

**Titre:** Etude de la stabilité dynamique des grands réseaux électriques par l'analyse spectrale  
Title: l'analyse spectrale

**Auteur:** M'Hamed Bounou  
Author:

**Date:** 1989

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bounou, M. (1989). Etude de la stabilité dynamique des grands réseaux électriques par l'analyse spectrale [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/57934/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/57934/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

**UNIVERSITE DE MONTREAL**

**ETUDE DE LA STABILITE DYNAMIQUE DES GRANDS  
RESEAUX ELECTRIQUES PAR L'ANALYSE SPECTRALE**

par

**Mhamed BOUNOU**

**DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE**

**ECOLE POLYTECHNIQUE**

**Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
Grade de Maître es Sciences Appliquées (M.Sc.A)**

**Décembre 1989**

© Mhamed BOUNOU 1989



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Canadian Theses Service    Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada  
K1A 0N4

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, distribuer ou vendre des copies de : de quelque manière et sous quelque que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit de copyright qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58165-4

UNIVERSITE DE MONTREAL

ECOLE POLYTECHNIQUE DE MONTREAL

Ce mémoire intitulé:

**ETUDE DE LA STABILITE DYNAMIQUE DES GRANDS  
RESEAUX ELECTRIQUES PAR L'ANALYSE SPECTRALE**

Présenté par: **Mhamed BOUNOU**

en vue de l'obtention du grade de: **M.Sc.A.**

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

**M.CORINTHIOS J.Michael, Ph.D , président**

**M.MALHAME Roland, Ph.D**

**M.DO Xuan-Dai, D.Sc.A**

à mes parents, ma femme  
et mes enfants.

## SOMMAIRE

---

Ce mémoire traite de la stabilité dynamique des grands réseaux électriques. En effet, lors d'une sollicitation d'un réseau (défaut ou variation de charge), des oscillations des angles internes des machines et des puissances qui transitent sur les lignes sont observées.

Habituellement, on détermine les fréquences de ces oscillations et les amortissements correspondants par la méthode conventionnelle des valeurs propres. Cette méthode est très coûteuse en temps de calcul pour les systèmes de grande dimension et elle ne renseigne pas sur les modes localement dominants .

Notre approche ici, consiste à utiliser les techniques spectrales pour déterminer les caractéristiques de stabilité dynamique recherchées.

Dans le cas d'un seul mode (machine - réseau infini), nous utiliserons la technique des fenêtres [1] basée sur l'intégrale de Fourier.

Pour le cas de modes couplés (réseau multimachines), nous utiliserons l'algorithme d'identification par la transformée en Z de Corinthios[3] "A Fast Z-transformation Algorithm for System Identification" .

Nous développons la théorie des techniques utilisées et nous faisons des application sur des réseaux simulés et sur le réseau **HYDRO-QUEBEC**.

Nous constaterons que l'algorithme de Corinthios permet d'isoler complètement les modes couplés et de les localiser avec la précision requise.

## ABSTRACT

---

In this work we analyse the dynamic stability of the large interconnected power systems via spectral techniques.

In the case of a single dominant mode we use a windowing technique [1] based on the Fourier Transformation. The frequency component is identified in the frequency spectrum. The damping constant is obtained by comparing the magnitudes of the respective frequency components in different time windows.

In the general case (coupled modes), we use the identification algorithm of Corinthios, "A Fast Z-transformation Algorithm for Systems Identification"[3].

The mathematical theory of both techniques is outlined. Different applications are presented. The results of both techniques are validated by means of conventional linear eigenvalue analysis.

We conclude that the identification algorithm of Corinthios allows a complete decomposition of coupled

modes and their localisation to the degree of the precision required.

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens d'abord à témoigner de ma reconnaissance pour mes directeurs de recherches M<sup>r</sup> Roland MALHAME (Ecole Polytechnique) et M<sup>r</sup> Serge LEFEBVRE (I.R.E.Q) pour la qualité de leur direction, leurs judicieux conseils de même que leur soutien moral et financier.

Mes remerciements vont au chef de la section automatique pour l'appui logistique nécessaire à la réussite de ce travail.

Que les responsables de la formation du ministère de l'Equipelement (Rabat-Maroc) et de l'Ecole Hassania (Casablanca) trouvent ici mon entière gratitude.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les Professeurs qui ont contribué à ma formation de base requise pour ce mémoire.

## TABLE DES MATIERES

---

|   |          |
|---|----------|
| <b>SOMMAIRE</b>                                     | V        |
| <b>ABSTRACT</b>                                     | VII      |
| <b>REMERCIEMENTS</b>                                | IX       |
| <b>LISTE DES TABLEAUX</b>                           | XIV      |
| <b>LISTE DES FIGURES</b>                            | XV       |
| <br>  |          |
| <b>Chapitre 1 : INTRODUCTION.....</b>               | <b>1</b> |
| 1.1 Généralités.....                                | 1        |
| 1.2 Classes de stabilité.....                       | 2        |
| 1.3 Méthodes d'analyse de stabilité dynamique.....  | 3        |
| 1.3.1 Valeurs propres.....                          | 3        |
| 1.3.2 Analyse spectrale.....                        | 4        |
| 1.4 Définition du problème.....                     | 5        |
| <br>  |          |
| <b>Chapitre 2 : ANALYSE SPECTRALE ET TECHNIQUES</b> |          |
| <b>D'IDENTIFICATION.....</b>                        | <b>8</b> |
| 2.1 Analyse temporelle.....                         | 8        |
| 2.1.1 Séquence discète.....                         | 8        |
| 2.1.2 Réponse temporelle.....                       | 9        |
| 2.1.3 Equations de différences.....                 | 11       |
| 2.2 Analyse fréquentielle.....                      | 11       |

|  |    |
|--|----|
|  | XI |
| 2.2.1 Réponse en fréquence.....                                | 11 |
| 2.2.2 Transformée de Fourier d'une séquence...                 | 12 |
| 2.2.3 Transformée de Fourier d'un signal<br>échantillonné..... | 14 |
| 2.3 Transformée en Z.....                                      | 18 |
| 2.3.1 Définition.....  | 18 |
| 2.3.2 Convergence de la transformée en Z.....                  | 19 |
| 2.3.3 Stabilité des systèmes.....                              | 19 |
| 2.4 Localisation des pôles-zéros.....                          | 21 |
| 2.4.1 Spectre de fréquence.....                                | 21 |
| 2.4.2 Groupe retard.....                                       | 23 |
| 2.4.3 Analyse spectrale.....                                   | 27 |
| 2.4.4 Analyse graphique.....                                   | 32 |
| 2.4.5 Modes multiples.....                                     | 33 |
| 2.5 Techniques d'identification.....                           | 37 |
| 2.5.1 Technique de Corinthios.....                             | 37 |
| 2.5.2 Applications.....  | 41 |
| 2.5.3 Technique des fenêtres.....                              | 53 |
| 2.5.4.1 Calcul de $w_0$ .....                                  | 55 |
| 2.5.4.2 Calcul de l'amortissement.....                         | 56 |

**Chapitre 3 : STABILITE D'UNE MACHINE SYNCHRONE**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>RELIEE A UN RESEAU INFINI.....</b>    | <b>62</b> |
| 3.1 Machine synchrone-réseau infini..... | 62        |

|   |            |
|---|------------|
|   | XII        |
| 3.2 Régime statique.....                        | 63         |
| 3.3 Régime dynamique.....                       | 67         |
| 3.4 Stabilité de la machine.....                | 67         |
| 3.5 Mode d'oscillations naturelles.....         | 72         |
| 3.6 Algorithme.....                             | 75         |
| 3.7 Simulation.....                             | 76         |
| 3.7.1 Méthodologie.....                         | 77         |
| 3.7.2 Résultats de la simulation.....           | 82         |
| <br>  |            |
| <b>Chapitre 4 : RESEAU MULTIMACHINES.....</b>   | <b>94</b>  |
| <br>  |            |
| 4.1 Modélisation du système.....                | 94         |
| 4.2 Modèle réduit.....                          | 100        |
| 4.3 Régime dynamique.....                       | 104        |
| 4.4 Algorithme.....                             | 108        |
| 4.5 Valeurs propres.....                        | 109        |
| 4.6 Simulation.....                             | 115        |
| 4.6.1 Exemple simulé.....                       | 115        |
| 4.6.2 Calcul préliminaire.....                  | 117        |
| 4.6.3 Défaut triphasé.....                      | 121        |
| 4.6.4 Ouverture de phase.....                   | 123        |
| 4.6.5 Modes d'oscillations du système.....      | 125        |
| <br>  |            |
| <b>Chapitre 5 : APPLICATIONS PRATIQUES.....</b> | <b>141</b> |

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| 5.1 Application # 1..... | 141        |
| 5.2 Application # 2..... | 146        |
| 5.3 Application # 3..... | 150        |
| 5.4 Temps de calcul..... | 159        |
| <b>CONCLUSION</b>        | <b>162</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE</b>     | <b>164</b> |
| <b>ANNEXE</b>            | <b>166</b> |

## LISTE DES TABLEAUX

---

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 Modes des oscillations par l'algorithme des<br>des fenêtres..... | 83  |
| 3.2 Modes des oscillations par l'algorithme de<br>Corinthios.....    | 84  |
| 4.1 Données des générateurs.....                                     | 115 |
| 4.2 Données des transformateurs.....                                 | 115 |
| 4.3 Données des lignes.....  | 115 |
| 4.4 Données des charges.....   | 116 |
| 5.1 Modes des oscillations de la machine #2.....                     | 142 |
| 5.2 Modes des oscillations du stabilisateur.....                     | 146 |
| 5.3 Modes des oscillations du réseau HYDRO-QUEBEC.                   | 150 |

## LISTE DES FIGURES

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | réponse en fréquence de $a^n u[n]$ .....                | 15 |
| 2.2  | phase continue évaluée sur le cercle unitaire.....      | 25 |
| 2.3  | réponse en fréquence d'un zéro ( $r=.9$ ).....          | 29 |
| 2.4  | réponse en fréquence d'un zéro ( $\theta=\pi$ ).....    | 30 |
| 2.5  | pôle-zéro d'un premier ordre .....                      | 32 |
| 2.6  | pôles-zéros dans le plan Z .....                        | 34 |
| 2.7  | réponse en fréquence d'un deuxième ordre...             | 36 |
| 2.8  | spectre(amplitude) d'un 4 <sup>ème</sup> ordre.....     | 45 |
| 2.9  | phase continue.....                                     | 46 |
| 2.10 | variation de phase.....                                 | 47 |
| 2.11 | phase principale.....                                   | 48 |
| 2.12 | réponse impulsionnelle d'un 6 <sup>ème</sup> ordre..... | 51 |
| 2.13 | spectre (amplitude).....                                | 52 |
| 2.14 | phase.....  | 53 |
| 2.15 | phase d'un 4 <sup>ème</sup> ordre instable.....         | 55 |
| 2.16 | erreur relative sur a ( $T_G=T_W= 2$ sec).....          | 61 |
| 2.17 | erreur relative sur a ( $T_G=T_W=2.2$ sec).....         | 62 |
| 3.1  | machine-réseau infini.....                              | 63 |
| 3.2  | modèle classique.....                                   | 65 |
| 3.3  | puissance électrique.....                               | 67 |
| 3.4  | schéma d'interconnexion machine-réseau.....             | 69 |
| 3.5  | régime dynamique.....                                   | 70 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.6  | machine-ligne double-bus infini.....              | 78  |
| 3.7  | schéma simplifié.....                             | 79  |
| 3.8  | schéma pendant le défaut.....                     | 80  |
| 3.9  | schéma réduit.....                                | 81  |
| 3.10 | schéma après défaut.....                          | 81  |
| 3.11 | puissances électriques.....                       | 85  |
| 3.12 | régime transitoire.....                           | 86  |
| 3.13 | angle interne.....                                | 87  |
| 3.14 | régime dynamique.....                             | 88  |
| 3.15 | variation de l'angle interne.....                 | 89  |
| 3.16 | amplitude du spectre (mode $-15 + j11.37$ )... .. | 90  |
| 3.17 | phase (mode $-15 + j11.37$ ).....                 | 91  |
| 3.18 | amplitude du spectre(mode $.010 + j 11.37$ ).. .. | 92  |
| 3.19 | phase (mode $.010 + j 11.37$ ).....               | 93  |
| 4.1  | noeud charge.....                                 | 95  |
| 4.2  | modèle de charge.....                             | 96  |
| 4.3  | modèle classique de la machine.....               | 97  |
| 4.4  | angle interne.....                                | 99  |
| 4.5  | modèle en $\pi$ de la ligne.....                  | 99  |
| 4.6  | réseau réduit.....                                | 103 |
| 4.7  | réseau à trois machines et 9 noeuds.....          | 114 |
| 4.8  | réseau avant le défaut.....                       | 117 |
| 4.9  | réseau pendant le défaut.....                     | 120 |
| 4.10 | réseau après défaut.....                          | 122 |
| 4.11 | puissances electriques ( $a=-.15$ ).....          | 129 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.12 puissances électrique ( $a=-.05$ ).....   | 130 |
| 4.13 angles internes $\delta_{21}$ .....       | 131 |
| 4.14 angles internes $\delta_{31}$ .....       | 132 |
| 4.15 variations $\Delta\delta_{21}$ .....      | 133 |
| 4.16 variations $\Delta_{31}$ .....            | 134 |
| 4.17 spectre de p3 (amplitude $a=-.15$ ).....  | 135 |
| 4.18 spectre de p3 (phase $a=-.15$ ).....      | 136 |
| 4.19 spectre de p2 (amplitude $a=-.05$ ).....  | 137 |
| 4.20 spectre de p2 (phase $a=-.05$ ).....      | 138 |
| 4.21 spectre de p2 (amplitude $a=-.15$ ).....  | 139 |
| 4.22 spectre de p2 (phase $a=-.15$ ).....      | 140 |
| 5.1 angle interne de la machine # 2.....       | 143 |
| 5.2 spectre (amplitude).....                   | 144 |
| 5.3 spectre (phase).....                       | 145 |
| 5.4 signale de stabilisation.....              | 147 |
| 5.5 spectre (amplitude).....                   | 148 |
| 5.6 spectre (phase).....                       | 149 |
| 5.7 angles internes des machines 49, 295 et 39 | 152 |
| 5.8 angles pendant le régime transitoire.....  | 153 |
| 5.9 spectre (amplitude) # 49.....              | 154 |
| 5.10 spectre (phase) #49.....                  | 155 |
| 5.11 spectre (amplitude) # 295.....            | 156 |
| 5.12 spectre (phase) #295.....                 | 157 |
| 5.13 spectre (amplitude) # 39.....             | 158 |
| 5.14 spectre (phase) #39.....                  | 159 |

## Chapitre 1

### INTRODUCTION

---

#### 1.1 GENERALITES

L'énergie électrique se distingue essentiellement par sa transformation directe en toute autre forme d'énergie, et par sa facilité de transport.

Ces avantages ont entraîné un développement spectaculaire et une demande accrue de cette énergie.

Afin de satisfaire la demande, les compagnies électriques ont fait appel à de nombreux modes de production (hydraulique, thermique, nucléaire,...), et pour assurer son transport sur de longues distances et sa distribution sur de grandes surfaces, différentes techniques ont été utilisées (THT alternatif, THT continu,...) .

Cela a conduit à la formation de grands réseaux, étoffés, très étendus et de constituants hétérogènes. Le contrôle d'un tel système est devenu difficile et son exploitation est complexe.

D'un autre côté, la nature non stockable de l'énergie électrique contraint le réseau à être constamment en alerte pour satisfaire, en tout temps, la demande. Une demande souvent imprévisible, en plus des défauts qui

viennent solliciter de temps à autre le réseau, rendent l'équilibre production-consommation difficile à réaliser et la stabilité du système est mise en jeu.

La stabilité est une caractéristique extrêmement importante dans le contexte des réseaux électriques. Elle est une condition essentielle à la sécurité d'exploitation, une perte de stabilité pouvant engendrer de graves conséquences: délestage des consommateurs, gêne des usagers, pertes matérielles, manque de crédibilité envers les contractuels.

## 1.2 CLASSES DE STABILITE

Pour mieux cerner l'étude de stabilité d'un réseau, on divise celle-ci en trois catégories:

- Stabilité **statique**
- Stabilité **dynamique**
- Stabilité **transitoire**

La stabilité statique étudie le comportement du réseau pour des perturbations faibles et lentes, la stabilité dynamique étudie l'influence des perturbations faibles et  Brusques, et finalement on parle de stabilité transitoire lorsqu'il s'agit de perturbations  Brusques et  sévères.

Dans ce projet, nous nous intéresserons surtout à l'étude de la **stabilité dynamique** qui englobe des types de perturbations auquel le réseau est constamment soumis.

### 1.3 METHODES D'ANALYSE DE STABILITE DYNAMIQUE

#### 1.3.1 Valeurs propres.

Cette méthode dite "méthode conventionnelle" consiste à établir un modèle (non linéaire) du système, le ramener au cas linéaire (perturbations faibles), et le mettre sous forme d'équations d'état. Une analyse de la matrice d'état, en particulier de ses valeurs propres, permet alors de déterminer les caractéristiques de stabilité.

Cette méthode présente certains d'inconvénients:

- . Elle est exigeante en temps de calcul pour les grands systèmes. Manipuler des matrices de grande dimension est coûteux en espace mémoire et en temps d'exécution. Comme le modèle est lié au point de fonctionnement, tout changement de structure du système (ce qui est fréquemment le cas du réseau électrique), nous amène à calculer un nouveau modèle, associé au nouveau point de fonctionnement.

- . Elle ne renseigne pas sur le mode localement dominant.

- . La précision des résultats est liée à celle du modèle, et est affectée par les variations de tensions (supposées constantes dans la modélisation) durant le défaut.

### 1.3.2 Analyse spectrale.

Pour pallier aux défauts de la méthode des valeurs propres, on propose d'utiliser une technique spectrale, cette idée nous étant inspirée des travaux de [1] sur la stabilité des réseaux.

Ainsi on étudie la stabilité dynamique du réseau, en procédant à l'enregistrement et au traitement du signal de sortie par des techniques transformées de Fourier rapide .

L'approche spectrale, utilisée dans ce mémoire présente par rapport à la méthode conventionnelle les avantages potentiels suivants:

- . L'analyse étant faite à partir du signal enregistré, toute l'information sur le comportement transitoire réel du système est conservée.

- . L'approche permet une **détection des modes localement dominants** .

- . L'approche peut être utilisée en temps réel comme en étude et simulation. L'avantage en temps réel est que l'on peut corriger rapidement le système localement (commande de stabilisateurs, relais de protection,..), et ceci à partir des valeurs des fréquences et amortissements dominants, localement détectés.

- . La méthode est générale. Par exemple, elle peut s'appliquer à l'analyse des harmoniques générés par des dispositifs de redressement de tensions ou courants

(thyristors,...) dans le réseau.

#### 1.4 DEFINITION DU PROBLEME

Notre travail consiste en l'application des techniques spectrales à l'étude de stabilité dynamique des réseaux électriques .

Dans ce domaine, le travail de Lee [1] représente, à notre connaissance, la première tentative formelle d'utilisation, dans les réseaux électriques, d'une technique spectrale - l'intégrale de Fourier - pour évaluer la fréquence des oscillations transitoires des machines . L'amortissement de ces oscillations est déterminé par une technique de fenêtres (**windows**) .

L'analyse de l'algorithme correspondant à cette, technique et la simulation du comportement transitoire, d'une machine synchrone reliée au réseau infini, suite à un défaut triphasé sur l'interconnexion, nous ont permis de tirer les conclusions suivantes:

1°) La technique [1] estime la fréquence des oscillations du système avec une erreur plus au moins acceptable. Mais pour l'amortissement associé, ce n'est pas le cas. En fait, nous démontrerons dans le chapitre 2, où l' algorithme des fenêtres est détaillé que l'erreur relative sur l'amortissement peut facilement aller jusqu'à 63% .

2°) La technique est limitée à un seule mode. Or dans les réseaux multimachines, les modes d'oscillation sont multiples, et la méthode s'avère inapplicable telle quelle.

Ainsi, bien que les travaux de Lee[1] auront joui le rôle de catalyseur dans notre propre recherche, l'approche d'analyse spectrale de stabilité que nous développerons s'avèrera résolument différente, et ceci en vue de traiter de manière générale le problème des modes couples.

Nous remarquerons d'abord que les grandeurs caractérisants la stabilité sont le coefficient d'amortissement "a" et la fréquence d'oscillation "w" du système (mode simple). Ces grandeurs ne sont autres que la partie réelle et la partie imaginaire du mode excité, et qui se reflète dans la sortie enregistrée. Déterminer le couple (a,w) revient à identifier le mode correspondant à partir de la réponse du système. Ce mode est situé dans le plan de Laplace en  $(a, jw)$ , ou dans le plan Z en  $z=e^{(a+jw)T}$ . Un parcours dans le plan Z en direction de ce mode, assisté par une technique spectrale permet de localiser le mode considéré.

Dans le domaine de recherche de pôles nous retiendrons la technique de Corinthios [3] qui consiste à diviser le plan Z en contours radiaux et circulaires et à évaluer le spectre par la transformée rapide de Fourier (F.F.T.) .

Ce mémoire est construit de la façon suivante :

Dans le chapitre 2 intitulé "Analyse spectrale et techniques d'identification ", nous exposons les fondements théoriques de la technique de "Windows" et ceux de la localisation des pôles-zéros dans le plan Z [3],[13].

Les algorithmes et les simulations dans le cas de machine synchrone-réseau infini et dans le cas multimachines sont présentés aux chapitres 3 et 4 respectivement.

Enfin, l'application des techniques proposées sur le réseau HYDRO-QUEBEC, et l'analyse des résultats, constituent le chapitre final de ce travail.

## Chapitre 2

### ANALYSE SPECTRALE ET TECHNIQUES D'IDENTIFICATION

---

Ce chapitre contient des notions fondamentales pour l'étude des systèmes discrets, les développements théoriques sous-jacents aux techniques qu'on a utilisées dans notre travail : " windows " [1] et "localisation des pôles et zéros " dans le plan Z [3]. On fera appel à ces techniques dans les chapitres qui suivent, relatifs à la stabilité des réseaux, ainsi que lors de l'élaboration des algorithmes correspondants.

#### 2.1 ANALYSE TEMPORELLE

##### 2.1.1 Séquence discrète

Une séquence discrète est définie comme une suite de valeurs discrètes dont  $x[n]$  est la valeur à l'instant  $n$ , avec  $n$  entier.

soit :  $\{ x[n] \} \quad -\infty < n < +\infty$

$x[n]$  s'écrit encore:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (2.1)$$

avec  $\delta[n]$  la séquence unitaire  $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

Dans le cas où la séquence  $x[n]$  est obtenue par l'échantillonnage d'un signal continu  $x_c(t)$  avec une période  $T$ , on a :

$$x[n] = x_c(nT)$$

Il est important de noter certaines distinctions dans le parallèle systèmes continus-système discrets. ainsi, si on considère la sinusoïde continue  $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$  et la séquence discrète  $x[n] = A \cos(\omega n + \alpha)$  on constate :

.dans  $x(t)$ ,  $\omega$  est exprimée en rad/sec, alors qu'elle est exprimée en rad dans  $x[n]$ , puisque  $n$  est entier.

. $x(t)$  est périodique de période  $2\pi/\omega$ , alors que  $x[n]$  n'est périodique que si  $x[n+N] = x[n] \iff \omega N = 2\pi k$ , condition qui n'est pas toujours vérifiée.

.Dans le signal continu  $x(t)$ ,  $\omega$  peut varier de 0 à  $+\infty$ , alors que pour le signal discret  $x[n]$ ,  $\omega$  varie effectivement de 0 à  $2\pi$ , puisque les séquences pour  $\omega$  et  $\omega + 2\pi k$  sont confondues. D'où l'intérêt de limiter l'étude fréquentielle des systèmes discrets sur un intervalle de  $2\pi$ .

### 2.1.2 Réponse temporelle.

on définit la réponse temporelle d'un système discret comme une transformation " $\Gamma$ " de la séquence d'entrée  $\{x[n]\}$ , en séquence de sortie  $\{y[n]\}$ .

soit:

$$y[n] = \Gamma\{ x[n] \}$$

si on remplace  $x[n]$  par son expression (2.1) , on a :

$$y[n] = \Gamma\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}$$

si le système est linéaire :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \Gamma\{ \delta[n-k] \} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n] \end{aligned}$$

avec  $h_k[n] = \Gamma\{\delta[n-k]\}$  la réponse du système à  $\delta[n-k]$ .

Si en plus le système est invariant dans le temps,

alors:  $h_k[n] = h[n-k] = \Gamma\{\delta[n-k]\}$

et

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

qui s'écrit encore :

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (2.2)$$

avec  $*$  représente le produit de convolution.

D'après (2.2), on voit donc que la réponse  $y[n]$  d'un système linéaire invariant dans le temps (SLIT), pour toute entrée  $x[n]$ , est entièrement caractérisée par sa réponse impulsionnelle  $h[n]$ .

### 2.1.3 Equations de différences.

Une classe importante des (SLIT) est fournie par les équations de différences linéaires, à coefficients constants, d'ordre N.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad (2.3)$$

ou encore,

$$y[n] = - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} x[n-m]$$

où l'on supposera  $N \geq M$ .

La réponse  $y[n]$  est fonction des sorties précédentes à  $n$ , de l'entrée  $x[n]$  et de ses valeurs précédentes.

## 2.2 ANALYSE FREQUENTIELLE.

### 2.2.1 Réponse en fréquence.

la réponse en fréquence d'un système discret, est une caractérisation d'un SLIT, alternative à la réponse impulsionnelle, et correspond à l'étude des  $\{y[n]\}$  lorsque  $x[n]$  est sinusoidale, de fréquence comprise entre 0 et  $2\pi$ .

soit  $x[n] = e^{j\omega n}$

D'après (2.2), la réponse d'un SLIT à l'entrée  $x[n]$  est :

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

posons :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

On a :

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \quad (2.4) \\ &= H(e^{j\omega}) x[n] \end{aligned}$$

On remarque d'après (2.4) que  $e^{j\omega n}$  est une fonction propre du système associée à la valeur propre  $H(e^{j\omega})$ .

$H(e^{j\omega})$  caractérise les variations en module et en phase de la sortie par rapport à l'entrée pour différentes fréquences  $\omega$ .

### 2.2.2 Transformée de Fourier d'une séquence.

On définit la transformée de Fourier (T.F.) d'une séquence  $x[n]$  par :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.5)$$

la séquence  $x[n]$  peut être définie comme la transformée inverse de sa T.F.  $X(e^{j\omega})$  :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

D'après la définition de la T.F. , la réponse en fréquence (2.4) d'un SLIT est définie par la T.F.  $H(e^{j\omega})$  de sa réponse impulsionnelle  $h[n]$ .

Il est à noter que la T.F. n'existe que pour des séquences absolument sommables :

$$\left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \right) \quad (2.6)$$

et

$$X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n}.$$

On peut démontrer qu'une séquence temporelle absolument sommable , a un spectre de fréquence fini et continu.

Ainsi la séquence exponentielle  $x[n]=a^n u[n]$ , où  $u[n]$  représente la séquence unité ( $u[n]=1$  pour  $n \geq 0$  et  $u[n]=0$  pour  $n < 0$ ), n'est absolument sommable que pour  $|a| < 1$  , son spectre de fréquence étant :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{j\omega}} \quad |a| < 1$$

Soit,

$$\text{mod}(X(e^{j\omega})) = \frac{1}{[1+a^2-2a \cos(\omega)]^{1/2}}$$

$$\text{arg}(X(e^{j\omega})) = \text{arctang}\left(\frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)}\right)$$

mod et arg représentent respectivement le module et l'argument du complexe  $X(e^{j\omega})$ .

On remarque dans la figure (2.1) que le spectre s'amplifie au fur et à mesure que la valeur de  $a$  s'approche de 1.

## 2.2 Transformée de fourier d'un signal échantillonné.

Soit un signal continu  $x_C(t)$ , le signal échantillonné par un peigne d'impulsion  $s(t)$  est :

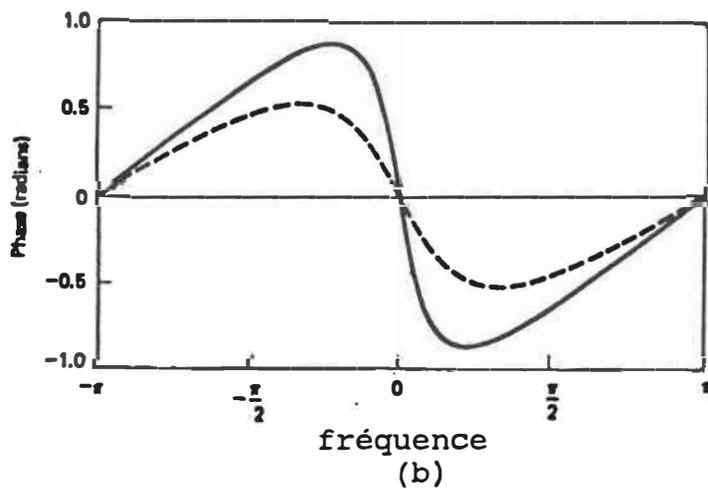
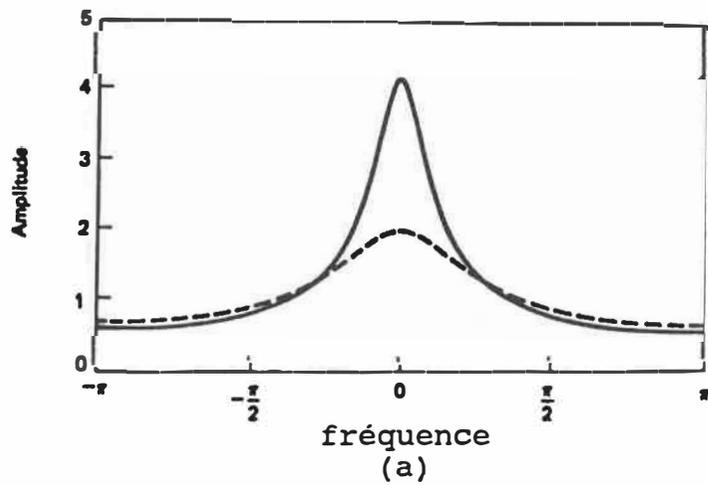
$$x_S(t) = x_C(t) s(t) \quad (2.7)$$

$$\text{Avec } s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad T : \text{période d'échantillonnage}$$

La T.F de  $x_S(t)$  est :

$$\begin{aligned} X_S(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_C(j\Omega) * S(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} X_C(j\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(j\Omega - kj\Omega_S) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_C(j\Omega) * \delta(j\Omega - jk\Omega_S) \end{aligned}$$

Où  $\Omega_S$  est la fréquence d'échantillonnage ( $\Omega_S = 2\pi/T$ ),



**Figure 2.1** : Réponse en fréquence pour un système de réponse impulsionnelle  $a^n u[n]$   
 ———  $a=0.9$                       - - - - -  $a=0.5$   
 (a) : Amplitude                      (b) : Phase

Soit :

$$X_S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_C(j\Omega - kj\Omega_S) \quad (2.8)$$

On constate d'après (2.8) que  $X_S(j\Omega)$  est la reproduction de  $X_C(j\Omega)$  en différents intervalles  $\Omega_S$  pour produire la transformée périodique  $X_S(j\Omega)$ .

Si la bande des fréquences de  $X_C(j\Omega)$  est finie et égale à  $2\Omega_{\max}$ ; il est clair que pour  $2\Omega_{\max}$  inférieur à  $\Omega_S$ ,  $X_C(j\Omega)$  constitue la période de base de  $X_S(j\Omega)$ . Si cette condition d'échantillonnage à un taux minimal (appelé taux de Nyquist) n'est pas respectée, on a un recouvrement (aliasing) des spectres.

Le respect du taux de Nyquist est fondamental pour conserver l'information lors du passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

Si on évalue  $X_S(j\Omega)$  d'une autre manière, l'expression (2.7) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} x_S(t) &= x_C(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT). \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_C(nT) \delta(t-nT) \end{aligned}$$

La T.F. de  $x_S(t)$  est :

$$X_S(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_C(nT) e^{-j\Omega nT}$$

Comme  $x_c(nT) = x[n]$  on a :

$$X_S(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega nT}$$

Pour  $\Omega = \frac{w}{T}$  , on a :

$$X_S(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn} \quad (2.9)$$

L'expression (2.9) est la même que (2.5) définissant la transformée de Fourier de la séquence  $x[n]$ .

Ainsi , on a les équivalences suivantes :

$$x_S(j\Omega) = x(e^{jw}) = x(e^{j\Omega T}) \quad \text{avec : } w = \Omega T$$

et :

$$\begin{aligned} x(e^{jw}) = x(e^{j\Omega T}) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(j\Omega - jk\Omega_S) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c\left(\frac{jw}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le passage de la T.F.  $X_S(j\Omega)$  du signal échantillonné  $x_S(t)$  à la T.F.  $x(e^{jw})$  de la séquence correspondante  $x[n]$  se fait par une normalisation du temps et de la fréquence.

## 2.3 TRANSFORMEE EN Z

### 2.3.1 Définition.

On définit la transformée en Z d'une séquence  $x[n]$  par

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (2.11)$$

Si on remplace le complexe  $z$  par ses coordonnées polaires, on a :

$$z = re^{j\omega}$$

Soit :

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] r^{-n}) e^{-j\omega n} \quad (2.12)$$

En comparant (2.5) et (2.12) on constate que la transformée en Z peut être interprétée comme la transformée de Fourier du produit de la séquence  $x[n]$  par l'exponentielle  $r^{-n}$ .

### REMARQUES

.Pour  $r=1$  on a  $X(z)=X(e^{j\omega})$ . La transformée de Fourier n'est autre que la transformée en Z évaluée sur un contour de rayon unité appelé **cercle unitaire**.

.Si on ne s'intéresse qu'à certains points  $\omega=2k\pi/T$  de ce cercle on a alors la transformée discrète de Fourier (T.D.F). Cette transformée s'appliquera aux signaux

discrets et périodiques.

.D'après la définition de la transformée en Z ,on constate que lorsque  $z$  varie sur le cercle unitaire  $w$  varie de  $0$  à  $2\pi$  ,et la périodicité de la T.F devient évidente.

### 2.3.2 Convergence de la transformée en Z

D'après (2.6) et (2.12) la convergence de  $X(z)$  n'est assurée que si la séquence  $x[n]r^{-n}$  est absolument sommable:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| < +\infty$$

Cette condition dépend essentiellement du module de  $z$ . Si  $X(z)$  converge pour un  $z$ , elle convergera pour tous les  $z$  situés sur le cercle de rayon  $|z|$  et centré à l'origine du plan Z.

Ainsi la région de convergence R.C est généralement une zone annulaire du plan  $z$  comprise entre deux cercles dont les rayons dépendent de la nature de la séquence .

### 2.3.3 Stabilité des systèmes

Nous avons déjà mentionné au paragraphe II.1.3 qu'une classe importante des SLIT satisfait l'équation de différence (2.3) .Dans le reste de notre développements, nous serons concernés par cette classe uniquement.

La transformée en Z de (2.3) est :

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

On supposera  $M < N$

La fonction de transfert en Z est définie comme :

$$H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.13)$$

Les valeurs finies de  $z$  pour lesquelles  $H(z)=0$  sont appelées les **zéros** du système.

Les valeurs finies de  $z$  pour lesquelles  $H(z)=\infty$  sont appelées les **pôles** du système.

Un système est dit **stable** si  $H(z)$  converge , et par conséquent les pôles du système doivent être à l'extérieur de la R.C.

Dans le cas d'un SLIT causale la R.C est l'extérieur du cercle qui passe par le pôle(pôles) du plus grand rayon. La stabilité de tel système n'est assurée que lorsque la R.C. contient le cercle unitaire, autrement dit, les pôles du système doivent être à l'intérieur du cercle unitaire.

### Propriété importante

$$x[n] \quad \langle \text{---Z---} \rangle \quad X(z) \quad \text{avec R.C.} = r_x$$

$$z_0^n x[n] \quad \langle \text{---Z---} \rangle \quad X(z z_0^{-1}) \quad \text{R.C.} = |z_0| r_x$$

En multipliant  $x[n]$  par  $z_0^n$ , on modifie la région de convergence de  $r_x$  à  $|z_0| r_x$  et par conséquent on peut stabiliser un système instable et inversement.

Cette multiplication de la séquence  $x[n]$  par l'exponentielle  $z_0^n$  se traduit dans le plan  $Z$  par un déplacement des pôles-zéros.

Ainsi si  $X(z)$  admet un pôle-zéro en  $z_1$ , la multiplication de  $x[n]$  par  $z_0^n$  déplace le pôle-zéro en  $z_1 z_0$ .

Si  $z_0=r$  est un réel pur, le pôle-zéro se déplace suivant la direction radiale des coordonnées polaires en  $r z_1$ . Par contre si  $z_0=e^{j\omega}$  est imaginaire pur, le déplacement est suivant la direction angulaire en  $z_1 e^{j\omega}$ .

## 2.4 LOCALISATION DES POLES-ZEROS

### 2.4.1 Spectre de fréquence

En écrivant la relation (2.13) sous forme de produit de facteurs de premier ordre on a :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

En remplaçant  $z$  par  $e^{j\omega}$  on a la réponse en fréquence :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})} \quad (2.14)$$

Sous forme de module et argument on a :

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k e^{-j\omega}|}$$

Il est intéressant d'écrire (2.14) sous forme d'une sommation de facteurs, en exprimant le gain du système en db. Soit :

$$G(\omega) = 20 \log |H(e^{j\omega})|$$

Soit: (2.15)

$$G(\omega) = 20 \log \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \log |1 - c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \log |1 - d_k e^{-j\omega}|$$

L'argument est : (2.16)

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^M \arg(1 - c_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^N \arg(1 - d_k e^{-j\omega})$$

**REMARQUE:**

. $H(e^{j\omega})$  (2.14) est défini comme le produit des facteurs zéros divisé par le produit des des facteurs pôles de  $H(z)$ .

.Dans (2.15) et (2.16) les facteus-zéros contribuent un signe positif et les facteurs-pôles un signe négatif.

**2.4.2 Groupe retard**

En exprimant la phase du système comme une somme algébrique des phases de chaque facteur (2.16) , on constate qu'il y a une ambiguïté. Car , si on ajoute un multiple de  $2\pi$  à chaque terme de (2.16) ,le résultat n'est pas modifié. Par conséquent on ne peut reconnaître la contribution de chaque terme à la phase du système .

Afin de lever cette ambiguïté ,on introduit une fonction appelée **groupe retard** , définie comme le gradient (désigné par  $\text{grd}$ ) de l'argument par rapport à  $w$  :

Soit:

$$\text{grd}(H(e^{j\omega})) = - \frac{d}{d\omega} [\arg(H(e^{j\omega}))] \quad (2.17)$$

En dérivant (2.16) on a:

$$\text{grd}(H(e^{j\omega})) = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} \{\arg(1-d_k e^{-j\omega})\} - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \{\arg(1-c_k e^{-j\omega})\}$$

Soit :

$$\text{grd}(H(e^{j\omega})) = \sum_{k=1}^N \frac{d_k^2 - \text{Re}(d_k e^{-j\omega})}{1 + d_k^2 - 2\text{Re}(d_k e^{-j\omega})} - \sum_{k=1}^M \frac{c_k^2 - \text{Re}(c_k e^{-j\omega})}{1 + c_k^2 - 2\text{Re}(c_k e^{-j\omega})}$$

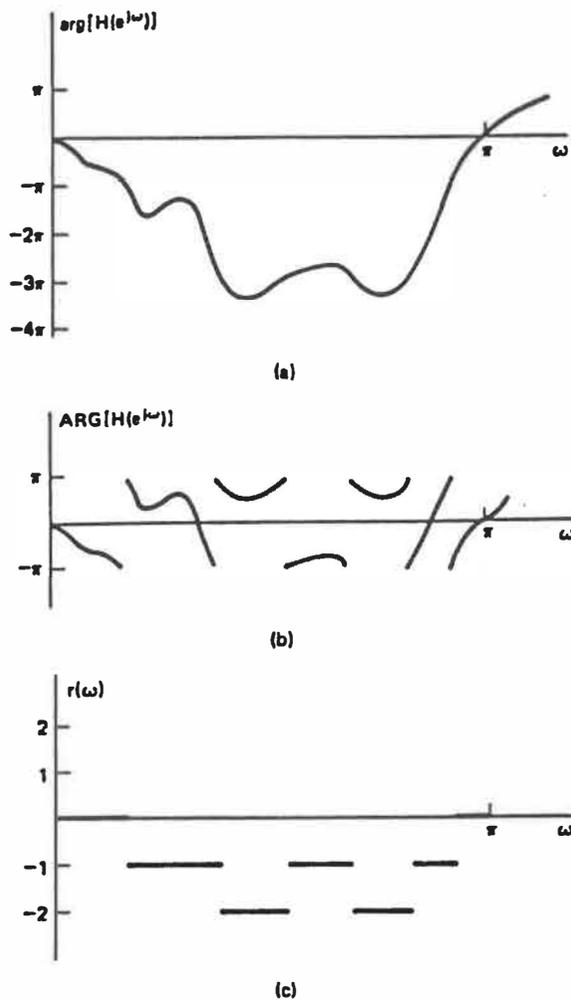
Re : partie réelle .

Soit la fonction  $\text{ARG}(H(e^{j\omega}))$  appelée **argument principal** définie telle que:

$$-\pi < \text{ARG}(H(e^{j\omega})) \leq \pi$$

La nécessité de définir ARG est due au fait que les calculs numériques de la phase sont donnés par la fonction arctan dont le résultat est toujours compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Ainsi lorsqu'on utilise ARG pour calculer la phase du système pour différents  $\omega$ , on constate qu'il y a des sauts de  $2\pi$  entre la fonction continue  $\text{arg}(H^{j\omega})$  et la fonction discontinue  $\text{ARG}(H(e^{j\omega}))$  (fig : 2.2).



**Figure 2.2 :** (a) Phase continue d'un SLIT évaluée sur le cercle unitaire. (b) Phase principale. (c) Entier multiple de  $2\pi$  qui doit être ajouté à  $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$  pour obtenir  $\arg[H(e^{j\omega})]$ .

Les fonctions  $\arg$  et  $\text{ARG}$  sont liées par la relation suivante :

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \text{ARG}(H(e^{j\omega})) + 2\pi r(\omega) \quad (2.18)$$

Avec  $r(\omega)$  entier positif ou négatif qui peut être différent pour chaque valeur de  $\omega$ .

$r(\omega)$  représente le degré de discontinuité de la phase.

Il est **fondamental** de caractériser ces sauts de  $2\pi$  afin de pouvoir évaluer la contribution de chaque terme (pôle-zéro) de (2.16) au changement de la phase du système.

La fonction groupe retard qu'on a définie pour  $\arg$ , peut se calculer à partir de la l'argument principal  $\text{ARG}$  :

En dérivant (2.18) pour les valeurs  $\omega$  où  $\text{ARG}$  est continue, on a :

$$\frac{d}{d\omega} \arg(H(e^{j\omega})) = \frac{d}{d\omega} \text{ARG}(H(e^{j\omega}))$$

Soit :

$$\text{grd}(H(e^{j\omega})) = - \frac{d}{d\omega} \text{ARG}(H(e^{j\omega})) \quad (2.19)$$

Pour les points de discontinuité de  $\text{ARG}(H(e^{j\omega}))$ , la fonction  $\text{grd}$  correspond à un saut entre  $\pi$  à  $-\pi$ . L'égalité (2.19) est donc vérifiée partout excepté pour un nombre fini de points correspondant aux discontinuités de

la fonction  $\text{ARG}(H(e^{j\omega}))$ .

### 2.4.3 Analyse spectrale

D'après (2.14), la réponse en fréquence est donnée par:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})}$$

Pour analyser cette réponse, il est intéressant d'étudier l'influence du facteur  $(1 - re^{j\theta} e^{-j\omega})$  qui figure au numérateur et au dénominateur, et qui est typique autant pour un pôle que pour un zéro.

Soit :

$$C = 1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}$$

En calculant les trois fonctions  $C_{db}$ ,  $\text{ARG}$ ,  $\text{grad}$  définies précédemment, on a :

$$|C|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)$$

$$C_{db} = 20 \log |C|$$

Soit :

$$C_{db} = 10 \log_{10} |1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)|$$

$$\text{ARG}(C) = \text{Arctan} \left[ \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right] \quad (2.20)$$

$$\text{grd}(C) = \frac{r^2 - r \cos(w-\theta)}{|1 - re^{j\theta}e^{-jw}|^2}$$

On remarque que les trois fonctions sont périodiques, de période  $2\pi$  ; et elles sont toutes en  $(w-\theta)$  .

Si on analyse les spectres de ces fonctions pour différentes valeurs de  $\theta$  et de  $r$  , on peut noter les faits importants suivants:

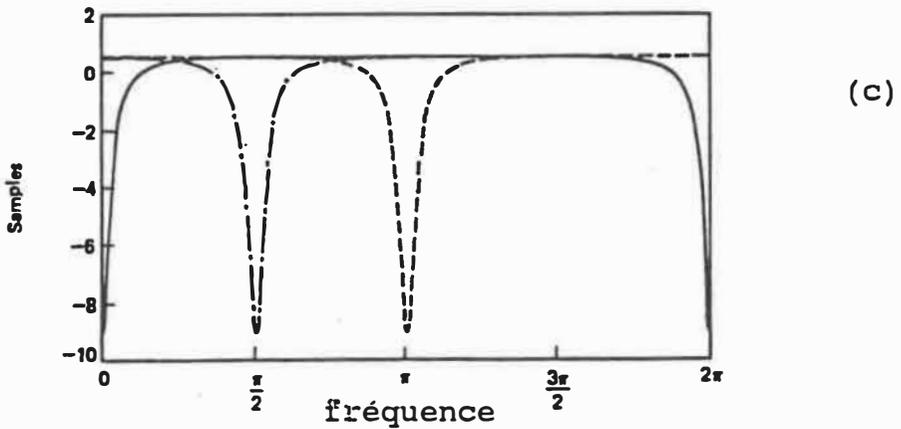
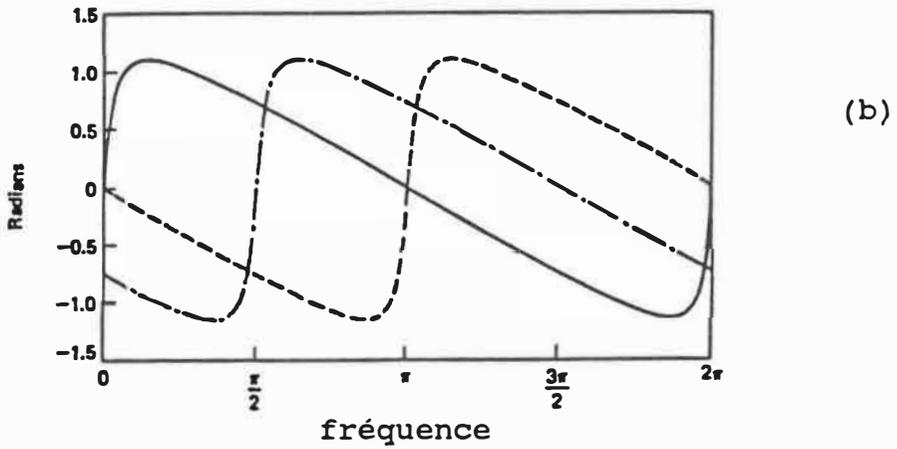
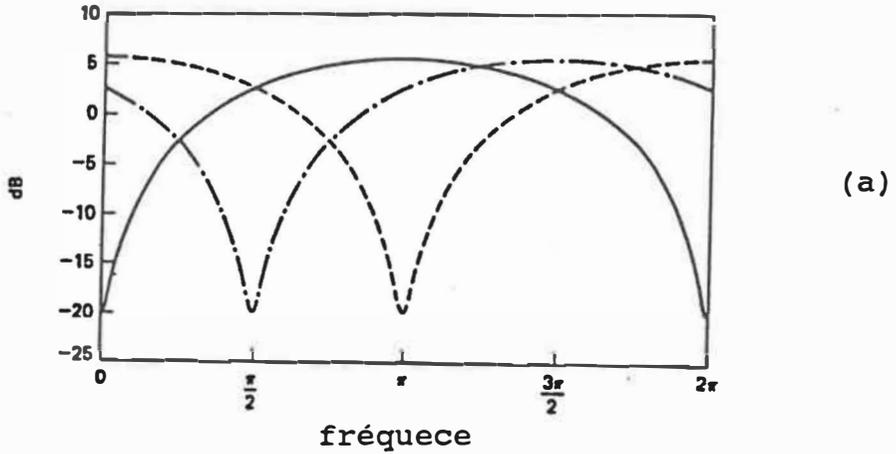
- Pour  $r$  fixe et  $\theta$  variable (fig :2.3) , les spectres respectifs sont translatés de  $\theta$  suivant l'axe  $w$  .

Au voisinage de  $w=\theta$  , la phase change rapidement de signe. Ce qui se traduit par une impulsion négative dans la fonction retard.

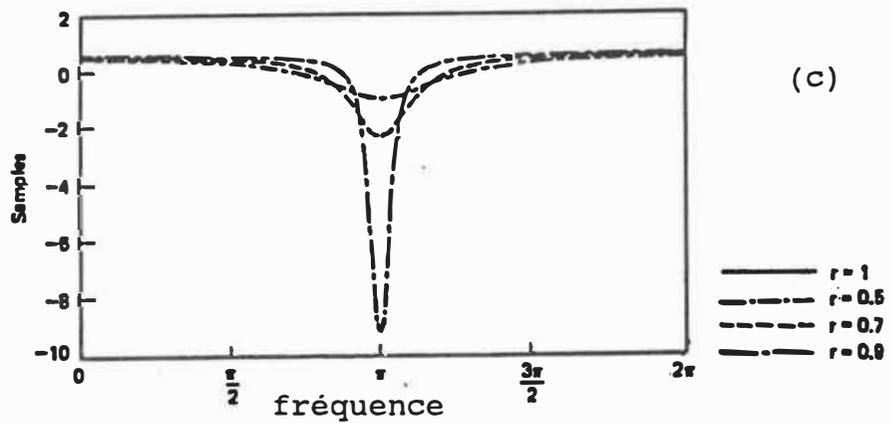
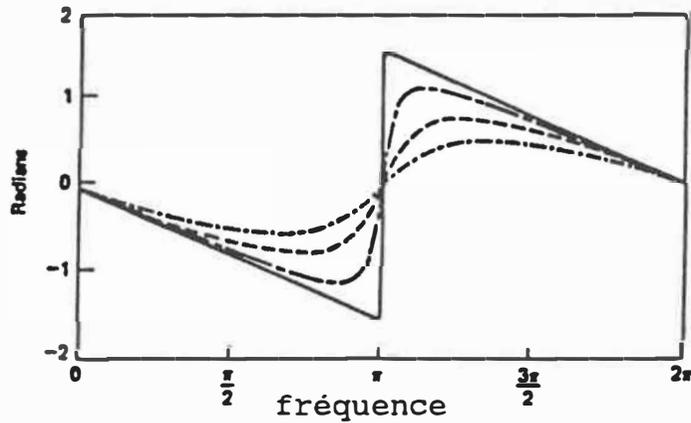
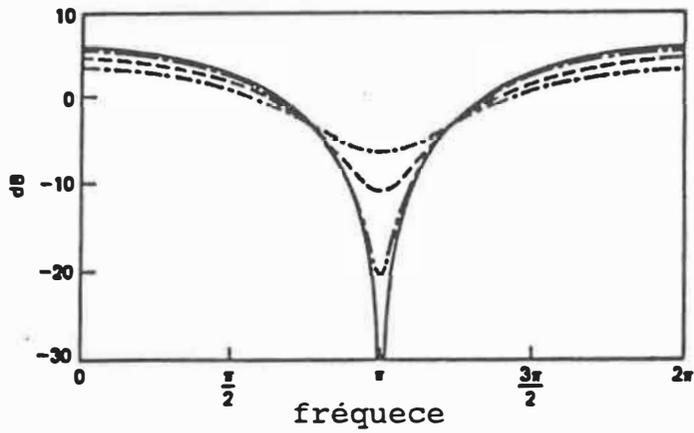
A  $w=\theta$  on a le gain (db) minimal , et la phase nulle.

- Pour  $\theta$  fixe , et  $r$  variable (fig :2.4), on constate que plus  $r$  s'approche de 1 (cercle unitaire) , plus les pics à  $w=\theta$  sont aigus .

Ainsi, pour  $r=1$  , la phase accuse une discontinuité à  $w=\theta$  et fait une rotation de  $\pi$  . La fonction retard est indéfinie .Le gain est  $-\infty$  ,ce qui correspond à une amplitude nulle.



**Figure 2.3 :** Réponse en fréquence pour un simple zéro.  $r=0.9$  et  $\theta=0, \pi/2, \pi$ .  
 (a):Amplitude (b):Phase (c):Groupe retard



———  $r = 1$   
 - · - · -  $r = 0.5$   
 - - - -  $r = 0.7$   
 - · - · -  $r = 0.9$

Figure 2.4 : Réponse en fréquence pour un simple zéro.  $\theta = \pi$  et  $r = 1, .9, .5$   
 (a): Amplitude (b): Phase (c): Groupe retard

Ces observations sont faites pour le facteur  $C = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})$  qui correspond à un zéro. Dans le cas d'un pôle le facteur correspondant est  $C^{-1}$ ; et les trois fonctions  $C_{db}$ , ARG et  $\text{grd}$  calculées en (2.20) sont précédées du signe "-". Les spectres des figures (2.3) et (2.4) seront inversés.

Pour  $r=1$  et  $\omega=0$  le gain est  $+\infty$ , la rotation de phase est de  $-\pi$ . Les impulsions de la fonction retard sont positives pour  $r < 1$ .

Ces constatations nous permettent d'identifier la contribution d'un pôle(zéro) au changement du spectre du système et deviendront la base de techniques d'identification discutées plus bas. On résumé, nous avons la règle suivante:

Un pôle(zéro) situé sur le cercle unitaire rend l'amplitude du spectre  $H(e^{j\omega})$  infini(nulle), glisse la phase de  $-\pi(+\pi)$  et provoque une impulsion de  $+\infty(-\infty)$  dans la fonction retard.

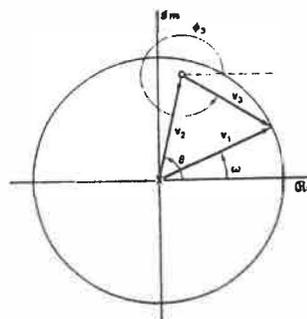
Cette conclusion est la base fondamentale de l'algorithme de localisation des pôles-zéros dans le plan Z de Corinthios [3]], dont nous annonçons le principe :

. Une multiplication, dans le temps, par une exponentielle, avec amortissement variable, déplace le pôle(zéro) dans le plan Z, avec pour destination visée le cercle unitaire.

. Le calcul du spectre de la séquence résultante par la T.D.F. permet de savoir à quelle distance le pôle-zéro se situe par rapport au cercle unitaire, et ceci en évaluant le degré de discontinuité de la phase. On ajustera alors l'amortissement en conséquence, jusqu'à maximiser la discontinuité. Le signe de la fonction groupe retard nous renseignera alors sur la nature du mode (pôle ou zéro).

#### 2.4.4 Analyse graphique.

Comme tout nombre complexe est associé à un vecteur, l'analyse précédente peut être faite sous forme vectorielle. En effet l'évaluation du spectre par la transformée de Fourier consiste à tourner sur le cercle unitaire dans le plan  $Z$  et à évaluer les rapports d'amplitude de vecteurs liant les pôles(zéros) à un point sur le cercle unitaire, correspondant à une fréquence particulière. On donne un exemple pour illustrer le principe graphique de calcul du spectre.



**Figure 2.5:** Pôle-zéro d'un système de premier ordre dans le plan  $Z$ .

Soit,

$$H(z) = 1 - re^{j\theta}z^{-1}$$

$$= \frac{z - re^{j\theta}}{z}$$

$H(z)$  a un pôle en  $z=0$  et un zéro en  $z=re^{j\theta}$ .

Pour les points du cercle unitaire  $z=e^{jw}$ , soit :

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{jw} - re^{j\theta}}{e^{jw}} = c$$

Posons  $c = \frac{|V_3|}{|V_1|}$  avec  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  les vecteurs définis dans la figure 2.5.

Comme  $|V_1| = 1$  on a :

$$|c| = |V_3|$$

$$\text{et } \arg(c) = \arg(V_3) - \arg(V_1)$$

$$= \theta_3 - w$$

$V_3$  correspond au vecteur zéro, et  $V_1$  au vecteur pôle.

Lorsque  $w$  varie de 0 à  $2\pi$ , on tourne sur le cercle unitaire, ainsi l'amplitude de  $V_3$  diminue pour devenir minimale à  $w=\theta$  puis remonte. La phase est négative à  $w=0$ , elle augmente pour atteindre zéro à  $w=\theta$  et elle devient positive après.

Ce qui correspond aux allures des spectres: (fig : 2.3 et 2.4) .

### 2.4.5 Modes couplés

L'analyse précédente peut s'étendre aux modes couplés. Pour illustrer ce cas, on considère un second ordre à pôles conjugués complexes :

soit :

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}$$

$$= \frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

Les pôles de  $H(z)$  sont à  $p=re^{j\theta}$  et  $p^*=re^{-j\theta}$  respectivement, alors qu'on a un zéro double à  $z=0$  (fig: 2.6).

cercle unitaire

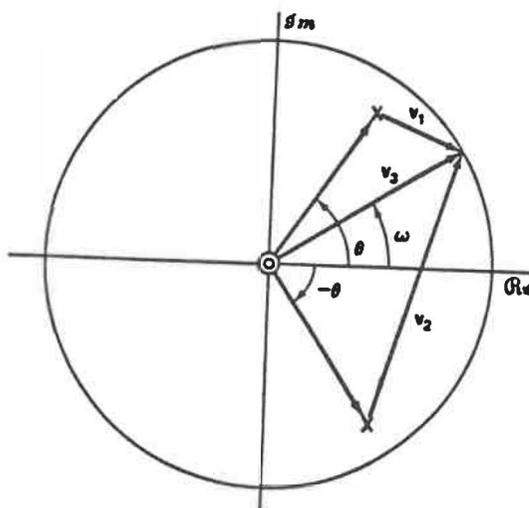


Figure 2.6: Pôles et zéros dans le plan Z

Les trois fonctions définies à l'équation (2.20) sont comme suit:

$$\begin{aligned} C_{db} &= 20 \log |H(e^{jw})| \\ &= -10 \log |1 + r^2 - 2r \cos(w-\theta)| \\ &\quad -10 \log |1 + r^2 - 2r \cos(w+\theta)| \end{aligned}$$

$$\arg(H(e^{jw})) = -\arctan \frac{r \sin(w-\theta)}{1-r \cos(w-\theta)} - \arctan \frac{r \sin(w+\theta)}{1-r \cos(w+\theta)}$$

$$\text{grd}(H(e^{jw})) = -\frac{r^2 - r \cos(w-\theta)}{1+r^2-2r \cos(w-\theta)} - \frac{r^2 - r \cos(w+\theta)}{1+r^2-2r \cos(w+\theta)}$$

En analysant la figure 2.6 on constate que lorsque  $w$  varie de 0 à  $2\pi$ , le pôle  $p$  domine la réponse en fréquence autour de  $w=\theta$ , par contre  $p^*$  domine cette réponse autour de  $w=-\theta$ ; et le spectre est symétrique.

(fig: 2.7) .

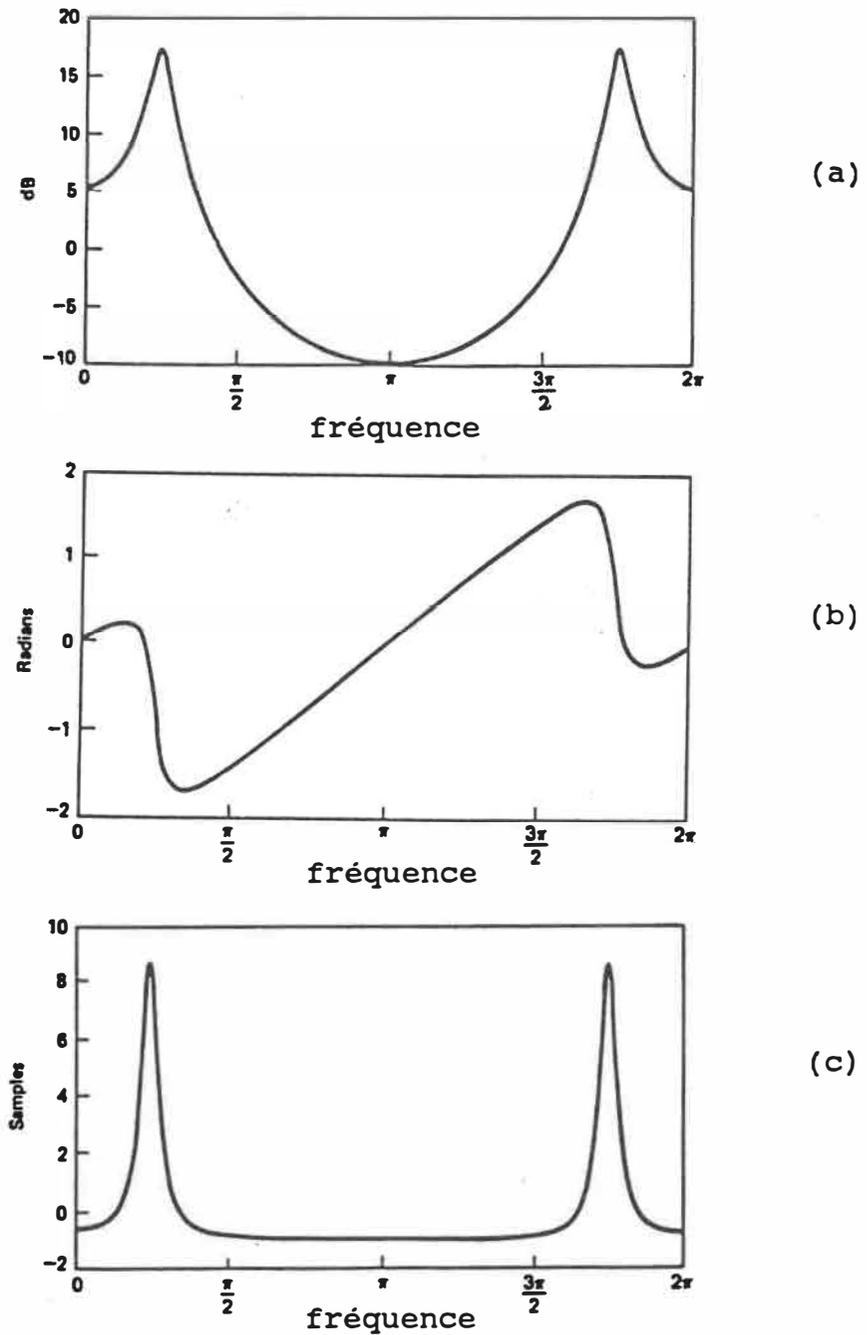


Figure 2.7 : Réponse en fréquence pour un deuxième ordre à pôles conjugués complexes:  
 $r=.9$        $\Theta=\pi/4$   
 (a):Amplitude (b):Phase (c):Groupe retard

## 2.5 TECHNIQUES D'IDENTIFICATION

### 2.5.1 La technique de Corinthios [3].

Soit  $x_n = x[nT]$  la réponse d'un SLIT causale obtenue par échantillonnage à une période  $T$  de  $x_c(t)$ .

La transformée en  $Z$  de  $x[nT]$  est :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}$$

Si la séquence  $x_n$  est finie et comporte  $N$  points, on a :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n} \quad (2.21)$$

Pour  $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}$ , on a :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-n\sigma T} e^{-jn\omega T} \quad (2.22)$$

$F(z)$  est fonction de deux paramètres  $\sigma$  et  $\omega$ . Si on s'intéresse à un nombre fini de points  $M_\sigma$  de  $\sigma$  et  $M_\omega$  de  $\omega$  on a :

$$\sigma = i\Delta\sigma + \sigma_0, \quad i=0, \dots, M_\sigma-1 \quad (2.23)$$

$$\omega = k\Delta\omega + \omega_0, \quad k=0, \dots, M_\omega-1$$

$\Delta\omega$  correspond à la fréquence d'échantillonnage.

Soit:  $\Delta w = \frac{2\pi}{M_w T}$

L'équation (2.22) peut s'écrire :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-ni\Delta\sigma T} e^{-j2\pi/M_w}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n a^{-ni} w^{kn} \quad (2.24)$$

avec  $a = e^{+\Delta\sigma T}$  et  $w = e^{-j2\pi/M_w}$

L'évaluation de (2.24) pour les différents  $\sigma$  et  $w$  nécessite  $M_\sigma \times M_w \times N$  opérations, dont chaque opération est une multiplication suivie d'une addition complexes. Ce qui est excessif en temps de calcul.

Pour réduire le nombre d'opérations, Corinthios choisit un contour radial puis circulaire pour évaluer (2.24).

Soit:

$$z_0 = e^{\sigma_0 T} e^{jw_0 T} \quad \text{point initial}$$

le  $k^{\text{ième}}$  point  $z_k$  est :

$$\begin{aligned}
 z_k &= e^{\sigma_0 T} e^{k\Delta\sigma T} e^{j\omega_0 T} e^{jk\Delta\omega T} & (2.25) \\
 &= A W^{-k}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$A = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)T} \quad (2.26)$$

$$W = e^{-(\Delta\sigma + j\Delta\omega)T} \quad (2.27)$$

1°) Contour radial. ( $\Delta\omega=0$ ).

Pour  $\Delta\omega = 0$ ,  $z_k$  (2.25) devient :

$$\begin{aligned}
 z_k &= e^{(\sigma_0 + j\omega_0)T} e^{k\Delta\sigma T} \\
 &= A W_0^{-k} \quad \text{avec } W_0 = e^{-\Delta\sigma T}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n A^{-n} W_0^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n W_0^{nk} & (2.28)
 \end{aligned}$$

Avec:

$$g_n = x_n A^{-n}$$

Pour évaluer (2.28), on calcule et on stocke  $W_o^{nk}$  dans un tableau auquel on fait appel pour les différents points de l'axe  $\sigma$ .

2°) Contour circulaire ( $\Delta\sigma=0$ ).

Pour  $\forall\sigma = 0$ ,  $z_k$  devient:

$$z_k = e^{(\sigma_o + j\omega_o)T} e^{jk\Delta\omega T}$$

$$\text{et } F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n A^{-n} W^{nk}$$

$$\text{et } F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n W^{nk} \quad (2.29)$$

On remarque que (2.29) est la T.D.F. Elle peut être évaluée par l'algorithme de la F.F.T [3], [7].

### 2.5.2 Applications numériques de la technique de Corinthios

1<sup>o</sup>) Considérons un SLIT de quatrième ordre à pôles conjugués complexes  $(-.10, \pm 3.3)$  et  $(-.20, \pm 1.2)$ . La réponse impulsionnelle exacte, est donnée par:

$$x(t) = e^{-.10t} \cos w_1 t + e^{-.20t} \cos w_2 t$$

$$\text{Avec : } w_1 = 2\pi * 3.3 \quad \text{et} \quad w_2 = 2\pi * 1.2$$

La séquence discrète, finie de N points, obtenue par échantillonnage, sur un intervalle  $t_p$ , avec une période T est:

$$x(nT) = e^{-.10nT} \cos(w_1 nT) + e^{-.20nT} \cos(w_2 nT) \quad (2.30)$$

$$\text{Avec } T = t_p / N \quad \text{et} \quad n = 0, \dots, N-1$$

La fréquence d'échantillonnage sera donnée par :

$$f_s = N / t_p. \quad (2.31)$$

La résolution de la T.D.F de  $x(nT)$  évaluée par l'algorithme de F.F.T. en N points sera donnée par :

$$F = 1 / t_p \quad (2.32)$$

F est la fréquence d'échantillonnage (résolution)

#### REMARQUES

Si  $f_h$  est la fréquence maximale que contient le signal  $x(t)$ , le respect du taux de Nyquist exige:

$$f_s \geq 2 f_h$$

$$\text{Soit: } N \geq 2f_h/t_p \quad (2.33)$$

- Pour couvrir les basses fréquences,  $F$  doit être faible. Ce qui correspond (2.32) à un temps d'enregistrement  $t_p$  minimum de  $1/F$ . Un plus petit  $F$  exigera donc un temps d'enregistrement plus long.

- Pour une résolution  $F$  constante, la largeur de la bande de fréquence  $f_s$  pourra être augmentée en augmentant  $N$ .

Le choix de la longueur de la période d'enregistrement et le nombre total de points échantillonnés devront donc être choisis à partir des contraintes ci-dessus.

Ainsi, dans notre exemple, on s'intéresse à des basses fréquences. Si l'on choisit  $f_h=5\text{Hz}$  et  $F=.1\text{Hz}$ , il faudra, compte tenu des inégalités (2.31), (2.32) et (2.33):

$$t_p \geq 10 \text{ sec.} \quad T \leq .1 \text{ sec.} \quad \text{et} \quad N \geq 100.$$

Pour un algorithme F.F.T de radix 4,  $N = 4^m$  avec  $m$  entier non nul, cela nous conduit à un choix de  $N=256$  et  $t_p=10\text{s}$ .

L'amplitude maximale du spectre de  $x[nT]$  (2.30) évalué par F.F.T. permet de localiser les fréquences dominantes. Soit:  $f_1=1.2\text{Hz}$  et  $f_2=3.3\text{Hz}$  (fig:2.8)

En multipliant la séquence  $x[nT]$  terme à terme par une séquence exponentielle positive  $e^{r_n T}$ , on obtient la

séquence résultante :

$$g[nT] = e^{(-.10+r)nT} \cos(w_1 nT) + e^{(-.20+r)nT} \cos(w_2 nT) \quad (2.34)$$

A partir de  $r=0$ , on augmente  $r$  avec de faibles pas par rapport à l'amortissement à déterminer, et on évalue le spectre de  $g[nT]$  (2.34). Les discontinuités autour des fréquences dominantes deviennent aigues au fur et à mesure que les pôles se rapprochent du cercle unitaire. Ainsi, la figure (2.9) représente l'évolution de la phase pour  $r=0$ ,  $.05$ ,  $.15$  et  $.25$ . On observe pour  $r=.15$  et autour de la fréquence  $3.3\text{Hz}$ , une rotation de phase de  $\pi$  par rapport aux diagrammes de phase correspondant à  $r=0$  et  $r=.05$  à la même fréquence. Pour cette valeur de  $r$  ( $.15$ ), le premier pôle a donc déjà franchi le cercle unitaire, ce qui nous permet d'affirmer qu'il est situé à un rayon compris entre  $.05$  et  $.15$  dans le plan  $Z$ .

Le même phénomène se reproduit à  $r=.25$  pour la fréquence  $1.2\text{Hz}$ , et le rayon du deuxième pôle est compris entre  $.15$  et  $.25$ .

Le pas choisi pour cette illustration est grand ( $\nless r=.05$ ). Un pas suffisamment petit permet de localiser les pôles considérés avec la précision requise.

Les discontinuités de phase autour des fréquences dominantes et les rotations de  $\pi$  à  $r=.15$  et  $r=.25$  sont plus marquées dans la figure (2.10) où on calcule le gradient de la phase.

**REMARQUE.**

1) Comme mentionné dans le paragraphe 2.4 , la phase principale est donnée par la fonction ARCTAN dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle  $(-\pi, +\pi)$ . Lorsque la phase du système est à l'extérieur de cet intervalle, des sauts de  $2\pi$  sont observés dans la phase principale. Ce qui correspond au saut entre A et B de la figure (2.11).

La phase continue du système ne présente des discontinuités qu'autour des fréquences 1.2Hz et 3.3Hz figure (2.9).

QUATRIEME ORDRE  
 POLES : (-.10 , 3.3) (-.20 , 1.2)

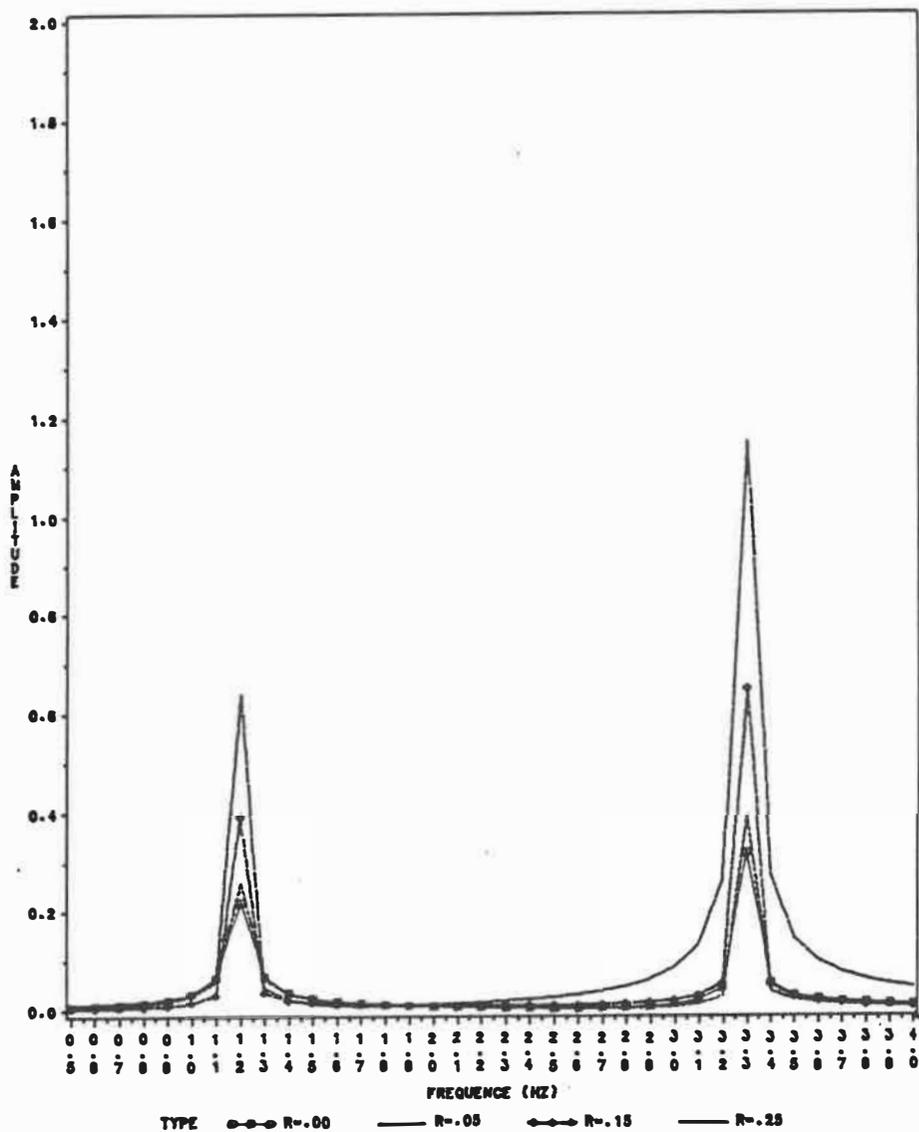


Figure 2.8 : Spectre (Amplitude)

QUATRIEME ORDRE  
 POLES : (-.10 , 3.3) (-.20 , 1.2)

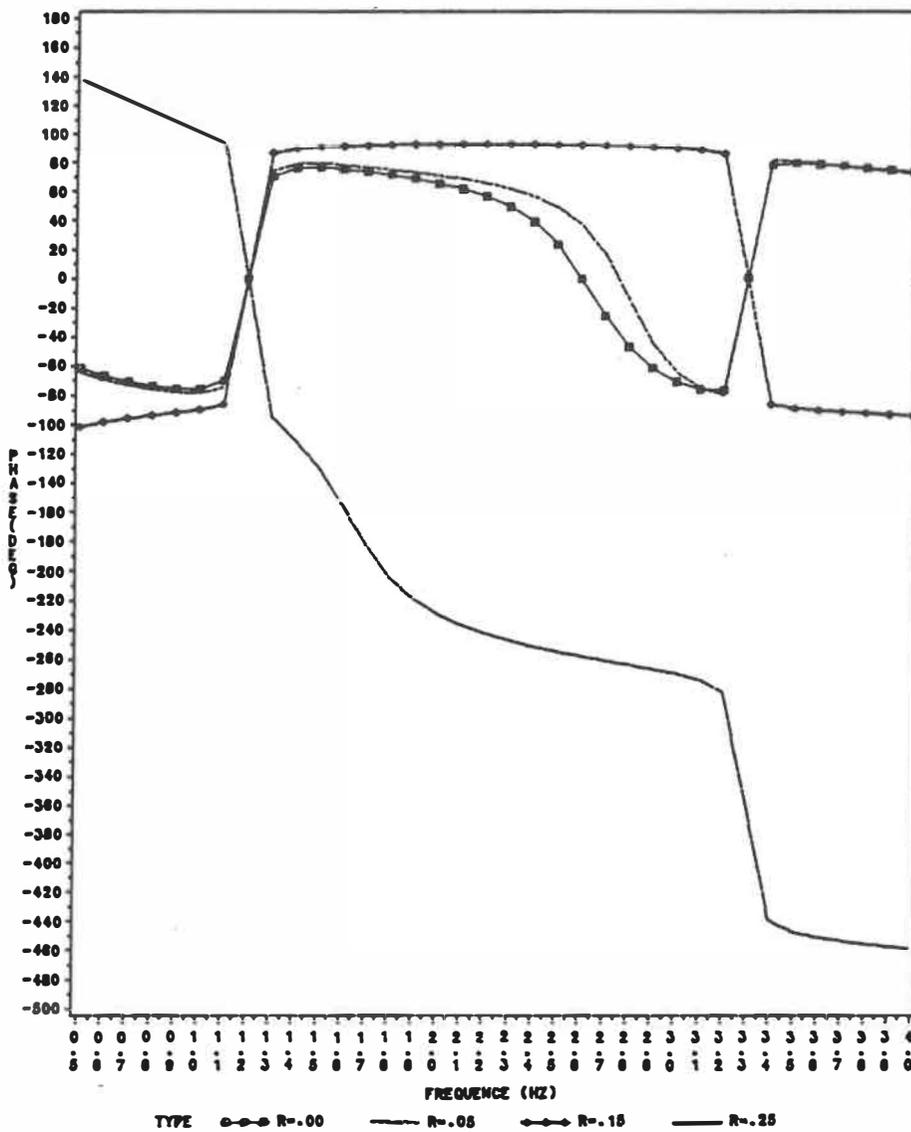


Figure 2.9 : Phase continue

QUATRIEME ORDRE  
 POLES : (-.10 , 3.3) (-.20 , 1.2)

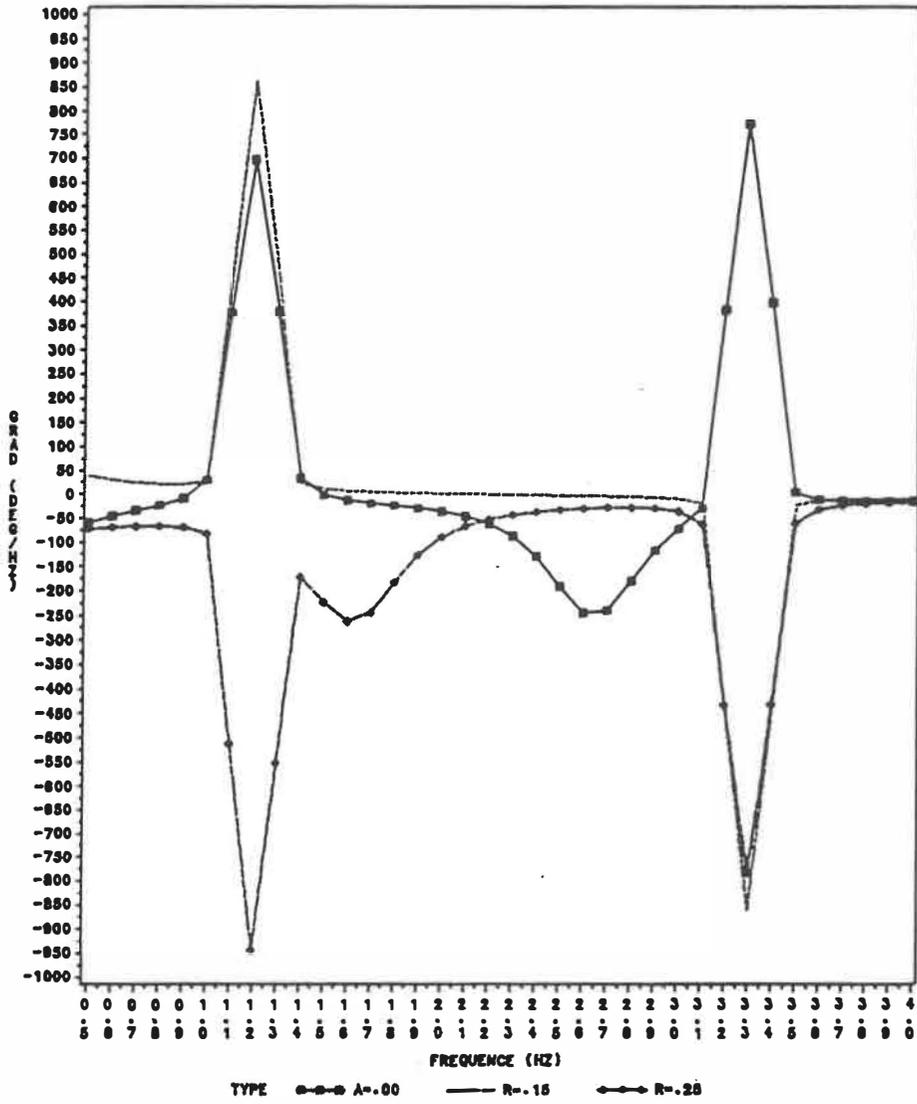


Figure 2.10 : Variation de phase

# QUATRIEME ORDRE

POLES : (-.10 , 3.3) (-.20 , 1.2)

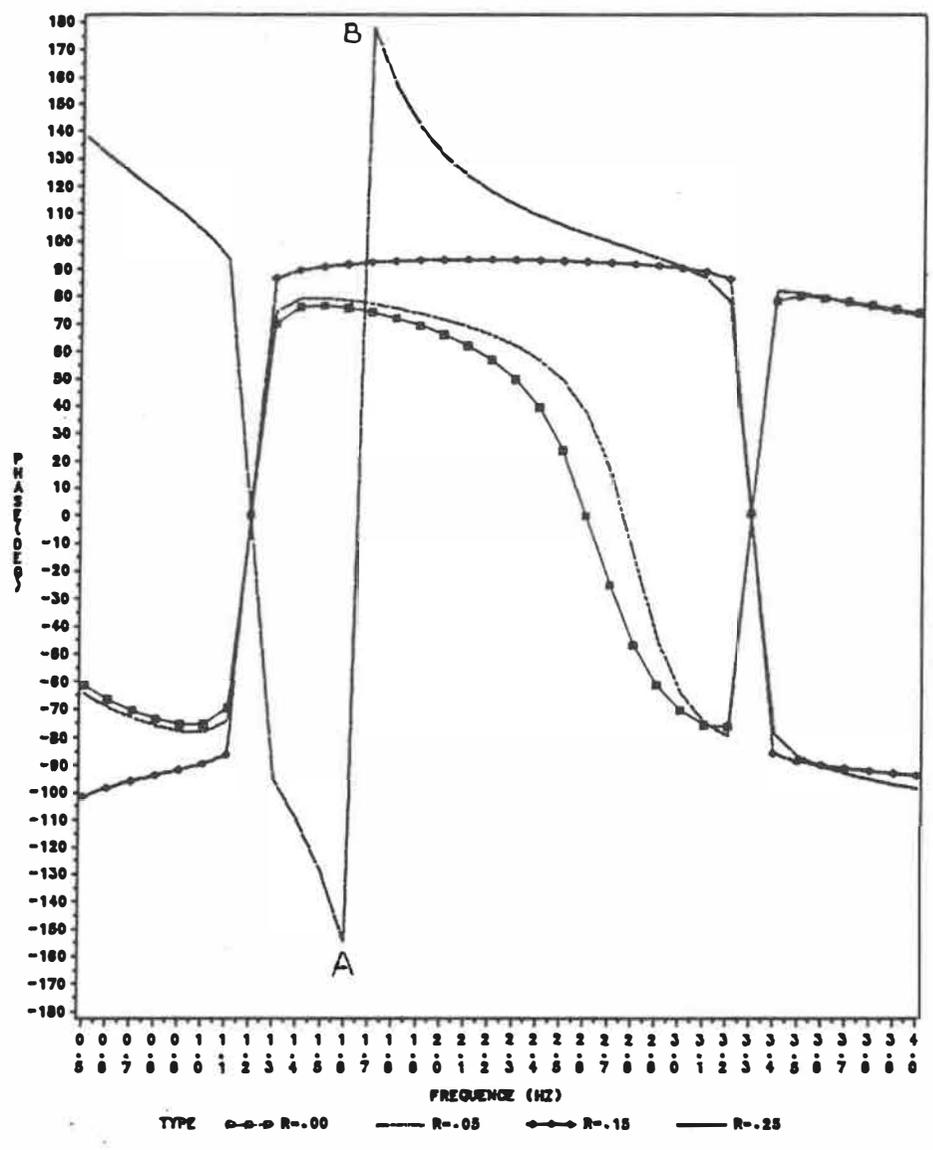


Figure 2.11 : Phase principale

## 2°) Exemple 2

Le deuxième exemple est un sixième ordre avec des pôles très rapprochés et faiblement amortis . Ce qui correspond à un exemple assez typique des oscillations qu'on rencontre dans les réseaux interconnectés (chapitre IV).

Pour pouvoir isoler les différents pôles on choisit  $F=.05$  Hz (2.32), ce qui correspond à un enregistrement de 20sec (fig.2.12) On évalue le spectre de la séquence pondérée. Le pas  $r$  choisi ici est de .005 afin de pouvoir détecter les amortissements supposés faibles (de l'ordre de 1/100).

Après localisation de la première paire de pôles conjugués complexes  $-.010 \pm j.7$  , on supprime les pics correspondants du spectre. Un F.F.T inverse nous donne la réponse impulsionnelle du système réduit (quatrième ordre). On continue le processus jusqu'à localisation des deux autres paires de pôles.

Autour des fréquences dominantes, nous avons les même constatations que dans l'exemple 1:

- Des pics en amplitude (fig:2.13) et des discontinuités de phase (fig:2.14).

- Lorsqu'un pôle a franchi le cercle unitaire, une rotation de phase de  $\pi$  est observée. Ces rotations successives sont visibles dans la figure (2.14) entre:

- .  $r=.005$  et  $r=.015$  pour  $.7\text{Hz}$
- .  $r=.015$  et  $r=.025$  pour  $.4\text{Hz}$
- .  $r=.025$  et  $r=.035$  pour  $1\text{Hz}$





### SIXIEME ORDRE

POLES : (-.010,+.7) (-.020,+.4) (-.030,+1)

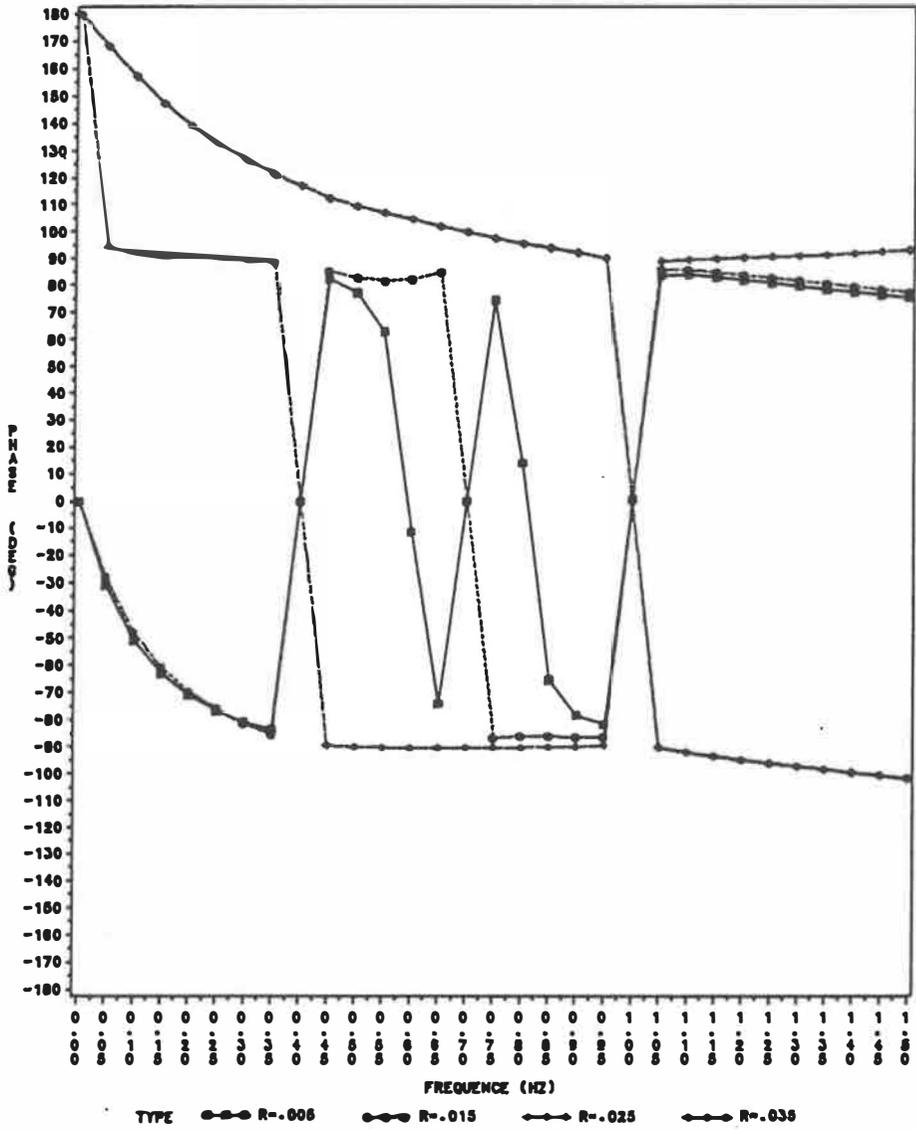


Figure 2.14 : Spectre (Phase)

### 3<sup>o</sup>) Exemple 3

Le troisième exemple traite le cas d'un système avec un pôle instable.

D'après le paragraphe 2.3.3, le pôle instable est situé à l'extérieur du cercle unitaire, et sa réponse impulsionnelle est non amortie (amortissement positif). Une multiplication par une exponentielle **négative** de rayon approprié (supérieur au rayon du pôle instable) permet de le ramener à l'intérieur du cercle unitaire [13].

Pour illustrer cela, on considère un quatrième ordre dont les pôles sont :  $-.025 \pm j1.5$  et  $+.010 \pm j.5$

Le pôle  $+.010 \pm j.5$  est instable. Il est situé à une distance  $.010$  à l'extérieur du cercle unitaire. Une multiplication, de la réponse impulsionnelle, par une exponentielle de rayon  $-.020$  le remet à l'intérieur du cercle.

La figure (2.15) montre la phase initiale à  $r=0.000$  et la phase pour  $r=-.020$ . Une rotation de phase de  $\pi$  se produit autour de  $.5\text{Hz}$ , et qui correspond au passage du pôle instable considéré de l'extérieur vers l'intérieur du cercle unitaire.

A noter que la phase du pôle stable  $-.025 \pm j1.5$  n'a pas viré.

Ainsi on retrouve les cas précédents, et la localisation se fait de manière similaire.

### QUATRIEME ORDRE

POLES : (-.025 , +1.5) (+.010 , +.5)

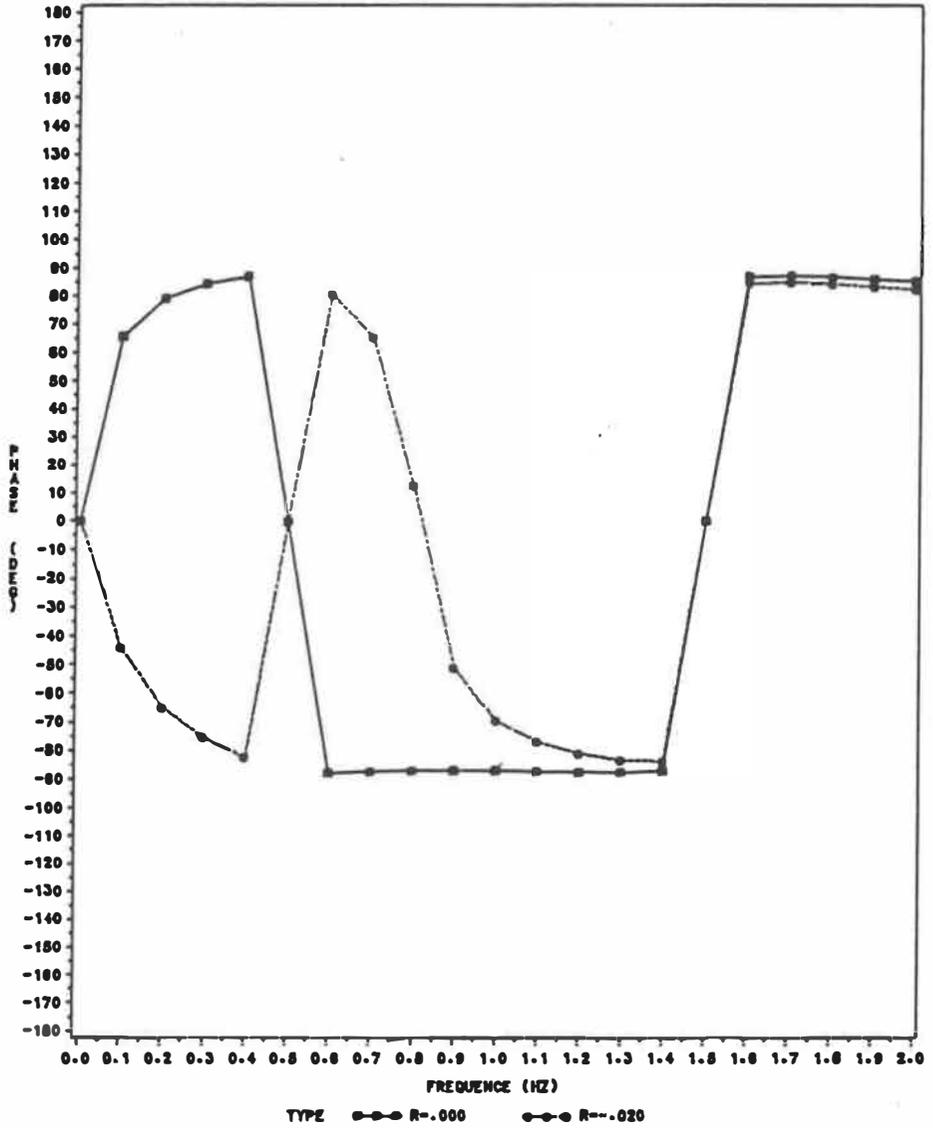


Figure 2.15 : Spectre (Phase)

### 2.5.3 Technique des fenêtres.

Cette technique permet d'estimer les caractéristiques dynamiques d'un système SLIT de 2ème ordre à pôles conjugués complexes, et représente la base des travaux de Lee et collaborateurs[1] sur l'analyse de stabilité dynamique des réseaux. Les caractéristiques sont la fréquence d'oscillation et l'amortissement associés aux pôles (partie imaginaire et partie réelle respectivement).

La forme de la réponse impulsionnelle du système est alors donnée par:

$$f(t) = Ke^{-at} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (2.35)$$

Où  $\omega_0$  est la fréquence d'oscillation et  $a$  est l'amortissement.

#### 2.5.3.1 Calcul de $\omega_0$

La pulsation  $\omega_0$  peut être estimée par l'intégrale de Fourier sur un intervalle  $T$  suffisamment grand par rapport à la période  $T_0$  de  $f(t)$ .

Soit:

$$F_T(\omega) = \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.36)$$

En effectuant une interpolation linéaire de  $f(t)$  sur un intervalle  $dt=t_{k+1}-t_k$  suffisamment petit, on approxime l'intégrale par une sommation . Soit :

$$F_T(w) = \sum_{k=0}^N A_{k,k+1}(w) + jB_{k,k+1}(w) \quad (2.37)$$

Avec :

$N$  : le nombre d'échantillons sur  $T$ .

et

$$A_{k,k+1} = \frac{f(t_{k+1})\sin(wt_{k+1}) - f(t_k)\sin(wt_k)}{w} + a_k \frac{\cos(wt_{k+1}) - \cos(wt_k)}{w^2}$$

$$B_{k,k+1} = \frac{f(t_{k+1})\cos(wt_{k+1}) - f(t_k)\cos(wt_k)}{w} + a_k \frac{\sin(wt_{k+1}) - \sin(wt_k)}{w^2}$$

$$a_k = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{dt}$$

Le maximum de  $|F(w)|$  correspondra approximativement à la pulsation  $w_0$  .

### 2.5.3.2 Calcul approximatif de l'amortissement "a".

En remplaçant  $f(t)$  par son expression (2.35) dans (2.36), et en intégrant sur un intervalle  $[t_1, t_1+T_w]$ , on a :

$$F_{T_w} = \frac{k}{2} \left[ \frac{e^{at_1}}{a} (e^{aT_w} - 1) + \frac{e^{a-2j\omega_0 t_1}}{a-2j\omega_0} (e^{(a-2j\omega_0)T_w} - 1) \right] \quad (2.38)$$

Si  $T_w$  est choisi tel que :

$$T_w = \frac{nT_0}{2} \quad n=1,2,\dots,$$

L'expression (2.38) devient :

$$F_{T_w} = \frac{k}{2} e^{at_1} \left[ \frac{e^{aT_w}}{a} - 1 \right] \left[ \frac{1}{a} + \frac{e^{-2j\omega_0 t_1}}{a-2j\omega_0} \right] \quad (2.39)$$

On répète la même opération pour un intervalle  $[t_3, t_3+T_w]$  de telle sorte que :  $t_3 = t_1 + T_g$

$$\text{avec } T_g = \frac{mT_0}{2} \quad m=1,2,\dots$$

on a :

$$F'_{T_w} = \frac{k}{2} e^{a(t_1+T_g)} \left[ \frac{e^{aT_w}}{a} - 1 \right] \left[ \frac{1}{a} + \frac{e^{-2j\omega_0 t_1}}{a-2j\omega_0} \right] \quad (2.40)$$

En faisant le rapport de (2.40) et (2.39),

$$a = \frac{1}{T_g} \ln \left( \frac{F'(w)}{F(w)} \right) \quad (2.41)$$

Dans les développements qui suivent, nous opérons une analyse d'erreur sur "a" :

$$da = - \left( \frac{1}{T} \log \frac{F_2}{F_1} \right) \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \frac{dF_2}{F_2} - \frac{1}{T} \frac{dF_1}{F_1}$$

$$da = - a \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left( \frac{dF_2}{F_2} - \frac{dF_1}{F_1} \right)$$

Soit:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{aT} \left( \frac{\Delta F_2}{F_2} + \frac{\Delta F_1}{F_1} \right)$$

Admettant une erreur relative :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta F_2}{F_2} = \frac{\Delta F_1}{F_1}$$

On a:

$$\frac{\Delta a}{a} = \left( 1 + \frac{2}{aT} \right) \frac{\Delta T}{T}$$

On remarque que pour les faibles valeurs de "a" qui sont (d'ailleurs celles qui nous intéressent le plus dans le contexte des réseaux) et de T, l'erreur sur "a" est très grande.

Pour les valeurs de l'article:

a=-.15 et T=2.5sec. On a:

$$\frac{\Delta a}{a} = 6.3 \frac{\Delta T}{T}$$

Une erreur de 10% sur  $T$ , correspondra donc à 63% pour l'amortissement "a".

Une application de l'algorithme sur un signal d'expression  $f(t)=e^{-at}\cos(2\pi Ft)$  nous permet de déterminer l'erreur associée à la détermination de  $a$ .

Ainsi, pour  $F=1\text{Hz}$ , et un temps d'enregistrement de 5sec. on calcule l'amortissement par l'algorithme pour les différentes valeurs de  $a$  de 0.0 à .10.

Pour  $T_G=T_W=2$  sec (multiple de la période  $T=1/F=1\text{sec}$ ),  $\Delta T_G/T_G=0\%$ , et l'erreur sur "a" est relativement faible (fig:2.16).

Dans l'analyse ci-dessus, il ressort donc que pour une variation de  $T_G$  de 10%, soit  $T_G=T_W=2.2\text{sec}$ . l'erreur est pratiquement infinie pour les valeurs de  $a$  de l'ordre de .01, et elle est supérieure à 50% pour les valeurs de  $a$  de l'ordre de .10 (fig:2.17).

Avec l'algorithme de Corinthios, l'erreur absolue maximale est égale au pas  $\Delta\sigma$  (2.23). En réduisant le pas l'erreur diminue en conséquence. Ainsi l'amortissement est déterminé avec la précision requise, ce qui constitue une amélioration considérable par rapport à la méthode précédente.

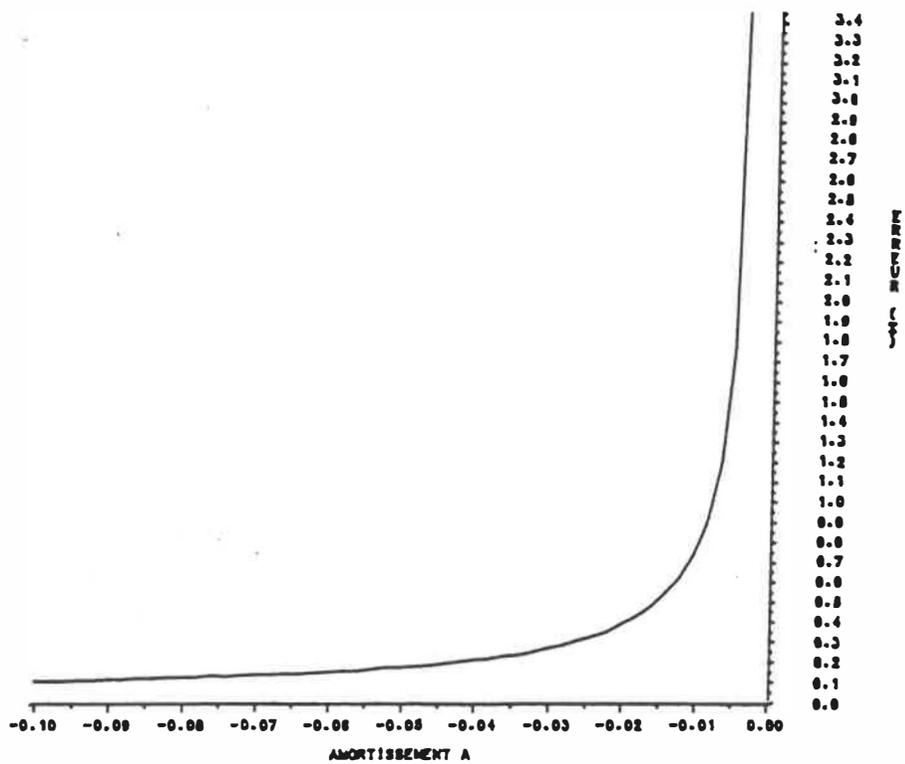


Figure 2.16 : Erreur relative sur A  
 $F=1$  Hz  $T_G = T_W = 2$  secondes.

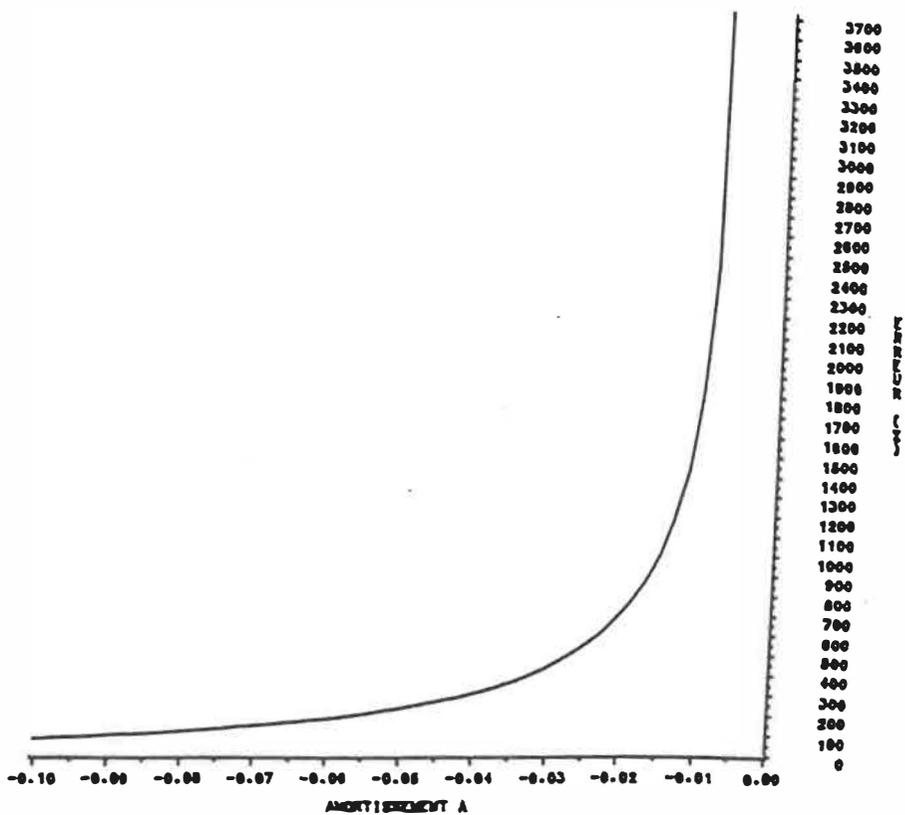


Figure 2.17 : Erreur relative sur A  
 $F=1$  Hz  $T_G = T_W = 2.2$  secondes.

## Chapitre 3

### STABILITE D'UNE MACHINE SYNCHRONE

#### RELIEE A UN RESEAU INFINI.

---

Dans ce chapitre on étudie le comportement dynamique d'une machine synchrone reliée à un réseau infini lors d'un défaut sur l'interconnexion machine -réseau.

Les caractéristiques de stabilité sont déterminées par la technique des fenêtres (chap.2) dans le but de tester la validité et le champs d'application de la technique. Rappelons que l'hypothèse de base de cette technique est qu'il y a un **seul mode dominant** dans le signal analysé.

Elle sont aussi déterminées par l'algorithme de Corinthios.

#### 3.1 MACHINE-RESEAU INFINI

Soit une machine synchrone reliée à un réseau infini

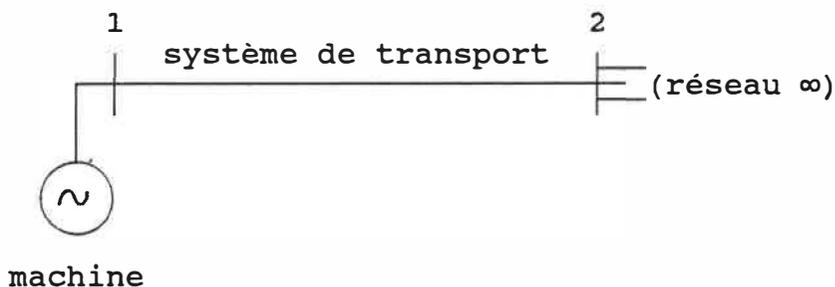


Figure 3.1: Machine réseau-infini

Le réseau infini est défini comme étant un réseau à grande inertie (théoriquement infinie) par rapport à celle de la machine. Le noeud du réseau infini est dit noeud infini (**infinite bus**) qui est caractérisé par une tension **constante** et indépendante des perturbations sur l'interconnexion machine-réseau.

Physiquement, la définition machine-réseau infini correspond à une unité de production de faible puissance raccordée à un réseau puissant.

### 3.2 REGIME STATIQUE.

La machine transforme la puissance mécanique  $P_{mé}$  en une puissance électrique  $P_e$ . En régime stationnaire (sinusoidal établi) on a:

$$P_{mé} = P_e \quad (3.1)$$

La puissance électrique fournie par la machine (fig:3.2) est:

$$P_e = \text{Re}( S_e ) \quad (3.2)$$

avec :

$$S_e = \bar{E} \bar{I}^* \quad (3.3)$$

$R_e$  : partie réelle

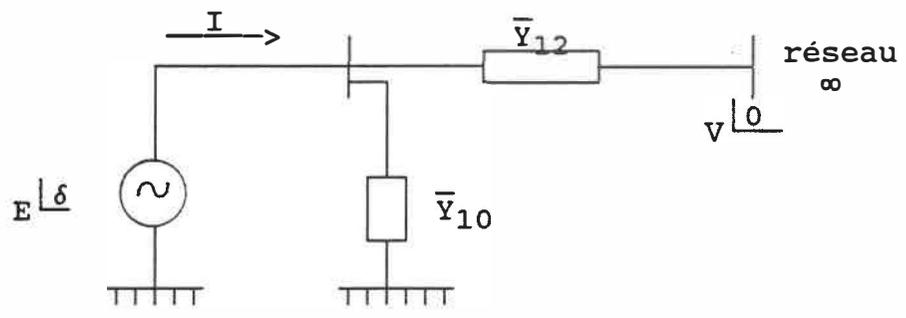


Figure 3.2 : Modèle classique

E : force électromotrice de la machine

δ : angle interne de la machine

I : courant injecté par la machine

V : tension du noeud infini(référence)

$\bar{Y}_{12}$  : admittance de transfert.

$\bar{Y}_{10}$  : admittance shunt

L'expression du courant  $\bar{I}$  (fig:3.2) est:

$$\bar{I} = \bar{E} \bar{Y}_{10} + (\bar{E} - \bar{V}) \bar{Y}_{12} \tag{3.4}$$

En remplaçant  $\bar{I}$  par sa valeur dans (3.3) on a:

$$\begin{aligned} S_e &= \bar{E} [ \bar{E} \bar{Y}_{10} + (\bar{E} - \bar{V}) \bar{Y}_{12} ]^* \\ &= \bar{E} [ ( \bar{Y}_{10} + \bar{Y}_{12} ) \bar{E} - \bar{Y}_{12} \bar{V} ]^* \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posons :

$$\bar{Y}_{11} = \bar{Y}_{10} + \bar{Y}_{12} = Y_{11} \angle \theta_{11}$$

et 
$$\bar{Y}_{12} = -\bar{Y}_{12} = Y_{12} \angle \theta_{12}$$

L'équation (3.5) devient:

$$S_e = \bar{E} [ \bar{Y}_{11} \bar{E} + \bar{Y}_{12} \bar{V} ]^*$$

$$= \bar{Y}_{11}^* E^2 + \bar{Y}_{12}^* \bar{V}^* \bar{E} \quad (3.6)$$

La puissance active correspond à la partie réelle de  $S_e$ . Soit:

$$P_e = E^2 Y_{11} \cos \theta_{11} + E V Y_{12} \cos(\theta_{12} - \delta)$$

$$= P_C + P_M \sin(\delta - \tau) \quad (3.7)$$

Avec :

$$P_C = E^2 Y_{11} \cos(\theta_{11})$$

$$P_M = E V Y_{12} \quad (3.8)$$

$$\tau = \theta_{12} - 90^\circ$$

La dépendance de la puissance  $P_e$  en fonction de  $\delta$  est de type sinusoidal (fig :3.3)

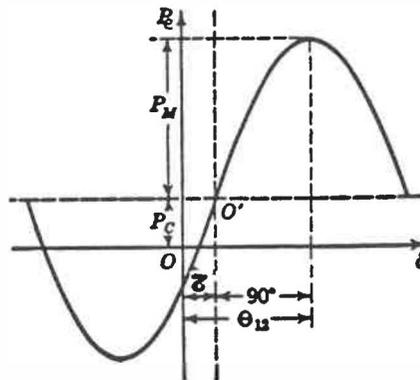


Figure 3.3: Puissance électrique

Si le réseau est supposé sans pertes :  $\theta_{12} = 90^\circ$  ,  $r=0$   
 $\theta_{11} = -90^\circ$  , et l'équation (3.7) devient :

$$P_e = P_M \sin\delta \quad (3.9)$$

### 3.3 REGIME DYNAMIQUE

Lors d'une perturbation du système (variation de charge ou défaut sur la ligne), un régime transitoire apparaît. L'équation dynamique caractérisant les oscillations de l'angle de la machine est[9]:

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_{mé} - P_e \quad (3.10)$$

M : constante d'inertie

D : coefficient de frottements mécaniques

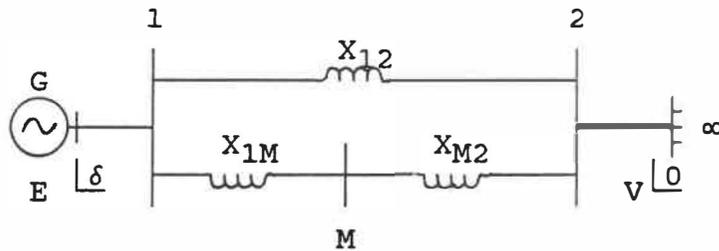
$p_{mé}$  : puissance mécanique

$p_e$  : puissance électrique

Dans l'équation (3.10) on néglige les transitoires d'origine électrique puisqu'ils disparaissent beaucoup plus rapidement que les transitoires d'origine mécanique.

### 3.4 STABILITE DE LA MACHINE

Considérons une machine synchrone reliée à un réseau infini par deux lignes parallèles (fig :3.4). Un défaut en M vient perturber le système .



**Figure 3.4:** Lignes d'interconnection

La réactance de transfert du système (fig :3.4) est :

$$X_{Ta} = \frac{X_{12}(X_{1M} + X_{M2})}{X_{12} + X_{1M} + X_{M2}} \quad (3.11)$$

La puissance électrique (3.7) correspondante est:

$$P_{e1} = P_{m1} \sin \delta$$

Avec 
$$P_{m1} = \frac{EV}{X_{Ta}}$$

L'angle initial  $\delta_0$  de la machine (avant le défaut) est donné par :

$$P_{mé} = P_e(\delta_0) = P_{m1} \sin \delta_0 \quad (3.12)$$

Le défaut sur l'interconnexion en M provoque une variation de la réactance de transfert. Dans le cas d'un court-circuit triphasé,  $X_{Ta}$  augmente, et la puissance maximale transmissible diminue.

Soit :

$$P_{e2} = P_{m2} \sin \delta$$

$$\text{avec } P_{m2} = EV/X_{Tp}$$

$X_{Tp}$  : réactance de transfert pendant le défaut.

A l'instant  $t=0^+$  du défaut, la puissance électrique chute de  $P_{e1}(\delta_0)$  à  $P_{e2}(\delta_0)$  et le point de fonctionnement passe de "a" à "b" (fig : 3.5).

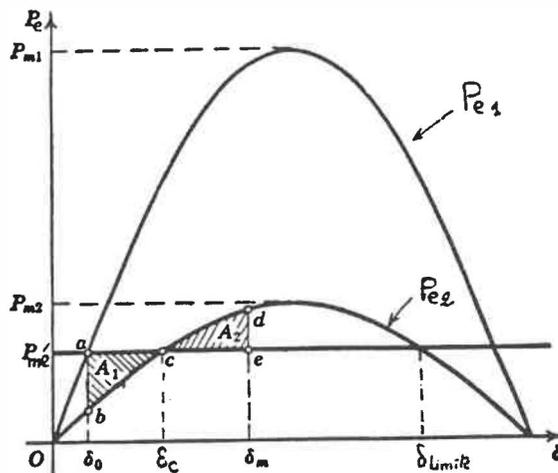


Figure 3.5: Puissance électrique avant pendant et après défaut.

Cette variation positive  $P_a = P_{m\acute{e}} - P_e$  entre la puissance reçue et fournie, appelée **puissance d'accélération**, entraîne une augmentation de la vitesse relative  $d\delta/dt$  et de l'angle  $\delta$ . Le point de

fonctionnement passe de "b" à "c".

En "c",  $P_e$  atteint  $P_{mé}$ ,  $P_a$  s'annule et la vitesse relative est maximale. Le changement de signe de  $P_a$  entraîne une diminution de la vitesse qui s'annule en "d".

En "d", sous l'effet de  $P_a$  négative la vitesse relative continue à regresser et  $\delta$  diminue pour revenir à  $\delta_0$ . Ainsi on a le processus inverse.

La machine oscille constamment entre "b" et "d" si elle n'est pas amortie, autrement elle se positionne en "c" après un certain nombre de cycles.

Le système est stable si  $\delta_m$  est inférieur à l'angle critique  $\delta_{limite} = (\pi - \delta_c)$

Sous forme énergétique, on peut dire que lors du défaut la machine n'arrive pas à transmettre toute la puissance mécanique reçue. Ce déséquilibre énergétique est emmagasiné sous forme cinétique dans le rotor de la machine tant que  $P_e < P_{mé}$  et la machine accélère. Lorsque  $P_e$  atteint  $P_{mé}$ , la phase de reconstitution commence, et l'énergie cinétique emmagasinée (aire  $A_1$ ) est fournie au réseau (aire  $A_2$ ). La machine se stabilise si toute l'énergie emmagasinée peut être restituée au réseau. Soit, l'existence d'aire  $A_2$  (avant le point  $\delta_{limite}$ ) qui égalise l'aire  $A_1$  (critère des aires égales).

Ce critère peut se déduire de l'équation dynamique (3.10).

Pour des frottements faibles,  $D=0$  et l'équation (3.10) s'écrit:

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = Pa \quad (3.13)$$

En multipliant les deux membres de (3.13) par  $\frac{2}{M} \frac{d\delta}{dt}$

On a:

$$2 \frac{d^2\delta}{dt^2} \frac{d\delta}{dt} = 2 \frac{Pa}{M} \frac{d\delta}{dt} \quad (3.14)$$

(3.14) s'écrit encore:

$$\frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{d\delta}{dt} \right]^2 \right) = \frac{2Pa}{M} \frac{d\delta}{dt} \quad (3.15)$$

Avant le défaut, la vitesse relative est supposée nulle (à  $\delta=\delta_0$ ). Soit:

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{\delta_0} = 0 \quad (3.16)$$

Les équations (3.15) et (3.16) nous donnent la vitesse à la position  $\delta_m$ .

Soit:

$$\left[ \frac{d\delta}{dt} \right]_{\delta_0}^2 \Big|_{\delta_m} = \frac{2}{M} \int_{\delta_0}^{\delta_m} Pa \, d\delta$$

D'où :

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{\delta_m} = \sqrt{\frac{2}{M} \left( \underbrace{\int_{\delta_0}^{\delta_C} Pa \, d\delta}_{\text{aire A1}} - \underbrace{\int_{\delta_m}^{\delta_C} Pa \, d\delta}_{\text{aire A2}} \right)} \quad (3.17)$$

Si le système est stable,

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{\delta_m} = 0 \quad \text{et} \quad P_a(\delta) \leq 0$$

Soit 
$$\sqrt{\frac{2}{M} \int P_a d\delta} = 0$$

D'où le critère des aires égales.

En l'absence de frottements mécaniques, la possibilité de stabilité (oscillatoire) du système exige donc l'existence d'une position  $\delta_m$  pour laquelle  $d\delta/dt$  retrouve sa valeur absolue initiale (0) avant le défaut mais avec une accélération égale en valeur absolue et de signe opposé.

Notons que si à la position  $\delta_{\text{limite}}$   $A_2 < A_1$ , cette condition ne peut être réalisée qu'avec une accélération de même signe que l'accélération initiale. D'où l'impossibilité de stabilité.

**REMARQUE:**

Cette analyse de stabilité est générale. Elle caractérise aussi bien la stabilité dynamique que transitoire. Toutefois, dans notre travail, nous nous intéressons à la stabilité **dynamique**. Ainsi on **suppose que la machine est stable**, et ce sont les caractéristiques dynamiques autour du point d'équilibre que nous recherchons par l'analyse spectrale.

### 3.5 MODE D'OSCILLATIONS NATURELLES DE LA MACHINE.

Nous venons d'expliquer qu' une machine synchrone perturbée génère des oscillations dans le système. Ces oscillations, généralement sous-synchrones, causent des fluctuations de tension, de fréquence et de la puissance qui transite dans les lignes électriques du réseau où la machine est raccordée.

Pour de faibles perturbations de la machine, les caractéristiques de ces oscillations peuvent être estimées par linéarisation de l'équation dynamique (3.10).

Pour une perturbation autour d'une position d'équilibre  $\delta_i$ , on a :

$$\delta = \delta_i + \Delta\delta \quad (3.18)$$

La puissance électrique est :

$$P_e = P_{ei} + \Delta P_e \quad (3.19)$$

Pour un réseau sans pertes, on a (voir (3.9)) :

$$P_e = P_M \sin\delta \quad (3.20)$$

$$P_{ei} = P_M \sin\delta_i \quad (3.21)$$

En remplaçant  $\delta$  (3.18) et  $P_e$  (3.19) dans (3.20), on a :

$$P_{ei} + \Delta P_e = P_M \sin(\delta_i + \Delta\delta) \quad (3.22)$$

Pour  $\delta$  faible (3.22) peut s'écrire :

$$P_{ei} + \Delta P_e \approx P_M \sin \delta_i + (P_M \cos \delta_i) \Delta \delta$$

Avec:

$$\cos(\Delta \delta) = 1 \quad \text{et} \quad \sin(\Delta \delta) = 0$$

Soit :

$$\Delta P_e = (P_M \cos \delta_i) \Delta \delta \quad (3.23)$$

La linéarisation de l'équation dynamique (3.10)

autour de  $\delta_i$  nous donne:

$$M \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + D \frac{d \Delta \delta}{dt} = \Delta P_{mé} - \Delta P_e \quad (3.24)$$

Comme  $P_{mé}$  est supposée constante,  $\Delta P_{mé} = 0$  . et en remplaçant  $P_e$  par sa valeur (3.23) dans (3.24) On a:

$$M \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + D \frac{d \Delta \delta}{dt} + (P_M \cos \delta_i) \Delta \delta = 0 \quad (3.25)$$

Ainsi, on obtient une équation différentielle linéaire (3.25) de second ordre. Les racines de l'équation caractéristique correspondante sont:

$$-\frac{D}{2M} \pm \left[ \frac{D^2}{4M^2} - \frac{P_M \cos \delta_i}{M} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Le coefficient de frottement mécanique  $D$  est généralement très faible, et les racines (3.26) sont conjuguées complexes.

L'angle interne de la machine oscille autour de  $\delta_i$  avec une fréquence  $f_{osc}$  :

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{D^2}{4M^2} - \frac{P_M \cos \delta_i}{M} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

$f_{osc}$  est appelée : **fréquence naturelle** de la machine.

L'amortissement "électrique" , noté 'a ' , de ces oscillations est fonction du coefficient de frottement  $D$  et de la constante d'inertie  $M$  de la machine. Soit:

$$a = - \frac{D}{2M} \quad (3.28)$$

Ces grandeurs  $f_{osc}$  et  $a$  peuvent être déterminées à partir de la réponse du système par l'algorithme qui suit.

### 3.6 ALGORITHME

L'algorithme consiste en la simulation du système et la résolution de l'équation non linéaire (3.10) pour obtenir l'évolution de l'angle interne  $\delta(t)$  dont on

analyse le spectre . Ainsi les différentes étapes pour l'application de l'algorithme de fenêtres sont:

- Simulation de la machine et du défaut
- Intégration de l'équation dynamique ( $\delta(t)$ )
- Evaluation du spectre de  $\delta(t)$  sur une fenêtre de temps ( $T$ )
- Recherche de la fréquence d'oscillation ( $f_{osc}$ )
- Evaluation du spectre de  $\delta(t)$  sur deux fenêtres ( $T_w, T_g$ )
- Détermination de l'amortissement ( $a$ )

Pour la résolution de l'équation (3.10), nous utilisons la méthode d'Euler modifiée [8].

### 3.7 SIMULATION

La simulation est faite pour une machine synchrone reliée à un réseau infini par deux lignes (fig:3.6) parallèles dont les caractéristiques sont [9](Vol.I):

#### Machine synchrone:

Puissance  $S = 25$  Mva (puissance de base)

$\cos\phi = .80$

Tension  $E = 1.03$  (pu)

Réactance transitoire  $x^d = .30$  (pu)

Constante d'inertie  $M = 2.75 \cdot 10^{-4}$  (pu)

Lignes:

Réactance de la ligne 1  $X_{L1} = .20 \text{ (pu)}$

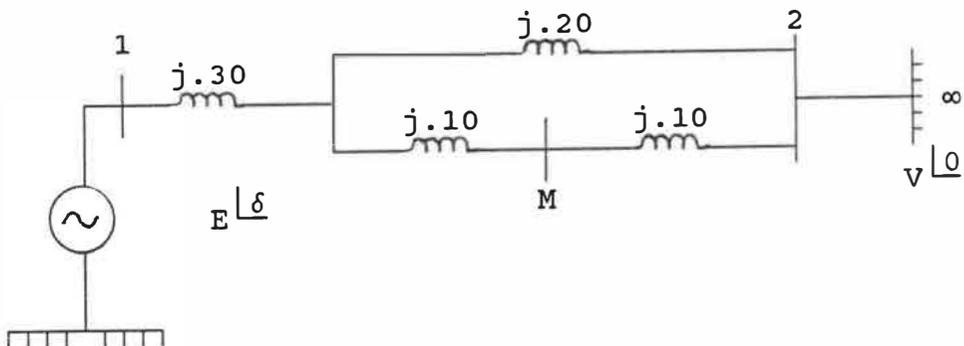
Réactance de la ligne 2  $X_{L2} = .10 \text{ (pu)} + .10 \text{ (pu)}$

Noeud-infini: (référence)

Tension  $V = 1 \text{ (pu)}$

**3.7.1 Méthodologie**

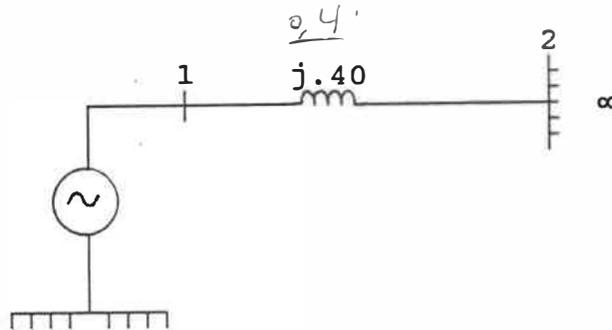
Le système considéré peut être représenté par le schéma suivant:



**Figure 3.6:** Schéma avant défaut

**Avant le défaut:**

Le schéma de la figure (3.6) se ramène à :



**Figure 3.7:** Schéma réduit

La réactance de transfert (3.11) est:

$$X_{12} = j .40$$

La puissance électrique (3.9) est:

$$P_e = P_M \sin\delta$$

Avec :

$$P_M = \frac{EV}{X_{12}} \quad (\text{d'après (3.8)})$$

Soit :

$$P_e = 2.58 \sin\delta \quad (3.29)$$

L'angle initial  $\delta_0$  est tel que (3.12):

$$\begin{aligned} P_{mé} &= P_e \\ &= 2.58 \sin\delta_0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\sin\delta_0 = \frac{P_{mé}}{2.58}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } P_{mé} &= S \cos\phi = 1 \times .8 \\ &= .8 \text{ (pu)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } \delta_0 = 18.06^\circ$$

### Pendant le défaut

Le défaut supposé est un court-circuit triphasé sur le jeu de barre "M" à l'instant  $t=0^+$  sec. Le schéma de la figure (3.6) devient :

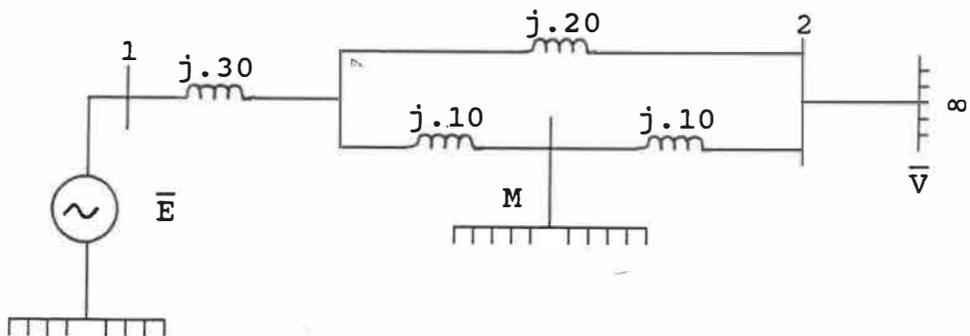


Figure 3.8: Schéma pendant le défaut

Après transformation étoile-triangle, le réseau de la figure (3.8) se réduit à :

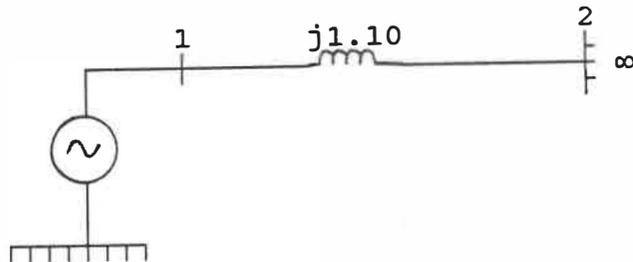


Figure 3.9 : Schéma réduit

Soit :

$$X_{12} = j 1.10$$

La puissance électrique est :

$$P_e = .936 \sin\delta \quad (3.30)$$

**Après défaut :**

On isole la ligne sous défaut après 6 cycles. Le schéma de la figure (3.8) devient :

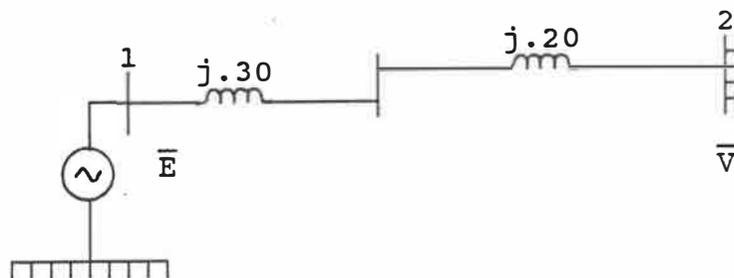


Figure 3.10: Schéma après défaut

Soit:

$$X_{12} = j .50$$

Et ,

$$Pe = 2.06 \sin\delta \quad (3.31)$$

La position d'équilibre finale  $\delta_f$  est telle que (3.12):

Soit:

$$\sin\delta_f = \frac{.8}{2.06}$$

D'où:  $\delta_f = 22.85^\circ$

L'allure de  $Pe$  en fonction de  $\delta$  pour les trois configurations de la machine (avant, pendant et après défaut) est représentée dans la figure (3.11). La machine passe du point A ( $\delta = .3152$  rad ( $18.06^\circ$ )) au point B ( $\delta = .3888$  rad ( $22.85^\circ$ )) après un régime dynamique dont nous déterminons les caractéristiques.

### 3.7.2 Résultats de la simulation

On simule l'exemple précédant pour les valeurs d'amortissements (3.28) et de fréquences (3.27) suivants:

.cas 1 :  $a = -.15$   $f_{osc} = 1.81$  Hz

.cas 2 :  $a = -.010$   $f_{osc} = 1.81$  Hz

On constate:

La machine passe par un régime transitoire (fig: 3.12) caractérisé par des discontinuité de la puissance électrique fournie à  $t=0^+$  sec (instant de défaut) et à  $t=.1$  sec (instant de coupure).

Pendant le régime dynamique, on observe (fig : 3.13) des oscillations de l'angle interne autour de la position  $\delta_f=22.85^\circ$  . Ces oscillations se reflètent dans la puissance électrique (fig : 3.14) qui oscille autour de .8pu (puissance  $P_{mé}$ ).

En appliquant l'algorithme des fenêtres pour déterminer la fréquence et l'amortissement pour les cas considérés, nous obtenons les résultat suivants:

|            | paramètres |         |       |       | intervalle    |
|------------|------------|---------|-------|-------|---------------|
|            | $a_1$      | $a_2$   | $f_1$ | $f_2$ |               |
|            | -.158      | +.00725 | 1.81  | 1.80  | 1-5 secondes  |
|            | 5.3        | 172     | 0     | .5    |               |
| erreur (%) | -.153      | -.015   | 1.81  | 1.80  | 5-10 secondes |
|            | 2          | 50      | 0     | .5    |               |

**Tableau 3.1:** Modes des oscillations par l'algorithme des fenêtres.

**CONCLUSION:**

Comme nous l'avons démontré au chapitre 2, la détermination de  $a$  et  $f_{osc}$ , par l'algorithme de fenêtres reste acceptable si l'intervalle d'enregistrement  $T$  est grand par rapport à la période du signal et si l'amortissement considéré n'est pas très faible.

En contraste avec ces résultats, l'application de l'algorithme de Corinthios sur ce même problème avec un intervalle de 10 sec et pour  $N=1024$  nous donne les résultats suivants, dont les spectres apparaissent aux figures 3.16, a 3.19 :

|                           | paramètres |       |       |       |
|---------------------------|------------|-------|-------|-------|
|                           | $a_1$      | $a_2$ | $f_1$ | $f_2$ |
|                           | -.14       | -.009 | 1.8   | 1.8   |
| erreur (%)                | 6          | 10    | 5     | 5     |
| pas d'échantillonnage (%) | 6          | 10    | 5     | 5     |

**Tableau 3.2:** Modes des oscillations par l'algorithme de Corinthios

La fréquence de 1.8 Hz correspond aux picks en amplitude des figures 3.16 et 3.18. Les amortissements -.14 et -.009 sont déterminés par le virement de phase de  $\pi$  des figures 3.17 et 3.19 .

# MACHINE SYNCHRONE—RESEAU INFINI

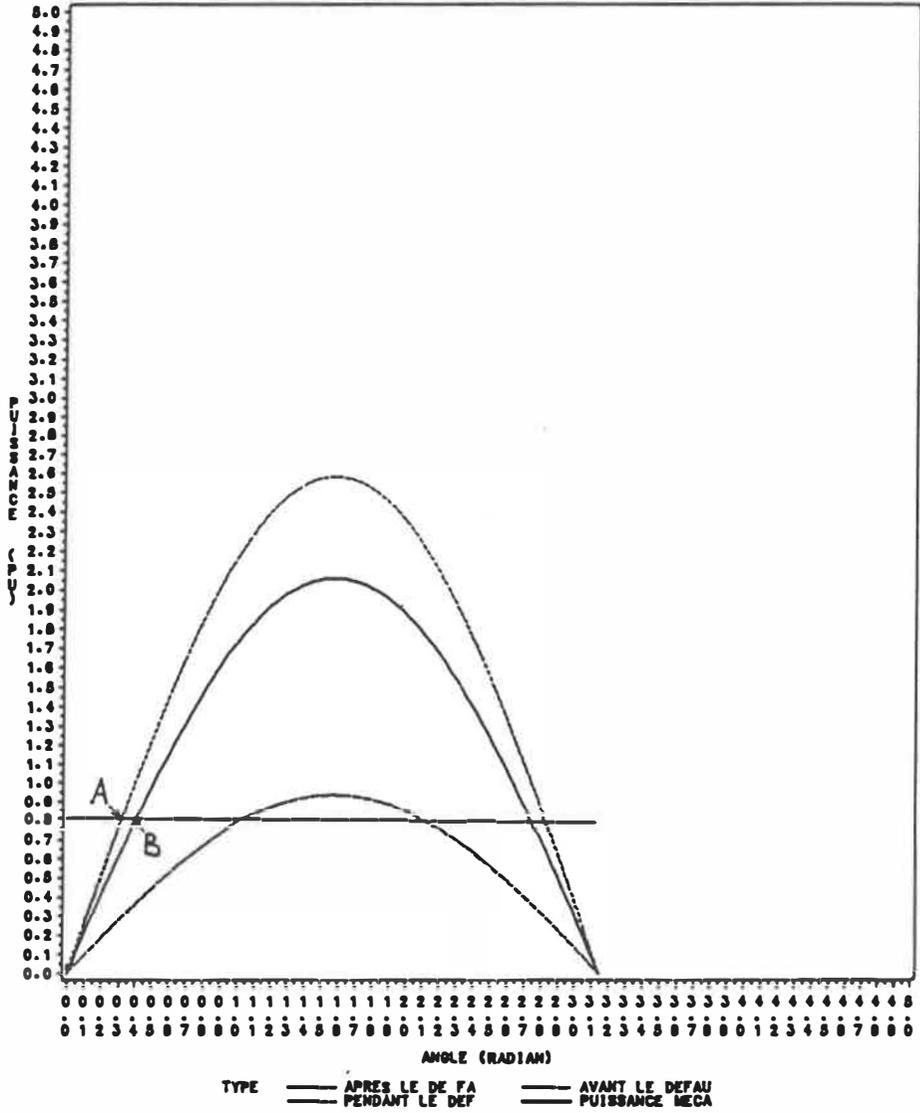


Figure 3.11 : Puissance électrique avant, pendant et après défaut.

# MACHINE SYNCHRONE—RESEAU INFINI

T=0+ SEC • C.C. TRIPHASE - T=.1 SEC • COUPURE

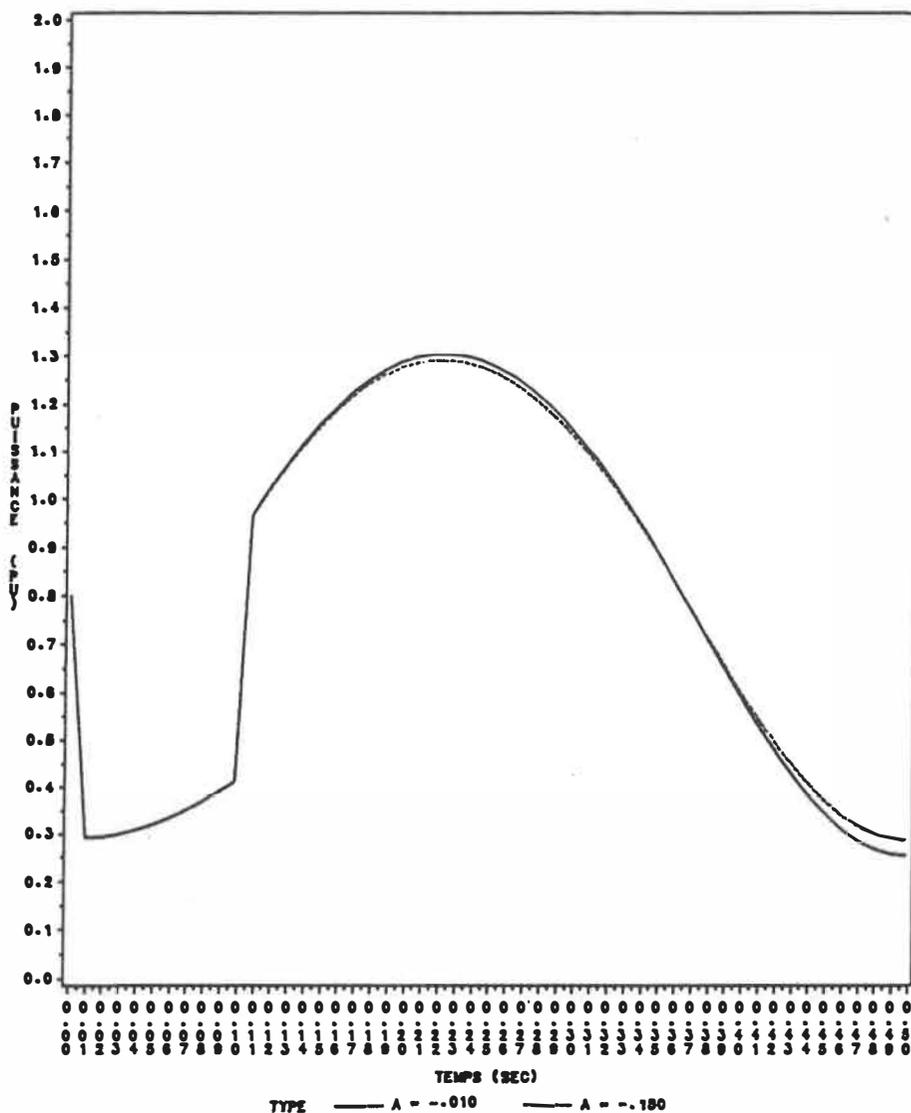


Figure 3.12 : Puissance électrique pendant le régime transitoire.

MACHINE SYNCHRONE-RESEAU INFINI  
 T=0 SEC • C.C TRIPHASE - T=.1 SEC • COUPURE

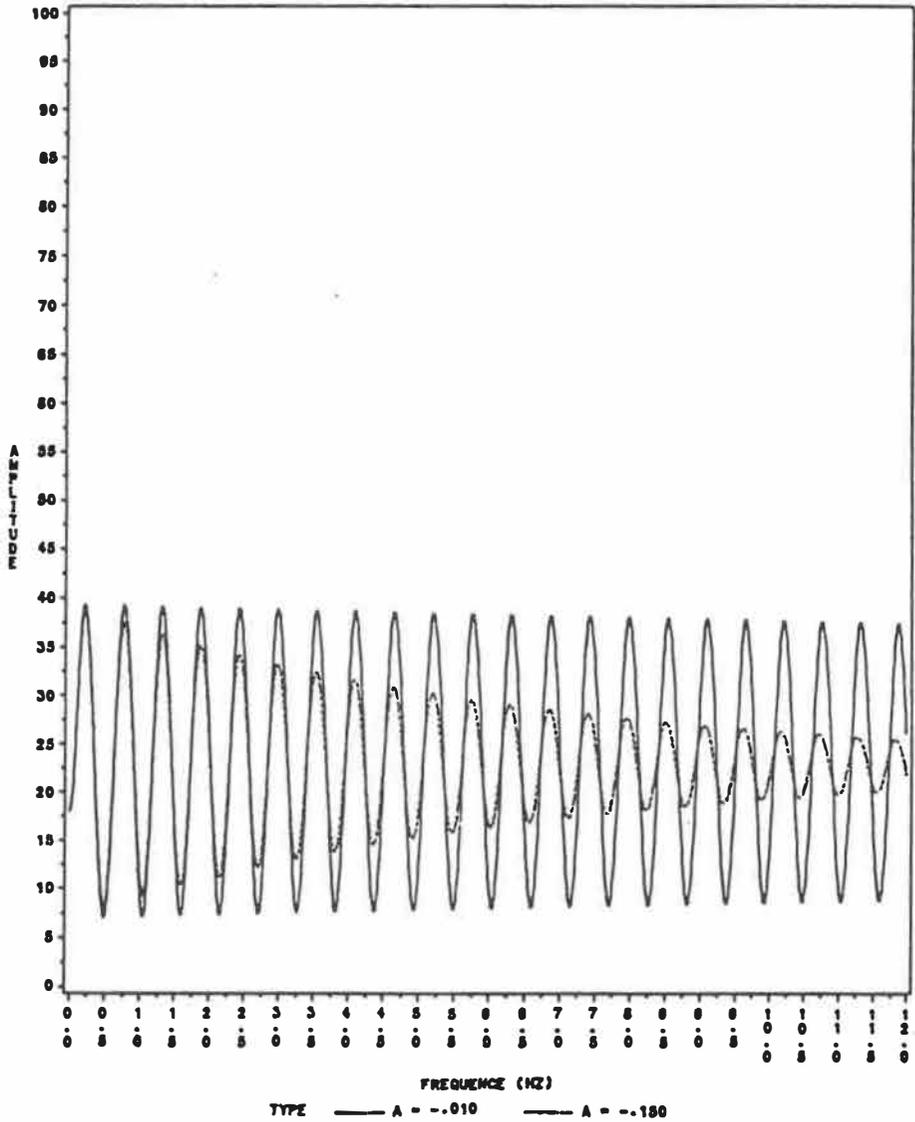


Figure 3.13 : Angle interne.

# MACHINE SYNCHRONE—RESEAU INFINI

T=0+ SEC • C.C TRIPHASE - T=.1 SEC • COUPURE

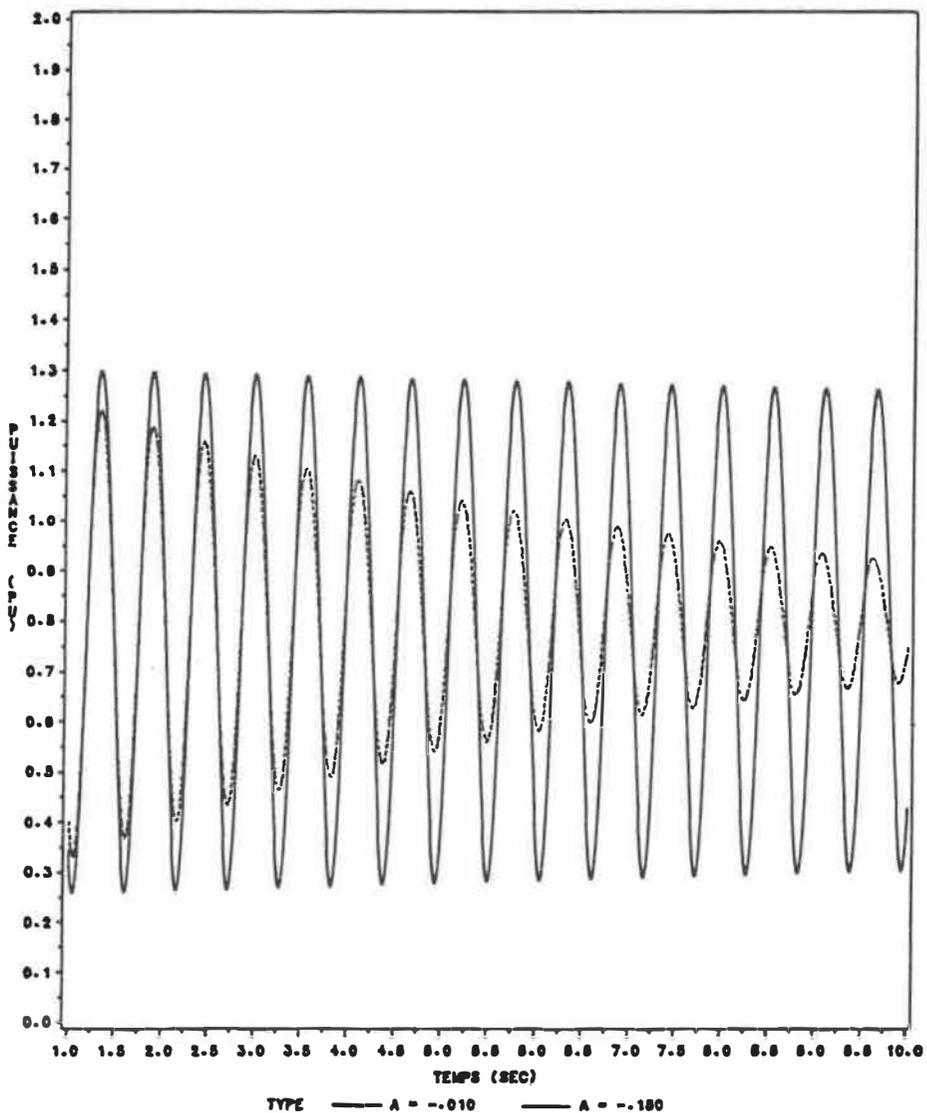


Figure 3.14 : Puissance électrique pendant le régime dynamique.

# MACHINE SYNCHRONE—RESEAU INFINI

T=0 SEC • C.C TRIPHASE - T=.1 SEC • COUPURE

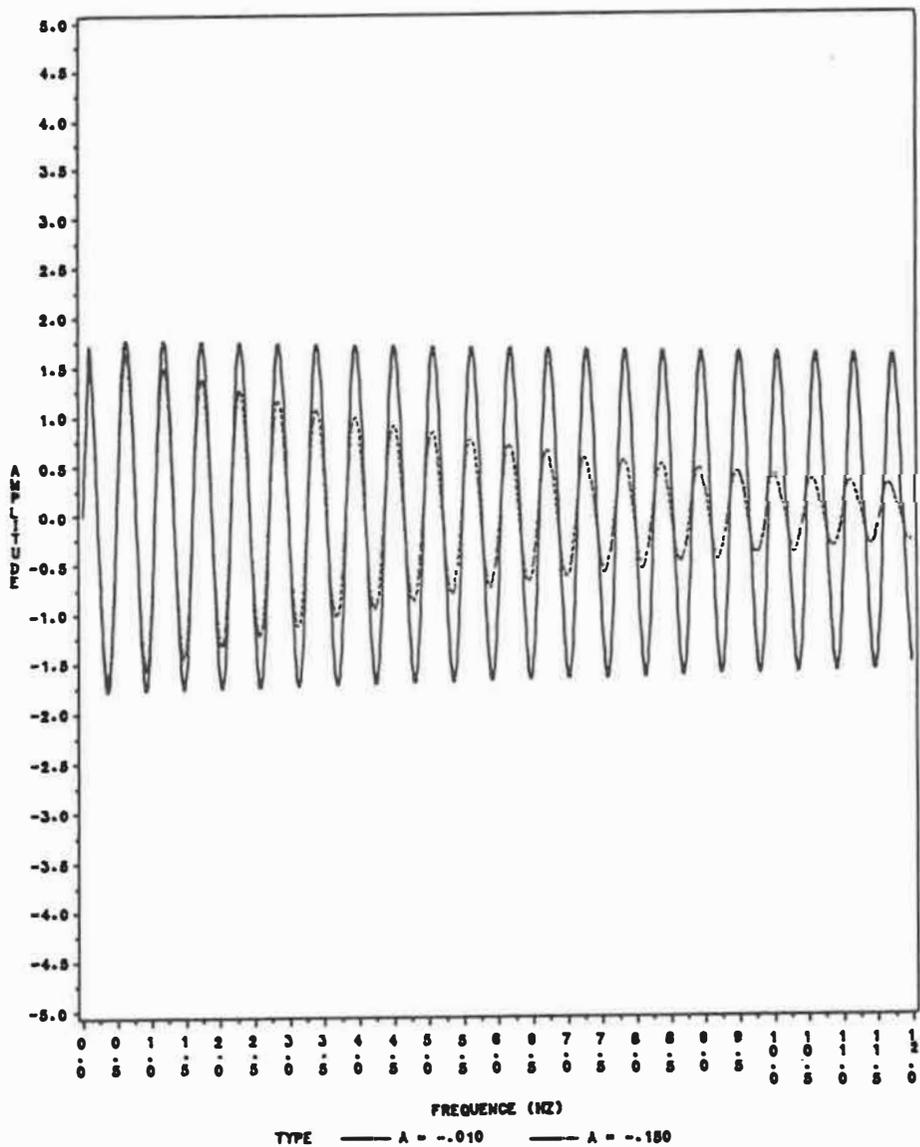


Figure 3.15 : Variations de l'angle interne.

MACHINE SYNCHRONE-RESEAU INFINI  
LOCALISATION DU MODE  $(-0.15 + j 11.37)$

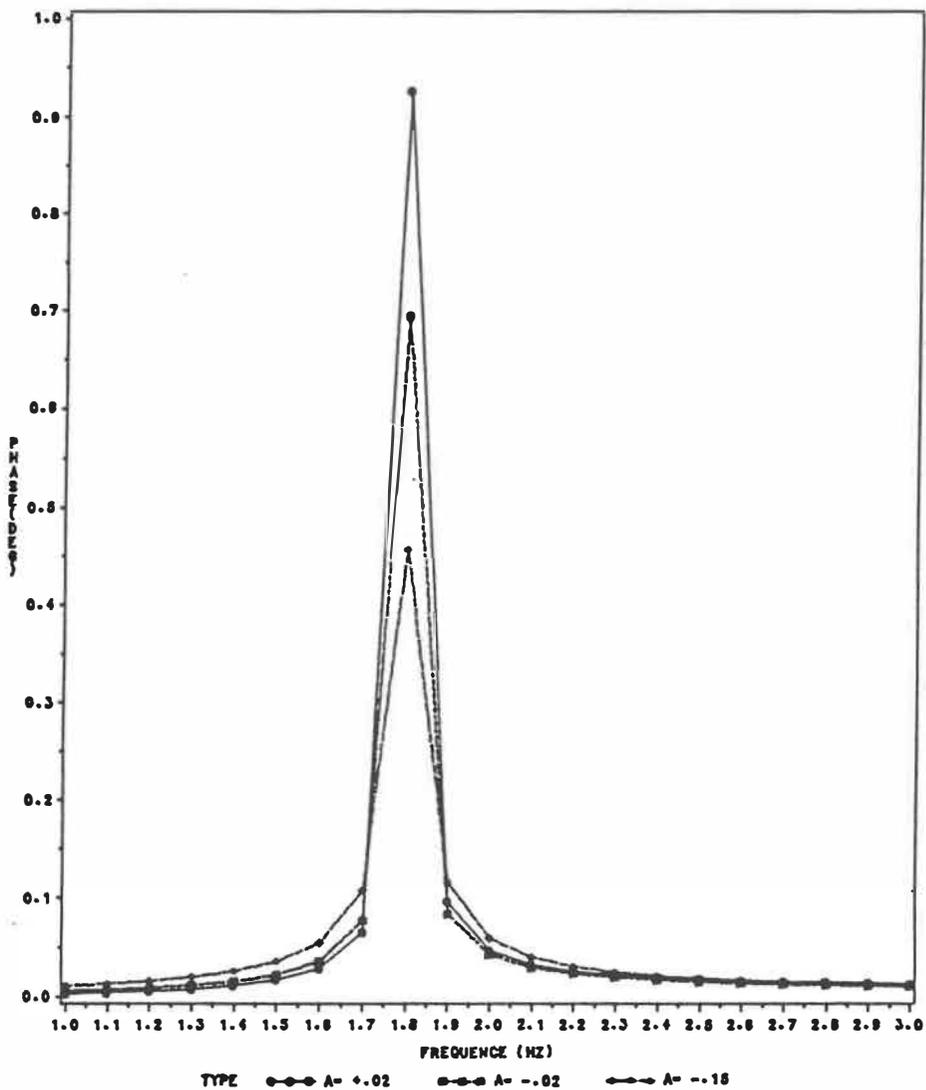


Figure 3.16 : Spectre (Amplitude) pour les positions  $A = -0.15$ ,  $A = -0.02$  et  $A = +0.02$  du pôle par rapport au cercle unitaire.

### MACHINE SYNCHRONE—RESEAU INFINI LOCALISATION DU MODE (-.15 + J 11.37)

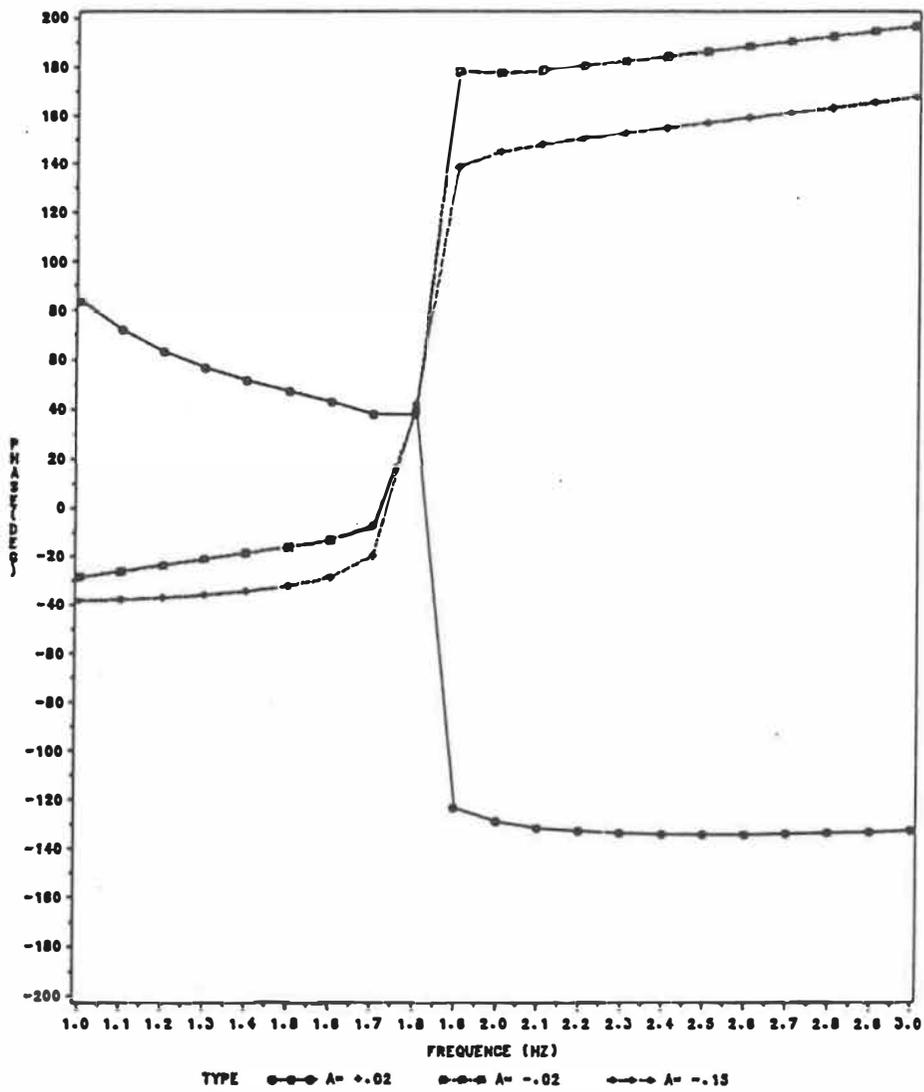


Figure 3.17 : Spectre (Amplitude) pour les positions  $A = -.010$ ,  $A = -.001$  et  $A = +.001$  du pôle par rapport au cercle unitaire.

MACHINE SYNCHRONE-RESEAU INFINI  
LOCALISATION DU MODE  $(-.010 + j 11.37)$

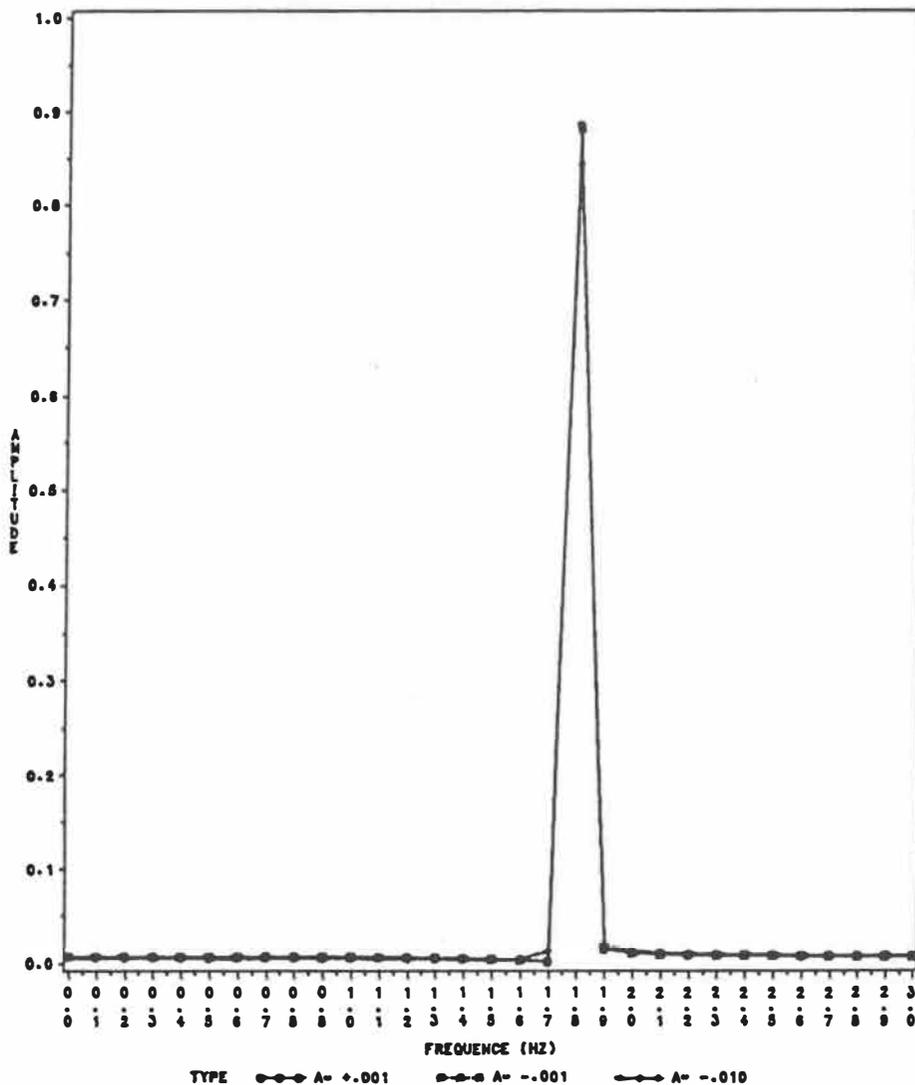


Figure 3.18 : Spectre (Phase) pour les positions  $A = -.15$ ,  $A = -.02$  et  $A = +.02$  du pôle par rapport au cercle unitaire.

# MACHINE SYNCHRONE—RESEAU INFINI

## LOCALISATION DU MODE $(-.010 + J 11.37)$

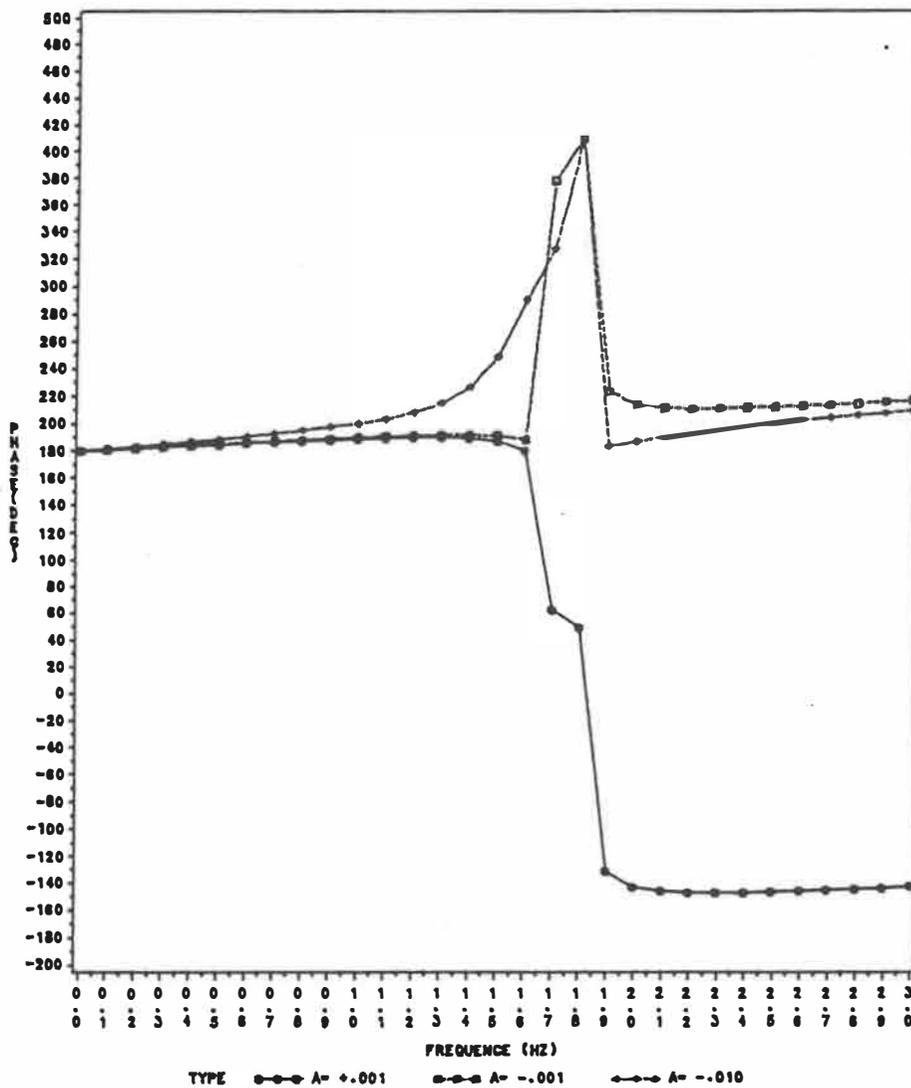


Figure 3.19 : Spectre (Phase) pour les positions  $A=-.010$ ,  $A=-.001$  et  $A=+.001$  du pôle par rapport au cercle unitaire.

## Chapitre 4

### **RESEAU MULTIMACHINES**

---

Dans ce chapitre, nous déterminons les caractéristiques de stabilité des réseaux multimachines par l'algorithme de Corinthios [3]. En effet, en présence d'une multiplicité de pôles dominants, la méthode des fenêtres (Chapitre 3) apparaît impuissante.

Nous exposerons l'approche utilisée pour la modélisation du système et la réduction de la matrice admittance.

Le modèle réduit obtenu nous servira dans la simulation des réponses aux perturbations (ces réponses tiendront lieu d'enregistrements), et nous permettra aussi de déterminer les valeurs propres du système, afin de pouvoir évaluer les résultats obtenus par la technique spectrale.

#### **4.1 MODELISATION DU SYSTEME**

La modélisation du système [8] s'obtient à partir d'une interconnection des modèles de ses différents constituants, c'est à dire, générateurs, charge, ligne de transport, et transformateurs.

### .Charge.

Une charge électrique est caractérisée par sa puissance active  $P$ , sa puissance réactive  $Q$  et la tension à ses bornes  $V$ .

noeud charge

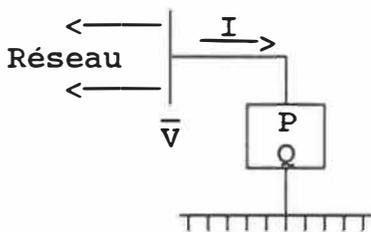


Figure 4.1: Noeud charge

Le modèle de la charge s'obtient en lui associant son admittance équivalente.

La puissance absorbée par la charge (fig : 4.1) est:

$$P + j Q = \bar{V} \bar{I}^* \quad (4.1)$$

Si  $\bar{Y}$  représente l'admittance de la charge on a:

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V} \quad (4.2)$$

Des relations (4.1) et (4.2) on déduit:

$$\bar{Y} = \frac{P}{\bar{V}^2} - j \frac{Q}{\bar{V}^2} \quad (4.3)$$

Posons:

$$\bar{Y} = G + j B \quad (4.4)$$

Avec:

$$G = \frac{P}{\bar{V}^2} \quad \text{et} \quad B = - \frac{Q}{\bar{V}^2} \quad (4.5)$$

Ainsi nous obtenons l'admittance équivalente de la charge (fig : 4.2).

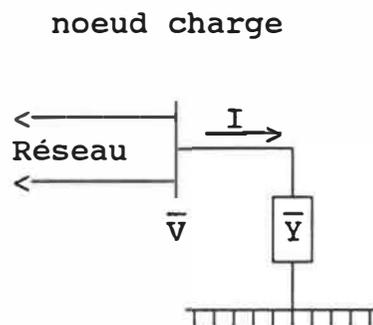


Figure 4.2: Modèle de la charge

Notons que pour ce modèle, la tension  $V$ , aux bornes de la charge, est supposée constante.

### .Générateur

Pour le générateur on adopte le modèle classique [8]:  
force électromotrice constante derrière la réactance  
transitoire  $X'_d$ .

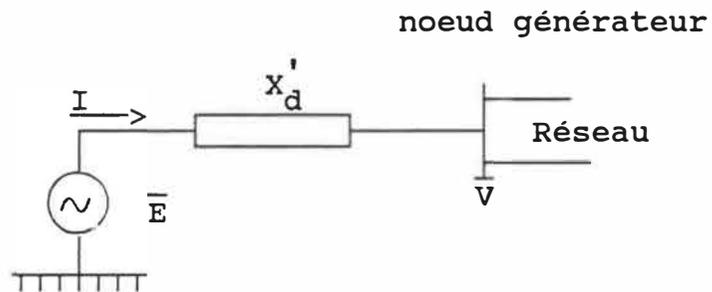


Figure 4.3: Modèle classique

$\bar{V}$  : tension au noeud générateur.

$\bar{E}$  : tension interne du générateur.

$V$  est généralement connue, elle est calculée par le programme de répartition de charge (Load Flow).  $E$  se calcule comme suit :

La puissance injectée par le générateur (fig : 4.3) est:

$$P+jQ = \bar{V} \bar{I}^* \quad (4.6)$$

Les tensions  $\bar{E}$  et  $\bar{V}$  (fig:4.3) sont liées par la relation suivante:

$$\bar{V} = \bar{E} - jX'_d \bar{I} \quad (4.7)$$

Si on définit la phase  $\delta'$  de E par rapport à V, les relations (4.6) et (4.7) nous permettent d'obtenir l'expression de E, soit:

$$\bar{E} = (\bar{V} + X'_d \frac{Q}{V} *) + j X'_d \frac{P}{V} * \quad (4.8)$$

La relation (4.8) exprime la tension interne du générateur, de module E et de phase  $\delta'$ .

Si V à une phase  $\alpha$ . La phase  $\delta$  de E par rapport à la référence commune (fig:4.4) est:

$$\delta = \delta' + \alpha \quad (4.9)$$

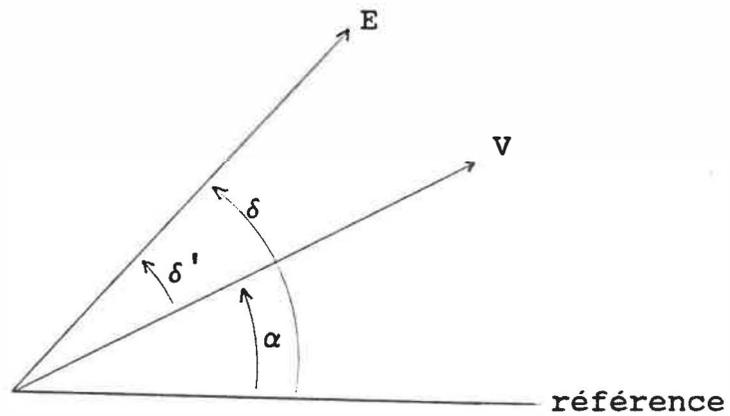


Figure 4.4: Angle interne

### .Ligne

La ligne de transmission est modélisée par son quadripôle en  $\pi$  équivalent [10], soit:

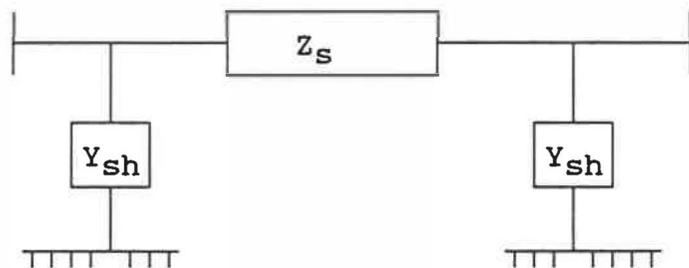


Figure 4.5: Modèle en  $\pi$  de la ligne.

$Z_S$  : impédance série (résistance et inductance cyclique des conducteurs).

$Y_{Sh}$ : admittance shunt (effet capacitif de la ligne)

Ce modèle en  $\pi$  est aussi adopté pour les transformateurs .

#### 4.2 MODELE REDUIT

Soit un réseau constitué de  $m$  noeuds dont  $n$  sont générateurs. Les équations d'injections aux noeuds, sous forme compacte, sont:

$$[I_m] = [Y_{mm}] [V_m] \quad (4.10)$$

Avec:

$$[I_m] = \begin{bmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_i \\ \cdot \\ \cdot \\ I_m \end{bmatrix}$$

$I_i$  : courant injecté au noeud  $i$ .

$$[V_m] = \begin{bmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_i \\ \cdot \\ \cdot \\ V_m \end{bmatrix}$$

$V_i$  : tension au noeud  $i$ .

$$[Y_{mm}] = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdot & \cdot & Y_{1j} & \cdot & \cdot & Y_{1m} \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ Y_{i1} & \cdot & \cdot & Y_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ Y_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$[Y_{mm}]$  : est la matrice admittance du réseau. Elle est construite telle que:

$Y_{ii}$  = somme des admittances reliées au noeud  $i$ .

$Y_{ij}$  = admittance, portée du signe moins, reliant les noeuds  $i$  et  $j$ .

Pour un réseau contenant  $n$  générateurs, les injections de courant, aux noeuds non générateurs, sont nulles. Le vecteur courant  $[I_m]$  peut s'écrire:

$$[I_m] = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \\ \hline 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} n \text{ courants des noeuds générateurs.} \\ \hline m-n \text{ courants nuls des noeuds non} \\ \text{générateurs.} \end{array}$$

$$[V_m] = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ \hline V_{n+1} \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} n \text{ tensions de noeuds générateurs.} \\ \hline m-n \text{ tensions des noeuds non} \\ \text{générateurs.} \end{array}$$

Sous forme compacte nous pouvons écrire:

$$[I_m] = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [V_m] = \begin{bmatrix} E_n \\ V_r \end{bmatrix}$$

$[I_n]$  : vecteur de n courants générateurs.

$[E_n]$  : vecteur de n tensions générateurs.

$[0]$  : vecteur de r zéros , avec  $r=m-n$

$[V_r]$  : vecteur de r tensions de noeuds non générateurs.

L'équation (4.10) devient :

$$\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{nn} & -Y_{nr} \\ Y_{rn} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n \\ V_r \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Soit:

$$\begin{aligned} [I_n] &= [Y_{nn}] [E_n] + [Y_{nr}] [V_r] \\ 0 &= [Y_{rn}] [E_n] + [Y_{rr}] [V_r] \end{aligned} \quad (4.13)$$

En éliminant  $[V_r]$  dans (4.13), on a:

$$[I_n] = \{ [Y_{nn}] - [Y_{nr}][Y_{rr}]^{-1}[Y_{rn}] \} [E_n] \quad (4.14)$$

Soit:

$$[I_n] = [Y] [E_n] \quad (4.15)$$

Avec:

$$[Y] = [Y_{nn}] - [Y_{nr}] [Y_{rr}]^{-1} [Y_{rn}] \quad (4.16)$$

$[Y]$  est la matrice du réseau réduit à  $n$  noeud, et qu'on schématise comme suit:

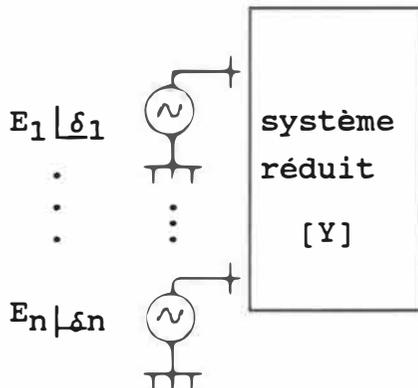


Figure 4.6: Réseau réduit

**REMARQUE**

La réduction du système (4.10) d'ordre  $m$  au système (4.15) d'ordre (inférieur)  $n$  correspond schématiquement à sauvegarder les noeuds du réseau où il y a une injection de puissance et éliminer tous les autres. Cette étape est répétée pour chaque configuration du réseau (avant, pendant et après défaut). Ce qui exige un temps de calcul relativement important pour un réseau de grande dimension. C'est l'une des faiblesses de la méthode des valeurs propres que nous avons mentionnée au chapitre 1.

**4.3 REGIME DYNAMIQUE**

La puissance électrique injectée par le générateur  $i$  dans un réseau de  $n$  machines est :

$$P_{ei} = \operatorname{Re}(\bar{E}_i \bar{I}_i^*)$$

$\bar{E}_i, \bar{I}_i$ : tension et courant du générateur  $i$ .

Le courant  $\bar{I}_i$  s'obtient de (4.15) :

$$\bar{I}_i = [I_n]^t [T] \quad (4.18)$$

$[T]$  : vecteur de  $n$  courants dont le  $i^{\text{ième}}$  est l'unité et les autres nuls.

En remplaçant  $[I_n]$  par son expression (4.15) on a :

$$\bar{I}_i = [E_n]^t [Y] [T] \quad (4.19)$$

qui s'écrit encore :

$$\bar{I}_i = \sum_{j=1}^n \bar{E}_j \bar{Y}_{ij}$$

Soit :

$$\bar{E}_i \bar{I}_i^* = \sum_{j=1}^n \bar{E}_i \bar{E}_j^* \bar{Y}_{ij}^* \quad (4.20)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= E_i \underline{\delta}_i \\ \bar{Y}_{ij} &= y_{ij} \underline{\theta}_{ij} \end{aligned} \quad (4.21)$$

La puissance électrique (4.17) se déduit de (4.20) et (4.21).

Soit :

$$(4.22)$$

$$P_{ei} = E_i^2 y_{ii} \cos(\theta_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j y_{ij} \cos(\theta_{ij}) \delta_{ij}$$

Ou encore :

$$(4.23)$$

$$P_{ei} = E_i^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j ( B_{ij} \sin \delta_{ij} + G_{ij} \cos \delta_{ij} )$$

Avec:

$$\bar{Y}_{ij} = G_{ij} + j B_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$$

$$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$$

Avant la perturbation, la machine  $i$  transforme toute la puissance mécanique reçue en puissance électrique. Si on note les grandeurs avant le défaut par l'indice 0, on a:

$$P_{mé0}^i = P_{ei0} \quad (4.24)$$

Avec:

$$P_{ei0} = E_i^2 G_{ii0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j ( B_{ij0} \sin \delta_{ij0} + G_{ij0} \cos \delta_{ij0} )$$

$P_{ei0}$  et  $P_{mé0}^i$  correspondent à la puissance électrique et mécanique à l'équilibre .

Lors d'une perturbation, le régime dynamique du générateur  $i$  est régi par :

$$M_i \frac{dw_i}{dt} + D_i w_i = P_{mé}^i - P_{ei} \quad (4.25)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = w_i = \delta'$$

Avec:

$M_i$  : constante d'inertie du générateur  $i$

$D_i$  : coefficient de frottement mécanique.

$\delta_i$  : angle interne du générateur  $i$ .

$w_i$  : vitesse angulaire du générateur  $i$ .

L'équation (4.25) s'écrit encore:

$$\frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + d_i \frac{d\delta_i}{dt} = \frac{P_{mé}^i - P_{ei}}{M_i} \quad (4.26)$$

Avec 
$$d_i = \frac{D_i}{M_i} \quad (4.27)$$

Pour  $n$  générateurs, on a un système de  $n$  équations couplées et non linéaires, qui peut s'écrire :

$$\dot{x} = f(x, x_0, t) \quad (4.28)$$

Avec  $x^t = (w_1, \delta_1, \dots, w_n, \delta_n)$

La résolution numérique du système (4.28), nous donne les différents  $\delta_i(t)$  que nous traiterons par la méthode spectrale.

#### 4.4 ALGORITHME

L'algorithme permet de simuler le système, de calculer le modèle réduit relatif à la perturbation envisagée, de résoudre le système non-linéaire (4.28) et de déterminer les modes dominants par l'algorithme de Corinthios, élaboré en les étapes suivantes:

- Simulation du réseau
- Réduction de la matrice admittance
- Résolution du système non-linéaire (4.28)
- Calcul du spectre de  $\delta_i[nT]$  par F.F.T.
- Recherche des pulsations dominantes  $(w_0)_i$
- Calcul de la séquence pondérée  $g_i[nT]$  (2.28)
- Calcul du spectre de  $g_i[nT]$  (2.29)
- Tests sur le virement de phase.
- Isolement du mode localisé par F.F.T inverse

La sous-routine F.F.T que nous avons implantée est de radix 4 [7].

#### 4.5 VALEURS PROPRES

Pour vérifier la validité des résultats obtenus, on les compare à ceux que donne la méthode des valeurs propres. Cette méthode est basée sur la linéarisation du système autour d'un point d'opération nominal, caractérisé par des

indices 0, dans ce qui suit.

Le principe est le suivant :

Pour de faibles perturbations, d'un réseau de  $n$  générateurs, on a :

$$\delta_k = \delta_{k0} + \Delta\delta_k \quad (4.29)$$

$$k = 1, \dots, n$$

Posons :

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, n$$

Soit :

$$\delta_{ij} = \delta_{ij0} + \Delta\delta_{ij} \quad (4.30)$$

Avec :

$$\delta_{ij0} = \delta_{i0} - \delta_{j0}$$

et

$$\Delta\delta_{ij} = \Delta\delta_i - \Delta\delta_j$$

En calculant les fonctions sin et cos de  $\delta_{ij}$  (4.30) on a :

$$\sin\delta_{ij} = \sin\delta_{ij0} \cos\Delta\delta_{ij} + \cos\delta_{ij0} \sin\Delta\delta_{ij} \quad (4.31)$$

$$\cos\delta_{ij} = \cos\delta_{ij0} \cos\Delta\delta_{ij} - \sin\delta_{ij0} \sin\Delta\delta_{ij}$$

Pour  $\Delta\delta_{ij}$  faible on a :

$$\cos\Delta\delta_{ij} \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin\Delta\delta_{ij} \approx 0$$

Les expressions (4.31) deviennent :

$$\sin\delta_{ij} \approx \sin\delta_{ij} + \cos\delta_{ij0} \Delta\delta_{ij} \quad (4.32)$$

$$\cos\delta_{ij} \approx \cos\delta_{ij0} - \sin\delta_{ij0} \Delta\delta_{ij}$$

En remplaçant (4.32) dans l'expression (4.23) on a :

$$P_{ei} = E_i^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j (B_{ij} \sin\delta_{ij0} + G_{ij} \cos\delta_{ij0}) \quad (4.33)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j (B_{ij} \cos\delta_{ij0} - G_{ij} \sin\delta_{ij0}) \Delta\delta_{ij}$$

Soit :

$$P_{ei} = P_{me0}^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{s_{ij0}} \Delta\delta_{ij} \quad (4.34)$$

Avec :

$$P_{m\epsilon 0}^i = E_i^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j (B_{ij} \sin \delta_{ij0} + G_{ij} \cos \delta_{ij0}) \quad (4.35)$$

et

$$P_{s_{ij0}} = E_i E_j (B_{ij} \cos \delta_{ij0} - G_{ij} \sin \delta_{ij0}) \quad (4.36)$$

$P_{s_{ij0}}$  est le coefficient de la puissance de synchronisation. Il caractérise le degré de variation de la puissance du générateur  $i$  dû au changement d'angle entre  $i$  et  $j$  lorsque les autres angles sont gardés constants.

En utilisant (4.29) et (4.34) dans (4.26) on a :

$$\frac{d^2 \Delta \delta_i}{dt^2} + D_i \frac{d \Delta \delta_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P_{s_{ij0}}}{M_i} \Delta \delta_{ij} = 0$$

En utilisant  $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$  et  $\Delta \delta_{ij} = \Delta \delta_i - \Delta \delta_j$

Soit :

(3.7)

$$\frac{d^2 \Delta \delta_i}{dt^2} = - D_i \frac{d \Delta \delta_i}{dt} - \left[ \frac{1}{M_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{s_{ij0}} \right] \Delta \delta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{M_i} P_{s_{ij0}} \Delta \delta_j$$

Posons :

$$a_{ii} = D_i \quad (4.38)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{M_i} P_{sij0} \quad \text{avec } i \neq j \quad (4.39)$$

$$b_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij}$$

Soit :

$$\frac{d^2 \Delta \delta_i}{dt^2} = - a_{ii} \frac{d \Delta \delta_i}{dt} - b_{ii} \Delta \delta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} \Delta \delta_j \quad (4.40)$$

(4.40) peut se mettre sous forme d'équations d'état.

Posons:

$$\Delta \delta_i = x_i$$

$$\frac{d \Delta \delta_i}{dt} = x_{n+i} = \dot{x}_i$$

$$\frac{d^2 \Delta \delta_i}{dt^2} = \ddot{x}_{n+i}$$

Soit:

$$x_i = x_{n+i} \quad (4.41)$$

$$\dot{x}_{n+i} = - a_{ii} x_{n+i} - b_{ii} x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_j$$



## 4.6 SIMULATION

### 4.6.1 Exemple simulé

La simulation est faite sur un réseau de 9 noeuds (fig:4.7) dont les caractéristiques [8] sont résumées dans les tableaux 4.1,4.2,4.3 et 4.4 .

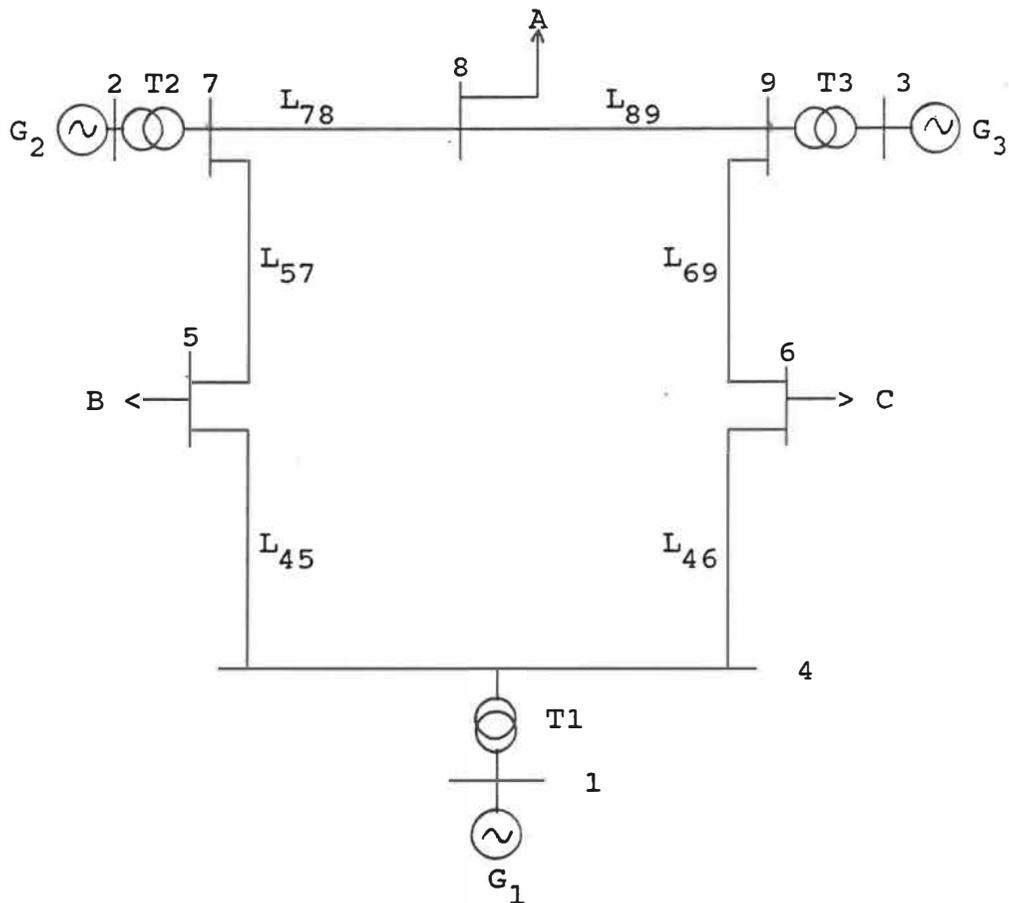


Figure 4.7: Réseau de test

|             | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ |
|-------------|-------|-------|-------|
| P(MVA)      | 71.6  | 163.0 | 85.0  |
| Q(Mvars)    | 27    | 6.7   | -10.9 |
| $X'_d$ (pu) | .0608 | .1198 | .1813 |
| H(MW.s)     | 2364  | 640   | 301   |

**Tableau 4.1:** Données des générateurs.

|              | $T_1$    | $T_2$  | $T_3$    |
|--------------|----------|--------|----------|
| tensions(kv) | 16.5/230 | 18/230 | 13.8/230 |
| X (pu)       | .0576    | .0625  | .0586    |

**Tableau 4.2:** Données des transformateurs

|          | $Z_s$ (série)  | $Y_{sh}$ (shunt) |
|----------|----------------|------------------|
| $L_{45}$ | .010 + j .085  | .088             |
| $L_{46}$ | .017 + j .092  | .079             |
| $L_{57}$ | .032 + j .161  | .153             |
| $L_{69}$ | .039 + j .170  | .179             |
| $L_{78}$ | .0085+ j .072  | .0745            |
| $L_{89}$ | .0119+ j .1008 | .1045            |

**Tableau 4.3:** Données des lignes.

|   | P(MW) | Q(Mvars) |
|---|-------|----------|
| A | 125   | 50       |
| B | 90    | 30       |
| C | 100   | 35       |

**Tableau 4.4:** Données des charges.

**Remarque:**

Les impédances sont exprimées en pu par rapport à la base  $S_b=100\text{MVA}$  et  $U_b=230\text{kV}$ .

**4.6.2 Calcul préliminaire.**

Dans cette étape nous calculons la matrice admittance et les tensions internes des générateurs à l'état d'équilibre initial (avant la perturbation):

.A partir des données (puissances et caractéristiques du réseau) nous calculons les tensions aux différents noeuds du réseau (fig:4.7) par la sous-routine de répartition de puissance (Load Flow).

.Les relations (4.8) et (4.9) nous donnent les tensions internes des générateurs.

.L'impédance équivalente des charges se calcule à partir de la relation (4.3).

.La matrice admittance réduite (4.16) est obtenue après éliminations des noeuds non générateurs. Le réseau réduit peut être schématisé comme à la figure 4.8.

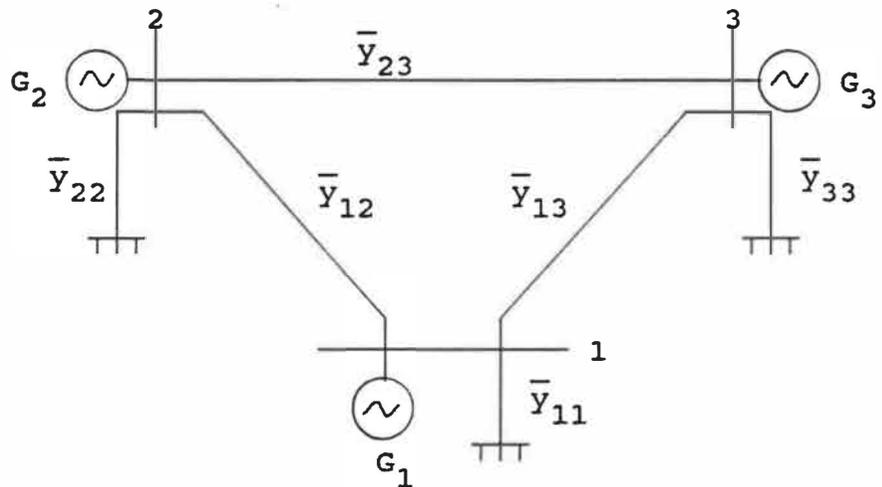


Figure 4.8: Réseau réduit avant le défaut.

$\bar{Y}_{ij}$  : éléments de la matrice réduite.

Dans les pages 118 et 119 , nous présentons les résultats correspondants au réseau avant le défaut.

\*\*\*\*\*  
 NOMBRE DE NOEUDS : 9  
 NOMBRE DE LIGNES : 9  
 NOMBRE DE GENERATEURS : 3  
 \*\*\*\*\*

TENSIONS AUX NOEUDS

| NOEUDS | MODULE (PU) | PHASE (DEG.) |
|--------|-------------|--------------|
| 1      | 1.040       | 0            |
| 2      | 1.026       | 3.7          |
| 3      | 1.025       | 4.7          |
| 4      | 1.026       | -2.2         |
| 5      | .996        | -4.0         |
| 6      | 1.013       | -3.7         |
| 7      | 1.026       | 3.7          |
| 8      | 1.016       | .7           |
| 9      | 1.032       | 2.0          |

TENSIONS INTERNES DES GENERATEURS

| TENSION | MODULE (PU) | PHASE (DEG.) |
|---------|-------------|--------------|
| E1      | 1.0566      | 2.2716       |
| E2      | 1.0503      | 19.7563      |
| E3      | 1.0159      | 13.2066      |

ADMITTANCE EQUIVALENTE DES CHARGES

| NEOUD CHARGE | ADMITTANCE COMPLEXE (PU)  |
|--------------|---|
| 5            | $\left( \begin{array}{l} 1.2601 \quad , \quad -.5040 \\ .8770 \quad , \quad -.2923 \\ .9688 \quad , \quad -.3391 \end{array} \right)$ |
| 6            |   |
| 8            |   |

MATRICE ADMITTANCE AVANT LE DEFAULT

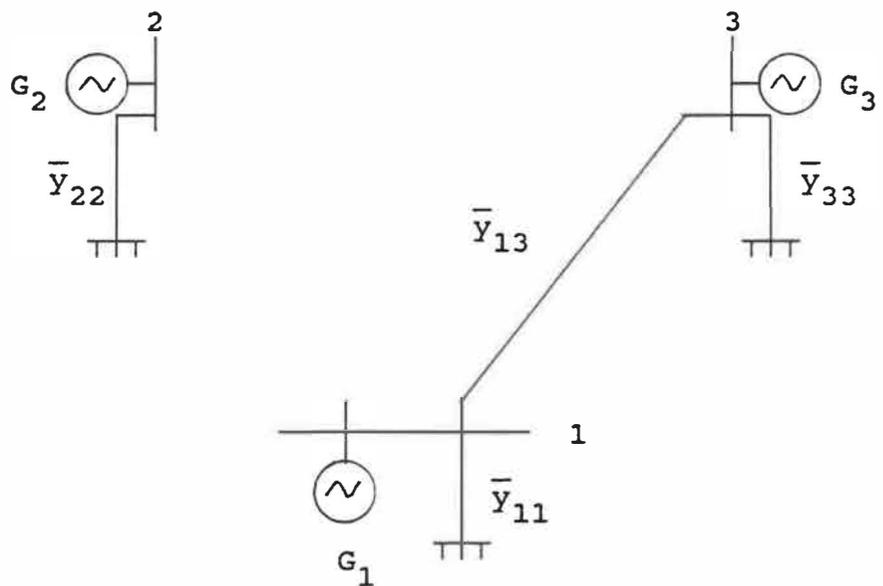
|  |  |  |
|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} 0.000 & -8.446 \\ 0.000 & 8.446 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.485 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0.000 & -5.485 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0.000 & -4.168 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 4.168 \end{pmatrix}$   |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 8.446 \\ 3.307 & -30.394 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.365 & 11.604 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.942 & 10.511 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.365 & 11.604 \\ -1.188 & 5.975 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 3.813 & -17.842 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.942 & 10.511 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 4.101 & -16.133 \\ -1.282 & 5.588 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 2.805 & -24.931 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 5.485 \\ -1.188 & 5.975 \\ -1.617 & 13.698 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ -1.617 & 13.698 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 3.741 & -23.642 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ -1.155 & 9.784 \end{pmatrix}$   |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ -1.155 & 9.784 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 4.168 \\ -1.282 & 5.588 \\ 2.437 & -19.257 \end{pmatrix}$ |

MATRICE REDUITE

|  |  |  |
|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} 0.8452 & -2.9879 \\ 0.2869 & 1.5131 \\ 0.2095 & 1.2258 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.2869 & 1.5131 \\ 0.4199 & -2.7237 \\ 0.2132 & 1.0880 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.2095 & 1.2258 \\ 0.2132 & 1.0880 \\ 0.2769 & -2.3681 \end{pmatrix}$ |
|--|--|--|

#### 4.6.3 Pendant le défaut

Le défaut supposé est un court-circuit triphasé de la ligne  $L_{57}$  au jeu de barre 7 de la figure 4.7. Le réseau réduit correspondant est :



**Figure 4.9:** Réseau réduit pendant le défaut.

La matrice admittance et la matrice réduite pendant le défaut sont à la page 121.

MATRICE ADMITTANCE PENDANT LE DEFAUT

=====

|   |   |  |
|---|---|--|
| $\begin{pmatrix} 0.000 & -8.446 \\ 0.000 & 8.446 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & -5.485 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & -4.168 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 4.168 \end{pmatrix}$   |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 8.446 \\ 3.307 & -30.394 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.365 & 11.604 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.942 & 10.511 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$  |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.365 & 11.604 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 3.813 & -17.842 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ -1.942 & 10.511 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 4.101 & -16.133 \\ -1.282 & 5.588 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 3.741 & -23.642 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ -1.155 & 9.784 \end{pmatrix}$   |
| $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ -1.155 & 9.784 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000 & 4.168 \\ -1.282 & 5.588 \\ 2.437 & -19.257 \end{pmatrix}$ |

MATRICE REDUITE

=====

|  |  |  |
|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} 0.6365 & -3.8158 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0701 & 0.6306 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -5.4855 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.0701 & 0.6306 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1740 & -2.7959 \end{pmatrix}$ |
|--|--|--|

#### 4.6.4 Ouverture de phase.

On isole la ligne sous défaut ( $L_{57}$  fig:4.7) après 5 cycles (.083 sec). Le réseau réduit correspondant est:

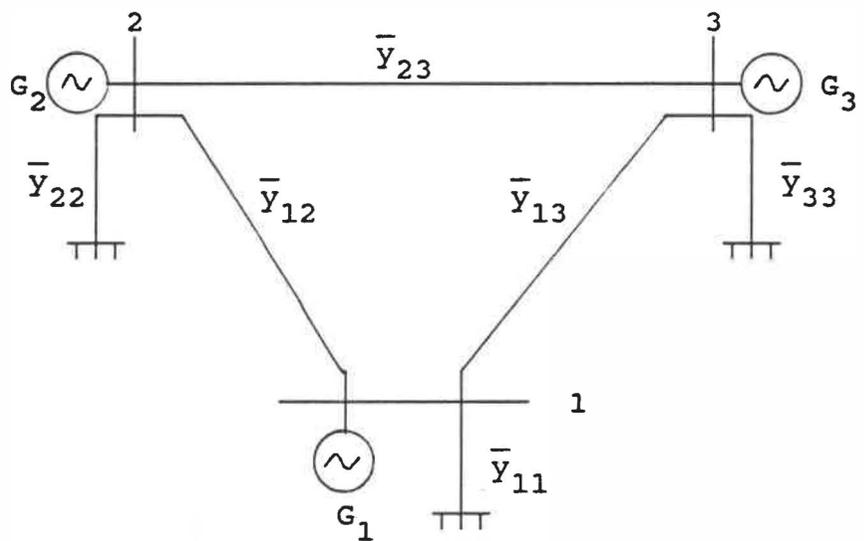


Figure 4.10: Réseau réduit après le défaut.

La matrice admittance et la matrice réduite sont à la page 123.

---

 MATRICE ADMITTANCE APRES LE DEFAUT
 

---

 =====

|  |  |   |
|--|--|---|
| $\begin{pmatrix} 0.000, & -8.446 \\ 0.000, & 8.446 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 5.485 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000, & -5.485 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000, & -4.168 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 4.168 \end{pmatrix}$   |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 8.446 \\ 3.307, & -30.394 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ -1.365, & 11.604 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ -1.942, & 10.511 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$  |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ -1.365, & 11.604 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 2.525, & -11.955 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ -1.942, & 10.511 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 4.101, & -16.133 \\ -1.282, & 5.588 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 1.617, & -18.956 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 5.485 \\ 0.000, & 0.000 \\ -1.617, & 13.698 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$    |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ -1.617, & 13.698 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 3.741, & -23.642 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ -1.155, & 9.784 \end{pmatrix}$   |
| $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0.000, & 0.000 \\ 0.000, & 0.000 \\ -1.155, & 9.784 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 0.000, & 4.168 \\ -1.282, & 5.588 \\ 2.437, & -19.257 \end{pmatrix}$ |

---

 MATRICE REDUITE
 

---

 =====

|   |   |   |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1.1565, & -2.2661 \\ 0.1347, & 0.7221 \\ 0.1867, & 1.0729 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.1347, & 0.7221 \\ 0.3982, & -1.9530 \\ 0.1983, & 1.2286 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.1867, & 1.0729 \\ 0.1983, & 1.2286 \\ 0.2720, & -2.3434 \end{pmatrix}$ |
|---|---|---|

#### 4.6.5 modes d'oscillations du système.

Nous résolvons numériquement le système (4.26) pour des coefficients  $d_i$  (4.27) identiques aux trois générateurs et pour deux cas d'amortissement.

Soit:

$$\text{Cas 1 : } d_i = .3 \quad (4.44)$$

$$\text{Cas 2 : } d_i = .1 \quad (4.45)$$

avec  $i = 1, 2, 3$

On remarque dans la figure 4.11 et 4.12, que le défaut considéré, provoque une chute des puissances électriques des générateurs. Le déséquilibre entre la puissance mécanique (constante) et la puissance électrique de chaque générateur entraîne une accélération de la machine.

Les figures 4.13 et 4.14 représentent  $\delta_{21}(t)$  et  $\delta_{31}(t)$  (angles internes respectifs des générateurs 2 et 3 par rapport au générateur 1 pris comme référence). Nous constatons que  $\delta_{21}(t)$  et  $\delta_{31}(t)$  oscillent autour de leur position d'équilibre finale:

$$\delta_{210} = .6976 \text{ rad et } \delta_{310} = .4436 \text{ rad.} \quad (4.46)$$

Les figures 4.15 et 4.16 représentent les variations d'angles  $\Delta\delta_{21}(t)$  et  $\Delta\delta_{31}(t)$  pour les deux cas d'amortissement considérés.

En appliquant l'algorithme de Corinthios à  $\Delta\delta_{21}(t)$  et à  $\Delta\delta_{31}(t)$  sur l'intervalle [1-11] secondes avec  $N=1024$ ,  $\Delta f=.1$  hz et un pas ( 2.23 )  $\Delta\sigma=.01$ , nous identifions deux modes ( m1 et m2 ) dominants.

Soit :

| Cas | Mode | Amortissement | Fréquence |
|-----|------|---------------|-----------|
| 1   | m1   | a1= -.14      | f1=1.0 hz |
|     | m2   | a2= -.16      | f2=2.1 hz |
| 2   | m1   | a1= -.05      | f1= 1.0   |
|     | m2   | a2= -.05      | f2=2.1    |

**tableau 4.5:** Modes des oscillation par l'algorithme de Corinthios.

**REMARQUE**

L'intervalle d'enregistrement doit-être suffisamment long (pour détecter les basses fréquences) et situé dans la zone dynamique où le régime est supposé linéaire.

Pour valider les résultats précédents, nous les comparons à ceux que donne la méthode des valeurs propres que nous avons exposée au paragraphe 4.5.

Les coeficients (4.38) et (4.39) de la matrice d'Etat se calculent à partir de (4.44), (4.45) et (4.46), (4.36).

La résolution de l'équation (4.43) nous donnent les valeurs propres correspondantes à chaque cas. Soit:

Cas 1:

**Matrice d'Etat:**

|        |         |      |      |
|--------|---------|------|------|
| .00    | .00     | 1.00 | .00  |
| .00    | .00     | .00  | 1.00 |
| -56.76 | 26.85   | -.30 | .00  |
| 77.21  | -151.69 | .00  | -.30 |

**Valeurs propres:**

$$\alpha_1 = -.15 + j 13.04$$

$$\alpha_2 = -.15 + j 6.20$$

Cas 2:

Matrice d'Etat:

|        |         |      |      |
|--------|---------|------|------|
| .00    | .00     | 1.00 | .00  |
| .00    | .00     | .00  | 1.00 |
| -56.76 | 26.85   | -.10 | .00  |
| 77.21  | -151.69 | .00  | -.10 |

Valeurs propres:

$$\alpha_1 = -.05 + j 13.04$$

$$\alpha_2 = -.05 + j 6.20$$

Soit:

| Cas | Mode | Amortissement | Fréquence  |
|-----|------|---------------|------------|
| 1   | m1   | a1= -.15      | f1=.98 hz  |
|     | m2   | a2= -.15      | f2=2.07 hz |
| 2   | m1   | a1= -.05      | f1= .98    |
|     | m2   | a2= -.05      | f2=2.07    |

**Tableau 4.6:** Modes des oscillations par la méthode des valeurs propres.

En comparant les tableaux 4.5 et 4.6 nous constatons que les résultats obtenus par l'algorithme de Corinthios concordent précisément avec ceux obtenus analytiquement comme les valeurs propres du modèle d'état.

Les spectres en  $Z$  obtenus par l'algorithme de Corinthios sont montrés aux figures 4.17, à 4.22.

**RESEAU MULTIMACHINES**  
 T=0+ SEC: C.C TRIPHASE      T=.083SEC: COUPURE

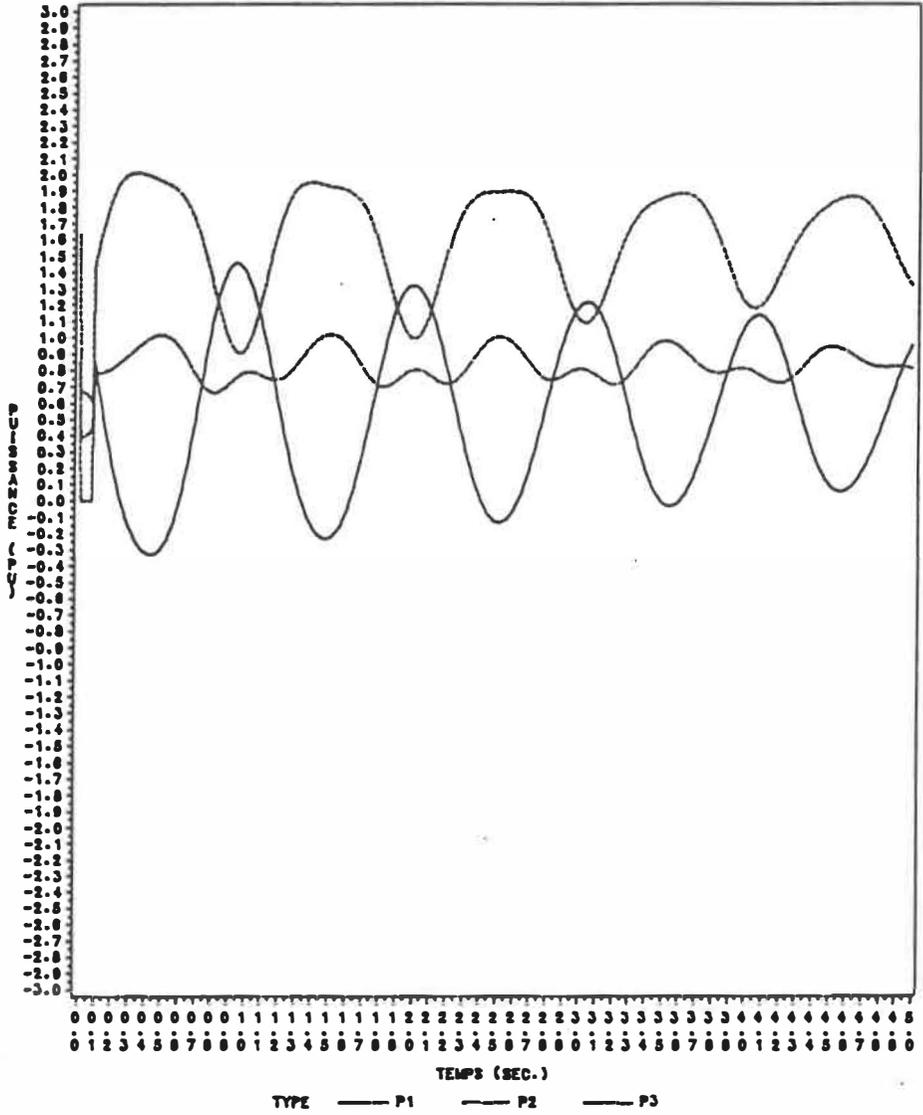


Figure 4.11 : Puissance électrique des générateurs pour un amortissement de  $-0.15$ .

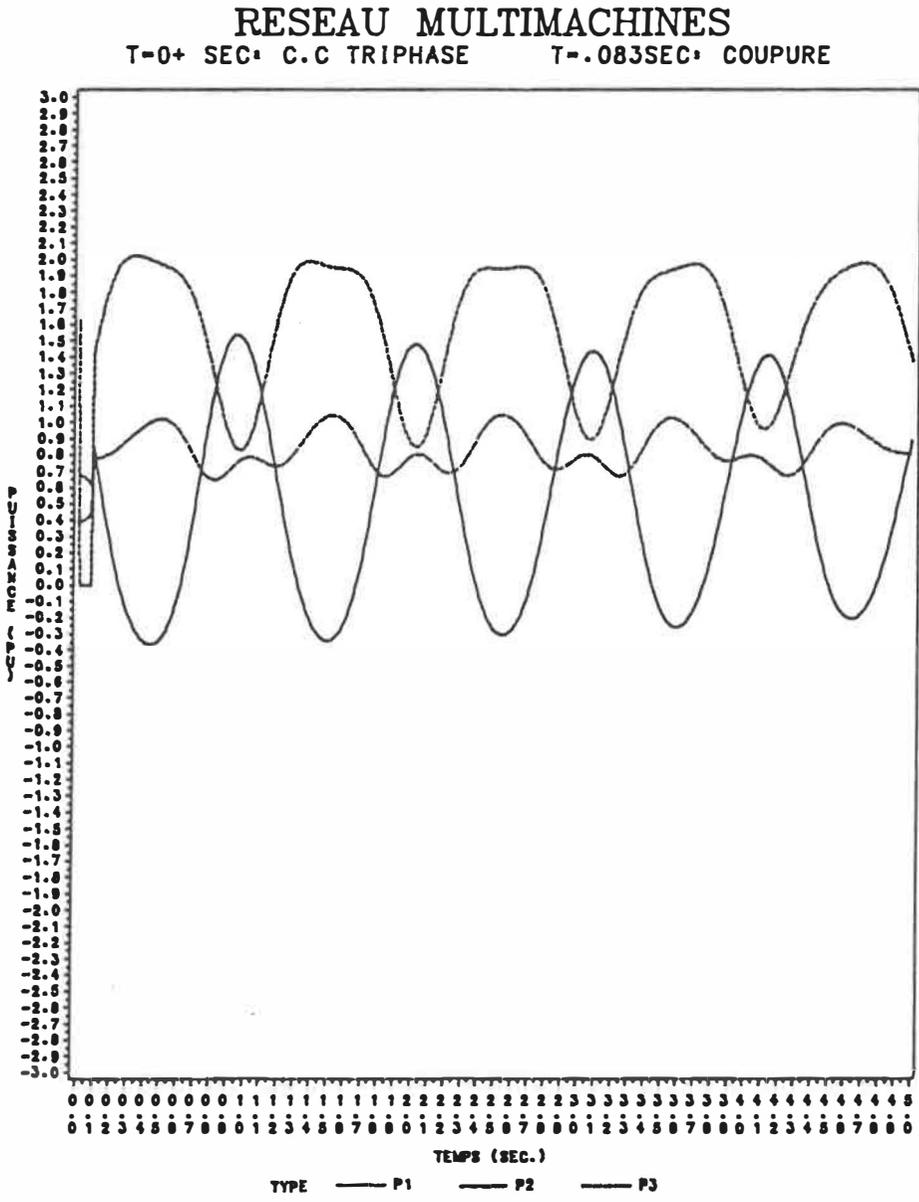


Figure 4.12 : Puissance électrique des générateurs pour un amortissement de  $-0.05$ .

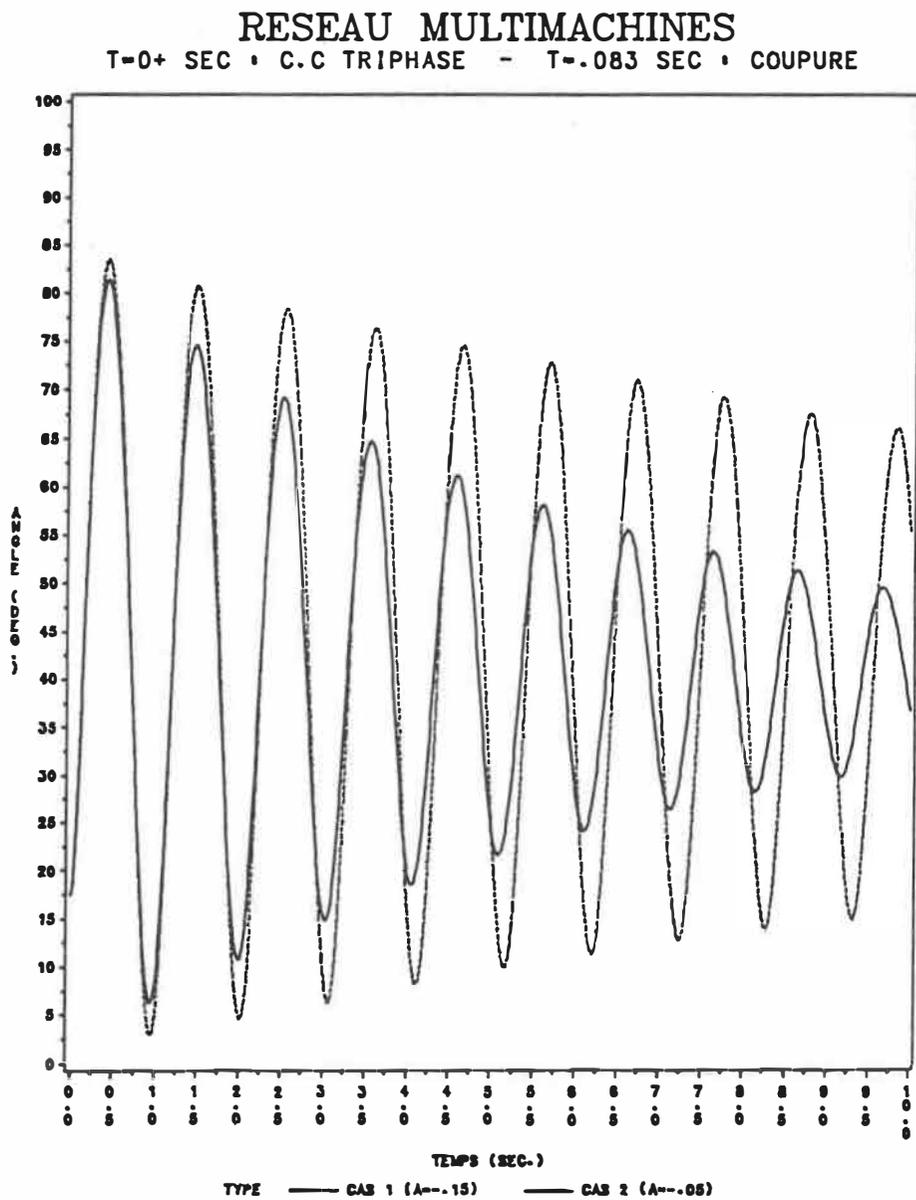


Figure 4.13 : Angle interne  $\delta_{21}(t)$  pour les amortissements de  $-.15$  et  $-.05$ .

## RESEAU MULTIMACHINES

T=0+ SEC : C.C TRIPHASE - T=.083 SEC : COUPURE

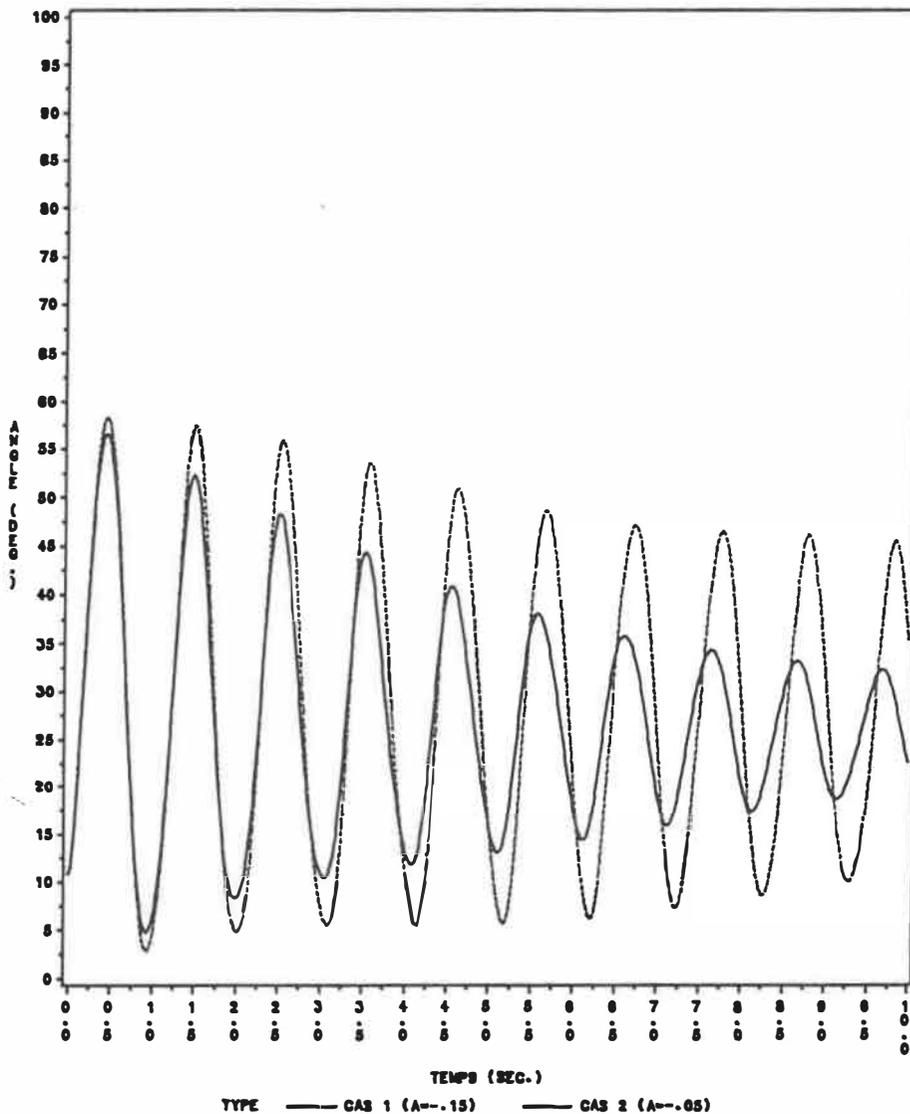


Figure 4.14 : Angle interne  $\delta_{31}(t)$  pour les amortissements de  $-.15$  et  $-.05$ .

## RESEAU MULTIMACHINES

T=0+ SEC • C.C TRIPHASE - T=.083 SEC • COUPURE

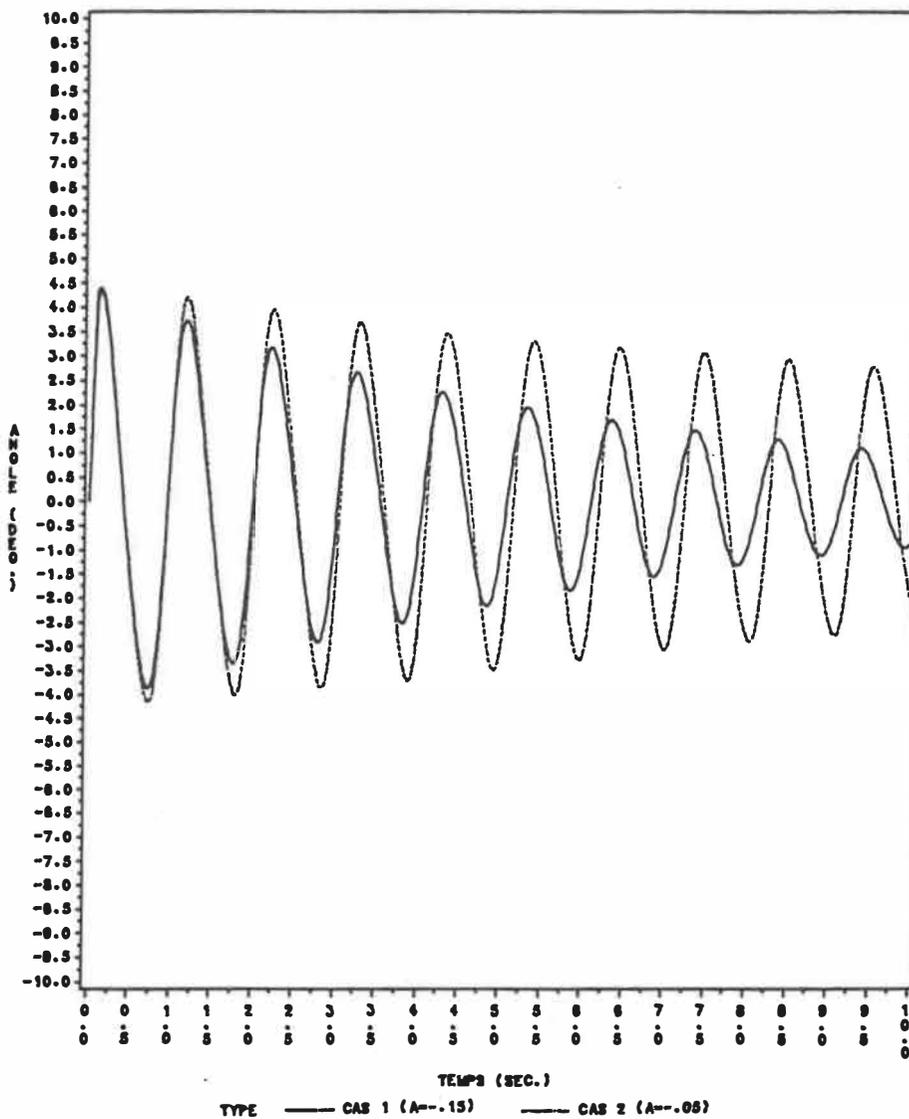
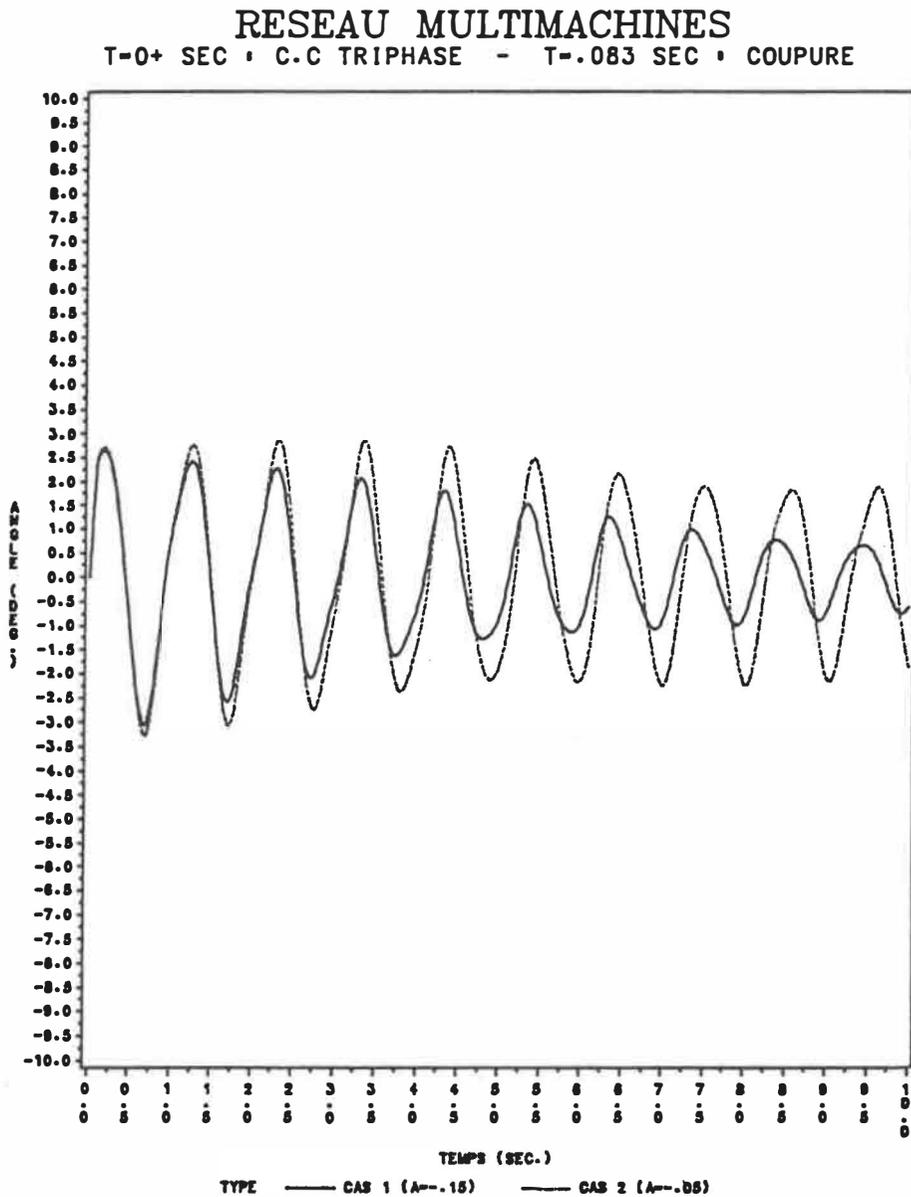


Figure 4.15 : Variations de l'angle interne  $\delta_{21}(t)$  pour les amortissements de  $-0.15$  et  $-0.05$ .



**Figure 4.16 :** Variations de l'angle interne  $\delta_{31}(t)$  pour les amortissements de  $-.15$  et  $-.05$  .

RESEAU MULTIMACHINES  
 MODES COUPLES (-.15+J13.04) ET (-.15+J6.20)

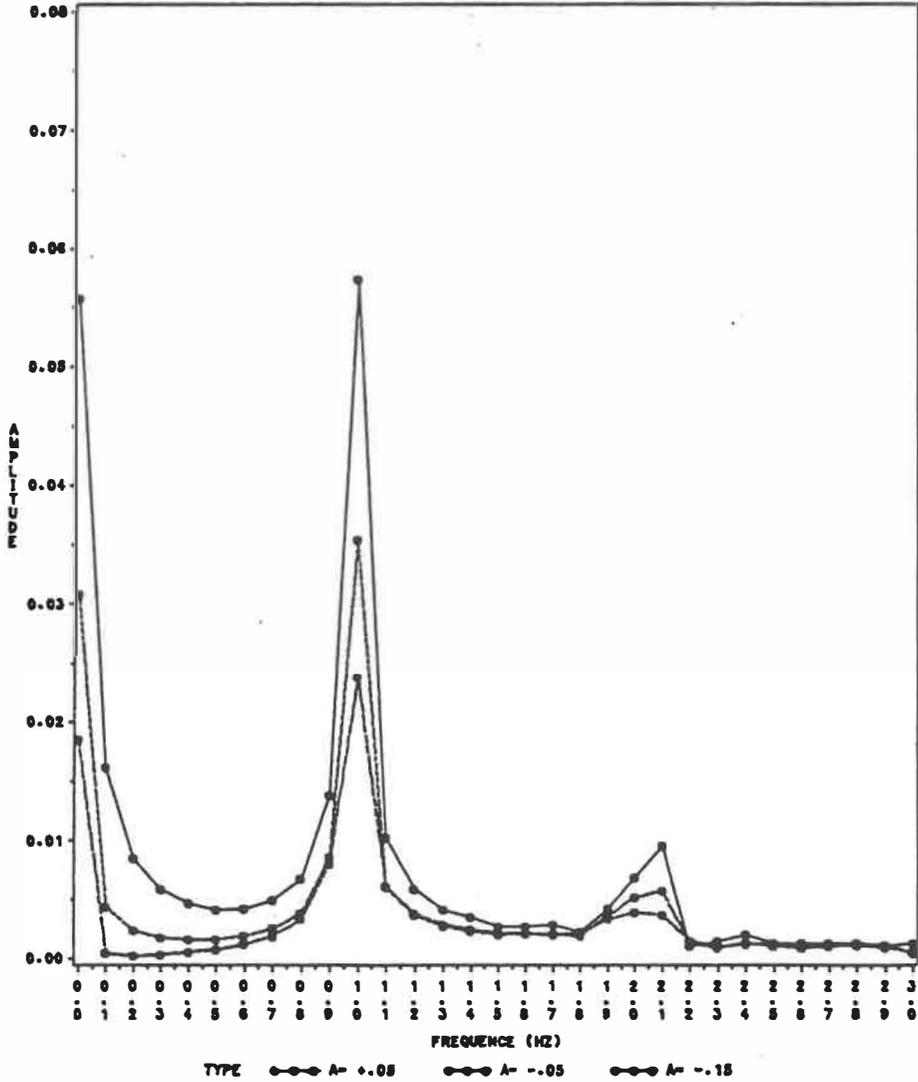


Figure 4.17 : Spectre P3 (Amplitude) pour les positions  $A = -.15$ ,  $A = -.05$  et  $A = +.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

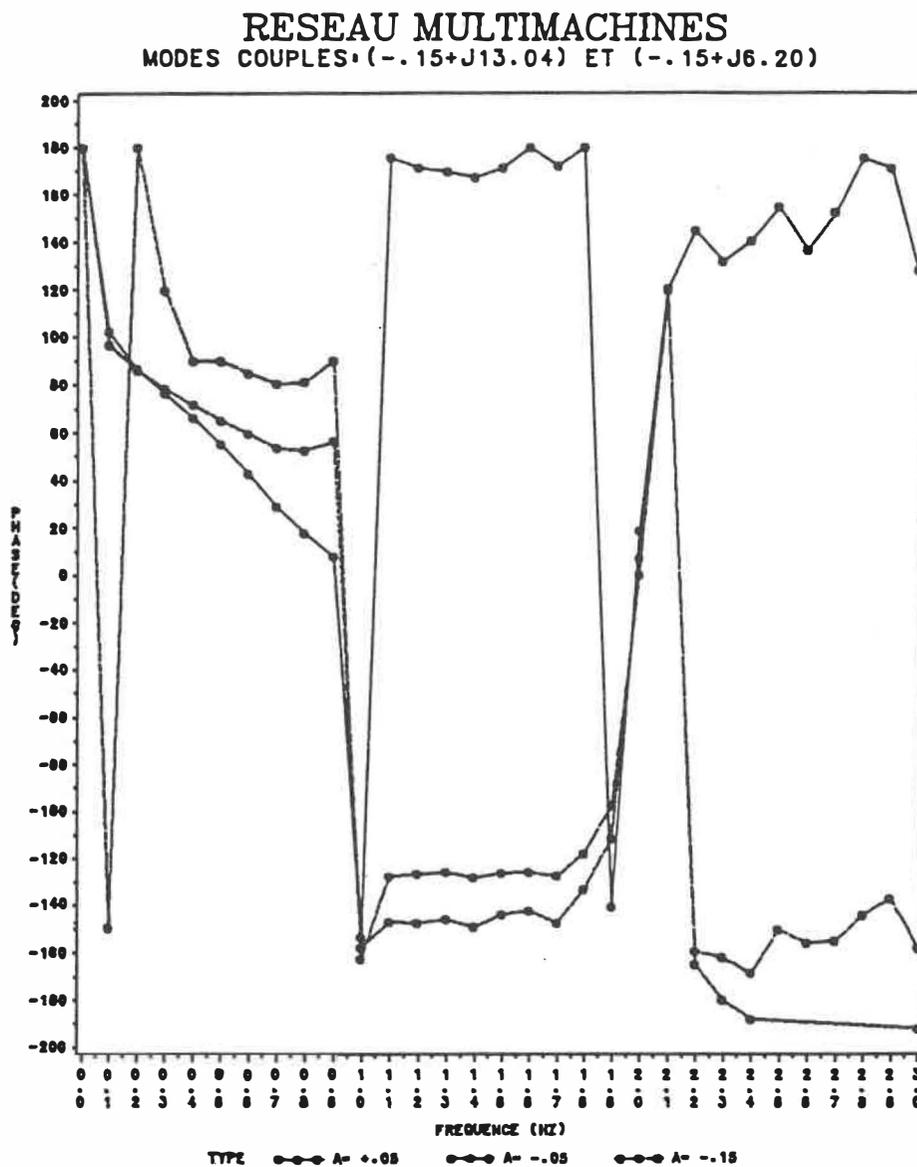


Figure 4.18 : Spectre P3 (Phase) pour les positions  $A=-.15$ ,  $A=-.05$  et  $A=+.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

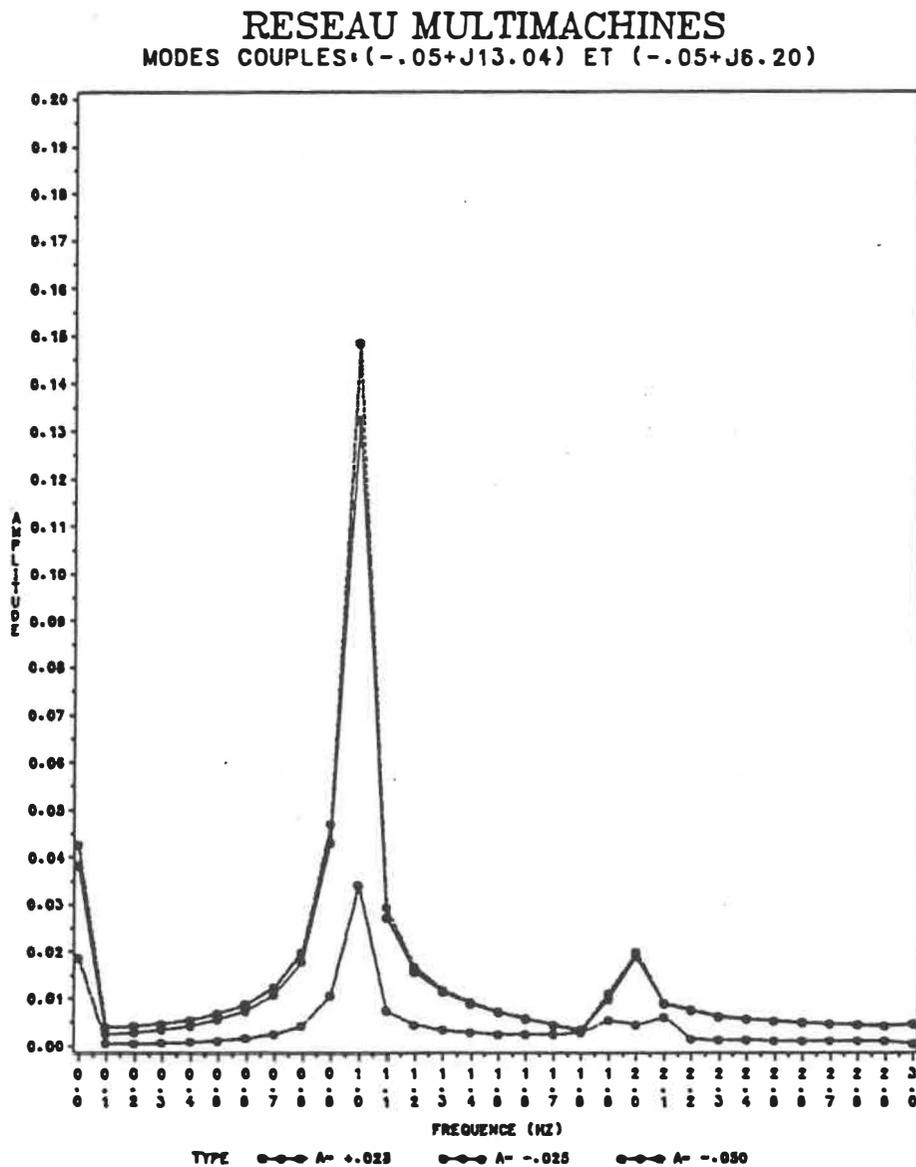


Figure 4.19 : Spectre P2 (Amplitude) pour les positions  $A = -.05$ ,  $A = -.025$  et  $A = +.025$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

## RESEAU MULTIMACHINES

MODES COUPLES  $(-.05+J13.04)$  ET  $(-.05+J6.20)$

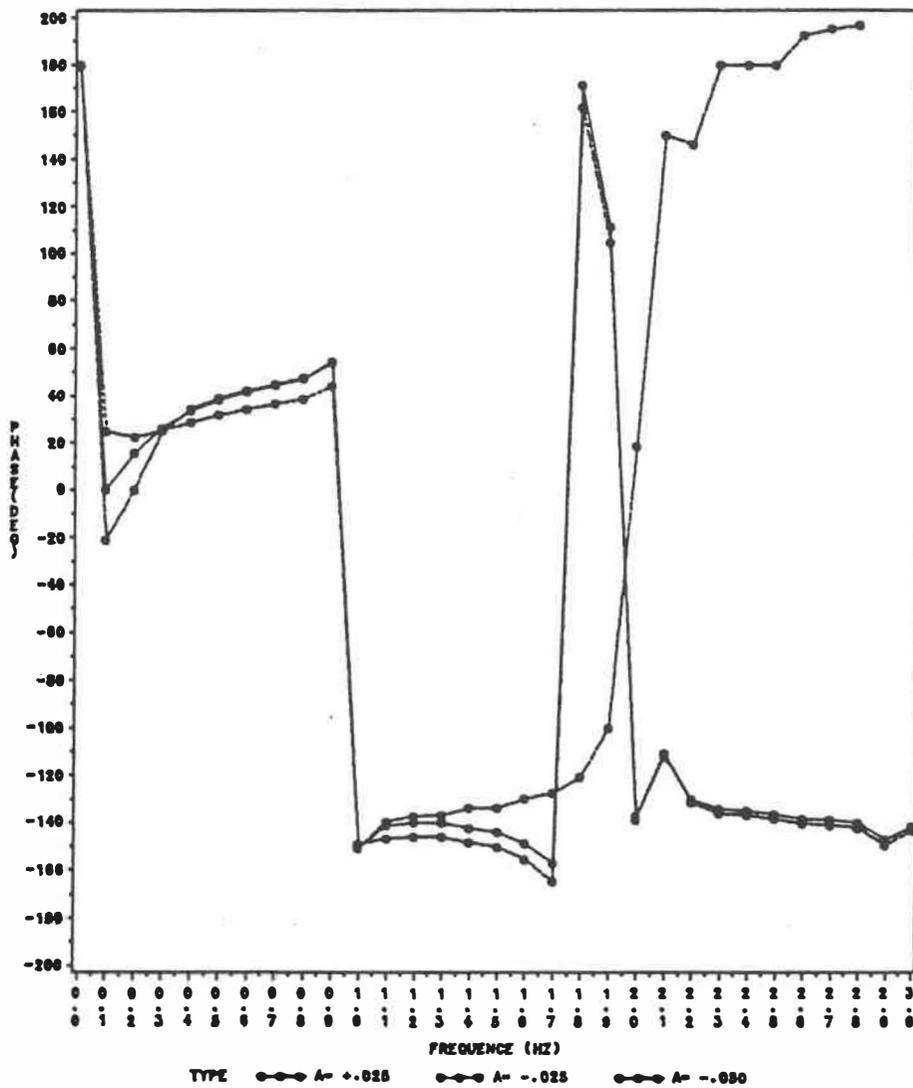


Figure 4.20 : Spectre P2 (Phase) pour les positions  $A = -.05$ ,  $A = -.025$  et  $A = +.025$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

RESEAU MULTIMACHINES  
 MODES COUPLES:  $(-.15 + j13.04)$  ET  $(-.15 + j6.20)$

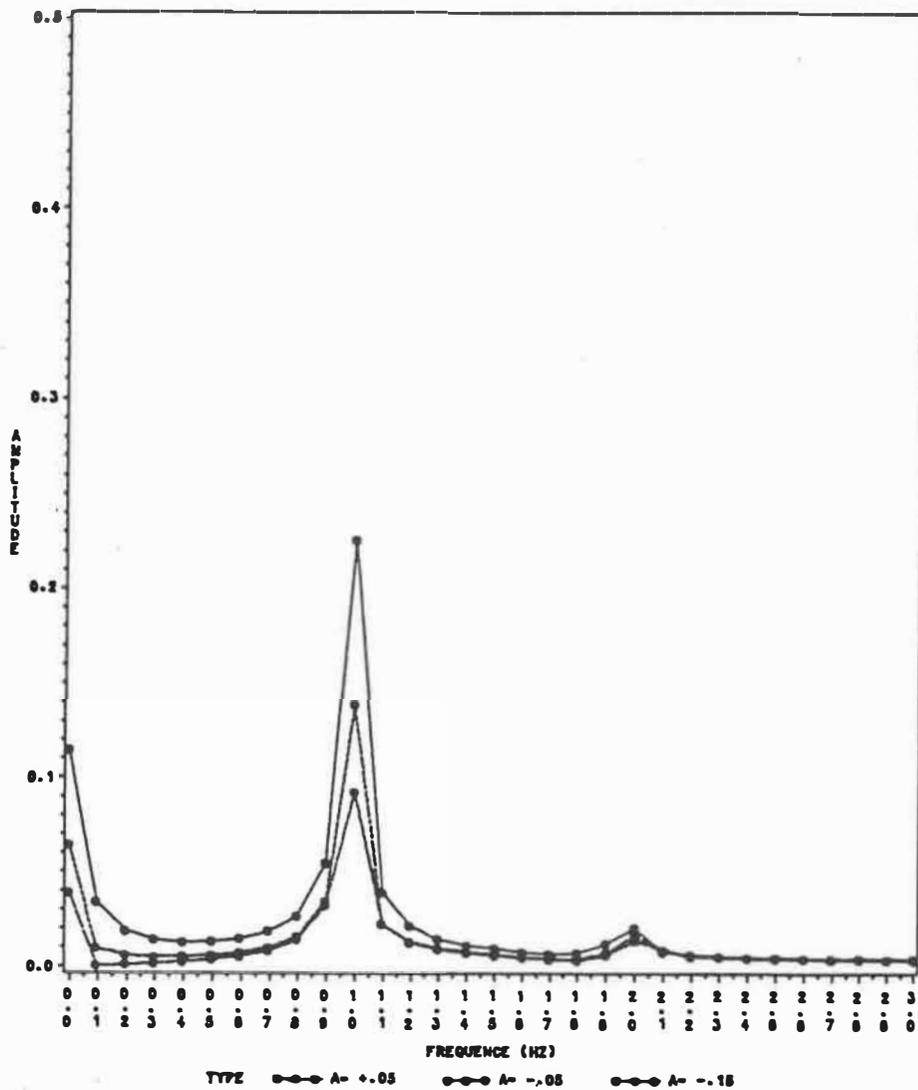


Figure 4.21 : Spectre P2 (Amplitude) pour les positions  $A = -.15$ ,  $A = -.05$  et  $A = +.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

**RESEAU MULTIMACHINES**  
**MODES COUPLES (-.15+J13.04) ET (-.15+J6.20)**

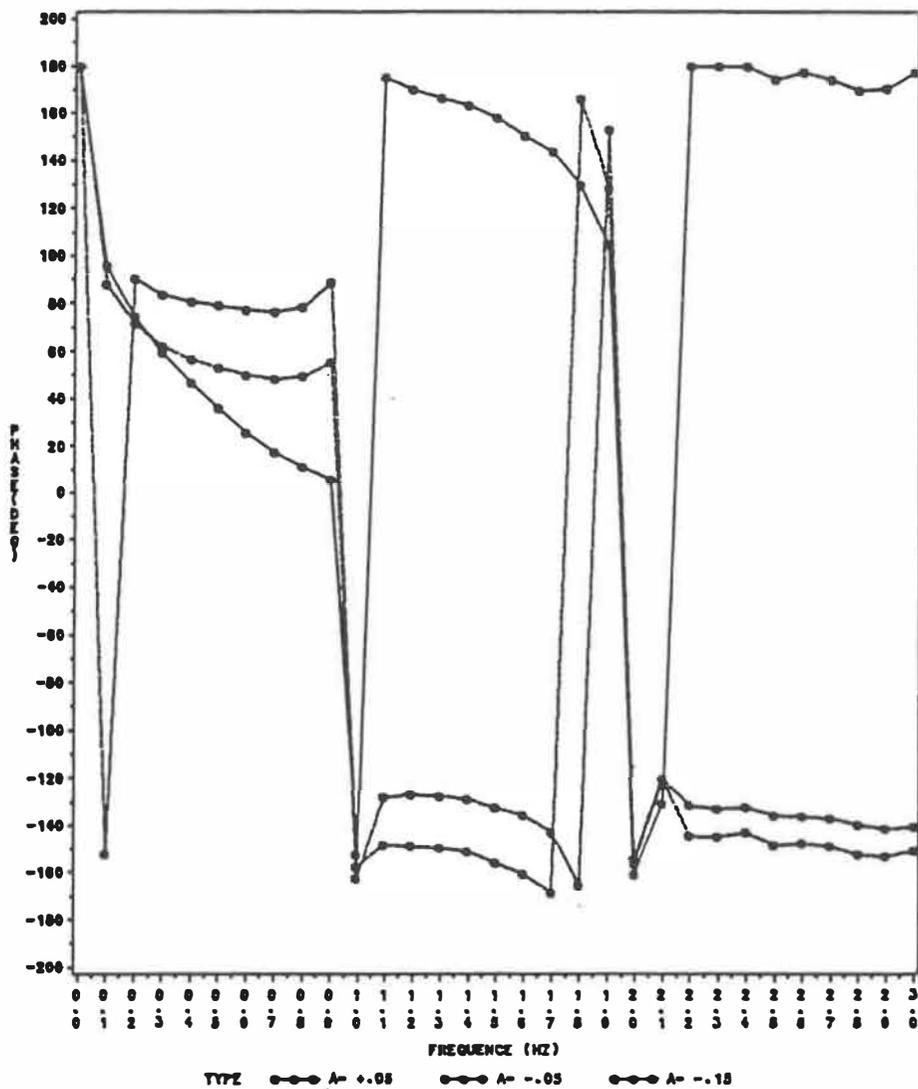


Figure 4.22 : Spectre P2 (Phase) pour les positions  $A=-.15$ ,  $A=-.05$  et  $A=+.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

## Chapitre : 5

### APPLICATIONS PRATIQUES

---

Dans ce chapitre nous déterminons les caractéristiques de stabilité à partir des enregistrements prélevés sur le réseau **HYDRO-QUEBEC** présenté en Annexe. Ces enregistrements ont été faits pour des points d'opération où le réseau est marginalement stable.

Notons que les caractéristiques de stabilité marginale présentent en pratique un grand intérêt pour la sécurité du fonctionnement du réseau.

Nous présentons dans ce qui suit les résultats de l'analyse obtenus pour les cas étudiés.

#### 5.1 APPLICATION # 1

Cette application est faite sur le réseau test **WSCC9** d'**HYDRO-QUEBEC** qui est similaire à celui de la figure 4.7 .

Un délestage de 5 MW au jeu de barre 9 provoque des oscillations de l'angle interne de la machine # 2 ( fig : 5.1) .

L'application de l'algorithme d'identification de Corinthios sur un intervalle [0-1024] cycles avec un pas d'échantillonnage de 1 cycle a permis

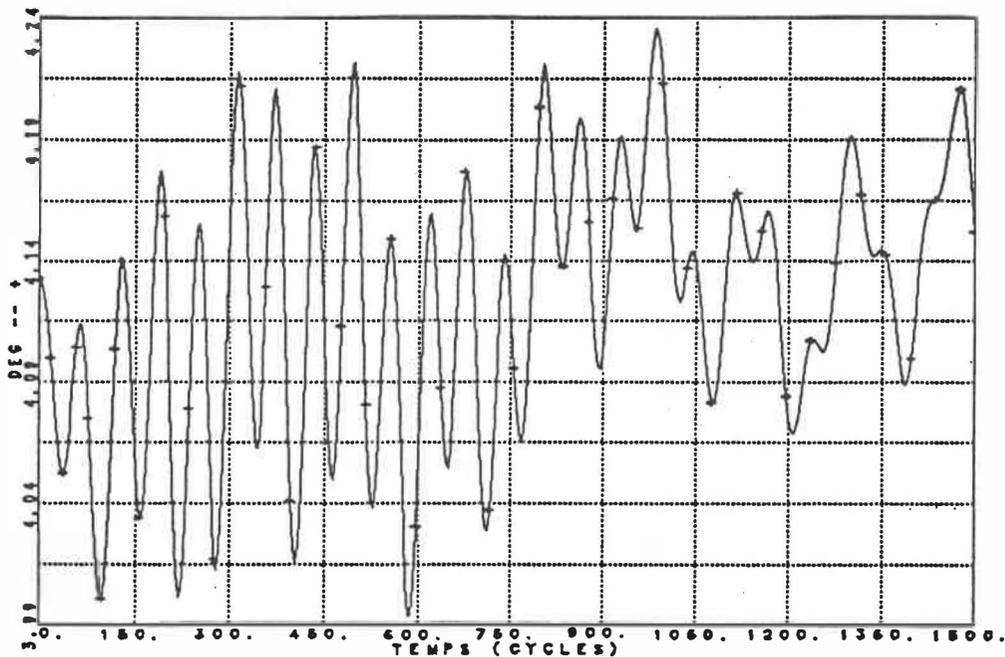
de déceler les modes dominants dans la réponse enregistrée, soit

| fréquence | amortissement |
|-----------|---------------|
| .117 Hz   | +.070         |
| .991 Hz   | -.005         |
| .351 Hz   | -.010         |

**Tableau 5.1:** Modes des oscillations de la machine#2.

Nous constatons la présence d'un mode instable à la fréquence .117 Hz et de deux modes mal amortis aux fréquences .35 et .99 Hz ce dernier dominant le spectre de la réponse du système (figures 5.2 et 5.3).

1 TEST ST000 SUR RESEAU WSCC9  
\* MACH 2 (1- GEN 2 1) ANGLE (REF MACH 3)



17-3-31  
18-10-89  
MOY 708.4

Pl. re. wsc9. bounev. qob4

Figure 5.1 : Angle interne de la machine#2

## MACHINE # 2

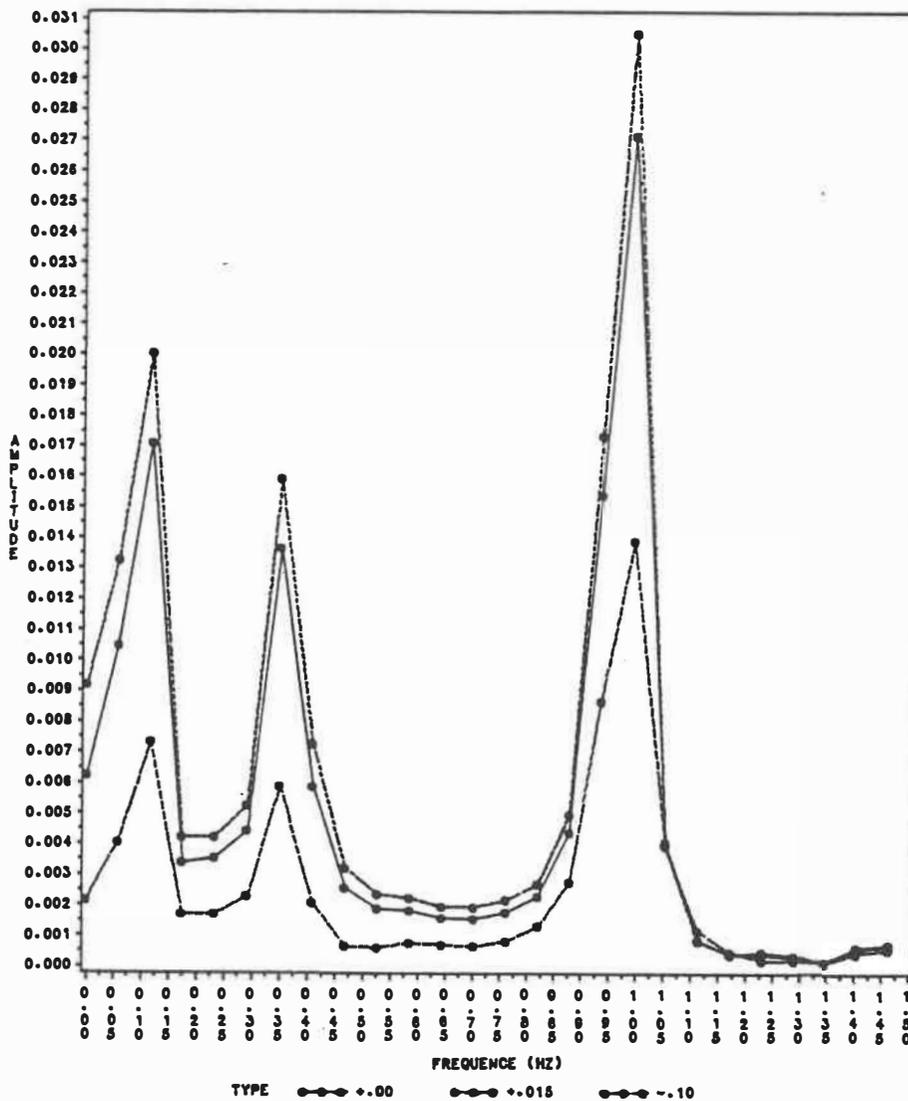


Figure 5.2 : Spectre (Amplitude) pour les déplacements  $-.10$ ,  $+.00$  et  $+.015$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

## MACHINE # 2

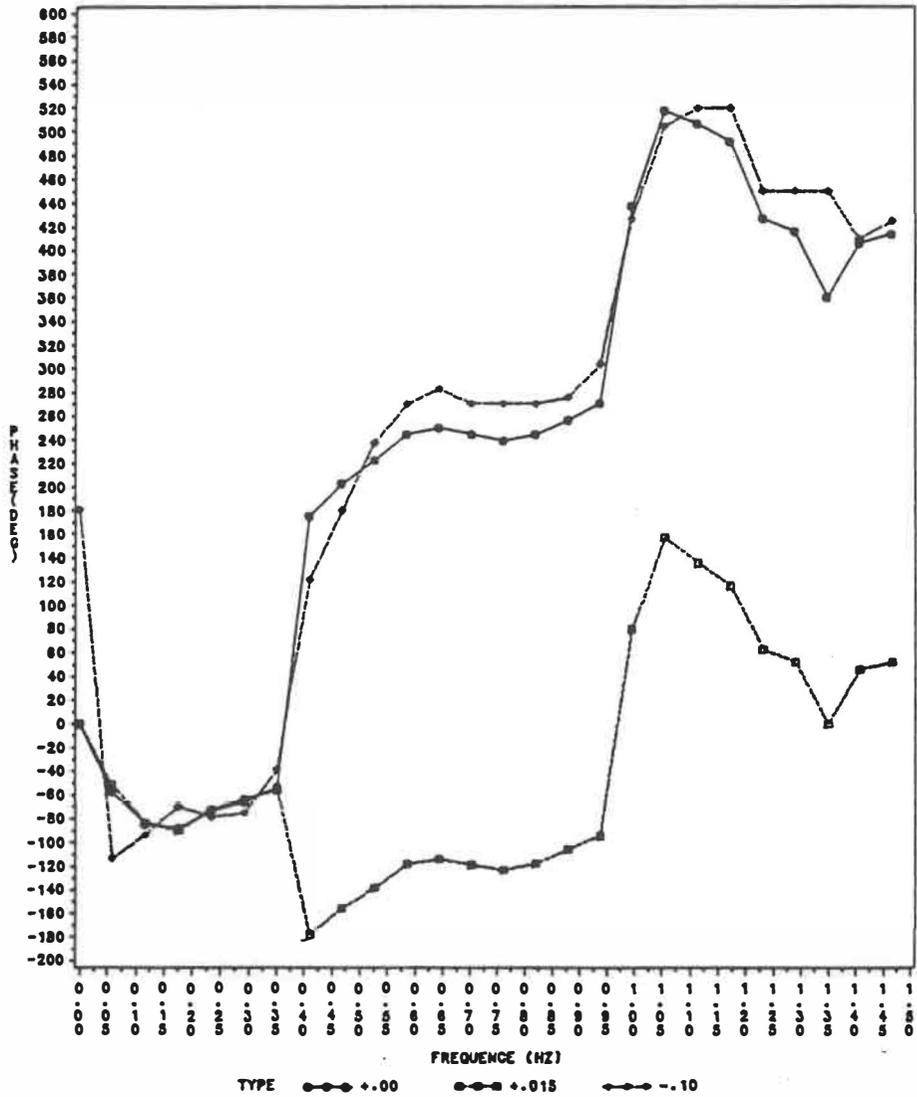


Figure 5.3 : Spectre (Phase) pour les déplacement  $-.10$ ,  $+.00$  et  $+.015$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

## 5.2 APPLICATION # 2

Cette deuxième application est faite à partir du signal stabilisateur associé à l'excitation de la machine précédente ( Machine # 2) et dont l'allure est à la figure 5.4 .

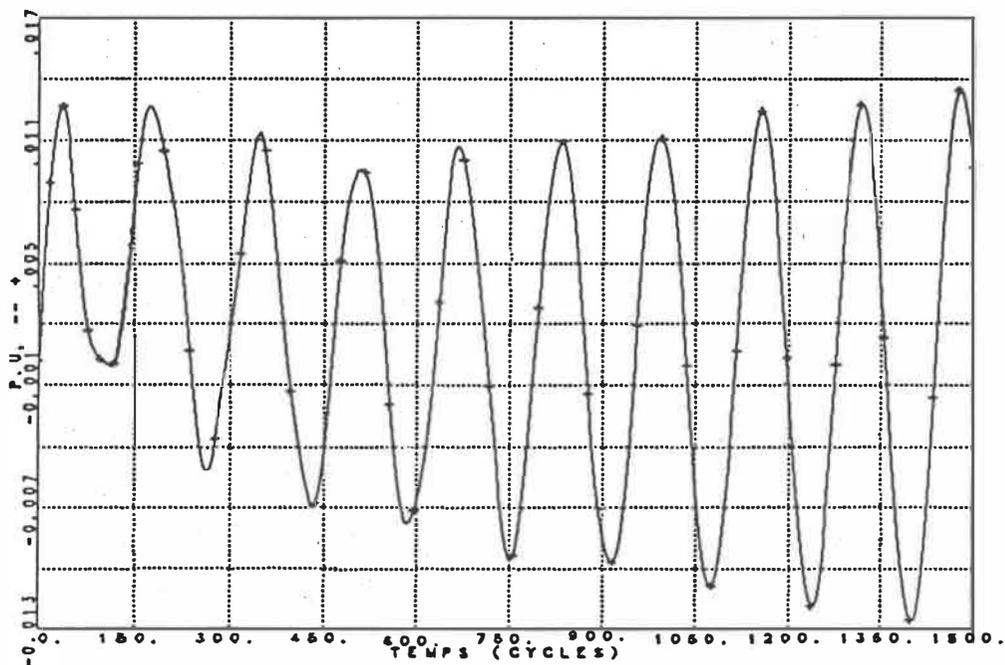
Pour ce cas nous décelons la présence de deux modes non amortis, celui à la fréquence .35 HZ étant largement dominant (voir le spectre aux figures 5.5 et 5.6).

Les amortissements trouvés sont:

| fréquence | amortissement |
|-----------|---------------|
| .940 Hz   | +.080         |
| .351 Hz   | +.035         |

**Tableau 5.2:** Modes des oscillations du stabilisateur.

1 TEST 57000 SUR RESEAU WSCC  
• MACH 2 (1 GEN 2 1) SIGNAL DE STABILISATION



17-8-78  
18-10-88  
M0708.4

f1 rs.wsccl.bounee.qebe

Figure 5.4 : Signal de stabilisation

### STABILISATEUR

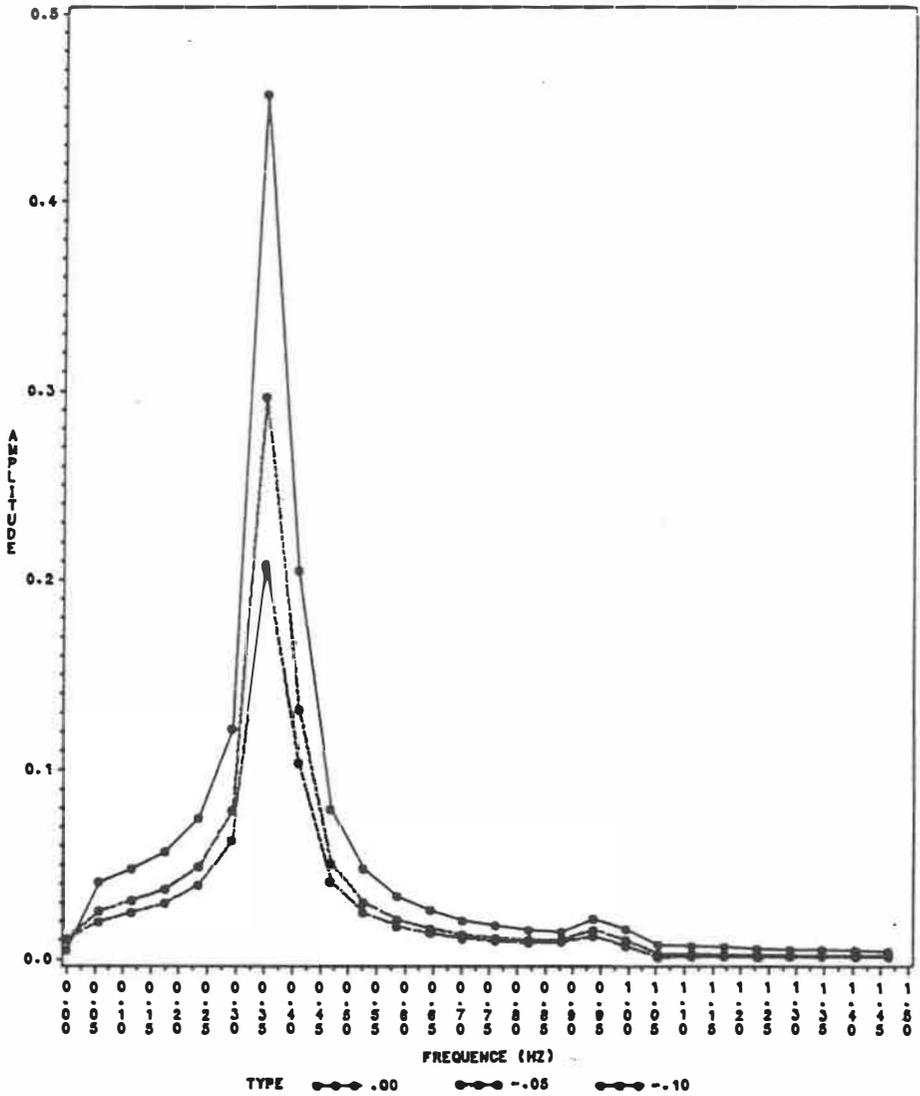


Figure 5.5 : Spectre (Amplitude) pour les déplacement -.10, -.05 et +.00 des pôles par rapport au cercle unitaire.

## STABILISATEUR

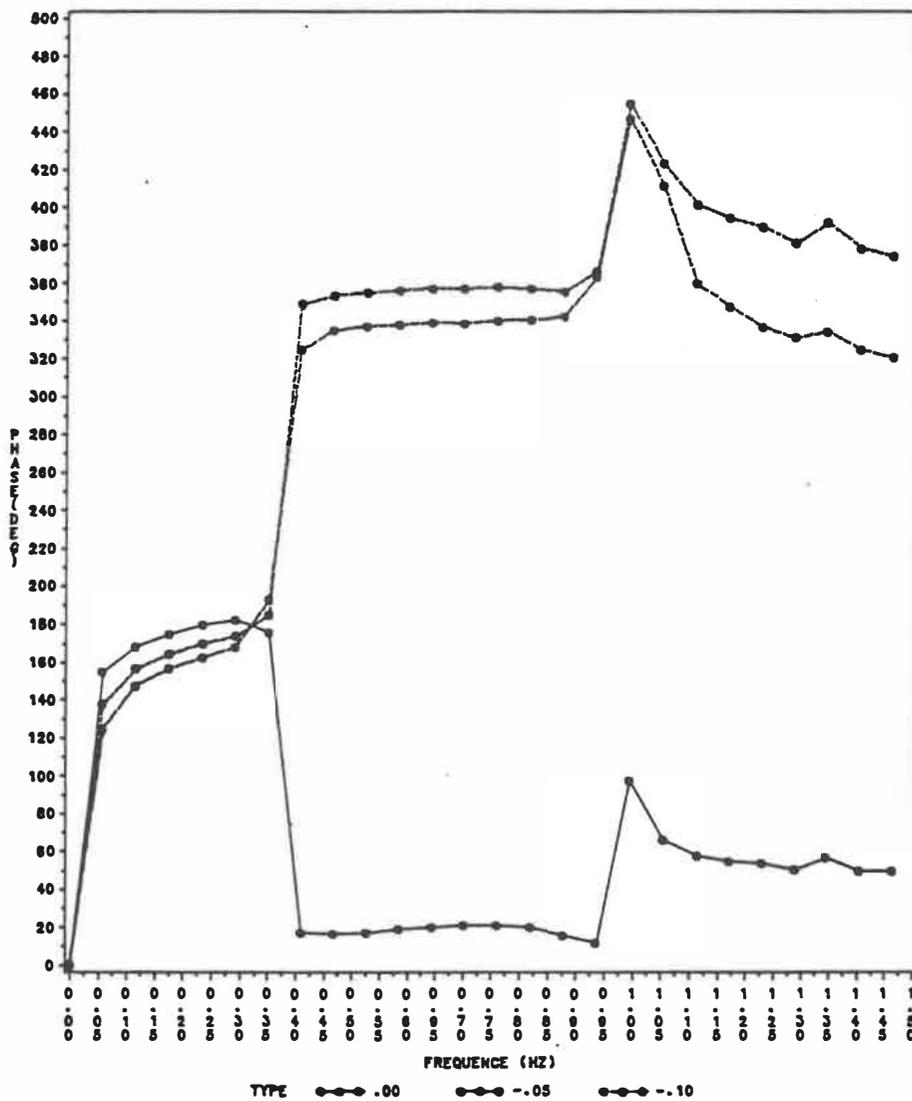


Figure 5.6 : Spectre (Phase) pour les déplacements  $-0.10$ ,  $-0.05$  et  $+0.00$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

### 5.3 APPLICATION # 3

Cette application est faite sur le réseau réel HYDRO-QUEBEC de l'Annexe.

Lors d'un délestage de 500 MW au poste de Duvernay (Montréal), on observe des oscillations des angles internes des machines de la Grande, Manic et Montréal.

Ces machines sont respectivement référenciées par les numéros 49, 295 et 39 (fig : 5.7).

Pour l'intervalle [300 - 5000] cycles, avec une période d'échantillonnage de 5 cycles, nous décelons la présence d'un mode dominant à très basse fréquence (.046 Hz) pour les trois machines avec les amortissements suivants:

| Machine | Fréquence | Amortissement |
|---------|-----------|---------------|
| # 49    | .046 Hz   | -.035         |
| # 295   | .046 Hz   | -.040         |
| # 39    | .046 Hz   | -.020         |

**Tableau 5.3:** Modes des oscillations du réseau HYDRO-QUEBEC.

Les spectres correspondants à ce cas sont présentés aux figures 5.9 , 5.10 , 5.11 et 5.12 .

#### REMARQUES

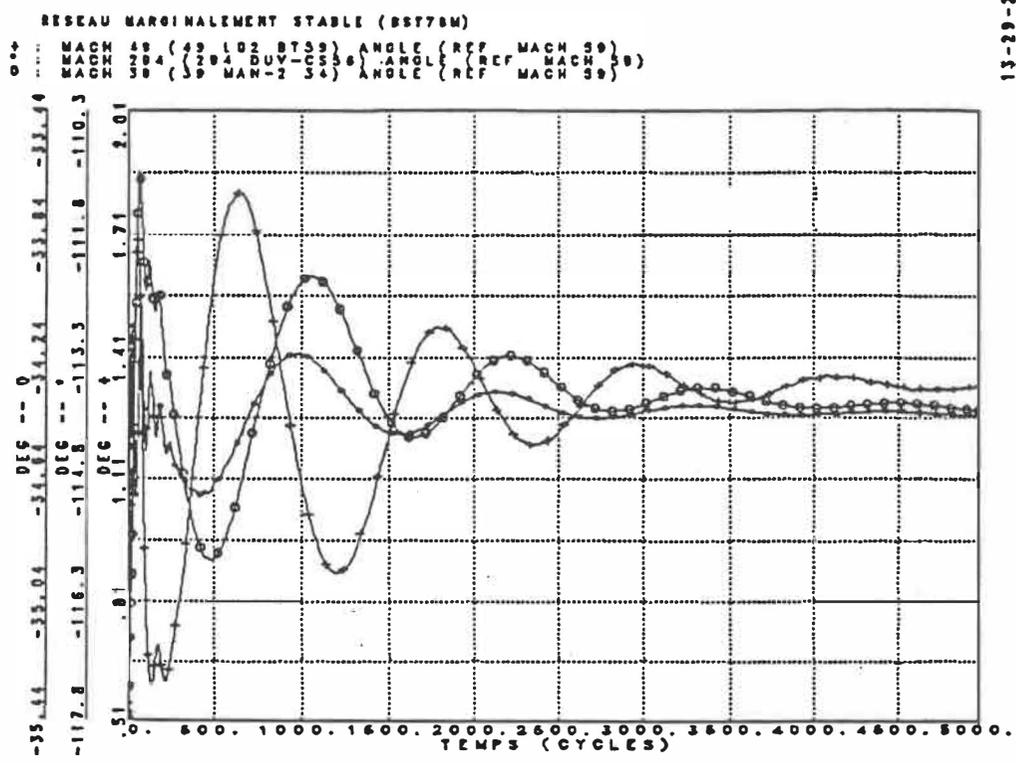
a) En choisissant un intervalle de 1024 cycles avec un pas d'échantillonnage de 1 cycle, la détection du mode précédent (.046 hz) n'était pas possible et ce à cause de la fréquence d'échantillonnage qui est de l'ordre du grandeur de la fréquence recherchée.

b) Une autre difficulté dans la recherche du mode indiqué se présente lorsque nous prenons un intervalle qui débute au cycle initial et qui contient les signaux transitoires des machines (fig : 5.8).

Ces constatations nous permettent de préciser les conditions d'applications de l'algorithme pour une meilleure efficacité . A savoir :

- L'intervalle d'enregistrement doit être suffisamment grand devant la période du mode recherché.

- L'intervalle doit être dans la zone dynamique ou l'hypothèse de linéarité est admise.



13-29-89  
18-10-89  
HQV788.4

FI RE. 80UNOU. DELESTI

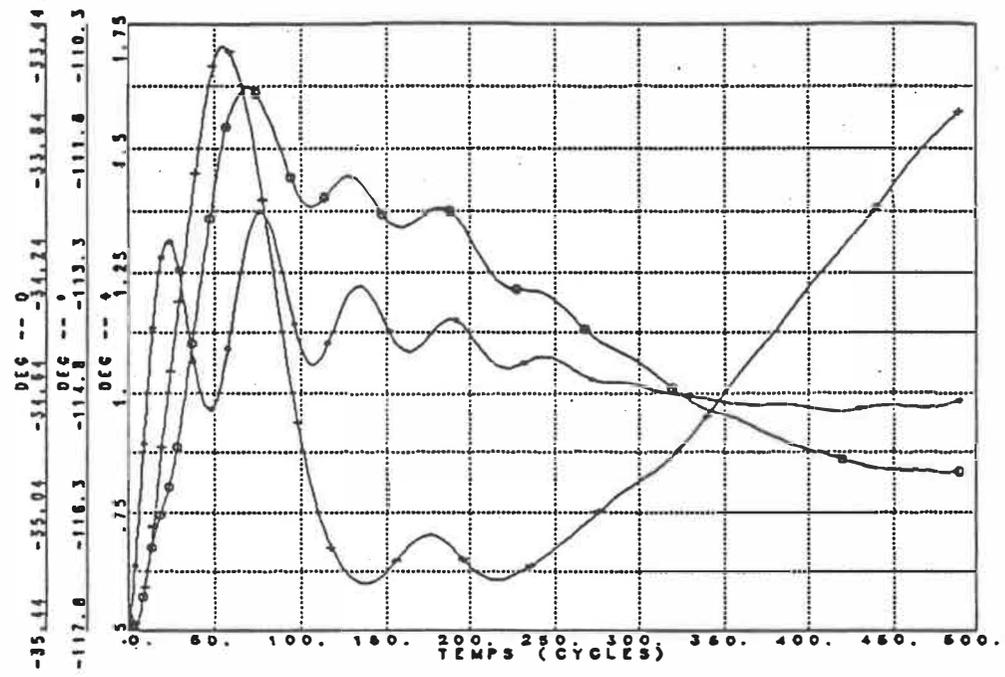
Figure 5.7 : Angles internes des machines 49 (La Grande), 295 (Manic) et 39 (Montréal) après délestage de 500 MW à Duvernay.

RESEAU MARGINALEMENT STABLE (B5770M)

```

0.00
--- MACH 48 ( 98 LB2 BT39 ) ANGLE ( RCF MACH 59 )
--- MACH 284 ( 284 DUY-556 ) ANGLE ( RCF MACH 59 )
--- MACH 58 ( 58 MAN-2 54 ) ANGLE ( RCF MACH 59 )

```



15-42-54  
18-10-89  
HQV708.4

F1 RE. BOUNOU, CELESTI

Figure 5.7 : Angles internes des machines pendant le régime transitoire.

## MACHINE # 49

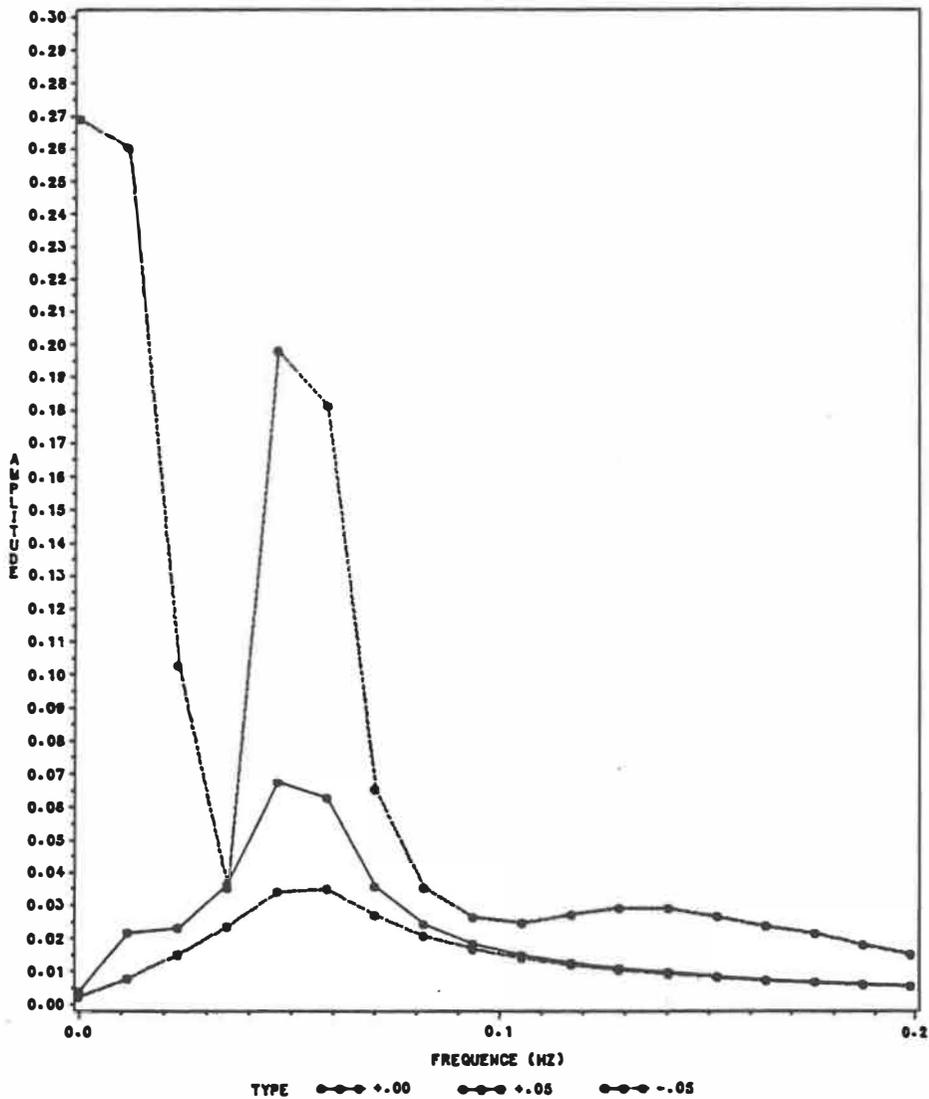


Figure 5.8 : Spectre (Amplitude) pour les déplacements  $-.05$ ,  $+.00$  et  $+.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

MACHINE # 49

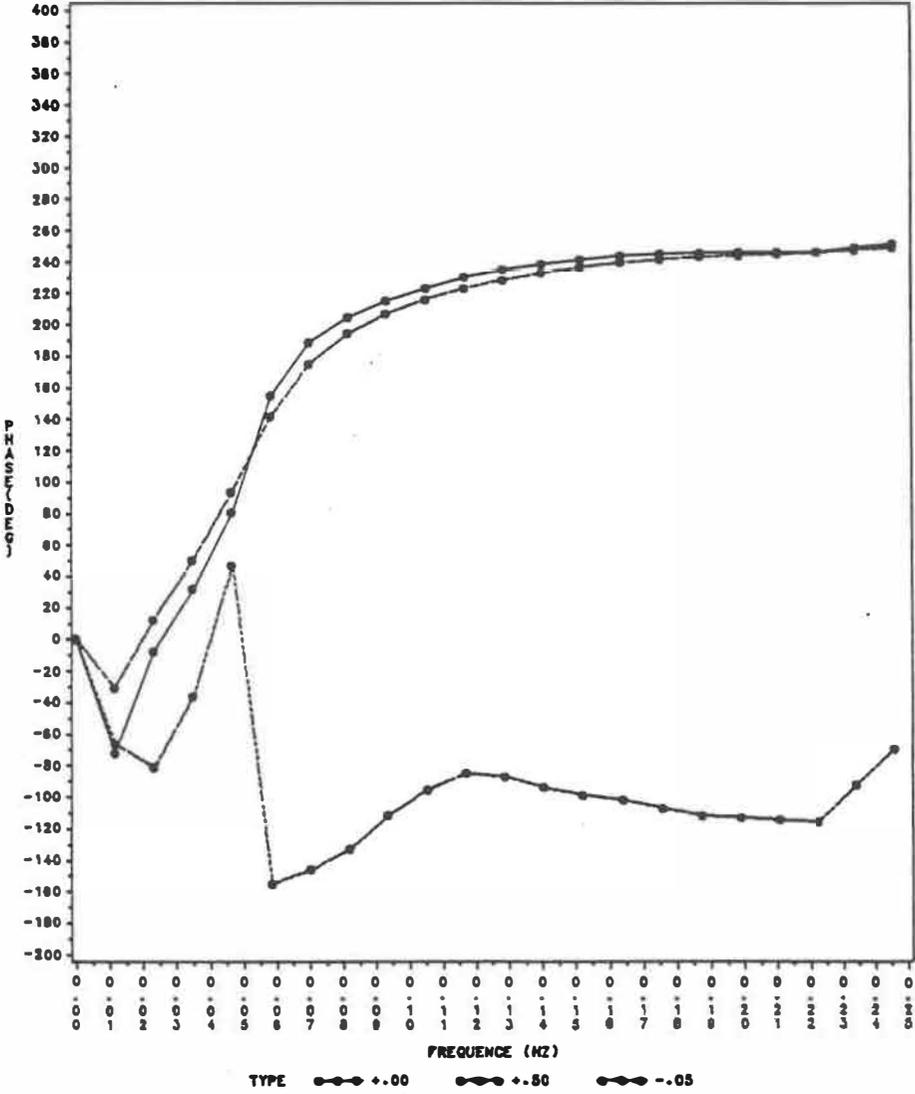


Figure 5.9 : Spectre (Phase) pour les déplacement -.05, +.00 et +.05 des pôles par rapport au cercle unitaire.

## MACHINE # 295

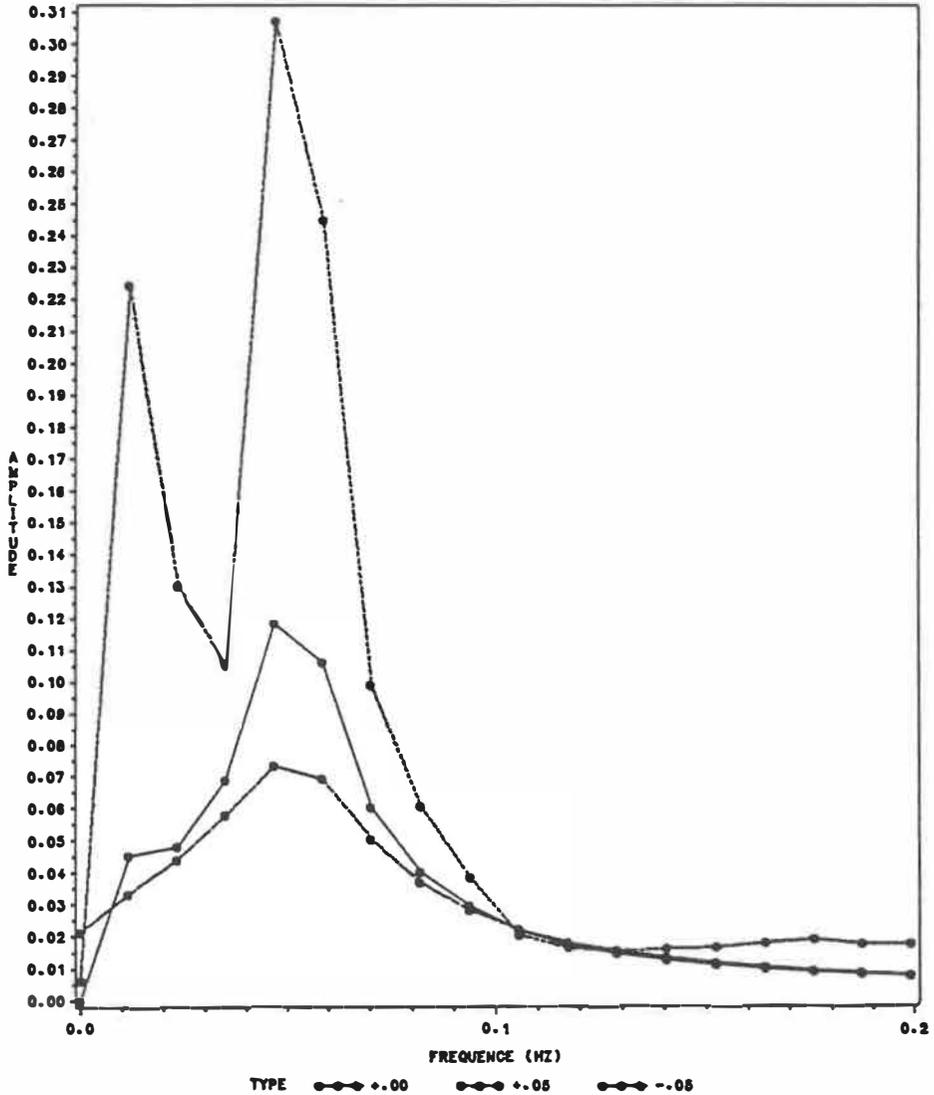


Figure 5.10 : Spectre (Amplitude) pour les déplacements  $-.05$ ,  $+.00$  et  $+.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

### MACHINE # 295

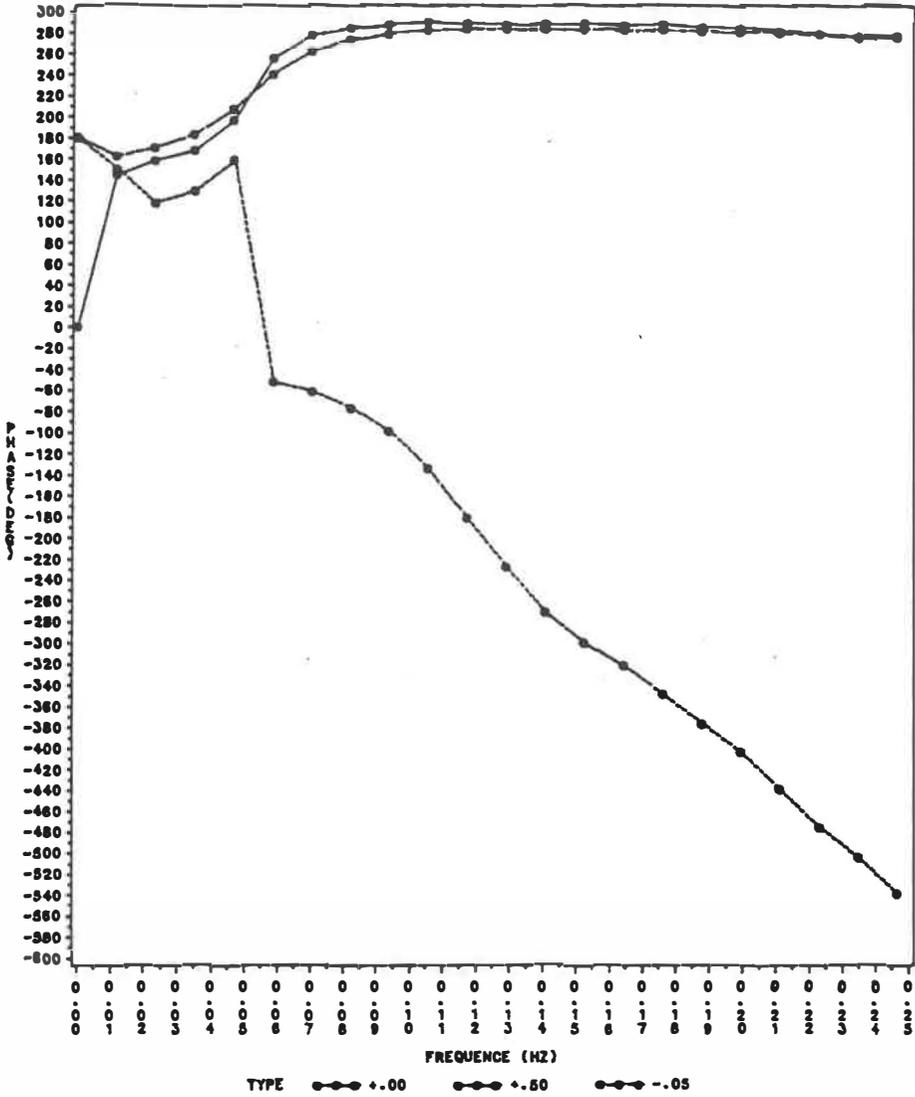


Figure 5.11: Spectre (Phase) pour les déplacements  $-.05$ ,  $+.00$  et  $+.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

## MACHINE # 39

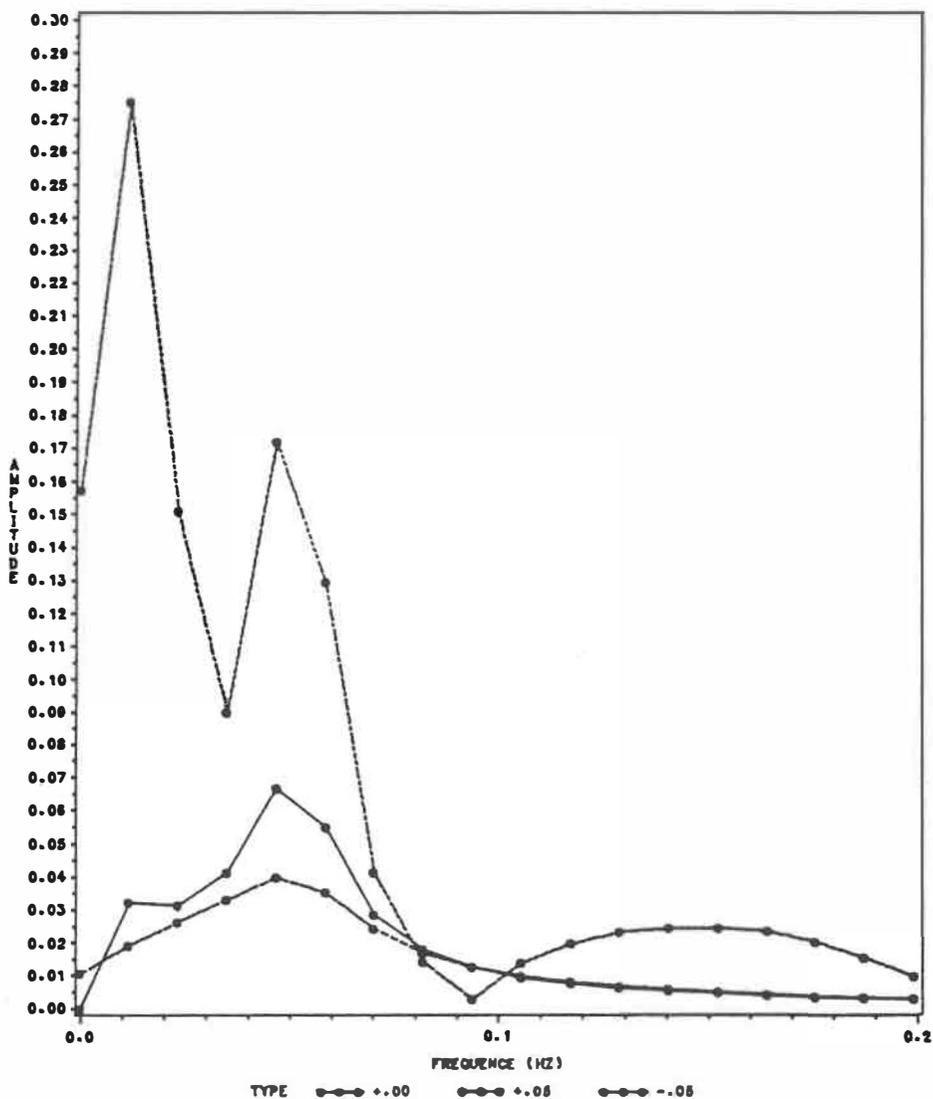


Figure 5.12 : Spectre (Amplitude) pour les déplacements  $-.05$ ,  $+.00$  et  $+.05$  des pôles par rapport au cercle unitaire.

### MACHINE # 39

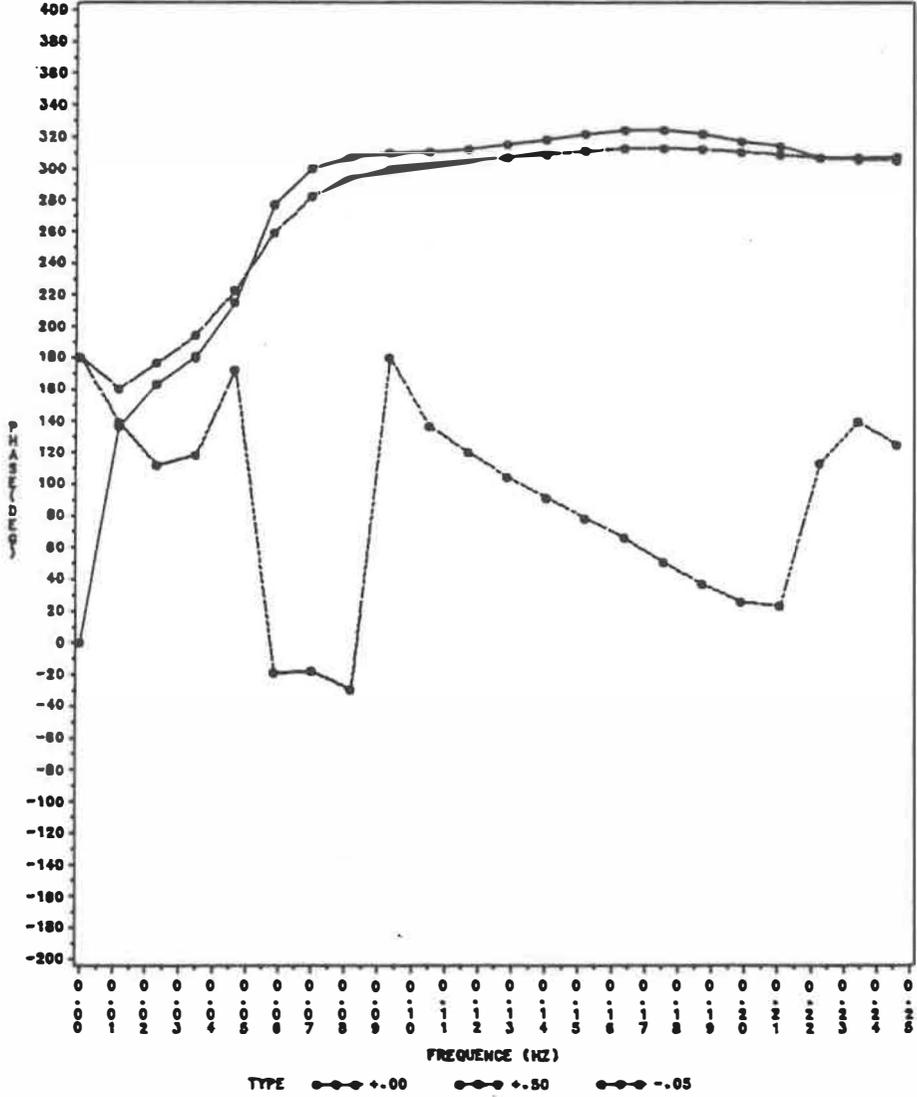


Figure 5.13 : Spectre (Phase) pour les déplacement -.05, +.00 et +.05 des pôles par rapport au cercle unitaire.

#### 5.4 TEMPS DE CALCUL

Le temps de calcul de l'algorithme de **Corinthios** dépend essentiellement du nombre de F.F.T nécessaire à la recherche du mode considéré.

La localisation d'un mode situé à la distance  $\sigma$  du cercle unitaire avec un pas  $\Delta\sigma$  nécessite  $n=\sigma/\Delta\sigma$  F.F.T .

Si  $t_{FFT}$  est le temps requis pour l'exécution d'une F.F.T, le temps correspondant à  $n$  F.F.T est  $n * t_{FFT}$

En admettant un temps de compilation double, le temps de calcul requis pour la localisation du mode considéré[3] est :

$$t_c = 2 n t_{FFT}$$

$t_{FFT}$  est fonction du processeur utilisé, du radix de la F.F.T et de la longueur de la séquence.  $t_{FFT}$  est généralement inférieure à la milliseconde. Le temps  $t_c$  est donc moins d'une seconde et ce pour un  $n$  relativement grand.

A titre indicatif, le temps global de simulation et de localisation des six pôles de l'exemple 2 (page : 49) a été de 3.2 secondes sur IBM 3090 modèle 180E de l'Ecole Polytechnique.

On constate donc que l'algorithme de **Corinthios** est très rapide (d'ailleurs il est conçu pour l'identification des processus **rapide** en temps réel) , mais comme nous

l'appliquons au réseau électrique qui a une dynamique lente, le temps d'acquisition (ou d'enregistrement) est relativement important.

Ainsi pour observer les modes à .1 hz, le temps d'enregistrement d'un cycle est de 10 secondes, la précision des résultats exige quelques cycles, ce qui fait augmenter le temps d'acquisition à quelques dizaines de secondes.

Ainsi, comme mentionné, l'application de l'algorithme de Corinthios devient avantageuse pour un réseau de grande dimension où le temps de recherche des valeurs et des vecteurs propres est très long. Car, il est proportionnel à  $n^3$ , avec  $n$  le nombre de valeurs propres.  $n$  est fonction du nombre de machines dans le réseau. Une machine synchrone et son circuit de commande présentent une quinzaine de valeurs propres. Pour un réseau d'une dizaine de machines le nombre  $n$  dépasse la centaine et la détermination de toutes les valeurs propres exige beaucoup de temps.

A titre indicatif, la détermination des 186 valeurs propres du réseaux **HYDRO-QUEBEC** prend une quinzaine de minutes et la recherche des vecteurs propres pour déterminer les modes dominants prend quelques heures.

Dans ce cas l'avantage des techniques spectrales est indiscutable.

## CONCLUSION

---

Les techniques spectrales et les algorithmes correspondants présentés dans ce mémoire permettent de déterminer les caractéristiques de stabilité dynamique des réseaux électriques avec deux avantages essentiels par rapport à la méthode des valeurs propres, à savoir:

- Temps de calcul.
- Détection des modes localement dominants.

Le premier algorithme, à base de l'intégrale de Fourier, est simple, mais il est limité à un seul mode. Sa précision et sa vitesse d'exécution dépendent du pas d'intégration et de la méthode d'interpolation pour évaluer l'intégrale de Fourier.

Le deuxième algorithme, utilisant l'algorithme d'identification par la transformée en  $z$  de Corinthios, est général. Il permet une détection et un isolement des modes couplés avec la précision requise (égale au pas d'échantillonnage). De plus son utilisation de la F.F.T., pour évaluer les spectres le rend souple et très rapide.

En général, dans les grands réseaux interconnectés, la perturbation excite plusieurs modes, et l'algorithme de

Corinthios constitue à notre connaissance le seul outil spectral puissant et efficace pour détecter et isoler les modes couplés.

Les résultats obtenus pour les réseaux simulés et dans le cas du réseau **HYDRO-QUEBEC** sont satisfaisants. Nous pensons que ce mémoire pourrait constituer un catalyseur pour les travaux futurs dans le domaine, qui traiteraient du cas de modes multiples, après filtrage et traitement préalable du signal d'enregistrement (suppression de la composante continue qui est difficile à distinguer d'une basse fréquence et des signaux parasites) et aussi l'optimisation de l'algorithme.

Toutefois, l'utilisation des méthodes spectrales pour détecter les basses fréquences (.01 hz) exigent un enregistrement d'au moins 100 secondes, et que la précision des résultats augmente avec le nombre de cycles enregistrés.

Pour terminer, notons que cette approche d'analyse de stabilité dynamique des grands réseaux par la transformée en Z est la première du genre et nous espérons avoir contribué de manière originale à résoudre le problème posé.

## BIBLIOGRAPHIE

---

[1] - K.P.Poon , K.C.Lee, "Analysis of Transient Stability Swings in Large, Interconnected Power Systems by Fourier Transformation, IEEE/PES Winter Meeting, New York 1988.

[2] - A.V.Oppenheim , R.W.Schafer, "Discrete-time Signal Processing," Prentice Hall 1989.

[3] - M.J.Corinthios, "A Fast Z Transformation Algorithm for System Identification," IEEE Trans. on Computers Vol. C26 No:1 Jan.1977.

[4] - Y.N.Yu, "Electric Power System Dynamics," Academic Press 1983.

[5] - R.T Byerly , Al, "Eigenvalue Analysis of Synchronizing Power Flow Oscillation in Large Electric Power Systems," IEEE PAS Jan 1982.

[6] - W.D.Stanley, "Digital Signal Processing," Reston Publishing Company 1975.

[7] - M.J. Corinthios, "A Fast Fourier Transform for High Speed Signal Processing," IEEE Trans. on Computers Vol. C20 No:8 Aug.1971.

[8] - P.M Anderson , A.A Fouad, "Power System Control and Stability," The Iowa State University Press 1977.

[9]- E.W.Kimbark, "Power Systems Stability," vol.I, Vol.III, John Wiley & Sons.

[10]-O.I.Elgerd, "Electric Energy Systems Theory," McGraw-Hill 1971.

[11]-G.T.Heydt, "Computer Analysis Methods for System," Macmillian Publishing 1986.

[12]-K.C.Lee , K.P.Poon, "Analysis of Power System Dynamic Oscillations With Beat Phenomenon by Fourier Transformation," IEEE/PES Summer Meeting, California 1989.

[13]-M.J.Crinthios, "3D Cellular Arrays for Signal/Image Parallel/Cascade Signal/Image Processing," in "Spectral Techniques and Fault Detection," Editor M.Karpovsky, Academic Press, 1985.

## **ANNEXE**

---

Dans cette annexe nous présentons le réseau de transport et de production d'HYDRO-QUEBEC.

La première page de l'annexe contient les différentes centrales de production d'énergie électrique et la puissance disponible en Kilowatts.

La position géographique des principaux centres de production et la la topologie du réseau de transport 735 kV sont présentées à la deuxième page de l'annexe.

## LES CENTRALES D'HYDRO-QUÉBEC

| Centrales en service    | Puissance (Kilowatts) | Centrales en construction | Mise en service | Puissance (Kilowatts)               |
|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------|-------------------------------------|
| <b>Hydroélectriques</b> |                       | <b>Thermiques</b>         |                 | <b>Puissance installée totale**</b> |
| La Grande 2             | 5 328 000             | Nucléaire                 |                 | Centrales hydro-électriques (52)    |
| La Grande 3             | 2 304 000             | Geniilly 2                | 685 000         | 21 731 236                          |
| La Grande 4*            | 1 767 000             | Classique                 |                 | Centrales thermiques (28)           |
| Beauharnois             | 1 613 410             | Tracy                     | 600 000         | 1 748 479                           |
| Manic 5                 | 1 292 000             | Turbines à gaz            |                 | Total des 80 centrales en service   |
| Manic 3                 | 1 183 200             | La Citlère                | 200 880         | au 31 décembre 1984                 |
| Manic 2                 | 1 015 200             | Cadillac                  | 162 000         | 23 479 715                          |
| Bersimis 1              | 912 000               | Groupes diesels           |                 |                                     |
| Ouïardes 3              | 756 200               | Îles de la Madeleine      | 59 339          |                                     |
| Bersimis 2              | 655 000               | Blanc-Sablon              | 6 400           |                                     |
| Carillon                | 654 500               | La Tabatière              | 4 700           |                                     |
| Ouïardes 4              | 632 000               | Saint-Augustin            | 3 000           |                                     |
| Ouïardes 2              | 453 900               | Kuujuuaq                  | 2 400           |                                     |
| Trenche                 | 293 100               | Poste-de-la-Baleine       | 2 400           |                                     |
| Beaumont                | 243 000               | La Romagne                | 2 400           |                                     |
| La Tuque                | 216 000               | Parent                    | 2 400           |                                     |
| Paugan                  | 215 725               | Natashquan                | 2 100           |                                     |
| Manic 1                 | 184 410               | Port-Menier               | 2 100           |                                     |
| Rapide Blanc            | 183 600               | Île aux Grues             | 2 100           |                                     |
| Shawinigan 3            | 171 900               | Île d'Entrée              | 1 740           |                                     |
| Shawinigan 2            | 163 000               | Inukjuak                  | 1 600           |                                     |
| Les Cèdres              | 162 000               | Povungnituk               | 1 300           |                                     |
| Grand-Mère              | 149 575               | Salluit                   | 1 200           |                                     |
| Rapides des Îles        | 146 520               | Kanqisujuaq               | 820             |                                     |
| Chelsea                 | 144 000               | Kanqirsuk                 | 750             |                                     |
| La Gabelle              | 136 580               | Quaqtaq                   | 665             |                                     |
| Première Chute          | 124 200               | Kanqisualujuaq            | 630             |                                     |
| Rapides Farmers         | 98 250                | Johan-Beetz               | 605             |                                     |
| Rapides des Quinze      | 89 800                | Akuliivik                 | 600             |                                     |
| Chute des Chats         | 89 300                | Aupaluk                   | 550             |                                     |
| Bryson                  | 61 000                | Taslujaq                  | 440             |                                     |
| Rapide 7                | 57 000                | Ivujivik                  | 360             |                                     |
| Rapide 2                | 48 000                |                           |                 |                                     |
| Rivière des Prairies    | 45 000                |                           |                 |                                     |
| Chute Hemmings          | 28 800                |                           |                 |                                     |
| Hull 2                  | 27 280                |                           |                 |                                     |
| Sept Chutes             | 18 720                |                           |                 |                                     |
| Saint-Narcisse          | 15 000                |                           |                 |                                     |
| Drummondville           | 14 600                |                           |                 |                                     |
| Mitis 1                 | 6 400                 |                           |                 |                                     |
| Pont-Arnaud             | 5 450                 |                           |                 |                                     |
| Chute Bell              | 4 800                 |                           |                 |                                     |
| Mitis 2                 | 4 250                 |                           |                 |                                     |
| Saint-Alban             | 3 000                 |                           |                 |                                     |
| Saint-Raphaël           | 2 550                 |                           |                 |                                     |
| Sherbrooke              | 2 256                 |                           |                 |                                     |
| Chute Gameau            | 2 240                 |                           |                 |                                     |
| Corbeau                 | 2 000                 |                           |                 |                                     |
| Magpie                  | 1 800                 |                           |                 |                                     |
| Rawdon                  | 1 720                 |                           |                 |                                     |
| Chute Burroughs         | 1 600                 |                           |                 |                                     |
| Anse Saint-Jean         | 400                   |                           |                 |                                     |

\*Au 31 décembre 1984, six groupes de La Grande 4 étaient en service. Cette centrale de neuf groupes, dont la construction se terminera en 1985, aura une puissance totale de 2 650 mégawatts.

\*\*Hydro-Québec dispose également de la majeure partie de la production de la centrale de Churchill Falls, d'une puissance nominale de 5 225 mégawatts.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00290835 6

BO

19

C  
U  
1  
P