xx}(x,s)ds]\overline{\varphi_t}dx$$

$$+\rho_2\int_0^L [-\frac{k}{\rho_2}\varphi_x - \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta^t_{2xx}(x,s)ds]\overline{\psi}_t dx$$

$$+\tilde{b}_1\int_0^L \varphi_{tx}\overline{\varphi}_x dx + \tilde{b}_2\int_0^L \psi_{tx}\overline{\psi}_x dx + k\int_0^L (\varphi_{tx}+\psi_t)(\overline{\varphi_x+\psi})dx$$

$$+\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)(\varphi_t - \eta^t_{1s})_x\overline{\eta}^t_{1x}dsdx + \int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)(\psi_t - \eta^t_{2s})_x\overline{\eta}^t_{2x}dsdx$$

Sabemos que $U\in D(A)$ de ahí tenemos que φ_t y $\psi_t \in H^1_0$. Integrando por partes y usando la condición de frontera se obtiene,

$$\langle AU,U\rangle_H = \tilde{b}_1[\varphi_x\overline{\varphi_t}\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \varphi_x\overline{\varphi}_{tx}dx] + k[(\varphi_x+\psi)\overline{\varphi_t}\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{\varphi_{tx}}dx]$$

$$+\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta^t_{1x}(x,s)\overline{\varphi}_t ds\,\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta^t_{1x}(x,s)\overline{\varphi}_{tx}dsdx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{\psi}_t dx$$

$$+\tilde{b}_2[\psi_x\overline{\psi}_t\,\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \psi_x\overline{\psi}_{tx}dx] + \int_0^{+\infty} g_2(s)\eta^t_{2x}(x,s)\overline{\psi}_t ds\,\Big|_{x=0}^{x=L} + \tilde{b}_1\int_0^L \varphi_{tx}\overline{\varphi}_x dx$$

$$-\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)\bar{\psi}_{tx}dsdx+\tilde{b}_2\int_0^L \psi_{tx}\bar{\psi}_x dx+k\int_0^L(\varphi_{tx}+\psi_t)\overline{(\varphi_x+\psi)}dx$$

$$+\int_0^L\int_0^{\infty} g_1(s)\varphi_{tx}\bar{\eta}_{1sx}^t dsdx-\int_0^L\int_0^{\infty} g_1(s)\eta_{1sx}^t\bar{\eta}_{1x}^t dsdx$$

$$+\int_0^L\int_0^{\infty} g_2(s)\psi_{tx}\bar{\eta}_{2x}^t dsdx-\int_0^L\int_0^{\infty} g_2(s)\eta_{2sx}^t\bar{\eta}_{2x}^t dsdx$$

$$=\tilde{b}_1\int_0^L(\varphi_{tx}\bar{\varphi}_x-\varphi_x\bar{\varphi}_{tx})dx+\tilde{b}_2\int_0^L(\psi_{tx}\bar{\psi}_x-\psi_x\bar{\psi}_{tx})dx$$

$$+k\int_0^L[(\varphi_{tx}+\psi_t)\overline{(\varphi_x+\psi)}-(\varphi_x+\psi)\overline{(\varphi_{tx}+\psi_t)}]dx$$

$$+\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)[\bar{\eta}_{1x}^t\varphi_{tx}-\eta_{1x}^t\bar{\varphi}_{tx}]dsdx+\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)[\bar{\eta}_{2x}^t\psi_{tx}-\eta_{2x}^t\bar{\psi}_{tx}]dsdx$$

$$-\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1sx}^t\bar{\eta}_{1x}dsdx-\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2sx}^t\bar{\eta}_{2x}dsdx$$

Tomando la parte real en la ultima igualdad resulta que,

$$\operatorname{Re}\langle AU;U\rangle_H=-\operatorname{Re}\int_0^L\int_0^{\infty} g_1(s)\eta_{1sx}^t\bar{\eta}_{1x}^t dsdx-\operatorname{Re}\int_0^L\int_0^{\infty} g_2(s)\eta_{2sx}^t\bar{\eta}_{2x}^t dsdx$$

$$=-\operatorname{Re}\int_0^{\infty} g_1(s)\int_0^L \eta_{1sx}^t\bar{\eta}_{1x}dxds-\operatorname{Re}\int_0^{\infty} g_2(s)\int_0^L \eta_{2sx}^t\bar{\eta}_{2x}dxds$$

$$=-\operatorname{Re}\int_0^{\infty} g_1(s)\left\langle \eta_{1sx}^t,\bar{\eta}_{1x}\right\rangle_{L^2}ds-\operatorname{Re}\int_0^{\infty} g_2(s)\left\langle \eta_{2sx}^t,\bar{\eta}_{2x}\right\rangle_{L^2}ds$$

Como $\frac{d}{ds}\left\langle \eta_{ix}^t,\bar{\eta}_{ix}^t\right\rangle_{L^2}=2\operatorname{Re}\left\langle \eta_{isx}^t,\bar{\eta}_{ix}^t\right\rangle_{L^2}$, $\eta_{ix}^t(0)=0$, para $i=1,2$ y del lema 2.1.59 en la expresión anterior se tiene,

$$\operatorname{Re}\langle AU;U\rangle_H=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g_1(s)\frac{d}{ds}\left\|\eta_{1x}^t\right\|_{L^2}^2 ds-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g_2(s)\frac{d}{ds}\left\|\eta_{2x}^t\right\|_{L^2}^2 ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g_1'(s)\left\|\eta_{1x}^t\right\|_{L^2}^2 ds+\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g_2'(s)\left\|\eta_{2x}^t\right\|_{L^2}^2 ds \qquad (1.43)$$

Por lo tanto, aplicando las hipótesis (1.14) de g en (1.43) se tiene,

$$\operatorname{Re}\langle AU;U\rangle_H\le-\frac{1}{2}k_1\int_0^L\int_0^{\infty} g_1(s)\left|\eta_{1x}^t\right|^2 dsdx-\frac{1}{2}k_1\int_0^L\int_0^{\infty} g_2(s)\left|\eta_{2x}^t\right|^2 dsdx \qquad (1.44)$$

≤ 0

Por lo tanto, obtenemos

$$\mathrm{Re}\langle AU,U\rangle_H \leq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

Afirmacion 2: El operador A es invertible

Se sabe: el operador $A: D(A) \subset H \to H$ esta definido sobre $D(A)$, luego el operador A es inyectiva.

Solo falta probar que el operador A es sobreyectivo, es decir dado $F = \left(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6\right) \in H$, existe un único

$U = \left(u^1, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6\right) \in D\left(A\right)$ tal que $AU = F$.

En efecto, en la expresión $AU = F$, en términos de sus elementos se tiene,

$$u^2 = f^1 \in H_0^1 \tag{1.45}$$

$$ku_{xx}^1 + ku_x^3 + \tilde{b}_1 u_{xx}^1 + \int_0^{+\infty} g_1(s) u_{xx}^5(x,s)ds = \rho_1 f^2 \in L^2 \tag{1.46}$$

$$u^4 = f^3 \in H_0^1 \tag{1.47}$$

$$\tilde{b}_2 u_{xx}^3 + \int_0^{+\infty} g_2\left(s\right) u_{xx}^6(x,s)ds - k\left(u_x^1 + u^3\right) = \rho_2 f^4 \in L^2 \tag{1.48}$$

$$u^2 - u_s^5 = f^5 \in L_{g_1}^2 \tag{1.49}$$

$$u^4 - u_s^6 = f^6 \in L_{g_2}^2 \tag{1.50}$$

De (1.45) y (1.47) obtenemos un único $u^2 \in H_0^1$ **y** $u^4 \in H_0^1$ respectivamente.

Probaremos que $u_s^5 \in L_{g_1}^2\left(\mathbb{R}^+, H_0^1\left(0,L\right)\right)$ y $u_s^6 \in L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$.

Reemplazando (1.45) en (1.49) y (1.47) en (1.50) respectivamente, tenemos:

$$u_s^5 = f^1 - f^5$$

$$u_s^6 = f^3 - f^6$$

y como $u^5\left(x,0\right) = u^6\left(x,0\right) = 0$, resulta

$$u^5\left(x,s\right) = sf^1 - \int_0^s f^5\left(r\right)dr \tag{1.51}$$

$$u^6(x,s)=sf^3-\int_0^s f^6(r)dr \tag{1.52}$$

Por otra parte, se emplea la desigualdad triangular, propiedad de los números reales y las hipótesis de g_1 tenemos,

$$\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)\left|u_{sx}^5\right|^2 ds\right)dx=\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)\left|f_x^1-f_x^5\right|^2 ds\right)dx$$

$$\leq \int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)\left(\left|f_x^1\right|+\left|f_x^5\right|\right)^2 ds\right)dx$$

$$\leq 4\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)\left(\left|f_x^1\right|^2+\left|f_x^5\right|^2\right)ds\right)dx$$

$$=4\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)ds\right)\int_0^L\left|f_x^1\right|^2 dx+4\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)\left|f_x^5\right|^2 ds\right)dx$$

$$\leq 4b_0\left\|f_x^1\right\|_{L^2}^2+4\left\|f^5\right\|_{L_{g_1}^2}^2 \tag{1.53}$$

Como $f^1\in H_0^1(0,L)$ (por normas equivalentes) se tiene que $f_x^1\in L^2(0,L)$, por otro lado $f^5\in L_{g_1}^2\left(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)\right)$ y de (1.53) resulta que, $u_s^5\in L_{g_1}^2\left(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)\right)$.

Procediendo de la misma manera se obtiene, $u_s^6\in L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L))$.

Ahora, demostraremos que $u^5\in L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L))$ y $u^6\in L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L))$

En efecto, usando las hipótesis (1.14) de g_1, integración por partes, $\left\|u_x^5(w)\right\|_{L^2}\geq 0$, $u_x^5(x,0)=0$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad de Young, con $w>0$ y como $\frac{d}{ds}\left\|u_x^5\right\|_{L^2}^2=2\operatorname{Re}\left\langle u_{xs}^5,u_x^5\right\rangle_{L^2}$ tenemos,

$$\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)\left|u_x^5\right|^2 ds\right)dx=\lim_{w\to+\infty}\int_0^w g_1(s)\left\|u_x^5\right\|_{L^2}^2 ds$$

$$\leq -\frac{1}{k_1}\lim_{w\to+\infty}\int_0^w g_1'(s)\left\|u_x^5\right\|_{L^2}^2 ds$$

$$= -\frac{1}{k_1} \lim_{w \to +\infty} [g_1(w) \left\| u_x^5(w) \right\|_{L^2}^2 - g_1(0) \left\| u_x^5(0) \right\|_{L^2}^2$$

$$-\int_0^w g_1(s) \frac{d}{ds} \left\| u_x^5 \right\|_{L^2}^2 ds]$$

$$\leq \frac{1}{k_1} \int_0^{+\infty} g_1(s) \frac{d}{ds} \left\| u_x^5 \right\|_{L^2}^2 ds$$

$$= \frac{2}{k_1} \int_0^{+\infty} g_1(s) \operatorname{Re} \left\langle u_{xs}^5, u_x^5 \right\rangle_{L^2} ds$$

$$\leq \frac{2}{k_1} \int_0^{+\infty} g_1(s) \left\| u_{xs}^5 \right\|_{L^2} \left\| u_x^5 \right\|_{L^2} ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g_1(s) \left\| u_x^5 \right\|_{L^2}^2 ds + C_1 \int_0^{+\infty} g_1(s) \left\| u_{xs}^5 \right\|_{L^2}^2 ds$$

Luego de la expresión anterior obtenemos,

$$\int_0^{+\infty} g_1(s) \left\| u_x^5 \right\|_{L^2}^2 ds \leq 2C_1 \int_0^{+\infty} g_1(s) \left\| u_{xs}^5 \right\|_{L^2}^2 \tag{1.54}$$

Como $u_s^5 \in L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+; H_0^1(0,L))$, luego en (1.54) obtenemos que,

$$u^5 \in L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+; H_0^1(0,L)).$$

De la misma forma se demuestra que $u^6 \in L^2_{g_2}(\mathbb{R}^+; H_0^1(0,L))$.

Ahora, se quiere evidenciar la existencia y unicidad de $u^1 \in H_0^1\left(0,L\right)$ y $u^3 \in H_0^1\left(0,L\right)$.

Reemplazando (1.51) en (1.46) y (1.52) en (1.48), el sistema (1.45) – (1.50), puede ser reescrito como

$$k\left(u_x^1 + u^3\right)_x + \tilde{b}_1 u_{xx}^1 = \rho_1 f^2 + \int_0^{+\infty} g_1(s)[\int_0^s f_{xx}^5(x,r)dr - sf_{xx}^1]ds \tag{1.55}$$

$$\tilde{b}_2 u_{xx}^3 - k\left(u_x^1 + u^3\right) = \rho_2 f^4 + \int_0^{+\infty} g_2\left(s\right)\left(\int_0^s f_{xx}^6(x,r)dr - sf_{xx}^3\right)ds \tag{1.56}$$

Como no existen procedimientos para tener una solución exacta del sistema anterior, se pasa a la formulación débil o formulación variacional. Se multiplica (1.55) por $\overline{\omega^1} \in H_0^1$ y (1.56) por $\overline{\omega^3} \in H_0^1$, en $L^2\left(0,L\right)$, tenemos

$$k\int_0^L \left(u_x^1+u^3\right)_x \overline{\omega^1}dx+\tilde{b}_1\int_0^L u_{xx}^1\overline{\omega^1}dx=\rho_1\int_0^L f^2\overline{\omega^1}dx-\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)u_{xx}^5ds\right)\overline{\omega^1}dx$$

$$\tilde{b}_2\int_0^L u_{xx}^3\overline{\omega^3}dx-k\int_0^L\left(u_x^1+u^3\right)\overline{\omega^3}dx=\rho_2\int_0^L f^4\overline{\omega^3}dx-\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_2(s)u_{xx}^6ds\right)\overline{\omega^3}dx$$

Utilizando integración por partes y condiciones frontera (para tener linealidad) en el sistema anterior, se tiene

$$k\int_0^L\left(u_x^1+u^3\right)\overline{\left(\omega_x^1+\omega^3\right)}dx+\tilde{b}_1\int_0^L u_x^1\overline{\omega_x^1}dx+\tilde{b}_2\int_0^L u_x^3\overline{\omega_x^3}dx=-\rho_1\int_0^L f^2\overline{\omega^1}dx-\rho_2\int_0^L f^4\overline{\omega^3}dx$$

$$-\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_1(s)u_x^5ds\right)\overline{\omega_x^1}dx$$

$$-\int_0^L\left(\int_0^{+\infty} g_2(s)u_x^6ds\right)\overline{\omega_x^3}dx$$

(1.57)

Ahora se definirá un nuevo espacio, dado por $V=H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$, elegimos para este espacio una norma dada por

$$\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_V^2=k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\left\|u_x^3\right\|_{L^2}^2$$

con producto interno dado por

$$\left\langle\left(u^1,u^3\right),\left(v^1,v^3\right)\right\rangle_V=k\int_0^L\left(u_x^1+u^3\right)\left(v_x^1+v^3\right)dx+\tilde{b}_1\int_0^L u_x^1v_x^1dx+\tilde{b}_2\int_0^L u_x^3v_x^3dx$$

luego el espacio V provisto del producto interno dado es un espacio de Hilbert.

Se comprueba que la norma $\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_V$ es equivalente a la norma siguiente: $\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_1=\left\|u^1\right\|_{H_0^1}+\left\|u^3\right\|_{H_0^1}$

Definimos la forma sesquilineal

$$a:V\times V\to\mathbb{C}$$

dada por el miembro izquierdo de (1.57)

$$a\left(\left(u^1,u^3\right),\left(\omega^1,\omega^3\right)\right)=k\int_0^L\left(u_x^1+u^3\right)\overline{\left(\omega_x^1+\omega^3\right)}dx+\tilde{b}_1\int_0^L u_x^1\overline{\omega_x^1}dx+\tilde{b}_2\int_0^L u_x^3\overline{\omega_x^3}dx$$

y cumple lo siguiente,

i) $a(.,.)$ es coerciva: $a\left(\left(u^1,u^3\right),\left(u^1,u^3\right)\right)\geq C\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_V^2$, para algún $C>0$.

En efecto, para $C=1$

$$a\left(\left(u^1,u^3\right),\left(u^1,u^3\right)\right)=k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\left\|u_x^3\right\|_{L^2}^2\geq\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_V^2$$

ii) $a(.,.)$ es continua: $\left|a\left(\left(u^1,u^3\right),\left(\omega^1,\omega^3\right)\right)\right|\leq C\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_V\left\|\left(\omega^1,\omega^3\right)\right\|_V$ con $C>0$.

En efecto, usando desigualdad de Holder y la propiedad de los reales $\left(\sum a_i b_i\right)^2\leq\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$ tenemos,

$$\begin{aligned}\left|a\left(\left(u^1,u^3\right),\left(\omega^1,\omega^3\right)\right)\right|&\leq k\int_0^L\left|u_x^1+u^3\right|\left|\omega_x^1+\omega^3\right|dx+\tilde{b}_1\int_0^L\left|u_x^1\right|\left|\omega_x^1\right|dx+\tilde{b}_2\int_0^L\left|u_x^3\right|\left|\omega_x^3\right|dx\\&\leq k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}\left\|\omega_x^1+\omega^3\right\|_{L^2}+\tilde{b}_1\left\|u_x^1\right\|_{L^2}\left\|\omega_x^1\right\|_{L^2}+\tilde{b}_2\left\|u_x^3\right\|_{L^2}\left\|\omega_x^3\right\|_{L^2}\\&\leq\left[k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\left\|u_x^3\right\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\quad\left[k\left\|\omega_x^1+\omega^3\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\left\|\omega_x^1\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\left\|\omega_x^3\right\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leq C\left\|\left(u^1,u^3\right)\right\|_V\left\|\left(\omega^1,\omega^3\right)\right\|_V\end{aligned}$$

A continuación definimos el funcional

$$T:V\to\mathbb{C}$$

dada por el miembro derecho de (1.57)

$$T\left(\theta^1,\theta^3\right)=-\rho_1\int_0^L f^2\,\overline{\theta^1}dx-\rho_2\int_0^L f^4\,\overline{\theta^3}dx-\int_0^{+\infty}g_1(s)\left(\int_0^L u_x^5\overline{\theta_x^1}dx\right)ds-\int_0^{+\infty}g_2(s)\left(\int_0^L u_x^6\overline{\theta_x^3}dx\right)ds$$

y se cumple,

i) T es lineal: se sigue inmediatamente de la linealidad del producto interno.

ii) T es continua:

En efecto,

$$\left|T\left(\theta^1,\theta^3\right)\right| \le \rho_1\int_0^L\left|f^2\right|\left|\theta^1\right|dx+\rho_2\int_0^L\left|f^4\right|\left|\theta^3\right|dx+\int_0^{+\infty}g_1(s)\left(\int_0^L\left|u_x^5\right|\left|\theta_x^1\right|dx\right)ds$$

$$+\int_0^{+\infty}g_2(s)\left(\int_0^L\left|u_x^6\right|\left|\theta_x^3\right|dx\right)ds$$

$$\le \rho_1\left\|f^2\right\|_{L^2}\left\|\theta^1\right\|_{L^2}+\rho_2\left\|f^4\right\|_{L^2}\left\|\theta^3\right\|_{L^2}+\int_0^{+\infty}g_1(s)\left(\left\|u_x^5\right\|_{L^2}\left\|\theta_x^1\right\|_{L^2}\right)ds$$

$$+\int_0^{+\infty}g_2(s)\left(\left\|u_x^6\right\|_{L^2}\left\|\theta_x^3\right\|_{L^2}\right)ds$$

$$\le C_1\left\|\theta^1\right\|_{L^2}+C_1\left\|\theta^3\right\|_{L^2}+\left\|\theta_x^1\right\|_{L^2}\left(\int_0^{+\infty}g_1(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty}g_1(s)\left\|u_x^5\right\|_{L^2}^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\|\theta_x^3\right\|_{L^2}\left(\int_0^{+\infty}g_2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty}g_2(s)\left\|u_x^6\right\|_{L^2}^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_1\left\|\theta^1\right\|_{L^2}+C_1\left\|\theta^3\right\|_{L^2}+\sqrt{b_0}\left\|u_x^5\right\|_{L^2_{g_1}}\left\|\theta_x^1\right\|_{L^2}+\sqrt{b_0}\left\|u_x^6\right\|_{L^2_{g_1}}\left\|\theta_x^3\right\|_{L^2}$$

$$\le C_p\left\|\theta_x^1\right\|_{L^2}+C_p\left\|\theta_x^3\right\|_{L^2}+C_2\left\|\theta_x^1\right\|_{L^2}+C_2\left\|\theta_x^3\right\|_{L^2}$$

$$\le C_3\left(\left\|\theta^1\right\|_{H_0^1}+\left\|\theta^3\right\|_{H_0^1}\right)$$

Luego, por normas equivalentes tenemos

$$\left|T\left(\theta^1,\theta^3\right)\right|\le C_3\left(\left\|\theta^1\right\|_{H_0^1}+\left\|\theta^3\right\|_{H_0^1}\right)=C_3\left\|\left(\theta^1,\theta^3\right)\right\|_1$$

$$\le C\left\|\left(\theta^1,\theta^3\right)\right\|_V$$

Así, T es continua.

Luego por el Teorema de Lax-Milgran, existe un único par $\left(u^1,u^3\right)\in H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ tal que $a\left(\left(u^1,u^3\right),\left(\theta^1,\theta^3\right)\right)=T\left(\theta^1,\theta^3\right)$, $\forall\left(\theta^1,\theta^3\right)\in V$.

Ahora probaremos que $\left((\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})u_{xx}^1+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty}g_1(s)u_{xx}^5ds\right)\in L^2(0,L)$

En efecto, sabemos que $f^2 \in L^2(0,L), u^3 \in H_0^1(0,L)$ de ahí $u_x^3 \in L^2(0,L)$, luego en (1.46) tenemos $(\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})u_{xx}^1+\frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)u_{xx}^5 ds = [f^2 - ku_x^3] \in L^2(0,L)$.

Por ultimo demostraremos que $\left(\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}u_{xx}^3+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)u_{xx}^6 ds\right) \in L^2(0,L)$.

En efecto, sabemos que $f^4 \in L^2(0,L), u^3 \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2$ y $u_x^1 \in L^2(0,L)$, luego en (1.48) tenemos, $\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}u_{xx}^3+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)u_{xx}^6 ds = [f^4 + \frac{k}{\rho_2}(u_x^1+u^3)] \in L^2(0,L)$, es decir $\left(\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}u_{xx}^3+\frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)u_{xx}^6 ds\right) \in L^2(0,L)$.

Por consiguiente, se tiene como resultado un único

$$U = (u^1,u^2,u^3,u^4,u^5,u^6) \in D(A) \text{ tal que } AU = F.$$

Afirmación 3: El operador $A^{-1}: H \to D(A)$ es acotado.

Debemos probar que $\|A^{-1}F\|_H \leq C\|F\|_H$.

En efecto, dado $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in H$, existe $U = (u^1,u^2,u^3,u^4,\eta^1,\eta^2) \in D(A)$, tal que $AU = F$.

Luego en la expresión $AU = F$ tenemos,

$$u^2 = f^1 \tag{1.58}$$

$$ku_{xx}^1 + ku_x^3 + \tilde{b}_1 u_{xx}^1 + \int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{xx}^1(x,s)ds = \rho_1 f^2 \tag{1.59}$$

$$u^4 = f^3 \tag{1.60}$$

$$\tilde{b}_2 u_{xx}^3 + \int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{xx}^2(x,s)ds - k(u_x^1 + u^3) = \rho_2 f^4 \tag{1.61}$$

$$u^2 - \eta_s^1 = f^5 \tag{1.62}$$

$$u^4 - \eta_s^2 = f^6 \tag{1.63}$$

Multiplicando (1.59) por $\overline{u^1}$, (1.61) por $\overline{u^3}$ en $L^2(0,L)$, luego se integra por partes cada una de las dos ecuaciones resultantes y efectuando la suma de los miembros, se obtiene

$$k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\left\|u_x^3\right\|=-\rho_1\int_0^L f^2\overline{u^1}dx-\rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}dx$$

$$-\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1(x,s)\overline{u_x^1}dsdx-\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2(x,s)\overline{u_x^3}dsdx$$

En la expresión anterior, utilizando la desigualdad triangular, la desigualdad de Poincare y Holder, tenemos

$$k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_1\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\tilde{b}_2\left\|u_x^3\right\|_{L^2}^2\leq\rho_1\int_0^L\left|f^2\right|\left|u^1\right|dx+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1(x,s)\overline{u_x^1}dsdx\right|$$

$$+\rho_2\int_0^L\left|f^4\right|\left|u^3\right|dx+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2(x,s)\overline{u_x^3}dsdx\right|$$

$$\leq\rho_1\left\|f^2\right\|_{L^2}\left\|u^1\right\|_{L^2}+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1(x,s)\overline{u_x^1}dsdx\right|$$

$$+\rho_2\left\|f^4\right\|_{L^2}\left\|u^3\right\|_{L^2}+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2(x,s)\overline{u_x^3}dsdx\right|$$

$$\leq C_p\rho_1\left\|f^2\right\|_{L^2}\left\|u_x^1\right\|_{L^2}+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1\overline{u_x^1}dsdx\right|$$

$$+C_p\rho_2\left\|f^4\right\|_{L^2}\left\|u_x^3\right\|_{L^2}+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2(x,s)\overline{u_x^3}dsdx\right|$$

$$\leq C_1\left\|F\right\|_H\left\|U\right\|_H+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1(x,s)\overline{u_x^1}dsdx\right|$$

$$+C_1\left\|F\right\|_H\left\|U\right\|_H+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2(x,s)\overline{u_x^3}dsdx\right|$$

$$\leq C_1\left\|U\right\|_H\left\|F\right\|_H+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1(x,s)\overline{u_x^1}dsdx\right|$$

$$+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2(x,s)\overline{u_x^3}dsdx\right| \tag{1.64}$$

Utilizando la desigualdad de Holder y Young, se obtiene

$$\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_x^1\overline{u_x^1}dsdx\right|+\left|\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_x^2\overline{u_x^3}dsdx\right|\leq\int_0^{+\infty} g_1(s)\left(\int_0^L\left|\eta_x^1\right|\left|u_x^1\right|dx\right)ds$$

$$+\int_0^{+\infty} g_2(s)(\int_0^L |\eta_x^2||u_x^3|dx)ds$$

$$\leq \int_0^{+\infty} g_1(s)\|\eta_x^1\|_{L^2}\|u_x^1\|_{L^2}\,ds$$

$$+\int_0^{+\infty} g_2(s)\|\eta_x^2\|_{L^2}\|u_x^3\|_{L^2}ds$$

$$\leq \int_0^{+\infty} g_1(s)(C_2\|\eta_x^1\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_1}{2b}\|u_x^1\|_{L^2}^2)ds$$

$$+\int_0^{+\infty} g_2(s)(C_2\|\eta_x^2\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_2}{2b}\|u_x^3\|_{L^2}^2)ds$$

$$\leq \frac{\tilde{b}_1}{2}\|u_x^1\|_{L^2}^2+C_2\|\eta^1\|_{L_{g_1}^2}^2$$

$$+C_2\|\eta^2\|_{L_{g_2}^2}^2+\frac{\tilde{b}_2}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (1.64), tenemos

$$k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_1}{2}\|u_x^1\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_2}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2+\|\eta^1\|_{L_{g_1}^2}^2+\|\eta^2\|_{L_{g2}^2}^2\leq C_1\|U\|_H\|F\|_H+(C_2+1)\|\eta^1\|_{L_{g_1}^2}^2$$

$$+(C_2+1)\|\eta^2\|_{L_{g_2}^2}^2 \qquad (1.65)$$

Por otro lado de (1.14), de (1.43) y la desigualdad de Cauchy Schwarz, tenemos

$$\frac{k_1}{2}\|\eta^1\|_{L_{g_1}^2}^2+\frac{k_1}{2}\|\eta^2\|_{L_{g_2}^2}^2=\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1(s)|\eta_x^1|^2\,dsdx+\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2(s)|\eta_x^2|^2\,dsdx$$

$$\leq -\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_1'(s)|\eta_x^1|^2dsdx-\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g_2'(s)|\eta_x^2|^2dsdx$$

$$=\mathrm{Re}\langle AU,U\rangle_H$$

$$\leq |\langle AU,U\rangle_H|$$

$$\leq \|U\|_H\|F\|_H$$

Luego de la expresión anterior obtenemos,

$$\|\eta^1\|_{L_{g_1}^2}^2+\|\eta^2\|_{L_{g_2}^2}^2\leq C_3\|U\|_H\|F\|_H \qquad (1.66)$$

Reemplazando (1.66) en (1.65) obtenemos,

$$k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_1}{2}\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_2}{2}\left\|u_x^3\right\|_{L^2}^2+\left\|\eta^1\right\|_{L_{g_1}^2}^2+\left\|\eta^2\right\|_{L_{g_2}^2}^2\leq C_4\left\|U\right\|_H\left\|F\right\|_H \tag{1.67}$$

De (1.58) y (1.60), tenemos

$$\begin{aligned}\rho_1\left\|u^2\right\|_{L^2}^2+\rho_2\left\|u^4\right\|_{L^2}^2&=\rho_1\left\|f^1\right\|_{L^2}^2+\rho_2\left\|f^3\right\|_{L^2}^2\\&\leq C_p\rho_1\left\|f_x^1\right\|_{L^2}^2+C_p\rho_2\left\|f_x^3\right\|_{L^2}^2\\&\leq C_5\left\|F\right\|_H^2 \qquad (1.68)\end{aligned}$$

Sumando (1.67) con (1.68) y la desigualdad de Poincare, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|U\right\|_H^2&\leq\rho_1\left\|u^2\right\|_{L^2}^2+\rho_2\left\|u^4\right\|_{L^2}^2+k\left\|u_x^1+u^3\right\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_1}{2}\left\|u_x^1\right\|_{L^2}^2+\frac{\tilde{b}_2}{2}\left\|u_x^3\right\|_{L^2}^2+\left\|\eta^1\right\|_{L_{g_1}^2}^2\\&\quad+\left\|\eta^2\right\|_{L_{g_2}^2}^2\\&\leq C_4\left\|U\right\|_H\left\|F\right\|_H+C_5\left\|F\right\|_H^2\end{aligned}$$

En la expresión anterior, aplicando la desigualdad de Young, obtenemos,

$$\frac{1}{2}\left\|U\right\|_H^2\leq\frac{1}{4}\left\|U\right\|_H^2+C_6\left\|F\right\|_H^2+C_5\left\|F\right\|_H^2$$

Luego se tiene,

$$\left\|U\right\|_H\leq 2\sqrt{C_7}\left\|F\right\|_H$$

Por lo tanto,

$$\left\|A^{-1}F\right\|_H\leq C\left\|F\right\|_H$$

Así hemos probado que A^{-1} es acotado.

Afirmacion 4: $0\in\rho(A)$.

Inmediato de la afirmación 2 y 3.

Afirmación 5: $D(A)$ es denso en H.

En efecto, notemos que el operador lineal $\lambda_0 I-A:D(A)\to H$ puede ser escrito como composición de los operadores lineales

$$A:D(A)\to H$$

y

$$\lambda_0 A^{-1} - I : D(A) \to D(A),$$

esto es

$$\lambda_0 I - A = A(\lambda_0 A^{-1} - I).$$

Como A^{-1} es un operador lineal y acotado, por la proposicion 2.1.10, tomando $B = \lambda_0 A^{-1}$ y $S = -I$, para $|\lambda_0| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_{L(H)}}$ tenemos que $B + S = (\lambda_0 A^{-1} - I)$ es invertible, por consiguiente, $\lambda_0 I - A$ es también invertible (por ser una composición de operadores invertibles). Así tenemos que $\lambda_0 I - A$ es sobreyectivo, es decir $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A) = H$ para $\lambda_0 > 0$. Como A es disipativo, por la propiedad 2, i) $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = H$, $\forall \lambda > 0$, en particular para $\lambda = 1$. Como A es disipativo y $\mathrm{Im}(I - A) = H$, se sigue del teorema 2.1.76 ii) que, $\overline{D(A)} = H$.

Luego de las afirmaciones demostradas, se sigue del corolario al teorema de Lumer Phillips (corolario de Liu) que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.

Teorema 4.3

Sea $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0) \in D(A)$ y A es un generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0. Entonces existe una única solución del problema de Cauchy abstracto (1.31), $U(t) = S_A(t)U_0$, satisfaciendo
$U \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$.

Demostración:

En efecto, por el teorema 4.2, A genera un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de contracciones de clase C_0 sobre H. Entonces por el Teorema de existencia y unicidad la aplicación $U : [0, +\infty) \to H$ tal que $U(t) = S(t)U_0$ es la única solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU(t), t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$

con la condicion $U \in C([0, +\infty); H)$.

Luego por el Teorema 2.1.79 , como $U_0 \in D(A)$ entonces

$$U \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); H).$$

4.1.3. ESTABILIDAD EXPONENCIAL

El objetivo de esta sección está relacionada con los resultados que establecen las condiciones imprescindibles y suficientes para que un semigrupo de clase C_0 sea exponencialmente estable.

Cuando se considera el estudio del decaimiento exponencial de la solución de un modelo disipativo gobernado por ecuaciones en derivadas parciales, el problema es establecer una estimativa para la energía total del sistema $E(t)$, de la forma $E(t) \leq CE(0)e^{-wt}$, $\forall t \geq 0$, o, equivalentemente, establecer la estabilidad exponencial $\|S(t)\| \leq Ce^{-wt}$, $\forall t \geq 0$, del semigrupo disipativo $S(t)$ generado por el sistema.

Probaremos el decaimiento exponencial explorando las propiedades disipativas del semigrupo asociado al sistema.

Z. Lui y S. Zheng dieron una prueba de equivalencia de los teoremas de Huang y Gearhart bajo la condición de que $S(t) = e^{At}$ sea un C_0-semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert.

Para el decaimiento exponencial utilizaremos el teorema de Gearhart y trabajaremos en dos etapas, las cuales, en líneas generales, presentamos a continuación. En la primera etapa, para demostrar la primera condición suponemos que el $\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\}$ es falso, aplicando el corolario 2.1.74 y utilizando adecuadas técnicas conocidas del estudio de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) generamos una contradicción.

En la segunda etapa, para demostrar la segunda condición suponemos que el $\limsup_{|\beta|\to\infty} \left\|(i\beta - A)^{-1}\right\| < \infty$ es falso, aplicando el corolario 2.1.75 y usando resultados del análisis funcional obtenemos una contradicción con la sucesión de vectores $U_n \in D(A)$. Por lo tanto esto demuestra el teorema de Gearhart y por consecuencia la estabilidad exponencial del sistema.

Lema 4.4

$i\mathbb{R} \subset \rho(A)$

Demostración:

En efecto, supongamos que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ no es verdadero. Entonces, por el corolario 2.1.74 existen $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de $\mathbb{R}$, $D(A)$ y H respectivamente, tal que

$$\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega \in \mathbb{R}, \text{ con} |\beta_n| < |\omega|; \ \|U_n\|_H = 1 \text{ y } F_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

siendo

$$(i\beta_n I - A)U_n = F_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.69}$$

Tomando $U_n = \left(u_n^1, u_n^2, u_n^3, u_n^4, u_n^5, u_n^6\right) \in D(A)$ y $F_n = \left(f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6\right) \in H$ en (1.69) tenemos,

$$i\beta_n u_n^1 - u_n^2 = f_n^1 \tag{1.70}$$

$$i\beta_n \rho_1 u_n^2 - k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right)_x - \tilde{b}_1 u_{nxx}^1 - \int_0^{+\infty} g_1(s) u_{nxx}^5(x,s)ds = \rho_1 f_n^2 \tag{1.71}$$

$$i\beta_n u_n^3 - u_n^4 = f_n^3 \tag{1.72}$$

$$i\beta_n \rho_2 u_n^4 - \tilde{b}_2 u_{nxx}^3 - \int_0^{\infty} g_2(s) u_{nxx}^6 ds + k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right) = \rho_2 f_n^4 \tag{1.73}$$

$$i\beta_n u_n^5 - u_n^2 + u_{ns}^5 = f_n^5 \tag{1.74}$$

$$i\beta_n u_n^6 - u_n^4 + u_{ns}^6 = f_n^6 \tag{1.75}$$

AF1. $u_n^5 \to 0$ en $L_{g_1}^2\left(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)\right)$ y $u_n^6 \to 0$ en $L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$

Tomando producto interno con U_n en (1.69), tenemos:

$$\left\langle (i\beta_n I - A)U_n, U_n \right\rangle_H = \left\langle F_n, U_n \right\rangle_H, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego,

$$i\beta_n \|U_n\|_H^2 - \left\langle AU_n, U_n \right\rangle_H = \left\langle F_n, U_n \right\rangle_H, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.76}$$

Tomando la parte real en (1.76), obtenemos

$$-\mathrm{Re}\left\langle AU_n, U_n \right\rangle_H = \mathrm{Re}\left\langle F_n, U_n \right\rangle_H, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_1'(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx-\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_2'(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 dsdx=\operatorname{Re}\left\langle F_n,U_n\right\rangle_H,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx+\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 dsdx\le\left|\operatorname{Re}\left\langle F_n,U_n\right\rangle_H\right|,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx+\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 dsdx\le\left|\left\langle F_n,U_n\right\rangle_H\right|,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Como $F_n\to 0$ en H y $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada ,resulta luego que $\left\langle F_n,U_n\right\rangle_H\to 0$, cuando $n\to\infty$.

Luego, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx+\lim_{n\to\infty}\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 ds=0,$$

es decir,

$$\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g_1}}\to 0 \text{ y } \left\|u_n^6\right\|_{L^2_{g_2}}\to 0$$

Asi, obtenemos

$$u_n^5\to 0 \text{ en } L^2_{g_1}\left(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)\right) \text{ y } u_n^6\to 0 \text{ en } L^2_{g_2}(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)).$$

AF2. $u_n^2\to 0$ en $H_0^1(0,L)$.
En (1.74), tenemos,

$$i\beta_n u_n^5+u_{ns}^5-u_n^2=f_n^5\in L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))\hookrightarrow L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+;L^2(0,L)) \qquad (1.77)$$

Luego en (1.77) derivando la expresión con respecto a x y multiplicando por $\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2 dsdx$ tenemos,

$$i\beta_n\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nx}^5dsdx+\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nsx}^5dsdx-\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nx}^2dsdx$$
$$=\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2f_{nx}^5dsdx$$

y por lo tanto,

$$(\int_0^\infty g_1(s)ds)\left(\int_0^L\left|u_{nx}^2\right|^2dx\right)=i\beta_n\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nx}^5dsdx+\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nsx}^5dsdx$$
$$-\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2f_{nx}^5dsdx$$

De la expresión anterior se tiene

$$b_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 = i\beta_n\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nx}^5dsdx+\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2u_{nsx}^5dsdx-\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2 f_{nx}^5dsdx$$

$$\le|\beta_n|\int_0^\infty g_1(s)\left(\int_0^L\left|u_{nx}^5u_{nx}^2\right|dx\right)ds+\left|\int_0^\infty g_1(s)(\int_0^L u_{nx}^2u_{nsx}^5dx)ds\right|$$

$$+\int_0^\infty g_1(s)\left(\int_0^L\left|f_{nx}^5u_{nx}^2\right|dx\right)ds$$

Usando la desigualdad de Holder en $L^2\left(0,L\right)$, en la expresión anterior obtenemos,

$$b_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \le|\beta_n|\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right)ds+\left|\int_0^\infty g_1(s)(\int_0^L u_{nx}^2u_{nsx}^5dx)ds\right|$$

$$+\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|f_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right) \tag{1.78}$$

Ahora, se estima cada término del lado derecho de la expresión (1.78)

(i) Para el primer termino del lado derecho de (1.78), en $L^2\left(0,\infty\right)$, usando Holder, Young con $\varepsilon=\dfrac{b_0}{6}$ y $C(\varepsilon)=C_1$, tenemos

$$|\beta_n|\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right)ds=|\beta_n|\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left[\int_0^\infty g_1^{1/2}(s)g_1^{1/2}(s)\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}ds\right]$$

$$\le|\beta_n|\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left(\int_0^\infty g_1(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty g_1(s)\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}^2ds\right)^{1/2}$$

$$\le|\beta_n|\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left(b_0\right)^{1/2}\left\|u_n^5\right\|_{L_{g_1}^2}$$

$$\le C_1\left\|u_n^5\right\|_{L_{g_1}^2}^2|\beta_n|^2+\frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \tag{1.79}$$

(ii) Para el segundo termino del lado derecho de (1.78), primero hallaremos $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_0^L u_{nx}^2g_1(B)u_{nx}^5(x,B)dx$.

Utilizando las hipótesis sobre g_1 y la desigualdad de Holder tenemos,

$$0\le\left|\int_0^L u_{nx}^2g_1(B)u_{nx}^5(x,B)dx\right|\le g_1(B)\int_0^L\left|u_{nx}^2\right|\left|u_{nx}^5(x,B)\right|dx$$

$$\leq g_1(B)\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^5(x,B)\right\|_{L^2}$$

$$\leq g_1(B)\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^5(x,B)\right\|_{L^2}^2 \qquad (1.80)$$

En (1.80), tomando $\lim\limits_{B\to+\infty}$ y usando el lema 2.1.58 se tiene

$$0\leq \lim_{B\to+\infty}\left|\int_0^L u_{nx}^2 g_1(B)u_{nx}^5(x,B)dx\right|\leq \left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\lim_{B\to+\infty} g_1(B)\left\|u_{nx}^5(x,B)\right\|_{L^2}^2$$

$$\leq 0$$

Luego, $\lim\limits_{B\to+\infty}\left|\int_0^L u_{nx}^2 g_1(B)u_{nx}^5(x,B)dx\right|=0$, por propiedad de limites obtenemos

$$\lim_{B\to+\infty}\int_0^L u_{nx}^2 g_1(B)u_{nx}^5(x,B)dx=0 \qquad (1.81)$$

A continuación usando (1.81), integración por partes, las hipótesis sobre g_1, la desigualdad de Holder, $u_{nx}^5(x,0)=0$ y la desigualdad de Young tenemos,

$$\left|\int_0^\infty g_1(s)(\int_0^L u_{nx}^2 u_{nsx}^5 dx)ds\right| = \left|\int_0^L u_{nx}^2\left[\lim_{B\to+\infty}\int_0^B g_1(s)\frac{d}{ds}u_{nx}^5(x,s)ds\right]dx\right|$$

$$=\left|\int_0^L u_{nx}^2[\lim_{B\to+\infty} g_1(B)u_{nx}^5(x,B)-g_1(0)u_{nx}^5(x,0)-\int_0^B g_1'(s)u_{nx}^5 ds]dx\right|$$

$$=\left|-\int_0^\infty g_1'(s)\left[\int_0^L u_{nx}^2 u_{nx}^5 dx\right]ds\right|$$

$$\leq \int_0^\infty \left|g_1'(s)\right|\left(\int_0^L \left|u_{nx}^2\right|\left|u_{nx}^5\right|dx\right)ds$$

$$\leq \int_0^\infty (-g_1'(s))\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2} ds$$

$$\leq \left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\int_0^\infty k_0 g(s)\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2} ds = k_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\int_0^\infty g^{1/2}(s)g^{1/2}(s)\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2} ds$$

$$\leq k_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty g(s)\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}^2 ds\right)^{1/2}$$

$$= k_0 \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2} b_0^{1/2} \left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}$$

$$\leq \frac{b_0}{6} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 + C_2 \left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 \qquad (1.82)$$

(iii)Para el tercer termino del lado derecho de (1.78), usando desigualdad de Holder y desigualdad de Young, tenemos

$$\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\| f_{nx}^5 \right\|_{L^2} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}\right) ds = \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2} \int_0^\infty g_1(s) \left\| f_{nx}^5 \right\|_{L^2} ds$$

$$\leq \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2} \left(\int_0^\infty g_1(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty g_1(s) \left\| f_{nx}^5 \right\|_{L^2}^2 ds \right)^{1/2} = \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2} b_0^{1/2} \left\| f_{nx}^5 \right\|_{L^2}$$

$$\leq \frac{b_0}{6} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 + C_3 \left\| f_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 \qquad (1.83)$$

Ahora reemplazando (1.79), (1.82) y (1.83) en (1.78), tenemos

$$b_0 \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{b_0}{6} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 + C_1 \left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 + \frac{b_0}{6} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 + C_2 \left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 + \frac{b_0}{6} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 + C_3 \left\| f_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2$$

$$\leq \frac{b_0}{2} \left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 + C_4 \left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 + C_4 \left\| f_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2$$

De la expresión anterior obtenemos,

$$\left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2}^2 \leq C \left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 + C \left\| f_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 \qquad (1.84)$$

Como $F_n \to 0$ y $\left\| u_n^5 \right\|_{L_{g_1}^2} \to 0$ obtenemos $\left\| u_{nx}^2 \right\|_{L^2} \to 0$.

Luego por la equivalencia de normas se tiene,

$\left\| u_n^2 \right\|_{H_0^1} \to 0$, es decir, $u_n^2 \to 0$ en $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$.

AF3. $u_n^4 \to 0$ en $H_0^1(0,L)$

Procediendo de manera similar que en la AF2, obtenemos

$$\left\| u_{nx}^4 \right\|_{L^2}^2 \leq C \left\| u_n^6 \right\|_{L_{g_1}^2}^2 + C \left\| f_n^6 \right\|_{L_{g_2}^2}^2$$

Como $F_n \to 0$ y $\left\| u_n^6 \right\|_{L_{g_2}^2} \to 0$ obtenemos $\left\| u_{nx}^4 \right\|_{L^2} \to 0$.

Luego por la equivalencia de normas se tiene ,

$\left\|u_n^4\right\|_{H_0^1} \to 0$, es decir, $u_n^4 \to 0$ en $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$.

AF4. $u_{nx}^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

Haciendo $n \to \infty$, en (1.72), obtenemos $i\beta_n u_{nx}^3 - u_{nx}^4 = f_{nx}^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

Luego tenemos,

$$\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \left\|i\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \left\|u_{nx}^4 + f_{nx}^3\right\|_{L^2} < \left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2} + \left\|f_{nx}^3\right\|_{L^2}$$

Asi por la AF3 y la expresión anterior obtenemos

$$\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2(0,L)$$

Como $|\beta_n| < |\omega|$, en la expresión anterior se tiene,

$$\left\|u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \frac{1}{|\beta_n|}\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto,

$$u_{nx}^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L)$$

AF5. $u_{nx}^1 \to 0$ en $L^2(0,L)$

En (1.70) de la AF2, como $|\beta_n| < |\omega|$ y $F_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en H se tiene $u_n^1 \to 0$ en $H_0^1(0,L)$. Luego por equivalencias de normas obtenemos, $u_{nx}^1 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

AF6. $u_{nx}^1 + u_n^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

De la AF4 y por Poincare se tiene: $u_n^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$. (1.85)

Sumando (1.85) con la AF5, obtenemos

$$u_{nx}^1 + u_n^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L).$$

De las AF1, AF2, AF3, AF4, AF5 y AF6 se tiene que $\left\|U_n\right\|_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\left\|U_n\right\|_H = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Lema 4.5

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup \left\|(i\lambda I - A)^{-1}\right\|_{L(H)} < \infty$$

Demostración:

En efecto, probemos por el absurdo, es decir supongamos que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup \left\| (i\lambda I - A)^{-1} \right\|_{L(H)} = \infty$$

Entonces por el corolario 2.1.75 se evidencia la existencia de una sucesión de números reales $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ y una sucesión de funciones vectoriales $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tal que

$$\frac{\left\| (i\beta_n I - A)^{-1} F_n \right\|_H}{\left\| F_n \right\|_H} \geq n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$\left\| (i\beta_n I - A)^{-1} F_n \right\|_H \geq n \left\| F_n \right\|_H\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.86}$$

Por el Lema 4.4 se tiene, $i\beta_n \in \rho(A)$ entonces $(i\beta_n I - A)^{-1} \in L(H)$.

Luego existe una única sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$, con $\left\| U_n \right\|_H = 1$ tal que

$$(i\beta_n I - A)U_n = F_n \tag{1.87}$$

De (1.86) se tiene,

$$1 = \left\| U_n \right\|_H = \left\| (i\beta_n I - A)^{-1} F_n \right\|_H \geq n \left\| F_n \right\|_H\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde obtenemos,

$$\left\| F_n \right\|_H \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Asi, cuando $n \to \infty$, se tiene $\left\| F_n \right\|_H \to 0$ en H, de donde resulta que

$$F_n \to 0 \text{ en } H\ .$$

Reemplazando en (1.87) se tiene,

$$(i\beta_n I - A)U_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } H \tag{1.88}$$

Tomando $U_n = \left(u_n^1, u_n^2, u_n^3, u_n^4, u_n^5, u_n^6\right)^T \in D(A)$ y $F_n = \left(F_n^1, F_n^2, F_n^3, F_n^4, F_n^5, F_n^6\right)^T \in H$

reemplazando en (1.88) obtenemos,

$$i\beta_n u_n^1 - u_n^2 = F_n^1 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \tag{1.89}$$

$$i\beta_n u_n^2 - \tilde{b}_1 u_{nxx}^1 - \int_0^\infty g_1(s) u_{nxx}^5(x,s)\,ds - k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right)_x = \rho_1 F_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{1.90}$$

$$i\beta_n u_n^3 - u_n^4 = F_n^3 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \tag{1.91}$$

$$i\beta_n u_n^4 - \tilde{b}_2 u_{nxx}^3 - \int_0^\infty g_2(s) u_{nxx}^6(x,s)\,ds - k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right) = \rho_2 F_n^4 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{1.92}$$

$$i\beta_n u_n^5 + u_{ns}^5 - u_n^2 = F_n^5 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \tag{1.93}$$

$$i\beta_n u_n^6 + u_{ns}^6 - u_n^4 = F_n^6 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \tag{1.94}$$

AF1. $u_n^5 \to 0$ en $L_{g_1}^2\left(\mathbb{R}^+, H_0^1\left(0,L\right)\right)$ y $u_n^6 \to 0$ en $L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$

Haciendo producto interno en H de $(i\beta_n I - A)U_n$ con U_n, tenemos

$$\left\langle (i\beta_n I - A)U_n, U_n \right\rangle_H = \left\langle F_n, U_n \right\rangle_H$$

Puesto que $F_n \to 0$ y $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, en la expresión anterior tenemos

$$i\beta_n \left\|U_n\right\|_H^2 - \left\langle AU_n, U_n \right\rangle_H = \left\langle F_n, U_n \right\rangle_H \underset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{1.95}$$

Tomando la parte real en (1.95) tenemos,

$$-\operatorname{Re}\left\langle AU_n, U_n \right\rangle_H = \operatorname{Re}\left\langle F_n, U_n \right\rangle_H \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

De (1.44) en la expresión anterior obtenemos,

$$\frac{1}{2}k_1 \int_0^L \int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx + \frac{1}{2}k_1 \int_0^L \int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 dsdx \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

de la expresión anterior resulta

$$\left\|u_n^5\right\|_{L_{g_1}^2} \to 0 \text{ y } \left\|u_n^6\right\|_{L_{g_2}^2} \to 0$$

Asi obtenemos

$$u_n^5 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \text{ y } u_n^6 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \tag{1.96}$$

AF2. $u_n^2 \to 0$ en $H_0^1\left(0,L\right)$

Puesto que $L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(0,L)) \hookrightarrow L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+; L^2(0,L))$, luego en (1.93) derivando con respecto a x y multiplicando por $\int_0^L \int_0^\infty g_1\left(s\right) u_{nx}^2 dsdx$ tenemos

$$i\beta_n \int_0^L \int_0^\infty g_1(s) u_{nx}^2 u_{nx}^5 dsdx + \int_0^L \int_0^\infty g_1(s) u_{nx}^2 u_{nsx}^5 dsdx - \int_0^L \int_0^\infty g_1(s) u_{nx}^2 u_{nx}^2 dsdx$$

$$= \int_0^L \int_0^\infty g_1(s) u_{nx}^2 F_{nx}^5 ds dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Despejando y usando la desigualdad de Holder en $L^2(0,L)$ se obtiene,

$$b_0 \|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 \le |\beta_n| \int_0^\infty g_1(s) \left(\|u_{nx}^5\|_{L^2} \|u_{nx}^2\|_{L^2} \right) ds + \left| \int_0^\infty g_1(s) (\int_0^L u_{nx}^2 u_{nsx}^5 dx) ds \right|$$

$$+ \int_0^\infty g_1(s) \left(\|F_{nx}^5\|_{L^2} \|u_{nx}^2\|_{L^2} \right) \quad (1.97)$$

Ahora, estimando cada término del lado derecho de la expresión (1.97) y mediante el uso de la desigualdad de Holder, la desigualdad de Young con $\varepsilon = \frac{b_0}{6}$, el lema 2.1.58, integración por partes, $u_{nx}^5(x,0) = 0$, (1.14) obtenemos

$$b_0 \|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 \le \frac{b_0}{6} \|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 + C_1 \|u_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2 + \frac{b_0}{6} \|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 + C_2 \|u_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2 + \frac{b_0}{6} \|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 + C_3 \|F_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2$$

$$\le \frac{b_0}{2} \|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 + C_4 \|u_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2 + C_4 \|F_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2$$

De la expresión anterior obtenemos,

$$\|u_{nx}^2\|_{L^2}^2 \le C \|u_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2 + C \|F_n^5\|_{L_{g_1}^2}^2 \quad (1.98)$$

Como $F_n \to 0$ y por AF1 $\|u_n^5\|_{L_{g_1}^2} \to 0$ obtenemos $\|u_{nx}^2\|_{L^2} \to 0$

Luego por la equivalencia de normas se tiene ,

$\|u_n^2\|_{H_0^1} \to 0$, es decir, $u_n^2 \to 0$ en $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$.

AF3. $u_n^4 \to 0$ en $H_0^1(0,L)$

En (1.94) procediendo de manera similar que en la AF2, obtenemos

$$\|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 \le C \|u_n^6\|_{L_{g_1}^2}^2 + C \|F_n^6\|_{L_{g_2}^2}^2$$

Como $F_n \to 0$ y por AF1 $\|u_n^6\|_{L_{g_2}^2} \to 0$ obtenemos $\|u_{nx}^4\|_{L^2} \to 0$.

Luego por la equivalencia de normas se tiene ,

$\|u_n^4\|_{H_0^1} \to 0$, es decir, $u_n^4 \to 0$ en $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$.

AF4. $u_{nx}^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

Como $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, en (1.91) obtenemos,

$$i\beta_n u_{nx}^3 - u_{nx}^4 = F_{nx}^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L).$$

Luego tenemos,

$$\|\beta_n u_{nx}^3\|_{L^2} = \|i\beta_n u_{nx}^3\|_{L^2} = \|u_{nx}^4 + F_{nx}^3\|_{L^2} < \|u_{nx}^4\|_{L^2} + \|F_{nx}^3\|_{L^2}$$

Asi por la AF3 y la expresión anterior obtenemos

$$\|\beta_n u_{nx}^3\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L^2(0,L)$$

Luego de la expresión anterior se tiene,

$$\|u_{nx}^3\|_{L^2} = \frac{1}{|\beta_n|}\|\beta_n u_{nx}^3\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Por lo tanto,

$$u_{nx}^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L)$$

AF5. $u_{nx}^1 \to 0$ en $L^2(0,L)$

En (1.89) derivando con respecto a x y por inmersión tenemos,

$$i\beta_n u_{nx}^1 - u_{nx}^2 = F_{nx}^1 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{1.99}$$

Luego se obtiene

$$\|\beta_n u_{nx}^1\|_{L^2} = \|u_{nx}^2 + F_{nx}^1\|_{L^2} \le \|u_{nx}^2\|_{L^2} + \|F_{nx}^1\|_{L^2}$$

De (1.99) y de la AF2 tenemos, $\|\beta_n u_{nx}^1\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Como $\|u_{nx}^1\|_{L^2} = \dfrac{1}{|\beta_n|}\|\beta_n u_{nx}^1\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Por lo tanto, obtenemos, $u_{nx}^1 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

AF6. $u_{nx}^1 + u_n^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

De la AF4 y por la desigualdad dePoincare se tiene,

$$u_n^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L). \tag{1.100}$$

Sumando (1.100) con la AF5, obtenemos

$$u_{nx}^1 + u_n^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L).$$

De las AF1, AF2, AF3, AF4, AF5 y AF6 se tiene que $\|U_n\|_H \underset{n\to\infty}{\to} 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\|U_n\|_H = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup \left\| (i\lambda I - A)^{-1} \right\|_{L(H)} < \infty$

Teorema 4.6 El semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 generado por A es exponencialmente estable, es decir existen constantes positivas M y α tal que $\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$, $\forall t > 0$.

Demostración:

La demostración se sigue inmediatamente del lema 4.5, del lema 4.6 y del teorema 2.1.81 (Teorema de Gearhart).

4.2 Discusion

Considerando que la estabilidad exponencial en esta investigación se obtuvo usando el Teorema de Gearhart al igual que C.Raposo et al (2005) en su investigación “Estabilidad exponencial para el sistema de Timoshenko con dos amortiguaciones débiles” emplean argumentos de contradicción al combinar dicho teorema con técnicas de ecuaciones en derivadas parciales sin velocidad de ondas iguales, a diferencia de S.Greatti (2018) en su trabajo “Existencia de solución y estabilidad exponencial de los sistemas de Timoshenko viscoelastico y termoelastico” utiliza el método de la energía en un caso y en el otro caso el Teorema de Pruss, por otro lado J.Apalara (2016) estudia “Decaimiento uniforme en el sistema de Timoshenko débilmente disipativo con retroalimentación de retardo distribuida internamente” usa la técnica de los multiplicadores, también Z.Ma et al (2011) en “ Estabilidad exponencial para un sistema de Timoshenko con historia “ al igual que V.Tarazona (2018) en su tesis “ Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria) emplean el Teorema de Pruss con la condición velocidad de ondas iguales, por ultimo Said y Rahali (2011) en su trabajo “ Un resultado de estabilidad para un sistema de Timoshenko con historia pasada y un termino de retardo en la retroalimentación interna” asi como F.Pariona (2015) en su tesis “ Estabilidad lineal de un sistema de Timoshenko utilizan el método de energía y velocidad de las ondas iguales.

Para encontrar la existencia y unicidad de solución en esta investigación se utilizo la teoría de semigrupos y el corolario de Liu al igual que, V.Tarazona (2018), F. Pariona (2015) y C. Raposo et al (2005) a diferencia de J. Apalara (2016) y Said-Rahali (2011) ellos usan el teorema de Hille Yosida,por último S. Greatti (2018) y Z. Ma et al (2011) emplean el teorema de Lumer Phillips

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

En esta investigación, se emplea la teoría de semigrupos para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para un sistema de Timoshenko con memoria total presente en el desplazamiento transversal y en el angulo de rotación, con condiciones de frontera Dirichlet. De la misma manera, se utiliza propiedades del generador infinitesimal de un semigrupo relacionado al sistema se demuestra que es exponencialmente estable si y solo si cumple las condiciones del teorema de Gearhart.

El principal aporte de esta investigación es establecer una condición necesaria y suficiente para asegurar la estabilidad exponencial.

Recomendaciones

En trabajos futuros, se puede investigar, en la medida que sea posible, extendiendo el sistema de Timoshenko con memoria con otros términos disipativos. También, se puede estudiar el sistema de Timoshenko, dándole condiciones al nucleo y con otras condiciones de frontera.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

Adams, R. & Fournier, J. (2003). Sobolev Spaces: Pure and Applied Mathematics. *Elsevier Science*, 2 (4).

Alabau, F.(2007). Asymptotic behaviour for Timoshenko beams subject to a single non-linear feedback control.*Nonlinear Diffirential Equation Applicative* (14), 643-669.

Ammar, F.,Benabdallah, A., Muñoz, J. & Racke, R.(2003).Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *Journal of Differential Equations*, (194), 82-115.

Apalara, T.(2016). Asymptotic behavior of weakly dissipative Timoshenko system with internal constant delay feedbacks. *Applicable Analysis* (95), 187 – 202.

Cavalcanti, M. & Cavalcanti, V.(2009). Introdução às teorias de distribuições e espaços de Sobolev. *Universidade Estadual de Maringá*. Brasil, Maringá.

Brezis, H.(2011). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. *Springer*. Estados Unidos, New York.

Jochen, K. & Nagel, R.(2006). A short Course on Operator Semigroups. *Unitext*. Estados Unidos, New York.

Evans, L.(1998). Partial Differential Equations. *University of California*. Estados Unidos, California.

Gearhart, L.(1978). Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces.*Transactions of the American Mathematical Society* (236), 381-387.

Giorgi, C. & Vegni, F.(2004). Uniform Energy Estimates for a Semilinear Evolution equation of the Mindlin-Timoshenko Beam with memory. *Elsevier,* (39), 95-1011.

Grasselli, M. & Pata, V.(2002). Uniform attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory. *Springer*, (50), 145-168.

Greatti, S.(2018). Existencia de solução e estabilidade exponencial dos sistemas de Timoshenko viscoelástico e termoelástico. *Universidade Estadual de Londrina.* Brasil, Londrina.

Guesmia, A. & Messaoudi, S. (2009). General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (32),2100-2125.

Guesmia, A., Messaoudi, S. & Soufyane, A.(2012). Stabilization of a Linear Timoshenko System with Infinite History and Applications to the Timoshenko-Heat Systems. *Electronic Journal of Differential Equations, 193*(2012), 3-48.

Guesmia, A. & Kafini, M.(2014). Bresse system with infinite memories. *Mathematical Method Applied Sciences*, *38*(11), 2383-2400.

Kesavan, S.(2009). Normed Linear Spaces: Functional Analysis. *Texts and readings in mathematics 52*(184), 24-65.

Jong, K. & Yuriko, R. (1987). Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM Journal Control Optimal 25*(6),1414-1426.

Kreyszig, E.(1989). Introductory Functional Analysis with Applications. *Wiley Classics Library*. Estados Unidos, Washington.

Santos, G.(2015). Comportamento Assintótico para un sistema de Timoshenko com historia. *Universidades Federal de Viçosa*.Brasil, Minas Gerais.

Liu, Z. & Zheng, S.(1999). Semigroups associated with dissipative systems. *Chapman and Hall.* China, Being.

Ma, Z., Zhang, L., & Yang, X.(2011). Exponential stability for a Timoshenko type system with history. *Journal of Mathematical Analitical Applied* (380), 295-309.

Bones, A. (2014).Comportamento Assintotico dos Sistemas de vigas Viscoelasticas de Timoshenko e de Bresse.*Univervidade Federal de Rio de Janeiro.* Brasil, Rio de Janeiro.

Messaoudi, S. & Mustafa, M. (2008).On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams. *Nonlinear Differential Equations and Applications 15*(6), 651-669.

Messaoudi, S. & Mustafa, M. (2009). A stability result in a memory type Timoshenko system. *Dynamic Systems and Applications 1*(18), 455-465.

Messaoudi, S. & Said-Houari, B.(2009). Uniform decay in a Timoshenko type system with history. *Journal of Mathematical Analytics 1*(360), 445-464.

Moreira, A.(2012). Semigrupos de operadores lineares e aplicações para equações de evolução. *Universidade Federal de Rio de Janeiro*. Brasil, Rio de Janeiro.

Muñoz, J. & Racke, R. (2002). Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 276*(1), 248-278.

Muñoz, J.(2004). Teoria de distribuciones y ecuaciones diferenciales parciales. *Universidade Federal de Rio de Janeiro*. Brasil, Rio de Janeiro.

Muñoz, J. & Fernandez, H.(2008). Stability of Timoshenko systems with past history. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 339*(1), 480-500.

Muñoz, J.(2008). Estabilización de semigrupos y aplicaciones. *Universidade de Rio de Janeiro*. Brasil, Rio de Janeiro.

Oliveira, C.(2012). Introduccion al Analisis Funcional. *IMPA*. Brasil, Rio de Janeiro.

Pariona, F.(2015). Estabilidad lineal del sistema de Timoshenko. *UNMSM*. Perú, Lima.

Pazy, A.(1983). Semigroupos de operadores lineales y aplicacion a las equaciones diferenciales parciales. *Springer*. Estados Unidos, New York.

Pruss, J.(1984).On the spectrum of C_0 - semigroups.*Transactions of the American Mathematical Society 284*(2), 842-852.

Raposo, C., Ferreira, J., Lima, M. & Castro, N.(2005). Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters 18*(5), 530-536.

Said-Hoauri, B. & Rahali, R.(2011). A stability result for a Timoshenko system with past history and a delay term in the internal feedback. *Dynamic Systems and Applications 20*(2011), 325-356.

Tarazona, V.(2018). Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria). *UNMSM*. Perú, Lima.

Timoshenko, S.(1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine 6*(245), 742-748.

Timoshenko, S.(1955). Vibration Problems in Engineering. *Van Nostrand*. Estados Unidos, New York.

Xu, G. & Yung, S.(2003).Stabilization of Timoshenko beam by means of pointwise controls. *ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations 9(*2003),578-595.

Yan, Q.(2000). Estabilización de límites del haz de Timoshenko.*System Science and Mathematical Sciences 1*(13), 374-386.

Zheng, Z.(2004). Nonlinear Evolutions Equations. *Chapman & Hall*. Estados Unidos, Florida.

ANEXOS

ANEXO 1

Matriz de Consistencia

PROBLEMA	OBJETIVO GENERAL	HIPOTESIS GENERAL	VARIABLES	INDICADORES
¿Cómo demostrar analíticamente la existencia, la unicidad y la estabilidad de la solución de un sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total, usando la teoría de semigrupos de operadores lineales?	Demostrar la existencia, unicidad y la estabilidad de la solución de un sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total, usando la teoría de semigrupos de operadores lineales.	El sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total, usando la teoría de semigrupos de operadores lineales tiene existencia, unicidad y la estabilidad exponencial.	Existencia y unidad de solución del sistema	-Transformar el sistema en un problema abstracto de Cauchy. -Demostrar que el operador asociado al sistema sea un generador infinitesimal de un semigrupo .
	Demostrar la existencia y unicidad de la solución de un sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total, usando la teoría de semigrupos de operadores lineales. Demostrar la estabilidad exponencial de la solución de un sistema de Timoshenko (1) – (4) con memoria total, usando la teoría de semigrupos de operadores lineales.		Estabilidad exponencial del sistema	-Transformar las ecuaciones del sistema introduciendo la variable memoria y con condiciones para “ g_i” (núcleo). -Determinar que la energía asociada al sistema decae exponencialmente con relación al tiempo.

DECLARACION JURADA DE AUTORÍA

Yo, Víctor Hilario Tarazona Miranda

Facultad:	Ciencias		Educación		Ingeniería	
Escuela Profesional:						
Departamento Académico:						
Escuela de Posgrado	Maestría		Doctorado	X		

Programa: Doctorado en Matemática

De la Universidad Nacional del Santa; Declaro que el trabajo de investigación intitulado:

Existencia, unicidad y estabilidad de solución de un sistema de Timoshenko con memoria

presentado en ……… folios, para la obtención del Grado académico:			(X)
Título profesional:	( )	Investigación anual:	( )

- He citado todas las fuentes empleadas, no he utilizado otra fuente distinta a las declaradas en el presente trabajo.
- Este trabajo de investigación no ha sido presentado con anterioridad ni completa ni parcialmente para la obtención de grado académico o título profesional.
- Comprendo que el trabajo de investigación será público y por lo tanto sujeto a ser revisado electrónicamente para la detección de plagio por el VRIN.
- De encontrase uso de material intelectual sin el reconocimiento de su fuente o autor, me someto a las sanciones que determinan el proceso disciplinario.

Nuevo Chimbote, 23 de agosto de 2021

Firma:

Nombres y Apellidos: Victor Hilario Tarazona Miranda

DNI: 09264893