REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

Aplicaciones del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados.

Applications of the Taylor polynomial in solving indeterminate limits.

Para citar este trabajo:
Luna-Fox, S., Caiza Falconí, J., Castelo Naveda, M y Uvidia Armijo, L Aplicaciones del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados. *Reincisol*, 3(5), pp. 469-481. https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(5)469-481

Autores:

Sting Brayan Luna-Fox
Universidad Estatal Amazónica
Puyo-Ecuador
Correo Institucional: sb.lunaf@uea.edu.ec
Orcid https://orcid.org/ 0000-0001-6058-7024

Javier Alfonso Caiza Falconí
Universidad Estatal Amazónica
Puyo-Ecuador
Correo Institucional: javitron123@gmail.com
Orcid https://orcid.org/ 0009-0003-5368-9032

María del Carmen Castelo Naveda
Universidad Estatal Amazónica
Puyo-Ecuador
Correo Institucional: mcastelo@uea.edu.ec
Orcid https://orcid.org/ 0000-0002-3629-881X

Luis Alberto Uvidia Armijo
Universidad Estatal Amazónica
Puyo-Ecuador
Correo Institucional: la.uvidiaa@uea.edu.ec
Orcid https://orcid.org/ 0000-0002-1967-2494

RECIBIDO: 5 enero 2024 **ACEPTADO**: 28 marzo 2024 **PUBLICADO** 26 abril 2024

ISSN 2953 - 6421

Resumen

En esta investigación, se exploró el uso del polinomio de Taylor como una herramienta para resolver límites indeterminados en el análisis matemático. Se destacó la importancia de resolver límites y cómo el polinomio de Taylor ofrece una alternativa precisa para abordar la complejidad de los límites indeterminados. La metodología detallada incluyó la definición matemática del polinomio de Taylor, la selección de ejercicios específicos y la resolución paso a paso de cada uno. Los resultados demostraron la eficacia del polinomio de Taylor al proporcionar aproximaciones precisas de las funciones en los puntos relevantes, lo que permitió la evaluación directa de los límites con resultados consistentes. La discusión resaltó la utilidad y las limitaciones de esta técnica, identificando áreas para futuras investigaciones. En conclusión, esta investigación subraya el valor del polinomio de Taylor como una herramienta poderosa en la resolución de límites indeterminados, contribuyendo al avance del conocimiento en el análisis matemático.

Palabras claves: Convergencia; funciones; serie numérica.

.

ISSN 2953 - 6421

Abstract

In this research, the use of the Taylor polynomial as a tool for solving indeterminate limits in mathematical analysis was explored. The importance of solving limits was highlighted and how the Taylor polynomial offers a precise alternative to address the complexity of indeterminate limits. The detailed methodology included the mathematical definition of the Taylor polynomial, the selection of specific exercises and the step-by-step resolution of each one. The results demonstrated the effectiveness of the Taylor polynomial in providing accurate approximations of the functions at the relevant points, allowing direct evaluation of the limits with consistent results. The discussion highlighted the usefulness and limitations of this technique, identifying areas for future research. In conclusion, this research highlights the value of the Taylor polynomial as a powerful tool in solving indeterminate limits, contributing to the advancement of knowledge in mathematical analysis.

Keywords: Convergence; functions; numerical series.

INTRODUCCIÓN

La resolución de límites es un aspecto fundamental en el análisis matemático, ya que permite entender el comportamiento de las funciones en puntos críticos y determinar valores límites en diversas situaciones (Pineda et al., 2019). Los límites son utilizados en una amplia gama de disciplinas, desde la física (González-Flores et al., 2021) y la ingeniería (Galindo Illanes & Breda, 2023) hasta la economía y las ciencias sociales (Tarasov, 2019), donde son fundamentales para modelar fenómenos y tomar decisiones informadas. Sin embargo, en ocasiones, la resolución de límites puede volverse complicada, especialmente cuando se trata de funciones que presentan formas indeterminadas (Domecq et al., 2019).

La complejidad de resolver límites indeterminados ha llevado al desarrollo de diversas técnicas y herramientas para abordar este problema. Una de estas herramientas es el polinomio de Taylor, que proporciona una forma de aproximar funciones complicadas mediante polinomios más simples (Bakas, 2024). El polinomio de Taylor ofrece una alternativa eficaz para resolver límites indeterminados al proporcionar una aproximación precisa de la función original en un punto dado (Pan, 2023).

La problemática que aborda esta investigación radica en la necesidad de desarrollar métodos efectivos para resolver límites indeterminados y comprender el comportamiento de las funciones en situaciones críticas (Bottazzi, 2023). La aplicación del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados representa una solución potencial a esta problemática, ya que ofrece una técnica precisa y generalizable para aproximar funciones complicadas y evaluar límites de manera eficiente (Sun, 2023).

El objetivo de esta investigación fue explorar y demostrar la aplicación del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados, mediante la resolución de ejercicios prácticos que ilustren su utilidad y eficacia en diferentes contextos matemáticos.

REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

MATERIALES Y METODOS

En este estudio, se implementó un enfoque sistemático y riguroso para investigar la eficacia del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados (Holey & Wiedemann, 2023). La metodología se dividió en varias etapas bien definidas para garantizar la precisión y la replicabilidad de los resultados.

En primer lugar, se llevó a cabo una revisión detallada sobre la definición matemática del polinomio de Taylor, como técnica esencial en el análisis matemático (Abbaszadeh et al., 2021). El polinomio de Taylor para cada función $f(x)$ analizada en un punto “a” se definió de la siguiente manera:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \infty$$

Donde $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots \infty,$ representan las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ evaluada en $x = a$.

Se seleccionaron tres problemas representativos de límites indeterminados obtenidos del libro “Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable”, del autor Pérez-González (2008) cada uno diseñado para evaluar la capacidad del polinomio de Taylor para proporcionar aproximaciones precisas de las funciones en puntos críticos. Los ejercicios seleccionados fueron:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Para cada uno de los ejercicios seleccionados, se calculó el polinomio de Taylor de la función dada alrededor del punto de tendencia, utilizando la fórmula del polinomio de Taylor y las derivadas de la función. Luego cada función del límite indeterminado se sustituyó por el polinomio obtenido, con le fin de simplificar la expresión del límite. Finalmente, se evaluó el límite resultante utilizando técnicas algebraicas y aprovechando la simplicidad del polinomio de Taylor.

REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

Resultados del problema 1

Las primeras derivadas del ejercicio 1 de la función $f(x) = \sin(x)$ evaluadas en $x = 0$ arrojaron los siguientes resultados:

$f(0) = sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f'''(0) = -\cos(x) \rightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$

al sustituir estos valores en el polinomio de Taylor se obtuvo la siguiente expresión:

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Este polinomio fue sustituido en el límite y el resultado se muestra a continuación:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{x} = 1$$

La resolución del primer ejercicio siguió una metodología estructurada que incluyó el cálculo del polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ la aplicación de este polinomio en el límite dado y la evaluación resultante del límite. Se observó que el polinomio de Taylor se limitó en el término correspondiente a la tercera derivada de la función $\sin(x)$. Esto se debe a que, en este caso particular, las derivadas sucesivas de la función seno siguen un patrón periódico, la cuarta derivada vuelve a ser la función seno original, lo que resultaría en un término cero al evaluarla en $x = 0$ por lo tanto, incluir términos de orden superior no aportaría información adicional significativa a la aproximación del polinomio de Taylor y solo aumentaría la complejidad del cálculo. Este enfoque demuestra una selección eficiente de términos en el polinomio de Taylor para obtener una aproximación precisa del límite dado. Sin embargo, es importante tener en cuenta que este razonamiento es específico para la función seno y puede variar para otras funciones, donde podrían ser necesarios más términos en el polinomio de Taylor para obtener una aproximación precisa (Alves 2023, Sastre et al. 2019 y Howard 2019)

Resultados del problema 2

Los resultados de las primeras derivadas de la función $f(x) = \ln(x)$ evaluadas en $x = 1$, se muestran a continuación:

$f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \to f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \to f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \to f'''(1) = 2$

Los valores obtenidos en cada derivada se reemplazaron en la fórmula de Taylor, obteniendo el siguiente polinomio:

$p(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \cdots$

Por lo tanto, $p(x) = \ln(x)$, al hacer este cambio en el límite, se obtuvo la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to 1} \frac{0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \cdots}{x-1}$$

Al simplificar $(x-1)$ en el numerador y denominador la expresión resultante fue la siguiente:

$$\lim_{x \to 1} 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{2}{3!}(x-1)^2 + \cdots = 1$$

En la resolución del segundo ejercicio, se utilizó el polinomio de Taylor alrededor de $x = 1$ para aproximar la función $\ln(x)$ en el numerador del límite dado. Se calcularon las primeras tres derivadas de la función $\ln(x)$ en $x = 1$, lo que proporcionó suficiente información para construir un polinomio de Taylor que capturara el comportamiento de la función en las proximidades de $x = 1$. La elección de incluir hasta la tercera derivada se basó en las características de la función $\ln(x)$ y su comportamiento alrededor de $x = 1$.

La función $\ln(x)$ es una función logarítmica que crece indefinidamente cuando "x"se acerca a 0 (Campo-Meneses & García-García, 2020), pero se vuelve infinitamente negativa cuando "x" se aproxima a +∞. Sin embargo, alrededor de $x = 1$, la función tiene un comportamiento más simple. Las derivadas de $\ln(x)$ en $x = 1$ brindaron información sobre cómo cambia la función en este punto específico.

Al evaluar el límite, se encontró que el resultado fue 1, lo que indica que a medida que "x" se acerca a 1, el cociente $\frac{\ln(x)}{x-1}$ se aproxima a 1. Este resultado puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la tangente a la curva de $\ln(x)$ en $x = 1$, que es igual a 1. En otras palabras, la tasa de cambio de $\ln(x)$ en

$x = 1$ es 1. Esto concuerda con la naturaleza continua de la función $\ln(x)$ en ese punto.

Resultados del problema 3

En este ejercicio la función: $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ puede aproximarse al polinomio de Taylor de la función $g(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ por lo tanto la serie polinómica puede expresarse de la siguiente manera:

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Al reemplazar e^x por su expansión en serie de Taylor en $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se obtuvo las siguiente expresión:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x}$$

Utilizando la regla de L´Hopital el límite en el exponente tiende a 1, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x} = e^1$$

De esta manera el problema $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiende a "e".

La elección de utilizar el polinomio de Taylor de e^x en la resolución del tercer ejercicio, se basa en la relación intrínseca entre esta función exponencial y la expresión dada. Al analizar la forma de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, se puede notar su similitud con la definición de e^x.

Por otro lado, la función e^x tiene una importancia fundamental en matemáticas y ciencias naturales (Portet, 2020) debido a su conexión con el crecimiento exponencial y el cálculo de tasas de cambio. Utilizando el polinomio de Taylor de e^x, se expandió la función alrededor de $x = 0$, lo que permitió aproximar e^x con mayor precisión. Dado que el límite que se evaluó implicó a "x" tendiendo a infinito, la expansión de Taylor de e^x es una herramienta valiosa, ya que permite comprender cómo e^x se comporta para valores de "x" grandes.

La aplicación de la regla de L'Hopital para evaluar el límite $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ fue necesaria debido a la indeterminación que surgió al intentar evaluar directamente el límite. Esta técnica permitió transformar el límite original en una expresión más sencilla de evaluar, lo que condujo a la conclusión de que el límite es igual a "e".

La combinación de la regla de L'Hopital y el polinomio de Taylor es una estrategia poderosa para abordar límites que involucran funciones complicadas o indeterminaciones. Mientras que el polinomio de Taylor proporciona una aproximación local de la función alrededor de un punto (He & Ji, 2019), la regla de L'Hopital permite manejar indeterminaciones específicas (Xiong & Zhang, 2023), como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ al combinar estas técnicas, se puede resolver límites de manera efectiva y comprender mejor el comportamiento de las funciones en el límite.

La aplicación del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados proporciona una herramienta poderosa y generalizable para aproximar funciones complicadas y evaluar límites de manera eficiente (He & Ji, 2019). Esta técnica ofrece una alternativa a métodos más tradicionales y puede ser aplicada en una amplia gama de contextos matemáticos y científicos.

Esta investigación contribuye al cuerpo de conocimientos en el campo del análisis matemático al demostrar la utilidad y eficacia del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados. Los resultados y la discusión proporcionados en este estudio pueden servir como referencia para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en diversas disciplinas científicas.

CONCLUSIÓN

-El polinomio de Taylor es una herramienta efectiva para aproximar funciones complicadas y resolver límites indeterminados en el análisis matemático.

-La aplicación del polinomio de Taylor en la resolución de límites indeterminados puede proporcionar resultados precisos y eficientes en una variedad de contextos matemáticos y científicos.

-Esta investigación demuestra la importancia y el potencial del polinomio de Taylor como una herramienta fundamental en el análisis y la comprensión de funciones y límites en el campo de las matemáticas y las ciencias aplicadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 7ma ed.

Abbaszadeh, M., Dehghan, M., & Azis, M. I. (2021). The meshless local Petrov–Galerkin method based on moving Taylor polynomial approximation to investigate unsteady diffusion–convection problems of anisotropic functionally graded materials related to incompressible flow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, *132*, 469–480. https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2021.06.026

Alves, A. (2023). Bernoulli approximation to sine and cosine functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *54*(5), 924–942. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2069053

Bakas, N. (2024). Taylor Polynomials in a High Arithmetic Precision as Universal Approximators. *Computation*, *12*(3), 53. https://doi.org/10.3390/computation12030053

Bottazzi, G. (2023). Differential Calculus of Functions of One Variable. *Advanced Calculus for Economics and Finance*, *21*(2), 125–153. https://doi.org/10.1007/978-3-031-30316-6_6

Campo-Meneses, K., & García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática*, *32*(3), 209–240. https://doi.org/10.24844/EM3203.08

Domecq, N., Berenguer, I., & Gorina-Sánchez, A. (2019). Didáctico para su concreción interdisciplinarity in the teaching-learning of the differential and integral calculus. a didactic instrument for its concretion. *Revista Magazine de Las Ciencias*, *4*(1), 1–17. http://orcid.org/0000-0001-8752-885X

Galindo Illanes, M., & Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Boletim de Educação Matemática*, *37*(75), 271–295. https://doi.org/10.1590/1980-4415V37N75A13

González-Flores, Y., Montoro-Medina, A., & Ruiz-Hidalgo, J. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. *Uniciencia*, *35*(2), 271–290. https://doi.org/10.15359/RU.35-2.18

He, J. H., & Ji, F. Y. (2019). Taylor series solution for Lane–Emden equation. *Journal of Mathematical Chemistry*, *57*(8), 1932–1939. https://doi.org/10.1007/S10910-019-01048-7/METRICS

Holey, T., & Wiedemann, A. (2023). Differential Calculus. *Analysis and Linear Algebra*, *22*(65), 89–134. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66247-2_3

Howard, R. M. (2019). Dual Taylor Series, Spline Based Function and Integral Approximation and Applications. *Mathematical and Computational Applications 2019, Vol. 24, Page 35*, *24*(2), 35. https://doi.org/10.3390/MCA24020035

Pan, L. Y. (2023). The Application of Taylor formula in Limits and Approximation. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, *72*, 891–898. https://doi.org/10.54097/A2NZCD87

Pérez-González, F. J. (2008). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. moz-extension://14d71c70-8007-4614-91c9-93b5cc3f52fb/enhanced-reader.html?openApp&pdf=https%3A%2F%2Fwww.ugr.es%2F~fjperez%2Ftextos%2Fcalculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

Pineda, D., Miranda, I., Hernández-Ochandía, D., Rodríguez, M. G., & Holgado, R. (2019). Software para el cálculo del límite de tolerancia a Meloidogyne spp. en cultivos de importancia económica. *Revista de Protección Vegetal*, *36*(3). https://eqrcode.co/a/hsQrsm

Portet, S. (2020). A primer on model selection using the Akaike Information Criterion. *Infectious Disease Modelling*, *5*, 111–128. https://doi.org/10.1016/J.IDM.2019.12.010

Sastre, J., Ibáñez, J., Alonso-Jordá, P., Peinado, J., & Defez, E. (2019). Fast Taylor polynomial evaluation for the computation of the matrix cosine. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *354*, 641–650. https://doi.org/10.1016/J.CAM.2018.12.041

Sun, M. (2023). Evaluation of Limits Involving Trigonometric Functions by L' Hospital Rule. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, *49*, 315–319. https://doi.org/10.54097/HSET.V49I.8524

Tarasov, V. (2019). On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. *Mathematics*, *7*(6). https://doi.org/10.3390/MATH7060509

Xiong, X., & Zhang, Z. (2023). Asymptotic synchronization of conformable fractional-order neural networks by L' Hopital's rule. *Chaos, Solitons & Fractals*, *173*, 113665. https://doi.org/10.1016/J.CHAOS.2023.113665

.

REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

Conflicto de intereses

El autor indica que esta investigación no tiene conflicto de intereses y, por tanto, acepta las normativas de la publicación en esta revista.

Con certificación de: