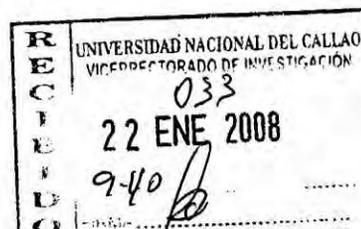


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN



INFORME FINAL DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

“TEXTO: CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS”

AUTOR: ING. JORGE ALBERTO MONTAÑO PISFIL

(PERIODO DE EJECUCIÓN:

Del 01 de Febrero de 2007 al 31 de Enero de 2008

RESOLUCIÓN RECTORAL N° 177-2007-R)

Enero de 2008

CALLAO - PERÚ

ÍNDICE

a) Índice	2
b) Resumen	3
c) Introducción	4
d) Marco teórico	7
e) Materiales y métodos	8
f) Resultados	9
g) Discusión	9
h) Referenciales	10
i) Apéndice	11
j) Anexos	12

fw

b) Resumen

El presente Proyecto de Investigación tuvo como propósito la elaboración de un texto universitario titulado **TEXTO: CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS**. El texto se propone apoyar la formación profesional de los alumnos de la Escuela Profesional de Ingeniería Eléctrica y de la Escuela Profesional de Ingeniería Electrónica, en el curso de Teoría de Campos Electromagnéticos. Se trata de un texto básico que expone de manera sucinta los temas teóricos y pone mayor énfasis a la resolución de problemas que tienen aplicaciones en Ingeniería Eléctrica y en Ingeniería Electrónica.

La elaboración de este texto tiene la ventaja de adecuarse a la estructura curricular del curso de Teoría de Campos Electromagnéticos de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.

El texto **CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS** presenta al inicio de cada capítulo un resumen teórico y luego problemas de aplicación referidos a los temas tratados como son: Electrostática en el vacío, El campo electrostático en medios dieléctricos, Métodos generales para resolver problemas electrostáticos, Corriente eléctrica, Magnétostática en el vacío, Campo magnético en la materia, Ley de Faraday y Ecuaciones de Maxwell.

c) Introducción

El proyecto de investigación realizado está referido a la elaboración de un texto universitario, cuya finalidad es apoyar en la formación profesional de los alumnos de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, en el curso de Teoría de Campos Electromagnéticos.

Durante mi experiencia en la docencia universitaria, en el intento de encontrar textos necesarios para la enseñanza del curso Teoría de Campos Electromagnéticos, he comprobado que los textos utilizados son muy extensos, donde los temas de estudio se hallan muy dispersos y por lo general se encuentran en una secuencia que no necesariamente corresponde a la secuencia de un curso para los alumnos de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, por tal motivo es necesario hacer una sistematización de acuerdo al sílabo de la asignatura.

El Texto CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS elaborado por el autor es único en el Perú. No se conoce actualmente un texto similar.

c.1 Planteamiento del problema de investigación

- DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL TEMA

La teoría de Campos Electromagnéticos requiere que el alumno tenga los conocimientos sólidos de las leyes y principios de la Teoría Electromagnética, y de los fundamentos matemáticos que se requieren sobre todo para resolver los diferentes tipos de problemas que se presentan.

El desarrollo de este trabajo será de gran ayuda a los estudiantes universitarios de ingeniería, porque el texto CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS contiene una gran cantidad y variedad de problemas resueltos detalladamente que le servirá como guía para poder resolver otros problemas similares. El presente texto sólo presenta



resúmenes teóricos de los temas más importantes de un curso de TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS, si se requiere profundizar en un tema específico deberá consultarse la bibliografía que existe sobre la materia.

ANÁLISIS DEL TEMA

El tema central está conectado con los siguientes sub-temas: ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO, EL CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS DIELECTRICOS, MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS, CORRIENTE ELÉCTRICA, MAGNÉTOSTÁTICA EN EL VACÍO, CAMPO MAGNÉTICO EN LA MATERIA, LEY DE FARADAY Y ECUACIONES DE MAXWELL.

c.2 OBJETIVOS Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo General:

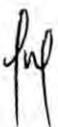
Mejorar el Rendimiento Académico de los alumnos de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica en la Asignatura de Teoría de Campos Electromagnéticos.

Objetivos Específicos:

- Lograr que el estudiante de la FIEE consolide sus conocimientos de la Teoría Electromagnética.
- Lograr que el estudiante de la FIEE resuelva diferentes tipos de problemas de aplicación práctica de la Teoría Electromagnética.

Alcances de la investigación

El presente proyecto es una investigación básica en el campo de la teoría electromagnética.



Con la publicación de este trabajo, se van a beneficiar en primer a los alumnos de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, porque contarán con un texto de CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS práctico y con suficiente cantidad de problemas resueltos detalladamente que le permitirán comprender y asimilar mejor los conocimientos de la Teoría Electromagnética. Este texto también servirá de mucho apoyo a los docentes de la asignatura de Teoría de Campos Electromagnéticos que requieran hacer algún tipo de consulta.

c. 3 IMPORTANCIA Y JUSTIFICACION DE LA INVESTIGACIÓN

IMPORTANCIA

El desarrollo del Proyecto de Investigación TEXTO: "CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS" es de suma importancia porque constituye un trabajo de divulgación científica, en donde se aborda los diversos temas de la Asignatura Teoría de Campos Electromagnéticos, que son fundamentales en la formación profesional del Ingeniero Electricista e Ingeniero Electrónico

JUSTIFICACION

Por lo expresado anteriormente el proyecto se justifica, por que es un aporte académico que beneficiará a los estudiantes de ingeniería, principalmente de ingeniería eléctrica y electrónica, y a los profesores que enseñan la Asignatura de Campos Electromagnéticos.



d) Marco teórico

En la presente investigación se presenta la teoría resumida y simplificada para los ocho capítulos del presente texto. Esto ha sido posible por la experiencia de diez años en la docencia universitaria que tiene el autor.

Por ejemplo, el capítulo "Electrostática en el vacío" se desarrolla a partir del enfoque de los postulados fundamentales de la electrostática en el vacío, esto permite resumir sustancialmente este capítulo. Sin embargo, se ha considerado necesario agregar las ecuaciones conocidas para calcular la intensidad de campo eléctrico, el potencial eléctrico, la diferencia de potencial y la energía electrostática.

En el capítulo "El campo electrostático en medios dieléctricos", después de explicar el comportamiento de los materiales dieléctricos en presencia de un campo eléctrico externo, se ha considerado agregar las ecuaciones para calcular la carga superficial de polarización y la carga volumétrica de polarización.

En el capítulo "Corriente eléctrica" se ha precisado el concepto de corriente eléctrica y al final del capítulo se ha dado un cuadro resumen de las ecuaciones a utilizar cuando se trata de resolver problemas relacionados con una corriente eléctrica estacionaria.

El capítulo "Magnetostática en el vacío" se desarrolla a partir del enfoque de los postulados fundamentales de la magnetostática en el vacío, esto también permite resumir sustancialmente este capítulo. Sin embargo, se ha considerado necesario ampliar en el desarrollo de las ecuaciones para calcular la intensidad de campo magnético utilizando la ley de Biot-Savart y la ley de Ampère.

Finalmente debo indicar que si bien es cierto que la técnica de resolución de problemas es un medio muy seguro de aprender un curso de Campos Electromagnéticos, pero es muy importante estudiar y conocer la teoría



electromagnética, para lo cual el alumno debe buscar toda la información necesaria, para luego utilizar esta información y sus conocimientos en nuevas situaciones.

e) Materiales y métodos

Materiales:

- Materiales de oficina
- Material bibliográfico
- Material de cómputo e impresión

Métodos

La elaboración del presente Texto: Campos Electromagnéticos, propósito de la investigación, le demandó al autor ordenar toda la información reunida durante su vida profesional y de especialista en la materia.

La estructuración del texto responde a la experiencia del autor como docente titular de la materia en la Escuela Profesional de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.

Para la elaboración del texto, se tuvo cuidado en recurrir a la síntesis de los aspectos teóricos, evitando en lo posible de hacer extensiones que confundan a los alumnos.

En cuanto a los problemas resueltos que se presentan en los diversos capítulos, se ha seleccionado los problemas más apropiados que están propuestos en los diversos textos que se han utilizado como bibliografía. Además, la resolución de estos problemas se presenta de una manera ordenada y muy didáctica ya que se ha recurrido al uso de muchos dibujos y gráficos.



f) Resultado

El resultado de la presente investigación es la elaboración del texto universitario titulado Texto: Campos Electromagnéticos, el cual se adjunta al presente. El texto contiene ocho capítulos y dos apéndices.

La teoría desarrollada en el texto, responde a los aspectos básicos de la Teoría Electromagnética. Los problemas resueltos en el texto, tienen el propósito de dar las pautas de la aplicación de la teoría desarrollada.

Se ha logrado un texto base para el curso de Teoría de Campos Electromagnéticos, asignatura fundamental en la formación universitaria del estudiante de Ingeniería Eléctrica e ingeniería Electrónica.

g) Discusión

El texto universitario titulado "TEXTO: CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS" es el resultado de la investigación a que se refiere el presente informe, se caracteriza por presentar la teoría de manera resumida y dando mayor énfasis a la resolución de problemas de aplicación. Los problemas resueltos han sido cuidadosamente seleccionados de tal forma que nos permitan comprobar las leyes y principios fundamentales de la teoría electromagnética. La mayoría de los textos sobre Campos electromagnéticos no presentan muchos problemas resueltos, y si los hay la resolución no es detallada y no permite una mejor comprensión a los estudiantes.

Por esa razón, el presente texto ayudará a los estudiantes a comprender mejor la teoría electromagnética, conocimiento fundamental en su formación profesional, para que luego cuando lleve los cursos de especialidad puedan abordar problemas reales, a los cuales darán solución siempre y cuando conozcan y apliquen correctamente la Teoría Electromagnética.



h) Referenciales

- *ANTONIO GONZÁLEZ FERNÁNDEZ – SCHAUM . Problemas de Campos Electromagnéticos.* Madrid, España. Mc Graw-Hill – 2005.
- *BERKELEY PHYSICS COURSE – VOL 2. Electricidad y Magnetismo.* Berkeley, E.U.A. Segunda Edición – 1994 - Editorial Reverté.
- *CHENG, DAVID K. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería.* Wilmington, Delaware, EU.A. - 1997 - Addison – Wesley Iberoamericana.
- *DIOSES OTÍN, FEDERICO. ALFAOMEGA. Campos electromagnéticos.* España – Ediciones UPC – 2000.
- *HAYT JR., WILLIAM H. Teoría electromagnética.* México, D.F. Séptima Edición – 2006 - Mc Graw-Hill.
- *KRAUSS-FLEISCH. Electromagnetismo con aplicaciones.* México, D.F. Quinta Edición - 2000– Mc Graw-Hill.
- *REITZ – MILFORD – CHRISTY. Fundamentos de la teoría electromagnética.* Wilmington, Delaware, EU.A. Cuarta Edición – 1996 - Addison Wesley Iberoamericana.
- *SADIKU, MATTHEW N.O. Elementos de electromagnetismo.* México, D.F. Tercera Edición– 2003 - Oxford University Press.
- *TALLEDO CORONADO, ARTURO. Teoría de Campos Electromagnéticos.* Lima, Perú. Cuarta Edición –1998 - Editorial "Ciencias".



i) Apéndice

Los cuadros y problemas de autoría propia, se presentan dentro de los ocho capítulos del texto, como parte de la explicación de los temas tratados.

A continuación se anexan dos cuadros que se hallan en el Capítulo 1: Aspectos generales.

CUADRO DE TIPOS DE CAMPO VECTORIALES

TIPOS DE CAMPO VECTORIALES	VALOR DE SU DIVERGENCIA Y SU ROTACIONAL	EJEMPLO
Solenoidal e Irrotacional	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$ y $\nabla \times \vec{F} = 0$	Campo eléctrico estático en una región libre de carga.
Solenoidal pero no Irrotacional	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$ y $\nabla \times \vec{F} \neq 0$	Campo magnético estático en un conductor que transporta corriente.
Irrotacional pero no solenoidal	$\nabla \times \vec{F} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$	Campo eléctrico estático en una región con carga.
Ni solenoidal ni Irrotacional	$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$ y $\nabla \times \vec{F} \neq 0$	Campo eléctrico en un medio cargado con campo magnético variable en el tiempo.

ful

CUADRO DE UNIDADES DE LAS CANTIDADES DE CAMPO

TIPO DE CAMPO	CANTIDAD DE CAMPO	SIMBOLO	UNIDAD S.I.
ELÉCTRICO	Intensidad de campo eléctrico	\vec{E}	V/m
	Densidad de flujo eléctrico	\vec{D}	C/m ²
MAGNÉTICO	Densidad de flujo magnético	\vec{B}	T
	Intensidad de campo magnético	\vec{H}	A/m

j) Anexos

El texto contiene varios anexos que se indican a continuación:

TABLA DE RIGIDEZ DIELECTRICA PARA ALGUNOS MATERIALES

Material	Rigidez dieléctrica (V/m)
Aire (a presión atmosférica)	$3 \cdot 10^6$
Aceite mineral	$15 \cdot 10^6$
Papel	$15 \cdot 10^6$
Poliestireno	$20 \cdot 10^6$
Caucho	$25 \cdot 10^6$
Vidrio	$30 \cdot 10^6$
Mica	$200 \cdot 10^6$

fu

TABLA DE CONSTANTES DIELECTRICAS (K) DE VARIAS SUSTANCIAS A 20°C

Vacio	1
Aire (1 atm)	1,00059
Teflón	2,1
Polietileno	2,25
Benceno	2,28
Cloruro de polivinilo	3,18
Mica	3 - 6
Cuarzo	4,3
Vidrio	5 - 10
Germanio	16
Glicerina	42,5
Agua	80,4

TABLA DEL SIGNIFICADO DE CADA SÍMBOLO Y SU UNIDAD DE MEDIDA EN EL SI.

Símbolo	Significado	Unidad de medida SI
\vec{E}	Intensidad de campo eléctrico	voltio por metro (V/m)
\vec{H}	Intensidad de campo magnético	ampere por metro (A/m)
\vec{D}	Densidad de flujo eléctrico	coulomb por metro cuadrado (C/m ²)
\vec{B}	Densidad de flujo magnético	tesla (T) o weber por metro cuadrado (Wb/m ²)
ρ	Densidad volumétrica de cargas libres	culombio por metro cúbico (C/m ³)
\vec{J}	Densidad de corrientes libres	ampere por metro cuadrado (A/m ²)
$d\vec{S}$	Vector del elemento diferencial de superficie normal a la superficie S	metro cuadrado (m ²)
dV	Elemento diferencial de volumen encerrado por la superficie S	metro cúbico (m ³)
$d\vec{\ell}$	Vector del elemento de longitud del contorno que limita la superficie S.	metro (m)

fup

TABLA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV$
Ley de Gauss para el campo magnético (ausencia de monopolos magnéticos)	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Ley de Ampère generalizada	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

TABLA DE IDENTIDADES VECTORIALES

Si φ y ψ son campos escalares mientras que \vec{F} y \vec{G} son campos vectoriales, se cumple:

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla\psi + \psi \nabla\varphi$$

$$\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi(\nabla\varphi) - \varphi(\nabla\psi)}{\psi^2}$$

$$\nabla\varphi^n = n\varphi^{n-1} \nabla\varphi \quad (n = \text{entero})$$

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$$



$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{F} + \varphi \nabla \cdot \vec{F}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\nabla \times \vec{G}) \cdot \vec{F}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{F}) = (\nabla \varphi) \times \vec{F} + \varphi \nabla \times \vec{F}$$

$$\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G}) \vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (\text{Teorema de la divergencia})$$

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_V \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\oint_L \varphi d\vec{\ell} = \int_S \nabla \varphi \times d\vec{S}$$

ful

$$\oint_S \varphi d\vec{S} = \int_V \nabla \varphi dV$$

$$\oint_S \vec{F} \times d\vec{S} = - \int_V \nabla \times \vec{F} dV$$

for

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

“TEXTO: CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS”

AUTOR: ING. JORGE ALBERTO MONTAÑO PISFIL

(PERIODO DE EJECUCIÓN:

Del 01 de Febrero de 2007 al 31 de Enero de 2008

RESOLUCIÓN RECTORAL N° 177-2007-R)

Enero de 2008

CALLAO - PERÚ



ÍNDICE DE CONTENIDO

PREFACIO	vi
----------	----

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES

1.1 Definición de campo	1
1.2 Las cuatro cantidades fundamentales del campo electromagnético	2
1.3 Tres constantes universales en el estudio del campo electromagnético	3
1.4 Clasificación de los campos vectoriales	4
1.5 Teorema de Helmholtz	5

CAPÍTULO 2

ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

2.1 Postulados fundamentales de la electrostática en el vacío	6
2.2 Potencial eléctrico	9
2.3 Energía electrostática	12
2.4 Problemas resueltos de electrostática en el vacío	13

CAPÍTULO 3

EL CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS DIELECTRICOS

3.1 Dieléctricos	23
3.2 Polarización	25
3.3 Consideraciones a tomarse en cuenta en materiales dieléctricos	26



3.4	Condiciones en la frontera	27
3.5	Campo eléctrico fuera de un medio dieléctrico	29
3.6	Desplazamiento eléctrico	30
3.7	Ley de gauss en un dieléctrico	31
3.8	Recomendaciones para resolver problemas con valores en la frontera en los que intervienen dieléctrico	31
3.9	Problemas resueltos sobre campo electrostático en medios dieléctricos	33

CAPÍTULO 4

MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS

ELECTROSTÁTICOS

4.1	Primer método: ecuación de Poisson	39
4.2	Segundo método: ecuación de Laplace	40
4.3	Método de las imágenes electrostáticas	46
4.4	Problemas resueltos de métodos generales para resolver problemas electrostáticos	50

CAPÍTULO 5

CORRIENTE ELÉCTRICA

5.1	Definición de corriente eléctrica	73
5.2	Tipos de corriente	73
5.3	Intensidad de corriente eléctrica	73
5.4	Ley de continuidad y ley de la corriente de kirchhoff	74

fel

5.5	corrientes continuas y ley de Ohm	76
5.6	Ecuaciones que rigen el flujo de corriente continua	76
5.7	Circuitos eléctricos	77
5.8	Problemas resueltos de corriente eléctrica	78

CAPÍTULO 6

MAGNÉTOSTÁTICA EN EL VACÍO

6.1	Postulados fundamentales de la magnetostática en el vacío o espacio libre	87
6.2	Ecuación de la fuerza de Lorentz	88
6.3	Potencial magnético vector	89
6.4	Ley de Biot-Savart	90
6.5	Problemas resueltos de magnetostática en el vacío	92

CAPÍTULO 7

CAMPO MAGNÉTICO EN LA MATERIA

7.1	Magnetización en los materiales y densidades de corriente equivalentes	106
7.2	Potencial escalar magnético y densidad de polos magnéticos	108
7.3	Intensidad de campo magnético – ley de Ampère en medios magnéticos	109
7.4	Relación entre el campo magnético y el vector magnetización	110
7.5	Comportamiento de los materiales magnéticos	110
7.6	Condiciones en la frontera para campos magnetostáticos	114
7.7	Inductancias e inductores	115
7.8	Energía magnética	117

ful

7.9	Fuerzas y pares magnéticos	118
7.10	Problemas resueltos de campo magnético en la materia	121
7.11	Problemas resueltos de inductancias	126

CAPÍTULO 8

LEY DE FARADAY Y ECUACIONES DE MAXWELL

8.1	Inducción electromagnética y ley de Faraday	138
8.2	Postulado fundamental de la inducción electromagnética	138
8.3	Transformadores	140
8.4	Ecuaciones de Maxwell	142
8.5	Problemas resueltos de circuitos magnéticos	144

CAPÍTULO 9

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

9.1	Productos entre vectores	148
9.2	Sistemas de coordenadas	150
9.3	Operadores vectoriales	153
9.4	Teoremas integrales	155
9.5	Identidades vectoriales	156
9.6	Problemas resueltos	158

APÉNDICE

TABLA DE INTEGRALES	167
---------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA	176
---------------------	------------

fup

PREFACIO

La teoría de campos electromagnéticos estudia las leyes fundamentales que explican los fenómenos eléctricos y magnéticos, los cuales son originados por las cargas eléctricas en reposo o en movimiento.

El estudio de los campos electromagnéticos es importante para los alumnos de ingeniería, especialmente de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao, a quienes va dirigida este texto, porque:

- 1) Nos permite comprender los principios de funcionamiento de las máquinas eléctricas (transformadores, motores, generadores) y los instrumentos eléctricos y magnéticos.
- 2) Nos permite explicar los fenómenos de acción a distancia, como por ejemplo la comunicación por satélite y la comunicación con teléfonos móviles, que son originados por las ondas electromagnéticas cuando se propagan en el aire o en el vacío.

El presente texto: **CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS** es un texto básico que expone de manera sucinta los temas correspondientes a la teoría electromagnética y pone mayor énfasis a la resolución de problemas que tienen aplicaciones en Ingeniería Eléctrica y en Ingeniería Electrónica. Esta obra ha sido diseñada como libro de texto para el curso de TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS, a nivel de pre grado, en las especialidades de Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electrónica.

El texto **CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS** presenta al inicio de cada capítulo un resumen teórico y luego una variedad de problemas resueltos referidos a los temas tratados como son: Electrostática en el vacío, El campo electrostático en medios dieléctricos, Métodos generales para resolver problemas electrostáticos, Corriente



eléctrica, Magnetostática en el vacío, Campo magnético en la materia, Ley de Faraday y Ecuaciones de Maxwell.

Para una mejor comprensión de la teoría de Campos Electromagnéticos se requiere que el alumno tenga los conocimientos sólidos de las leyes y principios de la Teoría Electromagnética, y de los fundamentos matemáticos que se requieren sobre todo para resolver los diferentes tipos de problemas que se presentan. De manera específica se requiere que el alumno conozca el Análisis Vectorial, herramienta fundamental para el desarrollo de los problemas de los cursos de campos electromagnéticos.

Espero que el presente texto contribuya a desarrollar el interés de los alumnos por la teoría electromagnética y su aplicación en el campo de la investigación.

Deseo agradecer al Instituto de Investigación de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, a la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, y al Vice Rectorado de Investigación de la Universidad Nacional del Callao por el apoyo brindado para el desarrollo del presente trabajo de investigación.



Jorge Alberto Montaña Pisfil

Docente de la FIEE - UNAC

ASPECTOS GENERALES

1.1 DEFINICIÓN DE CAMPO

Un campo se define como una función que especifica una cantidad particular en cualquier punto de una región.

Un campo es la distribución de una cantidad, la cual puede o no ser función del tiempo. Si el campo es independiente del tiempo se denomina *permanente o estacionario*.

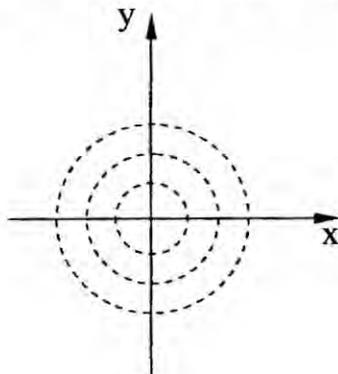
Un **Campo escalar** es una función de posición que está completamente determinada por su magnitud en todos los puntos del espacio.

Notación de un campo escalar:

$\varphi(u_1, u_2, u_3)$, si el campo escalar es estacionario

$\varphi(t, u_1, u_2, u_3)$, si el campo escalar es variable con el tiempo

Son campos escalares por ejemplo: los potenciales eléctricos en puntos situados alrededor de una carga eléctrica en reposo, las energías electrostáticas en puntos situados alrededor de una carga eléctrica en reposo, las temperaturas en cada punto interior o sobre la superficie de la tierra, en un cierto instante.



Esta gráfica corresponde al campo escalar

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

(diagrama de curvas de nivel en dos dimensiones)

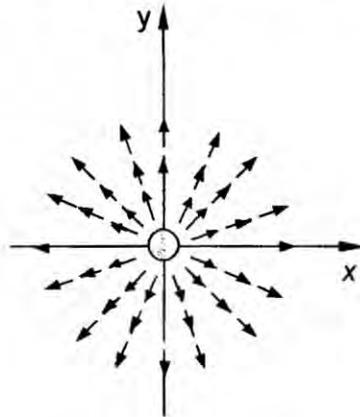
Un **Campo vectorial** es una función de posición que está completamente determinada por su magnitud y dirección en todos los puntos del espacio.

Notación de un campo vectorial:

$\vec{F}_{(u_1, u_2, u_3)}$, si el campo vectorial es estacionario

$\vec{F}_{(t, u_1, u_2, u_3)}$, si el campo vectorial es variable con el tiempo

Son campos vectoriales por ejemplo: la intensidad de campo eléctrico en puntos situados alrededor de una carga eléctrica en reposo, las velocidades en cada punto en el interior de un fluido en movimiento, en un cierto instante.



Esta gráfica corresponde al campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j}$$

1.2 LAS CUATRO CANTIDADES FUNDAMENTALES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Para el estudio del campo electromagnético se consideran cuatro cantidades de campo vectoriales fundamentales: *Intensidad de campo eléctrico* \vec{E} , *Densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico* \vec{D} , *Densidad de flujo magnético o inducción magnética* \vec{B} , e *Intensidad de campo magnético* \vec{H} .

CUADRO DE UNIDADES DE LAS CANTIDADES DE CAMPO

TIPO DE CAMPO	CANTIDAD DE CAMPO	SIMBOLO	UNIDAD S.I.
ELÉCTRICO	Intensidad de campo eléctrico	\vec{E}	V/m
	Densidad de flujo eléctrico	\vec{D}	C/m ²
MAGNÉTICO	Densidad de flujo magnético	\vec{B}	T
	Intensidad de campo magnético	\vec{H}	A/m

ff

RELACIÓN ENTRE \vec{D} y \vec{E} :

En el vacío o espacio libre: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

En cualquier medio: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

Donde: ϵ = permitividad del medio ; ϵ_0 = permitividad del vacío ;

ϵ_r = permitividad relativa

RELACIÓN ENTRE \vec{B} y \vec{H} :

En el vacío o espacio libre: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

En cualquier medio: $\vec{B} = \mu \vec{H}$; $\mu = \mu_0 \mu_r$

Donde: μ = permeabilidad del medio ; μ_0 = permeabilidad del vacío ;

μ_r = permeabilidad relativa.

1.3 TRES CONSTANTES UNIVERSALES EN EL ESTUDIO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Para el estudio del campo electromagnético se debe tomar en cuenta las siguientes tres constantes universales: **velocidad de la onda electromagnética** (incluyendo la luz) **en el vacío** o espacio libre, c ; **permitividad del vacío** o espacio libre, ϵ_0 ; y **permeabilidad del vacío** o espacio libre, μ_0 .

Se ha comprobado que en el vacío o espacio libre la velocidad de la onda electromagnética es

$$c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

En el SI, la permeabilidad del espacio libre " μ_0 " es

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

donde H/m representa henry por metro. Con los valores de c y μ_0 dados anteriormente, el valor de la permitividad del espacio libre " ϵ_0 " se obtiene de la siguiente relación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (m/s)$$

Despejando ϵ_0 tenemos: $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$ \longrightarrow $\epsilon_0 \cong 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

1.4 CLASIFICACIÓN DE LOS CAMPOS VECTORIALES

Los campos vectoriales se pueden clasificar de acuerdo con el hecho que sean solenoidales o irrotacionales. Un campo es **solenoidal** cuando su **divergencia** es nula, y un campo es **irrotacional** (conservativo) cuando su **rotacional** es nulo. En la siguiente tabla se muestran cuatro tipos de campos vectoriales con sus correspondientes valores de divergencia y rotacional, y un ejemplo de cada tipo de campo.

CUADRO DE TIPOS DE CAMPO VECTORIALES

TIPOS DE CAMPO VECTORIALES	VALOR DE SU DIVERGENCIA Y SU ROTACIONAL	EJEMPLO
Solenoidal e Irrotacional	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$ y $\nabla \times \vec{F} = 0$	Campo eléctrico estático en una región libre de carga.
Solenoidal pero no Irrotacional	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$ y $\nabla \times \vec{F} \neq 0$	Campo magnético estático en un conductor que transporta corriente.
Irrotacional pero no solenoidal	$\nabla \times \vec{F} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$	Campo eléctrico estático en una región con carga.
Ni solenoidal ni Irrotacional	$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$ y $\nabla \times \vec{F} \neq 0$	Campo eléctrico en un medio cargado con campo magnético variable en el tiempo.

fu

- * El campo vectorial más general tiene una divergencia distinta de cero y un rotacional distinto de cero, y puede considerarse como la suma de un campo solenoidal y un campo irrotacional.

1.5 Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz es un elemento básico en el desarrollo axiomático del electromagnetismo. Establece que:

“Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todos los puntos”

Para el desarrollo del presente texto “CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS” nos apoyaremos en el teorema de Helmholtz. En cada uno de los temas enunciaremos los postulados fundamentales, es decir especificaremos la divergencia y el rotacional, de los vectores de campo básicos necesarios para el estudio de los campos electromagnéticos.



ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

La electrostática en el vacío estudia los fenómenos o efectos producidos por las cargas eléctricas en reposo y por los campos eléctricos que no cambian con el tiempo.

Para el estudio de la Electrostática en el vacío es suficiente la cantidad fundamental de campo \vec{E} (intensidad de campo eléctrico).

2.1 POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Los dos postulados fundamentales de la electrostática en el vacío o en el espacio libre, que forman la base para construir la estructura de la electrostática, son:

FORMA DIFERENCIAL	FORMA INTEGRAL
1) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
2) $\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

* La forma diferencial de ambas ecuaciones son dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

* Se sabe que en el vacío o espacio libre, la densidad de flujo eléctrico \vec{D} y la intensidad de campo eléctrico \vec{E} están relacionadas con la ecuación: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Entonces, la forma diferencial y la forma integral del primer postulado de la electrostática en el vacío queda:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad ; \quad \boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q}$$

Donde: "Q" es la carga neta libre encerrada por la superficie gaussiana.

Los dos postulados de la Electrostática en el vacío son concisos, sencillos e independientes del sistema de coordenadas, además pueden usarse para derivar otras relaciones, leyes y teoremas de la electrostática. Por ejemplo, se puede obtener la ley de Gauss, la ley de voltajes de Kirchhoff, etc.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE GAUSS

Tomando integral de volumen a la ecuación (1), queda lo siguiente:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$
$$\Rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Aplicando el teorema de la divergencia tenemos: $\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

El segundo miembro de esta última ecuación equivale a Q/ϵ_0 , por lo tanto hemos demostrado la ley de Gauss. Es decir:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Ley de Gauss})$$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

Tomando integral de superficie a la ecuación (2), tenemos: $\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$

Aplicando el teorema de Stokes a la ecuación anterior, queda:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

El segundo miembro de esta última ecuación equivale a 0, por lo tanto hemos demostrado la ley de Voltajes de Kirchhoff. Es decir:

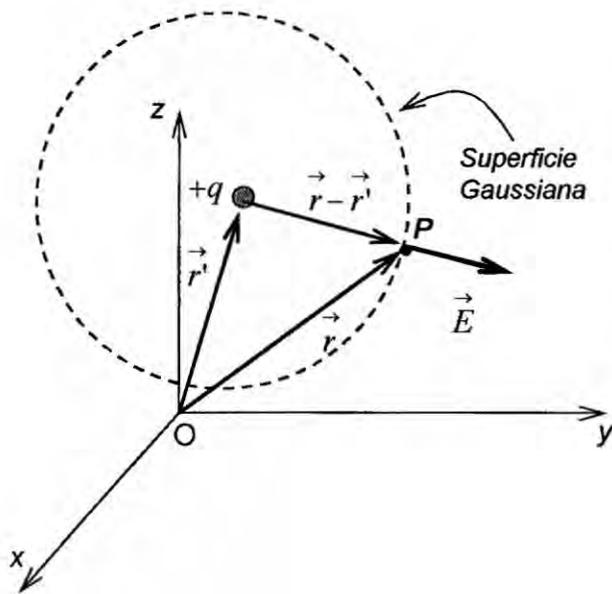
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ (Ley de Voltajes de Kirchhoff)}$$

OBTENCIÓN DE LA LEY DE COULOMB A PARTIR DE LA LEY DE GAUSS

Como se señaló anteriormente, para estudiar la Electroestática en el vacío es suficiente conocer los dos Postulados Fundamentales que los rigen, por que a partir de ellos se pueden obtener otras relaciones, leyes y teoremas de la Electroestática. A continuación se muestra el procedimiento a seguir para la obtención de la Ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss.

Para ello vamos a considerar que tenemos una carga puntual "+q", ubicada en la posición \vec{r} , respecto al punto de referencia O, tal como se muestra en la figura.

Para obtener la ley de Coulomb, a partir de la ley de Gauss, primero vamos a calcular la intensidad de campo eléctrico \vec{E} (debido a la carga +q) en el punto P, que se halla en la posición \vec{r} , respecto a la referencia O. A continuación, calcularemos la fuerza eléctrica que experimenta una segunda carga +Q, ubicada en el punto P, debido a la carga +q.



Por ley de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_0}$

Como la superficie Gaussiana considerada es una esfera de radio r , al evaluar la integral cerrada resulta $(E)4\pi r^2$.

Luego, la expresión anterior es igual a:

$$(E)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Vectorialmente sería:

$$\vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Si colocamos una carga puntual $+Q$ en el punto P del campo creado por la carga puntual $+q$, la carga $+Q$ experimenta una fuerza eléctrica \vec{F} debido al campo eléctrico creado por $+q$. Esta fuerza \vec{F} está dada por:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \frac{qQ(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Esta última expresión dada es la que se conoce como ley de Coulomb.

2.2 POTENCIAL ELÉCTRICO

El potencial eléctrico es una cantidad escalar que se utiliza para expresar cuantitativamente la medición de los efectos del campo eléctrico en un punto de dicho campo. Dado que el potencial eléctrico es una cantidad escalar, entonces lleva el mismo signo de la carga que genera el campo eléctrico.

Handwritten signature

Para dar la ecuación o ecuaciones correspondientes que nos permitan calcular el Potencial eléctrico, vamos a recordar las siguientes relaciones:

- 1) "El rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es idénticamente cero (nulo)"

Es decir, si suponemos que el campo escalar es el potencial eléctrico φ , entonces:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

- 2) "Si un campo vectorial tiene rotacional nulo, entonces este campo vectorial puede expresarse como el gradiente de un campo escalar"

Es decir, si suponemos que el campo vectorial es la intensidad de campo eléctrico

\vec{E} , entonces:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Luego, se cumple que:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi}$$

Donde el campo escalar φ es el potencial eléctrico.

Nota: el signo menos del gradiente del potencial eléctrico es porque el trabajo que se realiza es en contra del campo.

Se cumple asimismo que:

- 1) La diferencia de potencial entre los puntos B y A ($V_B - V_A$), viene dado por:

$$V_B - V_A = -\int_{P_A}^{P_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}; \text{ donde: } d\vec{\ell} = d\vec{r}$$

donde:

V_B : potencial eléctrico en el punto B (P_B)

V_A : potencial eléctrico en el punto A (P_A)

- 2) El potencial eléctrico en un punto B viene dado por:

$$V_B = -\int_{\text{Referencia}}^{P_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}; \text{ donde: } d\vec{\ell} = d\vec{r}$$

Por convención se asume que en la referencia el potencial eléctrico es cero

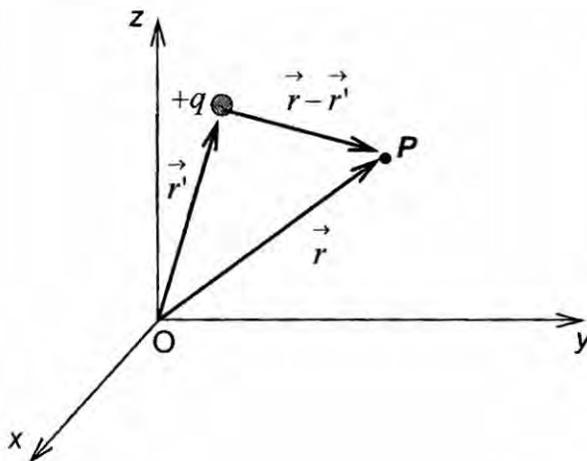
$$(V_{\text{Referencia}} = 0).$$

Se consideran como puntos de referencia el infinito y tierra, por lo tanto:

$$V_{(\text{Tierra})} = 0 \quad ; \quad V_{\infty} = 0$$

3) El potencial eléctrico debido a una carga puntual "+q", en la posición \vec{r} (ver figura),

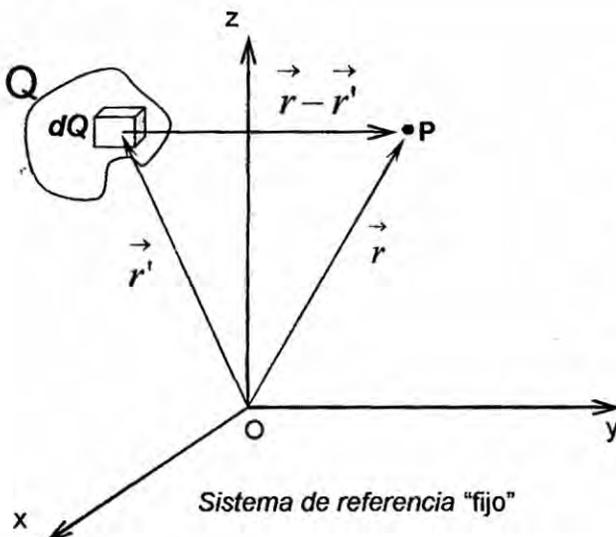
viene dado por:



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|}$$

4) El potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga, posición \vec{r} (ver

figura), viene dado por:



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|}$$

Donde:

$dQ = \lambda dl$ para una distribución lineal.

$dQ = \sigma dA$ para una distribución superficial.

$dQ = \rho dV$ para una distribución volumétrica.

fup

2.3 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA (W_E)

Es la energía que se almacena en un punto cualesquiera de un campo electrostático, debido a este campo. En el caso de una distribución continua de carga, esta energía se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 dV$$

donde: E = módulo o magnitud de la intensidad de campo eléctrico.

* Se denomina **densidad de energía electrostática** (w_E) a la cantidad de energía que almacena un campo electrostático por cada unidad de volumen. Por lo tanto, la energía electrostática W_E , en función de w_E , se puede expresar de la siguiente forma:

$$W_E = \int_V w_E dV \quad ;$$

donde: $w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

fu

2.4 PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema N° 1

Dentro de la región cilíndrica $\rho < 4\text{ m}$, la densidad de flujo eléctrico está dada por

$$\vec{D} = 5\rho^3 \hat{a}_\rho \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

a) ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica en $\rho = 3\text{ m}$? b) ¿Cuál

es la densidad de flujo eléctrico en $\rho = 3\text{ m}$? c) ¿Qué cantidad de flujo sale del

cilindro $\rho = 3\text{ m}$, $|z| \leq 2.5\text{ m}$? d) ¿Cuánta carga está contenida dentro del cilindro $\rho = 3\text{ m}$, $|z| \leq 2.5\text{ m}$?

Resolución

a) Cálculo de ρ_v (densidad de carga volumétrica) en $\rho = 3\text{ m}$

Cuando se conoce \vec{D} (densidad de flujo eléctrico), la densidad de carga volumétrica " ρ_v " se halla aplicando el primer postulado de la electrostática o primera Ecuación de Maxwell. Es decir:

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D}$$

De acuerdo con la condición, \vec{D} depende sólo de la coordenada " ρ ", luego la divergencia de \vec{D} , en coordenadas cilíndricas, queda:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho)$$

$$\Rightarrow \rho_v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (5\rho^4) = 20 \frac{\rho^3}{\rho} = 20\rho^2$$

$$\therefore \text{Si } \rho = 3\text{ m} \Rightarrow \rho_v = 20(3)^2 = 180 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

ful

b) Cálculo de \vec{D} (densidad de flujo eléctrico) en $\rho = 3\text{ m}$

Se sabe que: $\vec{D} = 5\rho^3 \hat{a}_\rho \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$, para $\rho < 4\text{ m}$

Si $\rho = 3\text{ m} \rightarrow \vec{D} = 5(3)^3 \hat{a}_\rho = 135 \hat{a}_\rho$

c) Cálculo de ϕ (flujo eléctrico) que sale del cilindro $\rho = 3\text{ m}$ y $|z| \leq 2.5\text{ m}$

Se sabe que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada S viene dado por:

$$\phi_{\text{total}} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

La integral cerrada, a través de la superficie S (el cilindro descrito), la descomponemos en tres integrales abiertas, por lo tanto se cumple que:

$$\phi_{\text{total}} = \int_{\text{Superficie lateral}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Superficie superior}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Superficie inferior}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

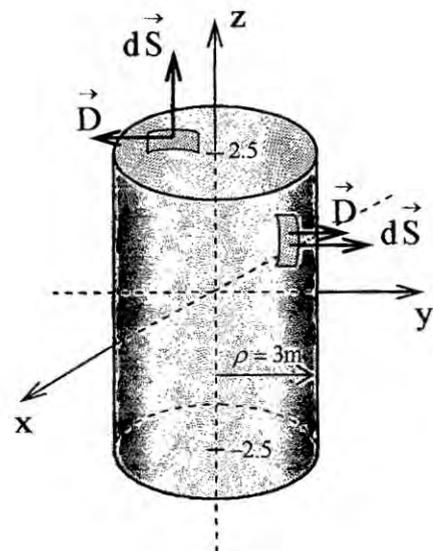
$\begin{matrix} \nearrow = 0 \\ \searrow = 0 \end{matrix}$

* Note (ver figura) que a través de las superficies superior e inferior del cilindro no hay flujo porque los vectores \vec{D} y $d\vec{S}$ son perpendiculares entre sí.

$$\Rightarrow \phi_{\text{total}} = \iiint 5\rho^3 \hat{a}_\rho \cdot \rho d\phi dz \hat{a}_\rho = \iint 5\rho^4 d\phi dz$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{total}} = \iint 5(3)^4 d\phi dz = 405 \int_{z=-2,5}^{z=2,5} dz \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{total}} = 405 (5)(2\pi) = 4050 \pi \text{ C}$$



Fig

d) Cálculo de Q_{total} contenida en el cilindro $\rho = 3m$ y $|z| \leq 2.5m$

Se sabe que en una distribución de carga volumétrica, la carga total viene dada por:

$$Q_{total} = \int_V \rho_V dV ; \text{ donde: } \rho_V = 20\rho^2 \text{ y } dV = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\Rightarrow Q = \int_{z=-2.5}^{2.5} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^3 20\rho^2 \rho d\rho d\phi dz = 20 \int_{\rho=0}^3 \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=-2.5}^{2.5} dz$$

$$\therefore Q_{total} = 4050\pi C$$

Nota. De **c)** y **d)** se concluye que $\phi_{total} = Q_{total}$. Esto es cierto porque así lo establece

la ley de gauss: $\phi_{total} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$.

Problema N° 2

Dado el campo $\vec{D} = (20/\rho^2)(\text{sen}^2\phi \hat{a}_\rho + \text{sen}2\phi \hat{a}_\phi) C/m^2$, encuentre la carga total que está dentro del volumen $1m < \rho < 2m$, $0 < \phi < \pi/2$, $0 < z < 1m$. Utilice dos métodos diferentes de cálculo.

Resolución

1er Método de Cálculo de " Q_{total} ": aplicando $Q_{total} = \int_V \rho_V dV$

Para calcular Q_{total} aplicando $Q_{total} = \int_V \rho_V dV$ necesito conocer ρ_V (densidad de carga volumétrica). El valor de ρ_V se halla aplicando el Primer postulado fundamental de la

Electrostática o primera Ecuación de Maxwell. Es decir: $\rho_V = \nabla \cdot \vec{D}$.

La divergencia de \vec{D} , en coordenadas cilíndricas, viene dado por:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} ; \text{ donde: } \vec{D} = \left(\frac{20}{\rho^2}\right)(\text{sen}^2\phi \hat{a}_\rho + \text{sen}2\phi \hat{a}_\phi) \frac{C}{m^2}$$

fp

Calculando la divergencia de \vec{D} obtengo: $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \frac{-20\text{sen}^2\phi + 40\text{cos}2\phi}{\rho^3}$

$$\text{Luego: } Q_{\text{total}} = \int_{\rho=1}^2 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^1 \frac{(-20\text{sen}^2\phi + 40\text{cos}2\phi)}{\rho^3} \rho d\rho d\phi dz$$

$$\Rightarrow Q_{\text{total}} = -\frac{5\pi}{2} C = -7,85C$$

2do Método de Cálculo de " Q_{total} ": aplicando la ley de Gauss

Según la Ley de Gauss se cumple que:

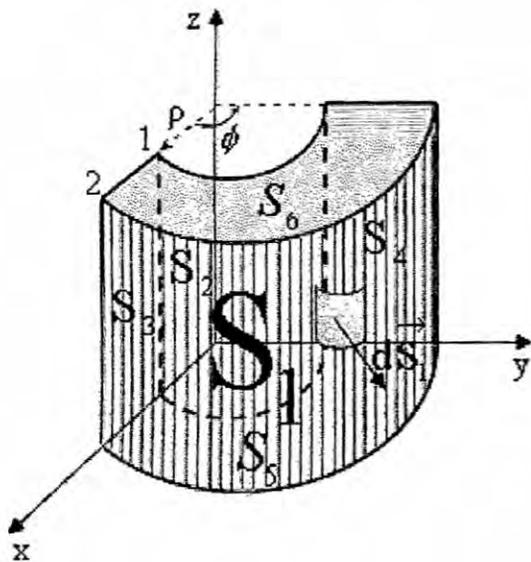
$$Q_{\text{total}} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \dots (1)$$

De acuerdo al enunciado:

$$\vec{D} = \left(\frac{20}{\rho^2}\right) (\text{sen}^2\phi \hat{a}_\rho + \text{sen}2\phi \hat{a}_\phi) \frac{C}{\text{m}^2}$$

$$1\text{m} \leq \rho \leq 2\text{m}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq 1\text{m}$$

La figura correspondiente, de acuerdo con el enunciado, será:



Como el campo vectorial \vec{D} no tiene coordenada "z", entonces para las superficies S_5 y S_6 (para la base y la tapa): $\vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$. Es decir, no hay flujo eléctrico a través de S_5 y S_6 .

De la figura se observa que la integral cerrada, a través de la superficie S , se descompone en seis (6) integrales abiertas.

Al descomponer la integral cerrada en seis integrales abiertas, y considerando que dos de ellas se anulan (las integrales de S_5 y S_6), entonces la ecuación (1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$Q_{\text{total}} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{D} \cdot d\vec{S}_4 \quad \dots (2)$$

ful

De la figura:

$$d\vec{S}_1 = \rho d\phi dz (\hat{a}_\rho) \text{ donde } \rho = 2m ; \quad d\vec{S}_2 = \rho d\phi dz (-\hat{a}_\rho) \text{ donde } \rho = 1m$$

$$d\vec{S}_3 = d\rho dz (-\hat{a}_\phi) \text{ donde } \phi = 0 ; \quad d\vec{S}_4 = d\rho dz (\hat{a}_\phi) \text{ donde } \phi = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la ecuación (2) e integrando obtenemos:

$$Q_{\text{total}} = -\frac{5\pi}{2} C = -7,85C$$

Problema N° 3

La distribución de una carga esférica está expresada por:

$$\rho \sim \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right) & , \quad r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases}$$

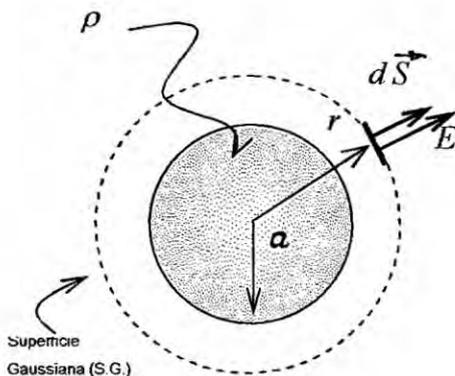
a) Halle la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y el potencial eléctrico ϕ para $r \geq a$

b) Halle la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y el potencial eléctrico ϕ para $r \leq a$

Resolución

Por tratarse de una distribución esférica, hay simetría en la figura, por lo tanto la resolución de este problema puede hacerse aplicando la ley de Gauss.

a) Cálculo de \vec{E} y ϕ para $r \geq a$



Por ley de Gauss:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}; \quad Q = \text{carga neta encerrada por S.G.}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \therefore \vec{E} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r ; \quad r \geq a$$

Para calcular ϕ utilizamos la ecuación: $\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Reemplazando \vec{E} y resolviendo luego la integral tenemos:

fw

$$\varphi = -\int \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2} \hat{a}_r \cdot dr \hat{a}_r \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} + C \dots (1)$$

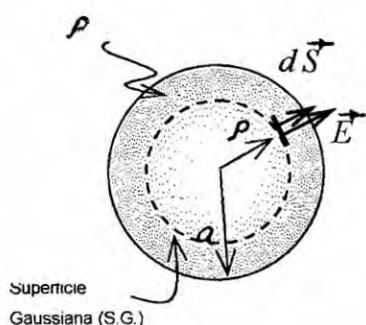
La constante C la hallo aplicando la condición de frontera (C.F.) siguiente:

Si $r = \infty \Rightarrow \varphi_{(r=\infty)} = 0$

Evaluando en la ecuación (1) obtenemos que la constante C es igual a cero: $C = 0$

Luego:
$$\varphi = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} ; \text{ para } r \geq a$$

b) Cálculo de \vec{E} y φ para $r \leq a$



Por ley de Gauss:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad Q = \text{carga neta encerrada por S.G.}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right] \therefore \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right] \hat{a}_r ; r \leq a$$

Hallo φ :

Se cumple: $\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Entonces:

$$\varphi = -\int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right] \hat{a}_r \cdot dr \hat{a}_r \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right] + C \dots (2)$$

Si $r = a$: $\varphi_{(r=a)} = \frac{2a^2\rho}{15\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{20} \right) + C \Rightarrow C = \frac{a^2\rho_0}{4\varepsilon_0}$

Reemplazando la constante C en la ecuación (2) obtenemos:

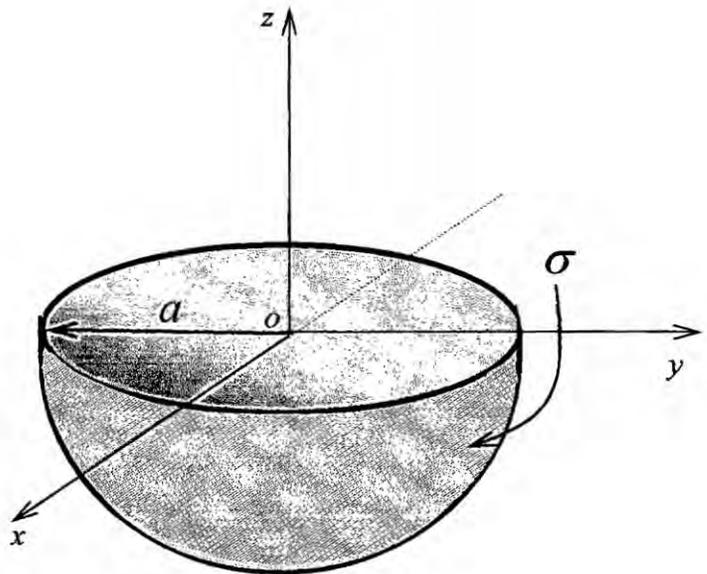
$$\varphi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right] , \text{ para } r \leq a$$

fpf

Problema N° 4

Se tiene un casquete semiesférico de radio "a", cargado con densidad superficial de carga constante σ y ubicado tal como se muestra en la figura. Calcule:

- La intensidad de campo eléctrico en puntos sobre el eje "z".
- La intensidad de campo eléctrico en el punto "o".



Resolución:

Para resolver este problema se recomienda calcular primero el potencial eléctrico, porque es más fácil resolver una integral cuyo denominador tiene potencia uno, a diferencia del exponente tres que tiene el denominador de la integral del campo eléctrico.

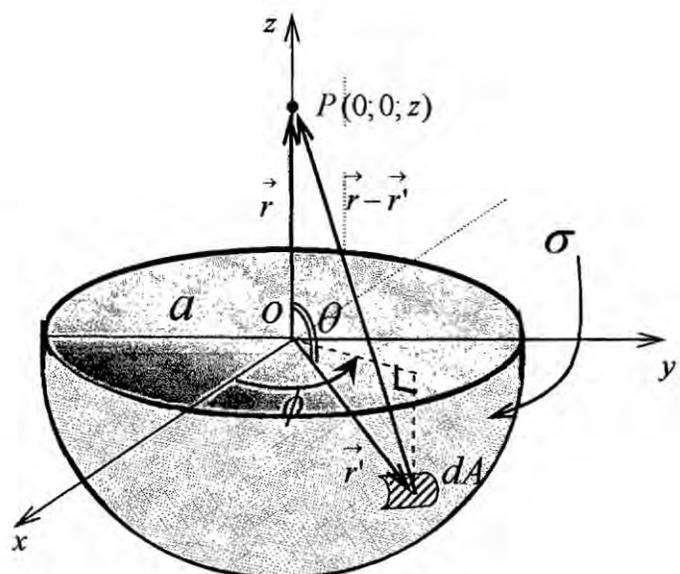
De la figura mostrada tenemos que:

$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{en coordenadas esféricas})$$

donde: $r = a =$ radio de la semiesfera.

Además, por ley de cosenos se cumple:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}$$



fup

Cálculo del potencial eléctrico " φ " en el punto $P(0; 0; z)$

Sabemos que para una distribución de carga superficial, el potencial eléctrico φ se halla por:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dA}{\left| \begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r}' \end{matrix} \right|} \dots (1)$$

Reemplazando dA en la ecuación (1), tenemos:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sigma r^2 \sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}} ; \text{ donde: } r = a$$

Resolviendo se obtiene:
$$\varphi = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 z} \left(a + z - \sqrt{a^2 + z^2} \right)$$

Cálculo del campo eléctrico " \vec{E} " en el punto $P(0; 0; z)$

Cuando ya se conoce el potencial eléctrico, el campo eléctrico se puede calcular utilizando gradiente de potencial. Es decir, se cumple que: $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

Recordar también que: $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{a}_z \right)$ (en coordenadas cartesianas)

Calculando el gradiente del potencial y aplicando $\vec{E} = -\nabla\varphi$ obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{a}_z$$

Cálculo del campo eléctrico " \vec{E} " en el punto "O"

En el punto "O" (origen de coordenadas): $z = 0$ (Cero).

Al evaluar el campo eléctrico \vec{E} en $z = 0$ (primero hay que levantar la indeterminación), obtenemos:

$$\vec{E}_{(z=0)} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{a}_z$$

ful

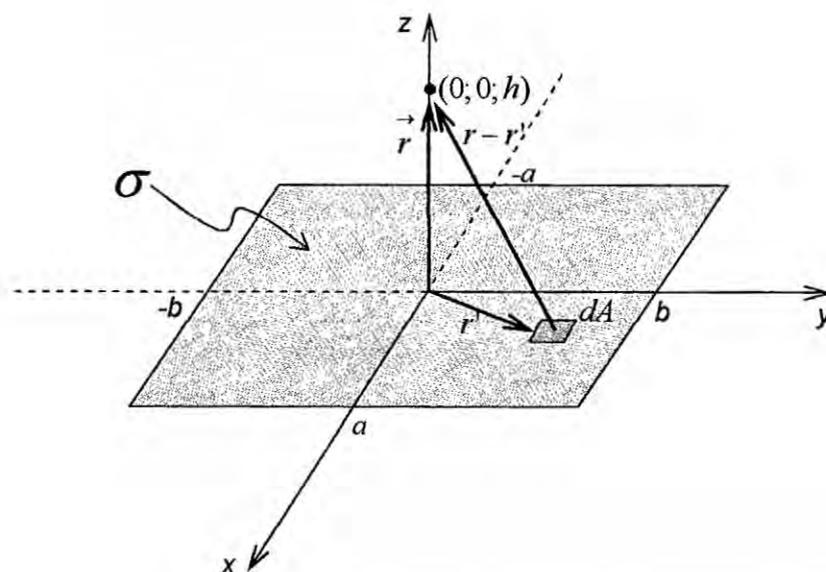
Problema N° 5

Demostrar que el campo eléctrico en el punto $(0, 0, h)$, debido al rectángulo descrito por $-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$; $z = 0$ y que porta una carga uniforme de $\sigma (C/m^2)$ es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{ab}{h(a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}} \right) \hat{a}_z$$

Resolución

De acuerdo con el enunciado la figura correspondiente es:



La intensidad de campo eléctrico \vec{E} se determina de manera directa utilizando la siguiente ecuación:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dA}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \dots (1)$$

De la figura:

$$\vec{r} = h\hat{a}_z \quad ; \quad \vec{r}' = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y \quad ; \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (h^2 + x^2 + y^2)^{1/2} \quad ; \quad dA = dx \cdot dy$$

Reemplazamos en (1):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx \cdot dy}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} (h\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y)$$

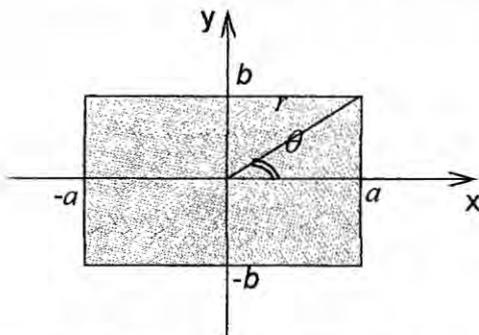
ff

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{h dx \cdot dy}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{a}_z - \iint \frac{x dx \cdot dy}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{a}_x - \iint \frac{y dx \cdot dy}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{a}_y$$

Debido a la simetría de la figura las dos últimas integrales son iguales a cero, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\vec{E} = \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0} \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} \frac{dx \cdot dy}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{a}_z \dots (2)$$

Pasando a coordenadas polares tenemos:



$$x = r \cos \theta ; \quad y = r \sin \theta ; \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Los límites de las integrales serán:

Para θ : 0 y $\arccos \operatorname{tg}(b/a)$

$$* \operatorname{tg} \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \arccos \operatorname{tg}(b/a)$$

Para r : 0 y $a \sec \theta$

$$* \cos \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = a \sec \theta$$

Luego, la ecuación (2) equivale a:

$$\vec{E} = \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0} \left[8 \int_{\theta=0}^{\arccos \operatorname{tg}(b/a)} \int_{r=0}^{a \sec \theta} \frac{r dr \cdot d\theta}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \hat{a}_z \right]$$

Evaluando esta integral obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arccos} \operatorname{tg} \left(\frac{ab}{h(a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}} \right) \hat{a}_z, \text{ lo cual queríamos demostrar.}$$

Prof

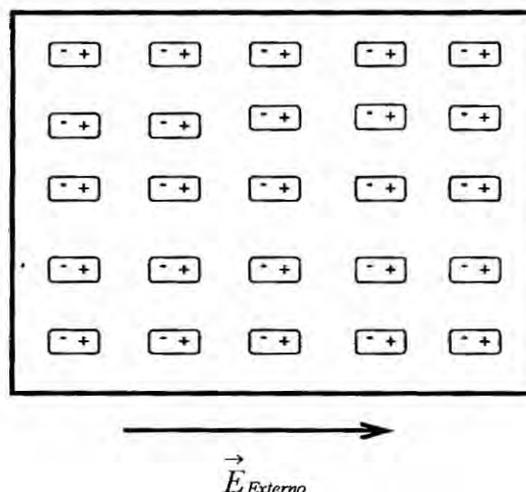
EL CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS DIELECTRICOS

3.1 DIELECTRICOS

Los dieléctricos ideales son materiales que no conducen las cargas eléctricas porque no tienen cargas libres, es decir, no poseen electrones capaces de desplazarse libremente a través del material bajo la influencia de un campo eléctrico.

Si a un dieléctrico le aplicamos un campo eléctrico externo, las cargas se reordenan en su interior, de manera de seguir siempre fuertemente ligadas a su núcleo. En este caso se dice que el dieléctrico se polarizó. En el dieléctrico polarizado cada molécula se convierte en un dipolo inducido, estos dipolos producen un nuevo campo eléctrico, que se suma al original. El efecto total, desde el punto de vista macroscópico, es más fácil de visualizar como un desplazamiento de toda la carga positiva en el dieléctrico con respecto a la carga negativa.

A continuación se muestra una porción de material dieléctrico polarizado.



fup

Un dieléctrico *polarizado*, aun siendo eléctricamente neutro en promedio, produce un campo eléctrico en los puntos exteriores e interiores del dieléctrico.

NOTA.- cuando el campo eléctrico en un dieléctrico es suficientemente grande, comienza a jalar los electrones para desprenderlos de las moléculas, y el dieléctrico se vuelve conductor. Entonces se dice que ha ocurrido **disrupción (ruptura o perforación) de un dieléctrico** cuando éste se vuelve conductor. El quebrantamiento de un dieléctrico ocurre en todas las clases de materiales dieléctricos (gases, líquidos y sólidos) y depende de la naturaleza del material, la temperatura, la humedad y el tiempo en que se aplica el campo. El valor mínimo del campo eléctrico al que ocurre la disrupción dieléctrica se llama **resistencia o rigidez dieléctrica** del material dieléctrico. Es decir, la resistencia dieléctrica es el campo eléctrico máximo que puede tolerar o soportar un dieléctrico sin disrupción. En la siguiente tabla se muestra la rigidez dieléctrica para algunos materiales.

TABLA DE RIGIDEZ DIELECTRICA PARA ALGUNOS MATERIALES

Material	Rigidez dieléctrica (V/m)
Aire (a presión atmosférica)	$3 \cdot 10^6$
Aceite mineral	$15 \cdot 10^6$
Papel	$15 \cdot 10^6$
Poliestireno	$20 \cdot 10^6$
Caucho	$25 \cdot 10^6$
Vidrio	$30 \cdot 10^6$
Mica	$200 \cdot 10^6$

IMPORTANCIA DE LOS DIELECTRICOS

- 1) Proporcionan una mayor resistencia a la ruptura del aire (hay mayor rigidez dieléctrica), y por lo tanto permiten una mayor diferencia de potencial. Los dieléctricos resisten más que el aire, y por lo tanto se les puede aplicar mayores voltajes sin que la carga pase por el espacio.

- 2) Aumentan la capacitancia de un capacitor.
- 3) Proporcionan un medio mecánico para mantener la separación constante entre las placas y evitar que halla contacto entre los conductores.

TABLA DE CONSTANTES DIELECTRICAS (K) DE VARIAS SUSTANCIAS A 20°C

Vacío	1
Aire (1 atm)	1,00059
Teflón	2,1
Polietileno	2,25
Benceno	2,28
Cloruro de polivinilo	3,18
Mica	3 - 6
Cuarzo	4,3
Vidrio	5 - 10
Germanio	16
Glicerina	42,5
Agua	80,4

3.2 POLARIZACION (\vec{P})

La polarización es una cantidad vectorial que caracteriza el comportamiento electrostático de un medio dieléctrico. Se define como el momento dipolar por unidad de volumen.

$$\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}}, \quad \vec{p} = \text{momento dipolar eléctrico}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \int_V \vec{P} dv$$

La **densidad superficial de polarización** (σ_{pol}) es una cantidad escalar que se define por:

$$\boxed{\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}}$$

Donde: \hat{n} = vector unitario normal; \vec{P} = vector polarización

ful

la **densidad volumétrica de polarización** (ρ_{pol}) es una cantidad escalar que se define por:

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

3.3 CONSIDERACIONES A TOMARSE EN CUENTA EN MATERIALES DIELECTRICOS

1. El efecto macroscópico de la polarización (reordenamiento de las cargas eléctricas) en un volumen determinado de un material dieléctrico, origina sobre la superficie una carga de polarización ($Q_{Pol(s)}$) y deja dentro del material una acumulación de carga por polarización ($Q_{Pol(v)}$).

Se cumple que:

$$Q_{Pol(s)} = \oint_S \sigma_{Pol} dA$$

$$Q_{Pol(v)} = \int_V \rho_{Pol} dV$$

Donde: $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$

σ_{Pol} = densidad superficial de polarización

\vec{P} = vector polarización

\hat{n} = vector unitario normal

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

ρ_{Pol} = densidad volumétrica de polarización

* Si se reemplaza $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$, la carga superficial de polarización queda igual a

$$Q_{Pol(s)} = \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} dA = -\oint_S P dA$$

* Si se reemplaza $\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$, la carga volumétrica de polarización queda igual a

$$Q_{Pol(v)} = \int_V (-\nabla \cdot \vec{P}) dV$$

fuf

2. En un medio dieléctrico, los vectores \vec{D} y \vec{E} están relacionados en la forma:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

De la ecuación anterior se concluye que la polarización \vec{P} queda expresada por la siguiente ecuación:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \vec{D}$$

Donde:

ϵ = permitividad del medio (permitividad absoluta) = $\epsilon_0 \epsilon_r$

ϵ_0 = permitividad del vacío = $8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m

ϵ_r = permitividad relativa o constante dieléctrica.

* A ϵ_r también se le representa con la letra K . Es decir: $\epsilon_r = K$

3. La susceptibilidad eléctrica χ de un medio dieléctrico mide la sensibilidad del material a un campo eléctrico.

Se cumple que: $\chi = \epsilon_r - 1$, o también: $\chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$

4. Un material dieléctrico es lineal si se satisface que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, es decir, si ϵ es independiente de \vec{E} . Es homogéneo si ϵ es independiente de la posición, y es isotrópico si ϵ es escalar.

3.4 CONDICIONES EN LA FRONTERA

Son las condiciones que deben satisfacerse en la interfaz que separa dos medios diferentes. Las condiciones en la frontera deben ser satisfechas por un campo eléctrico que existe en dos medios diferentes separados por una interfaz. Estas condiciones son útiles para determinar el campo que existe en uno de los lados de la frontera, si se conoce el campo del otro lado.

ful

a) **CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA UNA INTERFAZ DIELECTRICO - DIELECTRICO.**

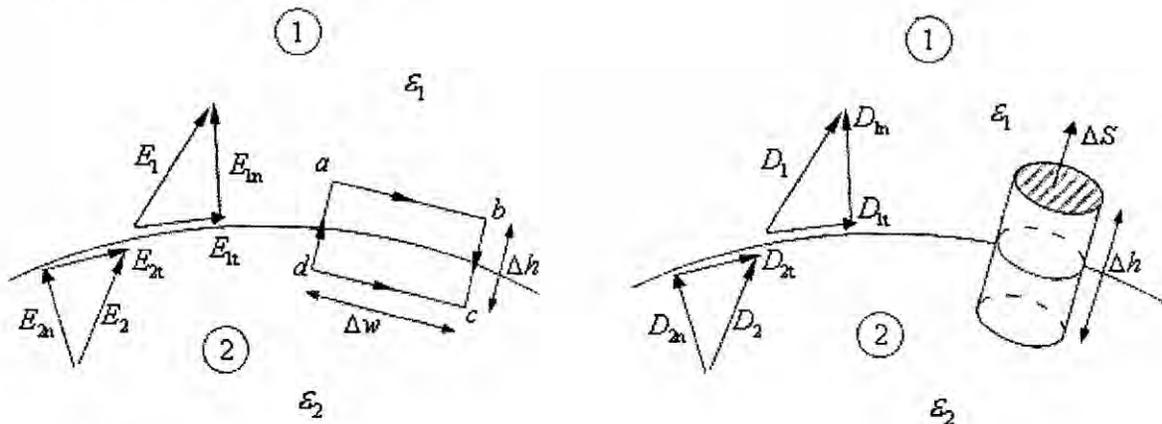
Se cumple que:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (E_t \text{ es continuo de un lado a otro de la frontera})$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma, \quad \sigma = \text{densidad superficial de carga libre}$$

Esta ecuación es válida si suponemos que \vec{D} está dirigido de la región (2) a la región (1).

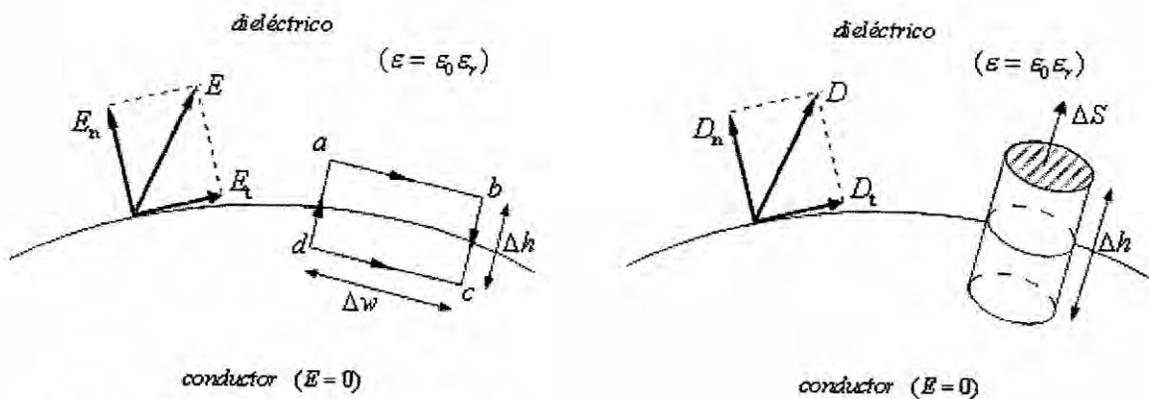
O bien: $D_{1n} = D_{2n}$, si $\sigma = 0$



b) **CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA UNA INTERFAZ CONDUCTOR - DIELECTRICO.**

Se cumple que:

$$D_t = \epsilon_0 \epsilon_r E_t = 0 \quad \text{y} \quad D_n = \epsilon E_n = \sigma$$



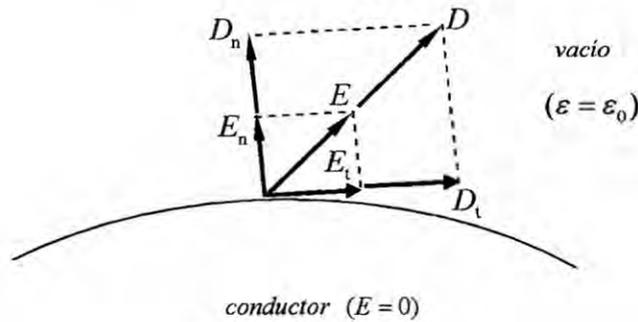
Porque $E = 0$ dentro del conductor.

fup

c) CONDICIONES EN LA FRONTERA CONDUCTOR-VACÍO

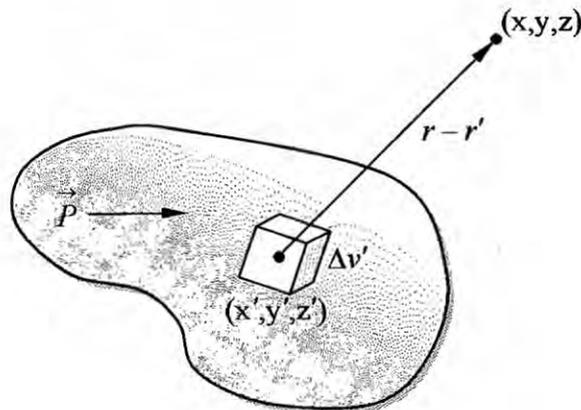
Se cumple que:

$$D_t = \epsilon_0 E_t = 0 \quad ; \quad D_n = \epsilon_0 E_n = 0$$



3.5 CAMPO ELÉCTRICO FUERA DE UN MEDIO DIELECTRICO

Si tenemos una porción finita de material dieléctrico polarizado, es decir, que está caracterizada en cada punto \vec{r} por una polarización $\vec{P}(\vec{r})$. La polarización da origen a un campo eléctrico, y lo que se debe hacer es calcular este campo en un punto \vec{r} que está fuera de la masa del dieléctrico (ver figura). Para ello primero se calcula el potencial $\phi_{(\vec{r})}$ y luego obtenemos el campo eléctrico como menos el gradiente de ϕ .



Al realizar los cálculos se obtiene:

ful

- Para el potencial debido al material dieléctrico en la posición \vec{r}

$$\varphi_{(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_0} \frac{\sigma_{pol} dA'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_{pol} dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_{pol}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- Para el campo eléctrico en la posición \vec{r}

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_0} \sigma_{pol} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} dA' + \int_{V_0} \rho_{pol} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} dV' \right]$$

NOTA.- esta última ecuación da la contribución del medio al campo eléctrico en \vec{r} , independientemente de si \vec{r} está dentro o fuera del medio. Por lo tanto, esta ecuación también puede utilizarse para calcular el campo eléctrico dentro de un dieléctrico.

3.6 DESPLAZAMIENTO ELECTRICO (\vec{D})

Es un campo vectorial que se define de la siguiente forma:

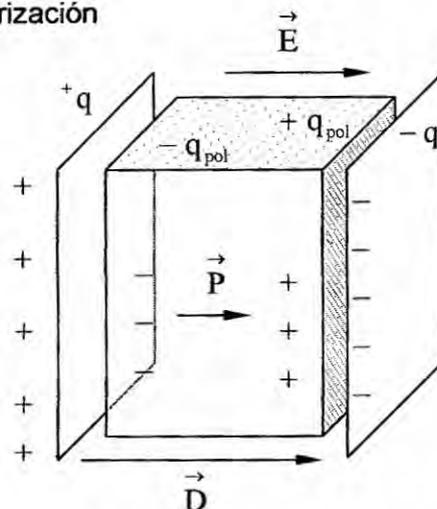
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

donde:

ϵ_0 = permitividad del vacío o del espacio libre.

\vec{E} = vector campo eléctrico

\vec{P} = vector polarización



ful

OBSERVACIONES:

1. Los vectores \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} son paralelos.
2. En el vacío: $\vec{P} = 0$, entonces $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$
3. Para campos no muy intensos y en la mayoría de los dieléctricos el vector \vec{P} varía linealmente con \vec{E} , lo que se expresa: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$
Donde la constante χ es la susceptibilidad eléctrica del dieléctrico.

3.7 LEY DE GAUSS EN UN DIELECTRICO

Para el caso de materiales dieléctricos, la ley de Gauss toma las siguientes formas:

Forma integral: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{LIBRE}}$ Donde:
 Q_{LIBRE} = carga libre encerrada por la superficie gaussiana

Forma diferencial: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ Donde:
 ρ = densidad de carga volumétrica

3.8 RECOMENDACIONES PARA RESOLVER PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN LOS QUE INTERVIENEN DIELECTRICOS

- La ecuación fundamental ha utilizar es: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
- Si los dieléctricos con los que estamos trabajando son lineales, isótropos y homogéneos, entonces $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, siendo ϵ la permitividad absoluta. Entonces la ley de Gauss (forma diferencial) queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

- Dado que el campo electrostático \vec{E} puede deducirse de un potencial escalar ϕ , es decir $\vec{E} = -\nabla\phi$, entonces al reemplazar \vec{E} en la ecuación anterior tenemos que

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Por tanto, el potencial en el dieléctrico satisface la ecuación de Poisson.

- En la mayoría de los casos de interés, el dieléctrico no contiene cargas distribuidas en todo su volumen, es decir $\rho = 0$ dentro del material dieléctrico. La carga está sobre las superficies de los conductores o se concentra en forma de cargas puntuales que pueden, por cierto, estar dentro del dieléctrico. En estas circunstancias, el potencial satisface la ecuación de Laplace en todo el dieléctrico:

$$\nabla^2\phi = 0$$

En algunos problemas puede haber una densidad superficial de carga, σ , sobre la superficie de un cuerpo dieléctrico o en la zona interfacial entre dos materiales dieléctricos, pero esto no altera la situación y la ecuación de Laplace sigue siendo aplicable mientras $\rho = 0$.

Un problema electrostático en el que intervienen dieléctricos lineales, isótropos y homogéneos se reduce, por tanto, a hallar las soluciones de la ecuación de Laplace en cada medio y relacionar las soluciones en los diversos medios con las condiciones en la frontera ya conocidas.

fin

3.9 PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS DIELECTRICOS

Problema N° 1

Un capacitor de placas paralelas tiene sus placas en $x = 0$ y en $x = d$, y el espacio entre las placas está lleno de un material no homogéneo con permitividad $\epsilon = \frac{2d\epsilon_0}{(x+d)}$.

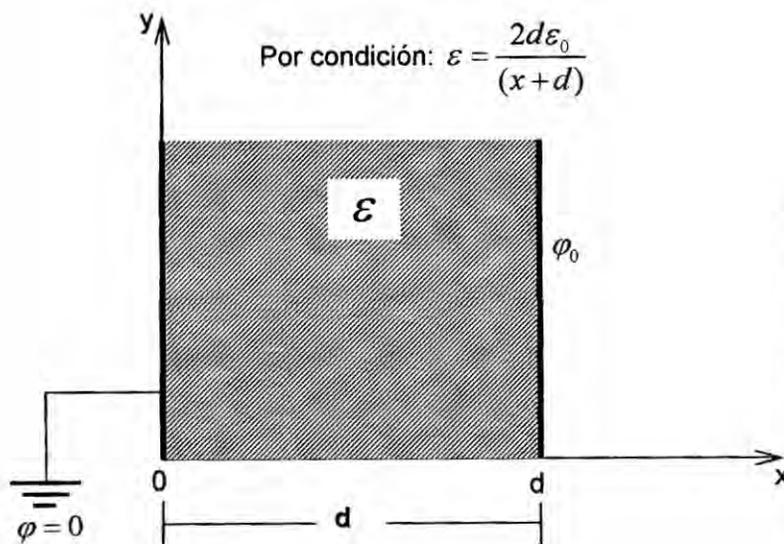
Si la placa en $x = d$ se mantiene a φ_0 cuando está a tierra la placa en $x = 0$, encuentre:

- La intensidad de campo eléctrico \vec{E}
- La polarización \vec{P}
- La densidad superficial de carga de polarización σ_{pol}
- La capacitancia cuando $d = 2,5mm$ y cada placa tiene un área de 200 cm^2 .

Desprecie el efecto de borde.

Resolución

Según el enunciado la figura es la que se muestra a continuación.



Como se observa en la figura, se trata de un capacitor plano con dieléctrico, y con una de sus placas conectada a tierra.

Sabemos que:

- En un capacitor plano el campo eléctrico sólo existe en su interior, es decir en la región comprendida entre las placas del capacitor.
- El campo eléctrico \vec{E} está dirigido de la placa de mayor potencial eléctrico hacia la placa de menor potencial. Por lo tanto, en nuestro caso el vector \vec{E} está dirigido hacia la izquierda.
- La magnitud de \vec{E} en las cercanías de un conductor, cualesquiera que sea, viene dada por: $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Donde σ es la densidad superficial de carga de una las placas conductoras del capacitor.

a) Cálculo de \vec{E} (intensidad de campo eléctrico)

Tal como se explicó, en este caso el vector \vec{E} está dirigido hacia la izquierda (de la placa de mayor potencial hacia la menor potencial), por lo tanto se cumple:

$$\vec{E} = E(-\hat{a}_x)$$

Luego:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \hat{a}_x$$

Reemplazando $\epsilon = \frac{2d\epsilon_0}{(x+d)}$ queda: $\vec{E} = -\frac{\sigma(x+d)}{2d\epsilon_0} \hat{a}_x \dots (1)$

Para hallar " σ " utilizo la ecuación que relaciona el potencial φ con el campo eléctrico \vec{E} . Es decir:

$$\varphi_a - \varphi_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Reemplazo \vec{E} :

$$\varphi_0 - \varphi_{Tierra} = -\int_0^d -\frac{\sigma(x+d)}{2d\epsilon_0} \cdot dx \hat{a}_x$$

ful

$$\varphi_0 = \frac{\sigma}{2d\epsilon_0} \int_0^d (x+d) dx = \frac{\sigma}{2d\epsilon_0} \left(\frac{3d^2}{2} \right) \implies \sigma = \frac{4\varphi_0\epsilon_0}{3d}$$

Reemplazando "σ" en la ecuación (1) y simplificando obtenemos:

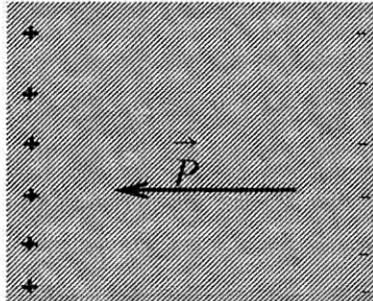
$$\vec{E} = -\frac{2\varphi_0(x+d)}{3d^2} \hat{a}_x$$

b) Cálculo de \vec{P} (vector polarización)

Se sabe que: $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

Reemplazando \vec{E} y ϵ obtenemos: $\vec{P} = -\frac{2\varphi_0\epsilon_0(d-x)}{3d^2} \hat{a}_x$

En la figura mostrada a continuación se observa al dieléctrico polarizado y al vector polarización \vec{P} .



c) Cálculo de σ_{Pol}

Se sabe que: $\sigma_{Pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$

* Para $x=0$: $\hat{n} = -\hat{a}_x \implies \sigma_{Pol} = \frac{2\varphi_0\epsilon_0}{3d}$

* Para $x=d$: $\hat{n} = +\hat{a}_x \implies \sigma_{Pol} = 0$

d) Cálculo de "C" (capacitancia)

La capacitancia se define por: $C = \frac{Q}{\varphi_{ab}}$

Luego: $C = \frac{\sigma A}{\varphi_0} = \frac{4\epsilon_0 A}{3d} \implies C = 94,4 pF$

fal

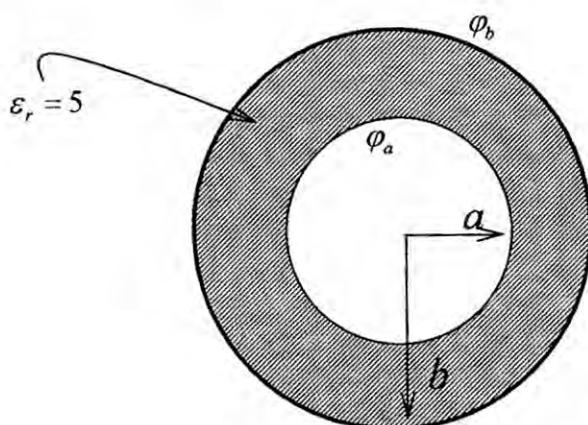
Problema N° 2

Dos esferas conductoras concéntricas con radios de 3 y 5 cm, tienen la región entre ellas rellena de un dieléctrico homogéneo para el cual $\epsilon_r = 5$. Si el potencial de la esfera interior es 100 V mientras que la del exterior es de -100 V, determine:

- a) El potencial eléctrico $\varphi_{(r)}$
- b) La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$
- c) El valor de r para el cual $\varphi = 0$
- d) La carga Q sobre la esfera interior
- e) La capacitancia entre las dos esferas

Resolución

Según el enunciado la figura es:



Datos:

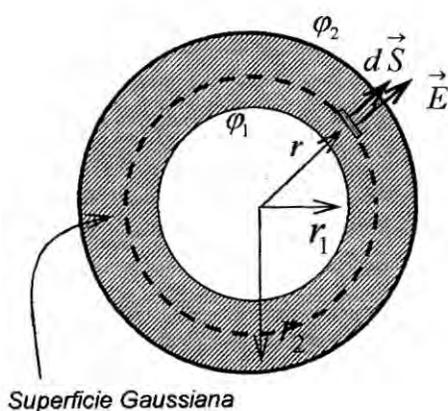
$a = 3\text{cm} = 0,03\text{m}$

$b = 5\text{cm} = 0,05\text{m}$

$\varphi_a = 100\text{V}$

$\varphi_b = -100\text{V}$

a) Cálculo del potencial eléctrico $\varphi_{(r)}$



Por ley de Gauss en dieléctricos:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{Libre}}$$

$$D(4\pi r^2) = Q \implies D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Luego:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \therefore \vec{E} = \frac{Q}{20\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r; \quad a < r < b$$

ful

Para conocer el valor del campo eléctrico \vec{E} necesito conocer Q (carga libre encerrada por la superficie gaussiana = carga de la esfera conductora de radio 3 cm). Esta carga Q la hallo aplicando la ecuación que relaciona el potencial con el campo eléctrico:

$$\varphi_a - \varphi_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$200V = -\int_{0,05}^{0,03} \frac{Q}{20\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \cdot dr \hat{a}_r \quad \Rightarrow \quad Q = 300\pi\epsilon_0$$

Reemplazando la carga Q tenemos que el campo eléctrico \vec{E} es: $\vec{E} = \frac{15}{r^2} \hat{a}_r$

Luego, el potencial $\varphi_{(r)}$ viene dado por: $\varphi_{(r)} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Es decir: $\varphi_{(r)} = -\int \frac{15}{r^2} dr = \frac{15}{r} + C$

* Si $r = 0,03m \Rightarrow \varphi_{(r=0,03m)} = 100V = \frac{15}{0,03m} + C \Rightarrow C = -400V$

$$\therefore \varphi_{(r)} = \left(\frac{15}{r} - 400 \right) V$$

b) Cálculo de la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$

Como ya se conoce el potencial eléctrico $\varphi_{(r)}$, entonces el campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$ se halla aplicando gradiente de potencial. Es decir:

$$\vec{E}_{(r)} = -\nabla \varphi_{(r)}$$

Al hallar el gradiente de potencial, obtenemos que el campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$ viene dado por:

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{15}{r^2} \hat{a}_r \left(\frac{V}{m} \right)$$

ful

c) Cálculo de r para el cual $\varphi = 0$

Se halló que el potencial eléctrico es igual a $\varphi_{(r)} = \left(\frac{15}{r} - 400 \right) V$.

Igualando a cero esta ecuación y despejando r obtengo que:

$$r = 0,0375 \text{ m} = 3,75 \text{ cm}$$

d) Cálculo de la carga eléctrica Q sobre la esfera interior

Para calcular la carga eléctrica Q sobre la esfera conductora interior, utilizo:

$$Q = \int_S \sigma dA$$

Donde:

$$\sigma = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \hat{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \epsilon_0 (5) \left(\frac{15}{r^2} \hat{a}_r \right) \cdot \hat{a}_r = \frac{75 \epsilon_0}{r^2} \left(\frac{C}{m^2} \right)$$

$$dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

La carga eléctrica Q queda expresada por:

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{75 \epsilon_0}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad \Rightarrow \quad Q = 300 \pi \epsilon_0 = 8,34 \text{ nC}$$

e) Cálculo de la capacitancia entre las dos esferas

La capacitancia se define por $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$; donde: $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = 200V$

$$\Rightarrow C = \frac{8,34 \text{ nC}}{200V} = 41,7 \text{ pF}$$

fel

MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

Cuando la distribución de carga no se especifica de antemano, para resolver problemas electrostáticos se utilizan los siguientes métodos:

- Ecuación de Poisson
- Ecuación de Laplace
- Método de imágenes electrostáticas

4.1 PRIMER MÉTODO: ECUACIÓN DE POISSON

Relaciones básicas:

$$1. \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \dots (I)$$

$$2. \vec{E} = -\nabla\phi \dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \longrightarrow \quad -\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

\therefore $\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$ Ecuación de Poisson

* En el espacio libre o vacío, la ecuación de Poisson viene dada por:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales que puede resolverse una vez que se conoce la dependencia funcional de r y las condiciones adecuadas en la frontera.

Para resolver un problema determinado, debemos expresar el laplaciano en función de un sistema de coordenadas (la elección es arbitraria). Se elije un sistema compatible con la simetría del problema electrostático.

FORMAS QUE TOMA $\nabla^2\varphi$ EN LOS DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS

EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z)

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (ρ, ϕ, z)

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

EN COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{Sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2\theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

4.2 SEGUNDO MÉTODO: ECUACIÓN DE LAPLACE

Se utiliza para resolver ciertos problemas electrostáticos donde intervienen conductores. En este caso toda la carga se encuentra ya sea sobre la superficie de los conductores o en forma de cargas puntuales fijas, por lo tanto $\rho = 0$ en la mayoría de los puntos del espacio.

Donde se anula la densidad de carga ρ , la ecuación de Poisson se reduce a la forma más sencilla:

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (\text{Ecuación de Laplace})$$

Hay dos métodos para la solución de la ecuación de Laplace:

1. Hallar una solución general a partir de soluciones particulares en un sistema coordenado exigido por la simetría del problema.
2. Utilizar el método de imágenes.

PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

TEOREMA N° 1 :

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ son soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n$$

donde las C son constantes arbitrarias, también es una solución.

TEOREMA N° 2 (TEOREMA DE UNICIDAD)

Dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones en la frontera difieren cuando menos en una constante aditiva.

ECUACION DE LAPLACE CON UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Si φ es función de una sola variable, la ecuación de Laplace se reduce a una ecuación diferencial ordinaria.

A) EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z)

Según Laplace, el laplaciano de la función " φ " debe ser igual a cero, es decir:

$$\nabla^2 \varphi = \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}_0 = 0$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden es igual a cero cuando cada uno de sus términos es igual a cero. Si los igualamos a cero cada uno de estos términos y los resolvemos integrando dos veces, la solución que se obtiene en cada caso es la que se muestra en recuadro.

- Si $\varphi = \varphi(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \therefore \boxed{\varphi(x) = Ax + B}$

- Si $\varphi = \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \therefore \boxed{\varphi(y) = Ay + B}$

- Si $\varphi = \varphi(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \therefore \boxed{\varphi(z) = Az + B}$

Donde A y B son constantes elegidas de tal modo que se cumplen las condiciones de frontera.

B) EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (ρ, ϕ, z):

En este caso, la ecuación de Laplace es:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Al igualar cada término a cero tenemos:

- Si $\varphi = \varphi(\rho) \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0 \therefore \boxed{\varphi(\rho) = A \ln \rho + B}$

- Si $\varphi = \varphi(\phi) \Rightarrow \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \therefore \boxed{\varphi(\phi) = A \phi + B}$

- Si $\varphi = \varphi(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \therefore \boxed{\varphi(z) = Az + B}$

C) EN COORDENADAS ESFERICAS (r, θ, ϕ):

En coordenadas esféricas, la ecuación de Laplace es igual a:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \text{ Sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{Sen } \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{ Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

Al igualar cada término a cero tenemos:

ful

- Si $\varphi = \varphi(r)$ $\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad \therefore \boxed{\varphi(r) = -\frac{A}{r} + B}$

- Si $\varphi = \varphi(\theta)$ $\Rightarrow \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \therefore \boxed{\varphi(\theta) = A \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} \theta / 2) + B}$

- Si $\varphi = \varphi(\phi)$ $\Rightarrow \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad \therefore \boxed{\varphi(\phi) = A \phi + B}$

ECUACIÓN DE LAPLACE PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

A) EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z):

Si la función " φ " depende de "x" e "y", la ecuación de Laplace se reduce a lo siguiente:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial de segundo orden se aplica el método de separación de variables. Aplicando este método, para un valor dado de K la solución general a la ecuación de Laplace bidimensional, en coordenadas rectangulares, es:

$$\varphi_{(x,y)} = \sum_k (A_k e^{kx} + B_k e^{-kx}) (C_k \cos ky + D_k \operatorname{sen} ky)$$

Esta última ecuación se puede escribir como:

$$\varphi_{(x,y)} = \sum_k (A_k \cosh kx + B_k \operatorname{senh} kx) (C_k \cos ky + D_k \operatorname{sen} ky)$$

NOTAS:

* K toma cualquier valor, pero al imponer condiciones de frontera a $\varphi_{(x,y)}$, se restringen los valores posibles de K.

Prof

* Si se intercambian las variables "x" e "y" en las dos ecuaciones anteriores, entonces resultan dos ecuaciones más que también son soluciones generales a la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas rectangulares.

B) EN COORDENADAS ESFERICAS

Si la función φ depende sólo de las variables r y θ , la ecuación de Laplace se reduce a lo siguiente:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{Sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se resuelve por el método de separación de variables. Aplicando este método se obtiene las soluciones conocidas como armónicos esféricos.

La solución general a la ecuación de Laplace bidimensional, en coordenadas esféricas, es:

$$\varphi_{(r,\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}] P_n(\theta)$$

Donde $P_n(\theta)$ son los llamados polinomios de Legendre. Los cuatro primeros polinomios de Legendre se dan en la siguiente tabla:

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

D) EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Si la función φ depende sólo de las coordenadas ρ y ϕ (φ es independiente de la coordenada z), la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas puede resolverse también por el método de separación de variables. Estas soluciones son apropiadas para ciertos problemas en los que intervienen:

- un conductor cilíndrico
- un alambre recto y largo

No debe usarse cuando se trata de un segmento cilíndrico corto.

Si el potencial es independiente de z , la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se convierte en:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

Sustituyendo $\varphi = Y(\rho) S(\phi)$, la ecuación se reduce a:

$$\frac{\rho}{Y} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dY}{d\rho} \right) = - \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\phi^2} = K$$

Donde K = constante de separación.

La ecuación para ϕ es sencilla y tiene por soluciones $\text{Cos } K^{1/2} \phi$ y $\text{Sen } K^{1/2} \phi$; pero para que estas soluciones tengan sentido físico, cada uno debe ser una función univalente de ϕ , por lo que:

$$\text{Cos } K^{1/2} (\phi + 2\pi) = \text{Cos } K^{1/2} \phi$$

$$\text{Sen } K^{1/2} (\phi + 2\pi) = \text{Sen } K^{1/2} \phi$$

En la ecuación de ρ , podemos verificar fácilmente que $Y(\rho)$ es ρ^n ó ρ^{-n} ; a menos que $n = 0$ cuando $Y(\rho) = \text{Ln } \rho$ o $Y(\rho) = \text{cte}$.

En consecuencia, las soluciones buscadas de la ecuación de Laplace, que se denominan **armónicos cilíndricos**, son:



	Ln ρ
$\rho^n \text{Cos } n \phi$	$\rho^{-n} \text{Cos } n \phi$
$\rho^n \text{Sen } n \phi$	$\rho^{-n} \text{Sen } n \phi$

Estas funciones forman un conjunto completo para las variables ρ , ϕ , en coordenadas cilíndricas.

Además, aplicando la condición :

$$\varphi(\rho, \phi) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi) \text{ (UNICIDAD)}$$

Tenemos :

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{Sen } n \phi + B_n \text{Cos } n \phi) (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$$

La solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \phi) = & A_0 + B_0 \text{Ln } \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \text{Cos } n \phi + B_n \text{Sen } n \phi) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (C_n \text{Cos } n \phi + D_n \text{Sen } n \phi) \end{aligned}$$

4.3 MÉTODO DE LAS IMÁGENES ELECTROSTATICAS

Este método se aplica comúnmente para determinar el potencial eléctrico φ , la intensidad de campo eléctrico \vec{E} , la densidad de flujo eléctrico \vec{D} y la densidad de carga superficial σ debidos a cargas en presencia de conductores. Al aplicar este método evitamos resolver la ecuación de Poisson o de Laplace, y se aprovecha el hecho que una superficie conductora es una superficie equipotencial.

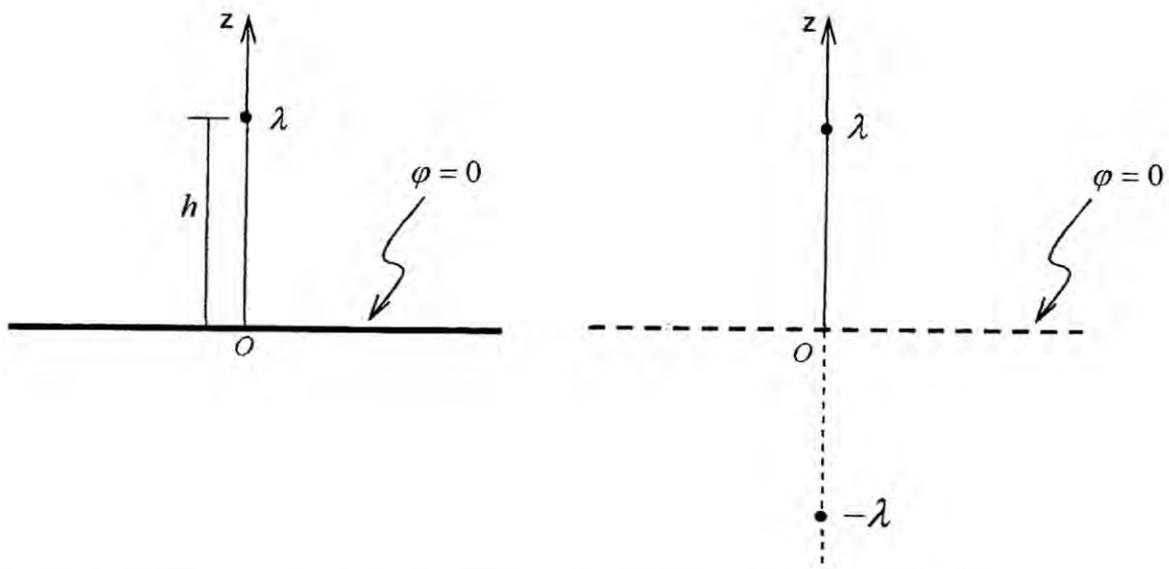
La teoría de imagen establece que una configuración de carga determinada cerca de un plano conductor puesto a tierra puede ser reemplazada por la configuración misma de carga, su imagen y una superficie equipotencial en lugar del plano conductor.

Cuando se aplica el método de imágenes electrostáticas tienen que cumplirse siempre dos condiciones:

- 1) La carga o cargas imagen deben estar situadas en la región conductora.
- 2) La carga o cargas imagen deben estar situadas en forma tal que en la superficie o superficies conductoras el potencial sea cero o constante.

Ejemplo de aplicación: CARGA LINEAL POR ARRIBA DE UN PLANO CONDUCTOR PUESTO A TIERRA

Sea un hilo muy largo con densidad de carga lineal $+\lambda$ situado a una distancia h de un plano conductor puesto a tierra. Si la carga $+\lambda$ está ubicada en $x = 0, z = h$, su imagen $-\lambda$ está ubicada en $x = 0, z = -h$, de manera que las dos son paralelas al eje y .



CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO EN EL PUNTO P

Para hallar \vec{E}_P se utiliza el principio de superposición aplicado a los campos eléctricos. Esto significa que la intensidad de campo eléctrico resultante en el punto P es igual a la suma de las intensidades de campo eléctrico debido a la carga lineal $+\lambda$ y a su carga imagen $-\lambda$.

Es decir:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P(+\lambda)} + \vec{E}_{P(-\lambda)}$$

fup

Como se trata de un hilo muy largo (hilo infinito), la magnitud de \vec{E} es conocida, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\vec{E}_{(P)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \hat{a}_{r_1} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} (-\hat{a}_{r_2}) \dots (1)$$

De la figura:

$$\vec{r}_1 = (x, y, z) - (0, y, h) = (x, 0, z-h) \implies r_1 = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$$

$$\vec{r}_2 = (x, y, z) - (0, y, -h) = (x, 0, z+h) \implies r_2 = \sqrt{x^2 + (z+h)^2}$$

Asimismo:

$$\hat{a}_{r_1} = \frac{(x, 0, z-h)}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} = \frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}}$$

$$\hat{a}_{r_2} = \frac{(x, 0, z+h)}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} = \frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}}$$

Reemplazando en la ecuación (1) y simplificando obtenemos:

$$\vec{E}_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{x^2 + (z-h)^2} - \frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{x^2 + (z+h)^2} \right]$$

CÁLCULO DEL POTENCIAL ELÉCTRICO EN EL PUNTO P

El potencial φ_P lo hallo también aplicando el principio de superposición. Es decir:

$$\varphi_P = \varphi_{P(+\lambda)} + \varphi_{P(-\lambda)}$$

Reemplazando los potenciales en el punto P, debido a las cargas lineales $+\lambda$ y $-\lambda$, y simplificando, la ecuación anterior queda:

$$\varphi_P = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Reemplazando r_1 y r_2 obtenemos:

ful

$$\phi_P = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln} \left(\frac{x^2 + (z-h)^2}{x^2 + (z+h)^2} \right)^{1/2}, \quad \text{para } z \geq 0$$

CÁLCULO DE LA CARGA SUPERFICIAL INDUCIDA EN EL PLANO CONDUCTOR

La carga superficial inducida en el plano conductor se halla evaluando el campo

eléctrico \vec{E}_P en $z = 0$. Es decir:

$$\sigma = \epsilon_0 E_z \Big|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{\lambda h}{\pi(x^2 + h^2)}$$

Nota.- se comprueba también que la carga inducida por unidad de longitud en el plano conductor es igual a $-\lambda$.

4.4 PROBLEMAS RESUELTOS DE MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

Problema N° 1

Cierta densidad de carga volumétrica en el espacio libre varía como $\rho = 100\epsilon_0 / r^{2.5}$.

a) Utilizando la ecuación de Poisson encuentre $\varphi_{(r)}$ si se supone que $r^2 E_r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, mientras que $\varphi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. b) Ahora encuentre $\varphi_{(r)}$ usando la ley de Gauss y una integral de línea.

Resolución

a) Cálculo de $\varphi_{(r)}$ utilizando la ecuación de Poisson

En el espacio libre o vacío, la ecuación de Poisson viene dada por:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \dots (1)$$

Por condición: $\rho = 100\epsilon_0 / r^{2.5}$

Reemplazando " ρ " en (1), tenemos:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{-100}{r^{2.5}} \dots (2)$$

Se sabe que en coordenadas esféricas, cuando $\varphi = \varphi_{(r)}$ (el potencial eléctrico sólo depende de la coordenada r), el Laplaciano queda:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Luego, la ecuación (2) equivale a: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{-100}{r^{2.5}}$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de 2do grado. Para resolverla, despejo $r^2 dr$ e integro por primera vez y obtengo:

$$\int d\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = -100 \int \frac{dr}{r^{0.5}}$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dr} = -200 r^{0.5} + C_1, \text{ luego:}$$

$$d\phi = (-200 r^{-1.5} + C_1 r^{-2}) dr$$

A continuación, integro por segunda vez y obtengo:

$$\phi_{(r)} = \frac{400}{r^{0.5}} - \frac{C_1}{r} + C_2 \dots (3)$$

De la ecuación (3) se observa que para conocer el potencial $\phi_{(r)}$ necesito conocer el valor de las constantes C_1 y C_2 . Para hallar estas constantes, primero calculo el campo eléctrico \vec{E} , aplicando gradiente de potencial, y luego aplicamos las condiciones de frontera dadas en el problema. Es decir:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{(r)} = -\nabla\phi_{(r)} = \left(\frac{200}{r^{1.5}} - \frac{C_1}{r^2}\right) \hat{a}_r \dots (4)$$

Hallo las constantes C_1 y C_2 aplicando las Condiciones de Frontera (C.F.):

1ra C.F.) $r^2 E_r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$

Evaluando esta condición en la ecuación (4), queda:

$$r^2 \left(\frac{200}{r^{1.5}} - \frac{C_1}{r^2}\right) = 0 \text{ cuando } r \rightarrow 0$$

Resolviendo obtengo que: $C_1 = 0$

2da C.F.) $\phi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$

Evaluando esta condición en la ecuación (3), queda:

$$\frac{400}{r^{0.5}} - C_1 + C_2 = 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty ; \text{ (se halló que } C_1 = 0)$$

$$\text{Luego: } C_2 = \frac{-400}{\infty} \Rightarrow C_2 = 0$$

ful

Finalmente reemplazo las constantes C_1 y C_2 en la ecuación (3) y obtengo la función potencial $\varphi_{(r)}$:

$$\varphi_{(r)} = \frac{400}{r^{0,5}} = \frac{400}{\sqrt{r}} \text{ (Volt)}$$

b) Cálculo de $\varphi_{(r)}$ utilizando la Ley de Gauss y una integral de línea:

Por Ley de Gauss, en su forma integral, tenemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} ; Q = \int_V \rho dV \quad \dots \text{ (I)}$$

Por condición del problema: $\rho = \frac{100\epsilon_0}{r^{2,5}}$

Reemplazando esta condición, así como los vectores $\vec{E} = E \hat{a}_r$ y

$d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r$, y el elemento diferencial de volumen

$dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$, la ecuación (I) queda:

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} E r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^r \frac{100\epsilon_0}{r^{2,5}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$E r^2 (2)(2\pi) = 100 \int_{r=0}^r r^{-0,5} dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$E(4\pi r^2) = 800\pi r^{0,5} \implies E = \frac{200}{r^{1,5}} \quad \therefore \vec{E} = \frac{200}{r^{1,5}} \hat{a}_r$$

Para hallar $\varphi_{(r)}$, conociendo el campo eléctrico \vec{E} , utilizo: $\varphi_{(r)} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Al reemplazar $\vec{E} = \frac{200}{r^{1,5}} \hat{a}_r$ y $d\vec{r} = dr \hat{a}_r$, tenemos:

$$\varphi_{(r)} = -\int \frac{200}{r^{1,5}} dr \implies \varphi_{(r)} = \frac{400}{r^{0,5}} + C \quad \dots \text{ (II)}$$

fw

Para hallar la constante "C" aplicamos la condición de frontera siguiente:

$$\text{Si } r \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_{(r \rightarrow \infty)} = 0$$

$$\text{Luego: } 0 = \frac{400}{\infty} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Reemplazando la constante C en la ecuación (II), tenemos:

$$\varphi_{(r)} = \frac{400}{\sqrt{r}} \text{ (Volt)}$$

Problema N° 2

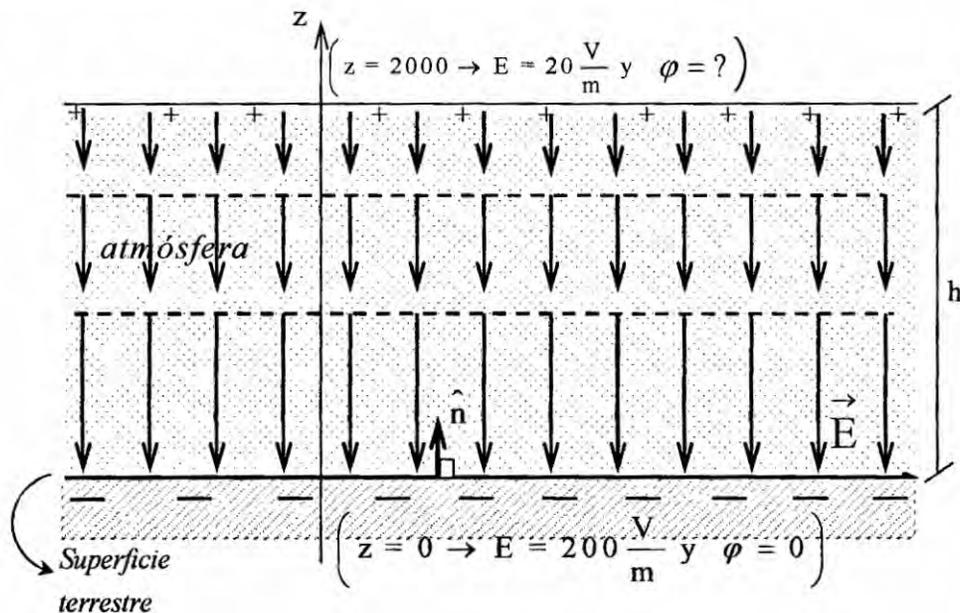
Desde el punto de vista electrostático la tierra puede considerarse como una esfera conductora con carga negativa y rodeada de una atmósfera cargada positivamente. La magnitud del campo eléctrico en la superficie es de unos 200 V/m, y a una altura de 2 000 m disminuye hasta unos 20 V/m. Hasta esa altura, $h = 2\,000$ m, la densidad volumétrica de carga puede considerarse constante. Considere que el radio de la tierra es $R = 6\,400$ Km.

- Determine la densidad de carga superficial media de la tierra.
- Calcule la densidad de carga volumétrica de la atmósfera hasta la altura h indicada.
- Si tomamos el potencial de la tierra como referencia (0 volt) ¿Cuál será su valor a 2000 m?

Nota: puede aproximarse el problema mediante una geometría plana, ya que $h \ll R$.

Resolución

Según el enunciado nuestro modelo de atmósfera es el siguiente:



(Se observa que el modelo de atmósfera se va a comportar como un capacitor plano)

ful

a) Cálculo de σ (densidad de carga superficial) de la tierra:

Se sabe que la densidad de carga superficial viene dada por: $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$

Según datos: $\vec{E} = -200 \hat{a}_z \frac{V}{m}$ (para $z = 0$); además $\hat{n} = + \hat{a}_z$

Luego: $\sigma = \epsilon_0 (-200 \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_z \Rightarrow \sigma = -200 \epsilon_0$

Reemplazando $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$, se obtiene que: $\sigma = -1\,770 \frac{pC}{m^2}$

b) Cálculo de " ρ " (densidad de carga volumétrica)

Por ecuación de Poisson: $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \dots (1)$

En coordenadas rectangulares, cuando $\varphi = \varphi(z)$ (el potencial sólo depende de la coordenada z), el laplaciano de φ queda:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

Reemplazando en (1): $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Resolviendo esta ecuación diferencial de segundo grado, obtenemos:

$$\varphi = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + C_1 z + C_2 \dots (2)$$

Aplico la condición de frontera: $\varphi = 0$; si $z = 0$

Evaluando la ecuación (2) para $z = 0$ obtenemos: $C_2 = 0$

Además, sabemos que: $\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{d\varphi}{dz} \hat{a}_z$, entonces:

$$\vec{E} = (C_1 - \frac{\rho z}{\epsilon_0})(-\hat{a}_z) \Rightarrow E = C_1 - \frac{\rho z}{\epsilon_0} \dots (3)$$

Aplico condición de frontera: $z = 0 \rightarrow E = 200 \frac{V}{m} \Rightarrow C_1 = 200 \frac{V}{m}$

Reemplazando C_1 en (3) obtengo: $E = \left(200 - \frac{\rho z}{\epsilon_0} \right) \frac{V}{m} \dots (4)$

Por condición de frontera: si $z = 2000m \rightarrow E = 20 \frac{V}{m}$

Evaluando la ecuación (4) para $z = 2000m$ obtenemos:

$$\rho = 9.10^{-2} \epsilon_0 \Rightarrow \rho = 7,965.10^{-13} \frac{C}{m^3}$$

c) Cálculo de φ para $z = 2000m$:

Se halló que: $\varphi = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + 200z$

Luego, si $z = 2000m \Rightarrow \varphi = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Volt}$

Problema N° 3

En coordenadas cilíndricas, la densidad volumétrica de carga es $\rho_v = \left(\frac{10}{\rho} \right) \frac{pC}{m^3}$.

Si $\varphi = 0$ en $\rho = 1m$ y $\varphi = 100V$ en $\rho = 4m$, los cuales se deben a la distribución de la carga, halle:

a) φ en $\rho = 3m$; b) \vec{E} en $\rho = 2m$

* Considere que se trata de un problema de electrostática en el vacío.

Resolución

a) Cálculo de " φ " en $\rho = 3m$

Por ecuación de Poisson, en el vacío, se cumple: $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \dots (1)$

Por condición: $\rho_v = \left(\frac{10^{-11}}{\rho} \right) \frac{C}{m^3}$, luego, la ecuación queda: $\nabla^2 \varphi = -\frac{10^{-11}}{\rho \epsilon_0} \dots (2)$

ful

En coordenadas cilíndricas, cuando "φ" (potencial eléctrico) sólo depende de "ρ", el laplaciano queda:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)$$

Por lo tanto la ecuación (2) equivale: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = -\frac{10^{-11}}{\rho \epsilon_0}$

Resolviendo esta ecuación diferencial, obtenemos:

$$\varphi = -\frac{10^{-11}}{\epsilon_0} \rho + A \ln \rho + B \dots (3)$$

Hallamos las constantes A y B aplicando las condiciones de frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si $\rho = 1\text{m}$: $\varphi_{(\rho=1)} = 0\text{ V}$

Evaluando la ecuación (3) para $\rho = 1\text{m}$, tenemos:

$$0 = -\frac{10^{-11}}{\epsilon_0} + B \Rightarrow B = \frac{10^{-11}}{\epsilon_0}$$

2da C.F.) Si $\rho = 4\text{m}$: $\varphi_{(\rho=4)} = 100\text{ V}$

Evaluando la ecuación (3) para $\rho = 4\text{m}$, tenemos:

$$100\text{V} = -\frac{4 \cdot 10^{-11}}{\epsilon_0} + A \ln 4 + \frac{10^{-11}}{\epsilon_0} \Rightarrow A = \left(100\text{V} + \frac{3 \cdot 10^{-11}}{\epsilon_0} \text{V} \right) \frac{1}{\ln 4}$$

$$\therefore A = 72,1348\text{V} + \frac{2,164 \cdot 10^{-11}}{\epsilon_0} \text{V}$$

Reemplazando en (3):

$$\varphi = -\frac{10^{-11}}{\epsilon_0} \rho + \left(72,1348 + \frac{2,164 \cdot 10^{-11}}{\epsilon_0} \right) \ln \rho + \frac{10^{-11}}{\epsilon_0} \quad (\text{V})$$

Evaluamos "φ" para $\rho = 3\text{m}$: $\varphi_{(\rho=3)} = 79,67\text{ V}$

ful

b) Cálculo de \vec{E} cuando $\rho=2m$:

Se sabe que: $\vec{E} = -\nabla\phi$

En coordenadas cilíndricas, cuando " ϕ " sólo depende de la coordenada " ρ ", el

gradiente será: $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{a}_\rho$

Luego: $\vec{E} = -\nabla\phi = \left(\frac{10^{-11}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\rho} \left(72,1348 + \frac{2,164 \cdot 10^{-11}}{\epsilon_0} \right) \right) \hat{a}_\rho$

Evaluando \vec{E} para $\rho=2m$ obtenemos:

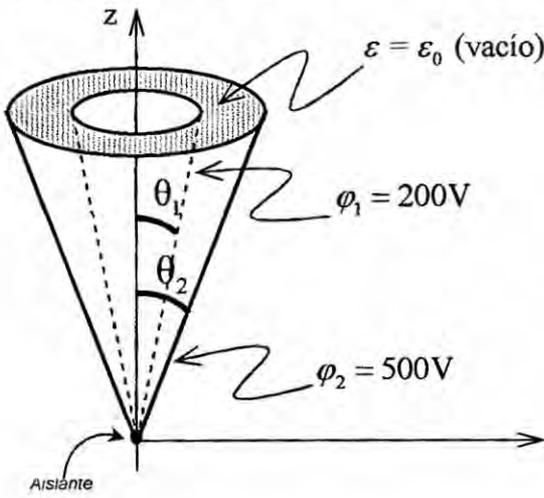
$$\vec{E} = (-36,16 \hat{a}_\rho) \frac{V}{m}$$

Problema N° 4

Dos conos conductores coaxiales tienen sus vértices en el origen y están definidos por $\theta_1 = 40^\circ$ y $\theta_2 = 55^\circ$. El cono interior está a un potencial de 2 000 V, mientras que el exterior está a 500 V. Una pequeña cantidad de aislante impide que los conos se toquen; a) encuentre $\phi_{(\theta)}$; b) determine ϕ en $P_1(r=0,6m; \theta=45^\circ; \phi=60^\circ)$; c) Calcule $\vec{E}_{(r;\theta)}$; d) encuentre \vec{E} en P_1 ; e) especifique la carga total sobre la superficie $\theta = 40^\circ$; $0,1m < r < 0,5m$; $100^\circ < \phi < 170^\circ$, suponiendo $\epsilon = \epsilon_0$ para $40^\circ < \theta < 55^\circ$.

Resolución

Según el enunciado la figura es la que se muestra a continuación:



Donde:
 $\theta_1 = 40^\circ$
 $\theta_2 = 55^\circ$

Jul

a) Cálculo de " $\varphi_{(\theta)}$ " :

Cuando el potencial " φ " sólo depende de la coordenada " θ ", la solución a la ecuación de Laplace a utilizar, en coordenadas esféricas, es:

$$\varphi_{(\theta)} = A \operatorname{Ln} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + B \quad \dots (1)$$

Hallamos las constantes A y B aplicando las condiciones de frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si $\theta = 40^\circ \Rightarrow \varphi_{(\theta=40^\circ)} = 2\,000\text{ V}$

Evaluando la ecuación (1) para $\theta = 40^\circ$, tenemos:

$$2\,000\text{ V} = A \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} 20^\circ) + B \quad \dots (2)$$

2da C.F.) Si $\theta = 55^\circ \Rightarrow \varphi_{(\theta=55^\circ)} = 500\text{ V}$

Evaluando la ecuación (1) para $\theta = 55^\circ$, tenemos:

$$500\text{ V} = \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} 27,5^\circ) + B \quad \dots (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3), obtenemos:

$$A = -4\,191,7473\text{ V} \quad ; \quad B = -2\,236,53\text{ V}$$

Reemplazando en la ecuación (1) tenemos:

$$\varphi_{(\theta)} = \left[-4\,191,7473 \operatorname{Ln} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - 2\,236,53 \right] \text{ V}$$

O también:

$$\varphi_{(\theta)} = \left[-4,19 \operatorname{Ln} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - 2,24 \right] \text{ kV}$$

b) Cálculo de " φ " para P_1 ($r = 0,6\text{ m}$; $\theta = 45^\circ$; $\phi = 60^\circ$)

Evaluando en la ecuación del potencial obtenida en a), tenemos: $\varphi = 1,458\text{ kV}$

c) Cálculo de $\vec{E}_{(r,\theta)}$

Como ya se calculó el potencial eléctrico " φ ", el campo eléctrico se halla aplicando

gradiente de potencial. Es decir: $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

Hallando el gradiente de ϕ , en coordenadas esféricas, resulta:

$$\vec{E} = \left(\frac{4,19}{r \operatorname{sen}\theta} \hat{a}_\theta \right) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

d) Cálculo de \vec{E} en $P_1(0,6 \text{ m}; 45^\circ; 60^\circ)$:

Evaluando en el punto P_1 obtenemos: $\vec{E} = (9,88 \hat{a}_\theta) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

e) Cálculo de la carga total sobre la superficie $\theta = 40^\circ$; $0,1 \text{ m} < r < 0,5 \text{ m}$;

$100^\circ < \phi < 170^\circ$, suponiendo $\epsilon = \epsilon_0$ para $40^\circ < \theta < 55^\circ$.

Por ley de Gauss: $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Despejando Q obtenemos:

$$Q = \oint_s \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Reemplazando los vectores \vec{E} y $d\vec{S}$ tenemos:

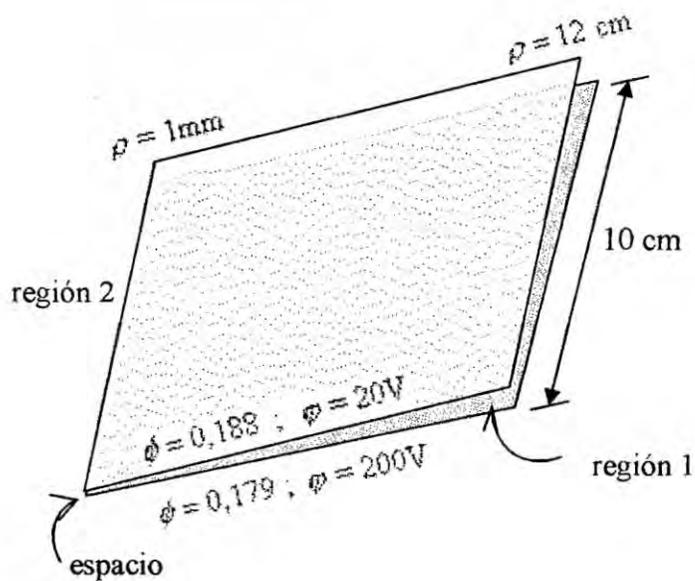
$$Q = \int_{0,1}^{0,5} \int_{100^\circ}^{170^\circ} \epsilon_0 \left(\frac{4,19}{r \operatorname{sen}40^\circ} \hat{a}_\theta \right) \cdot (r \operatorname{sen}40^\circ d\phi dr \hat{a}_\theta) = 4,19\epsilon_0 \left(\int_{0,1}^{0,5} dr \right) \left(\int_{100^\circ}^{170^\circ} d\phi \right)$$

$$\therefore Q = 18,14 \text{ nC}$$

Problema N° 5

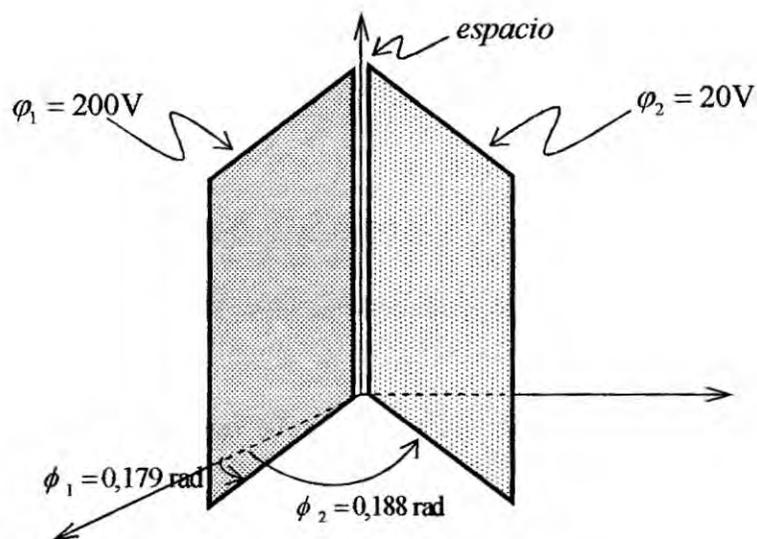
Los dos planos conductores mostrados en la figura están definidos por $0,001 \text{ m} < \rho < 0,120 \text{ m}$; $0 < z < 0,1 \text{ m}$; $\phi = 0,179 \text{ rad}$ y $\phi = 0,188 \text{ rad}$. El medio que rodea a los planos es aire. Para la región 1; $0,179 \text{ rad} < \phi < 0,188 \text{ rad}$ desprecie los efectos de borde y calcule: **a)** el potencial eléctrico ϕ en función de ϕ ; **b)** el campo eléctrico \vec{E} en función de ρ ; **c)** la densidad de flujo eléctrico \vec{D} en función de ρ . **d)** la densidad superficial de carga σ en la superficie superior del plano inferior. **e)** la carga Q en la superficie superior del plano inferior.

fuf



Resolución

La figura dada equivale a:



a) Cálculo de " $\varphi_{(\phi)}$ ":

En este caso el potencial " φ " sólo depende de la coordenada " ϕ ", luego la solución de la ecuación de Laplace a utilizar, en coordenadas cilíndricas, es:

$$\boxed{\varphi_{(\phi)} = A\phi + B} \quad \dots (1)$$

ful

Hallamos las constantes A y B aplicando las condiciones de frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si $\phi = 0,179$ rad : $\phi = 200$ V

Evaluando en la ecuación (1) tenemos:

$$A(0,179 \text{ rad}) + B = 200 \text{ V} \dots (2)$$

2da C.F.) Si $\phi = 0,188$ rad : $\phi = 20$ V

Evaluando en la ecuación (1) tenemos:

$$A(0,188 \text{ rad}) + B = 20 \text{ V} \dots (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3) obtenemos:

$$A = -20\,000 \text{ V} \quad \text{y} \quad B = 3\,780 \text{ V}$$

Reemplazando las constantes A y B en la ecuación (1) obtengo:

$$\phi_{(\phi)} = (-20\,000\phi + 3\,780) \text{ V}$$

b) Cálculo de \vec{E} : Si se sabe que : $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$\vec{E} = \left(\frac{20\,000}{\rho} \hat{a}_\phi \right) \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

c) Cálculo de " \vec{D} ": Se sabe : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \left(\frac{177}{\rho} \hat{a}_\phi \right) \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

d) Cálculo de " σ "

Se sabe que la densidad de carga superficial " σ " viene dada por:

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = \vec{D} \cdot \hat{n} \quad ; \quad \hat{n} = \text{Vector unitario normal}$$

Reemplazando : $\vec{D} = \left(\frac{177}{\rho} \hat{a}_\phi \right) \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ y $\hat{n} = \hat{a}_\phi$, tenemos: $\sigma = \frac{177 \text{ nC}}{\rho \text{ m}^2}$

e) Cálculo de "Q"

La carga "Q" en la superficie superior del plano inferior se halla por:

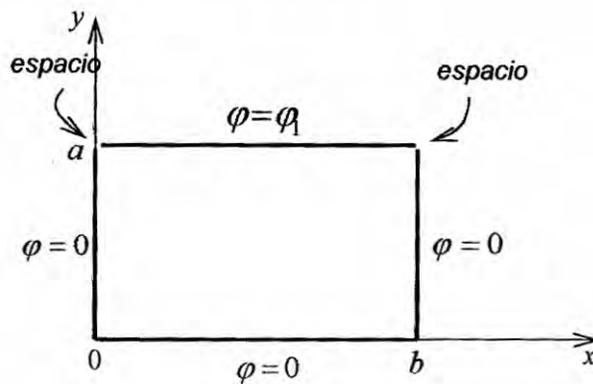
$$Q = \int_S \sigma \, dS = \int_{z=0}^{z=0,1} \int_{\rho=0,001}^{\rho=0,12} \frac{177}{\rho} \, d\rho \, dz = 177 \cdot 0,1 \cdot \text{Ln} \left(\frac{0,12}{0,001} \right)$$

$$\therefore Q = 84.74 \text{ nC}$$

Problema N° 6

Determine la función potencial para la región interior de la artesa rectangular de longitud infinita cuya sección transversal se ilustra en la figura.

Se sabe que: $\varphi_1 = \varphi_0 \text{ sen}(7\pi x / b)$, $y = a$, $0 \leq x \leq b$



Resolución

Por los datos dados en el enunciado deducimos que se trata de un problema bidimensional en coordenadas rectangulares o cartesianas.

Además, cuando el potencial " φ " es cero o nulo para las condiciones de frontera dependientes de x : $x = 0$ y $x = b$, la solución particular de la ecuación de Laplace que se utiliza es aquella donde las funciones seno y coseno dependen de x . Por lo tanto, la ecuación a utilizar es la siguiente:

$$\varphi_{(x,y)} = (A \cosh ky + B \sinh ky)(C \cos kx + D \sin kx) \dots (1)$$

Hallamos las constantes A, B, C y D aplicando las condiciones de frontera (C.F.)

siguientes:

1ra C.F.) Si $x = 0$: $\varphi_{(0,y)} = 0$ para $0 \leq y \leq a$

Evalúo la ecuación (1) para $x = 0$:

$$\varphi_{(0,y)} = (A \cosh ky + B \sinh ky)(C \cos 0 + D \sin 0) = 0$$

Sabemos que un producto de dos factores es cero cuando por lo menos uno de ellos es cero. En este caso, el segundo factor debe ser igual a cero.

Es decir:

$$\Rightarrow C(1) + D(0) = 0 \quad \therefore C = 0$$

2da C.F.) Si $y = 0$: $\varphi_{(x,0)} = 0$ para $0 \leq x \leq b$

Evalúo la ecuación (1) para $y = 0$:

$$\varphi_{(x,0)} = (A \cos 0 + B \sin 0)(C \cos kx + D \sin kx) = 0$$

En este caso, el primer factor debe ser igual a cero. Es decir:

$$A(1) + B(0) = 0 \quad \therefore A = 0$$

Reemplazo las constantes A y C en la ecuación (1):

$$\varphi_{(x,y)} = (B \sinh ky)(D \sin kx)$$

Hacemos: $B \cdot D = E$

Luego:

$$\varphi_{(x,y)} = E(\sinh ky)(\sin kx) \dots (2)$$

3ra C.F.) Si $x = b$: $\varphi_{(b,y)} = 0$ para $0 \leq y \leq a$

Evalúo la ecuación (2) para $x = b$:

$$\varphi_{(b,y)} = E(\sinh ky)(\sin kb) = 0$$

$$\sin kb = 0 = \sin(n\pi); \quad \forall n \geq 1$$

Luego:

$$kb = n\pi \quad \longrightarrow \quad k = \frac{n\pi}{b} ; \quad \forall n \geq 1$$

Reemplazo en la ecuación (2):

$$\varphi_{(x,y)} = E \left(\sinh \frac{n\pi}{b} y \right) \left(\sin \frac{n\pi}{b} x \right)$$

En general, tenemos:

$$\varphi_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\sinh \frac{n\pi}{b} y \right) \left(\sin \frac{n\pi}{b} x \right) \dots (3)$$

4ta C.F.) Si $y = a$: $\varphi_{(x,a)} = \varphi_0 \sin \left(\frac{7\pi}{b} x \right)$ para $0 \leq x \leq b$

Evalúo la ecuación (3) para $y = a$:

$$\varphi_{(x,a)} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\sinh \frac{n\pi a}{b} \right) \left(\sin \frac{n\pi}{b} x \right) = \varphi_0 \sin \left(\frac{7\pi}{b} x \right)$$

Desarrollando la serie tenemos:

$$E_1 \left(\sinh \frac{\pi}{b} a \right) \left(\sin \frac{\pi}{b} x \right) + \dots + E_7 \left(\sinh \frac{7\pi}{b} a \right) \left(\sin \frac{7\pi}{b} x \right) = \varphi_0 \sin \left(\frac{7\pi}{b} x \right)$$

Comparando ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$E_7 = \frac{\varphi_0}{\left(\sinh \frac{7\pi}{b} a \right)}$$

Además: $E_1 = E_2 = \dots = E_n = 0 ; \quad \forall n \neq 7$

Reemplazando E_1, E_2, \dots, E_n en la ecuación (3) tenemos que la solución

general es:

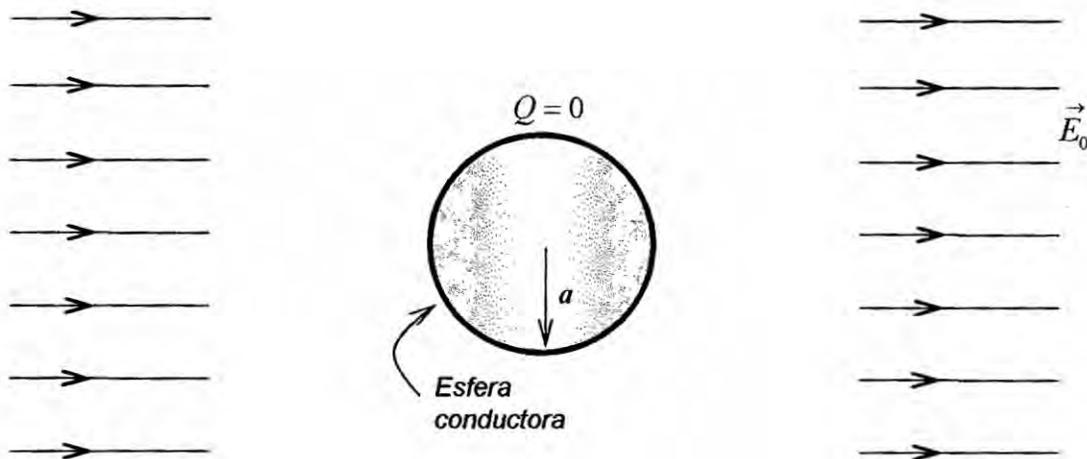
$$\varphi_{(x,y)} = \frac{\varphi_0 \left(\sinh \frac{7\pi}{b} y \right) \left(\sin \frac{7\pi}{b} x \right)}{\sinh \frac{7\pi}{b} a}$$

ful

Problema N° 7

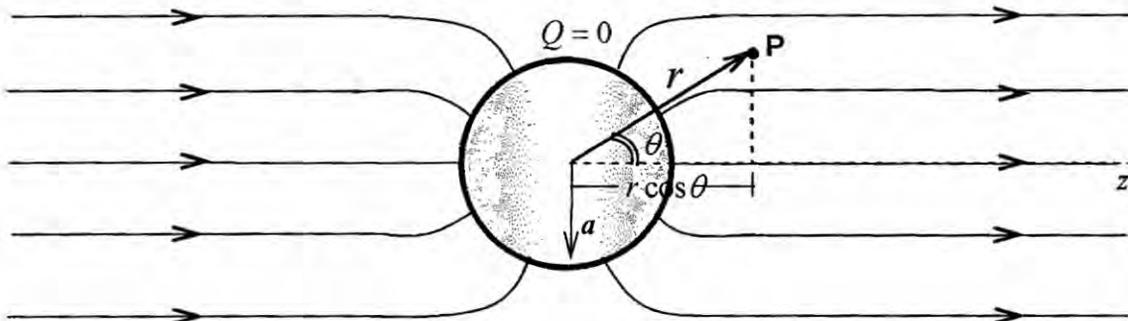
Una esfera conductora descargada de radio a se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme \vec{E}_0 (ver la figura). Calcule:

- El potencial eléctrico en puntos exteriores a la esfera
- La intensidad de campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera
- La densidad de carga resultante " σ " en la esfera.



Resolución

Como la esfera conductora está descargada ($Q = 0$), las líneas de fuerza del campo eléctrico en las cercanías de la esfera se comportan en la forma mostrada a continuación. Observe que estas líneas de fuerza ingresan (o salen) perpendicularmente a la superficie de la esfera, la cual a su vez es una superficie equipotencial. En este caso, el potencial de la esfera es igual a cero porque la carga de la esfera es cero.



ful

a) Cálculo del potencial eléctrico “ $\varphi_{(r,\theta)}$ ” en puntos exteriores a la esfera

Si el potencial “ φ ” depende sólo de las coordenadas r y θ , la solución a la ecuación de Laplace son los armónicos esféricos. Es decir:

$$\varphi_{(r,\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}] P_n(\theta)$$

Desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 + \frac{C_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta + A_2 r^2 \cdot \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots + \frac{C_n}{r^{n+1}} P_n(\theta) \dots (1)$$

Hallamos las constantes A_0, A_1, \dots, A_n y C_0, C_1, \dots, C_n , aplicando las condiciones de frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si $r \rightarrow \infty$ (puntos lejanos de la esfera): $\vec{E}_{(r,\theta)}|_{r \rightarrow \infty} = \vec{E}_0$

Luego:

$$\varphi_{(r,\theta)}|_{r \rightarrow \infty} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}; \text{ donde: } \vec{E} = \vec{E}_0 = E_0 \hat{a}_z \text{ y } d\vec{r} = dz \hat{a}_z$$

$$\varphi_{(r,\theta)}|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z + cte = -E_0 r \cos \theta + cte \dots (2)$$

Igualamos las ecuaciones (1) y (2), y las evaluó para $r \rightarrow \infty$.

$$-E_0 r \cos \theta + cte = A_0 + \frac{C_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta + \dots$$

Comparando ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$A_0 = cte ; A_1 = -E_0$$

Además, todas las A a partir de A_2 son iguales a cero. Es decir:

$$A_2 = A_3 = \dots = A_n = 0 ; \quad \forall n \geq 2$$

Reemplazamos en la ecuación (1):

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 + \frac{C_0}{r} - E_0 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta + \dots + \frac{C_n}{r^{n+1}} P_n(\theta) \dots (3)$$

2da C.F.) La esfera está descargada, es decir su carga es igual a cero

fp

Si $Q=0$, entonces el término C_0/r es igual a cero, por lo tanto la constante

C_0 es igual a cero ($C_0 = 0$).

* Recuerde que el potencial de una esfera de radio r y carga Q , viene dado por $Q/4\pi\epsilon_0 r$.

Reemplazo en (3):

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta + \dots + \frac{C_n}{r^{n+1}} P_n(\theta) \dots \quad (4)$$

3ra C.F.) Si $r = a$: $\varphi_{(a,\theta)} = 0$ (potencial propio de la esfera)

Evaluando la ecuación (4) para $r = a$ obtenemos: $C_1 = a^3 E_0$

Además: $C_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

Reemplazando en la ecuación (4) tenemos:

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{a^3 \epsilon_0}{r^2} \cos \theta$$

$$\text{O también: } \varphi_{(r,\theta)} = A_0 - E_0 r \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$$

b) Cálculo de \vec{E} en puntos exteriores a la esfera

La intensidad de campo eléctrico \vec{E} lo hallamos aplicando gradiente de potencial, es decir:

$$\vec{E}_{(r,\theta)} = -\nabla \varphi_{(r,\theta)}$$

Hallando el gradiente del potencial en coordenadas esféricas, tenemos:

$$\vec{E}_{(r,\theta)} = E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \hat{a}_r + E_0 \sin \theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \hat{a}_\theta$$

c) Cálculo de σ de la esfera

Se cumple: $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$

En nuestro caso: $r = a$ y $\hat{n} = \hat{a}_r$.

Luego, la densidad de carga superficial σ de la esfera es: $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$

ful

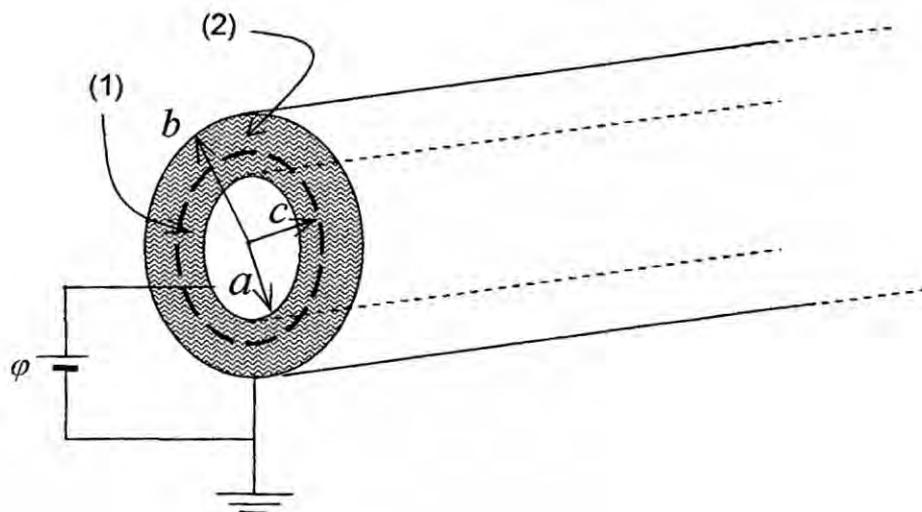
Problema N° 8

Los conductores de un cable coaxial muy largo tienen radios a y b ($a < b$). El conductor interior se halla a un potencial φ y el conductor exterior se halla conectado a tierra. Si la región $a < \rho < c$ se llena con un dieléctrico de permitividad ϵ_1 , y la región $c < \rho < b$ con un dieléctrico de permitividad ϵ_2 . Calcular:

- El potencial eléctrico φ , el campo eléctrico \vec{E} , la densidad de flujo eléctrico \vec{D} y la polarización \vec{P} en cualquier punto de la región $a < \rho < b$.
- La densidad superficial de carga libre en cada superficie conductora.
- Las densidades de polarización presentes

Resolución

Según el enunciado la figura correspondiente es:



Sabemos que un cable coaxial está constituido por dos conductores y uno o más materiales dieléctricos entre ellos. Además, en el enunciado nos dan los potenciales de estos conductores (condiciones de frontera), por lo tanto el problema se resuelve aplicando la ecuación de Laplace.

De la figura observamos que hay dos regiones, las cuales denominaremos: región (1) y región (2).

ful

a) Cálculo de $\vec{\varphi}$, \vec{E} , \vec{D} y \vec{P} para puntos $a < \rho < b$

Según el enunciado, el potencial eléctrico " φ " depende sólo de la coordenada ρ , por lo tanto la solución a la ecuación de Laplace a utilizar es:

$$\varphi_{(\rho)} = A \operatorname{Ln} \rho + B$$

Como en la región entre los conductores hay dos materiales dieléctricos, entonces esta ecuación se aplica para cada región, por lo tanto tenemos:

Para la región (1) $a < \rho < c$: $\varphi_{1(\rho)} = A_1 \operatorname{Ln} \rho + B_1 \dots (1)$

Para la región (2) $c < \rho < b$: $\varphi_{2(\rho)} = A_2 \operatorname{Ln} \rho + B_2 \dots (2)$

Las constantes A_1 , A_2 , B_1 y B_2 se hallan aplicando las condiciones de frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.: Si $\rho = b \implies \varphi_{2(\rho=b)} = 0$

Evaluando la ecuación (2) para $\rho = b$ tenemos:

$$0 = A_2 \operatorname{Ln} b + B_2 \implies B_2 = -A_2 \operatorname{Ln} b \dots (3)$$

2da C.F.: Si $\rho = a \implies \varphi_{1(\rho=a)} = \varphi$

Evaluando la ecuación (1) para $\rho = a$ tenemos:

$$\varphi = A_1 \operatorname{Ln} a + B_1 \implies B_1 = \varphi - A_1 \operatorname{Ln} a \dots (4)$$

3ra C.F.: Si $\rho = c$ (interfaz dieléctrico-dieléctrico) $\implies \varphi_{1(\rho=c)} = \varphi_{2(\rho=c)}$

Igualemos las ecuaciones (1) y (2) evaluando para $\rho = c$

$$A_1 \operatorname{Ln} c + B_1 = A_2 \operatorname{Ln} c + B_2 \dots (5)$$

4ta C.F.: Si $\rho = c$ (interfaz dieléctrico-dieléctrico) :

$$D_{2n} = D_{1n} \text{ (siempre que } \sigma = 0)$$

Luego, se cumple que: $\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$

fup

En esta igualdad hallo E_{2n} y E_{1n} utilizando gradiente de potencial.

Finalmente obtengo:

$$A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_1 \quad \dots \quad (6)$$

Reemplazando las ecuaciones (3), (4), (6) en (5) obtenemos:

$$A_1 = \frac{\varphi}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln(c/b) - \ln(c/a)} \quad ; \quad A_2 = \frac{\varphi}{\ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln(c/a)}$$

$$B_1 = \varphi - \frac{\varphi \ln a}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln(c/b) - \ln(c/a)} \quad ; \quad B_2 = -\frac{\varphi \ln b}{\ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln(c/a)}$$

Finalmente reemplazo estas constantes en las ecuaciones (1) y (2) y obtengo la función potencial para cada región.

$$\varphi_{1(\rho)} = \frac{\varphi \ln \rho}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln(c/b) - \ln(c/a)} + \varphi - \frac{\varphi \ln a}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln(c/b) - \ln(c/a)} \quad ; \quad a < \rho < c$$

$$\varphi_{2(\rho)} = \frac{\varphi \ln \rho}{\ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln(c/a)} - \frac{\varphi \ln b}{\ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln(c/a)} \quad ; \quad c < \rho < b$$

Hallo \vec{E} aplicando gradiente de potencial

Se sabe que: $\vec{E} = -\nabla \varphi$

Luego:

$$\vec{E}_{1(\rho)} = -\nabla \varphi_{1(\rho)} \Rightarrow \vec{E}_{1(\rho)} = -\frac{\varphi}{\rho \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln(b/c) + \ln(c/a) \right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad a < \rho < c$$

$$\vec{E}_{2(\rho)} = -\nabla \varphi_{2(\rho)} \Rightarrow \vec{E}_{2(\rho)} = -\frac{\varphi}{\rho \left(\ln(b/c) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln(c/a) \right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad c < \rho < b$$

fuf

Hallo \vec{D} utilizando la relación: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Luego:

$$\vec{D}_{1(\rho)} = \frac{\epsilon_1 \varphi}{\rho \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln(b/c) + \ln(c/a) \right)} \hat{a}_\rho ; a < \rho < c$$

$$\vec{D}_{2(\rho)} = \frac{\epsilon_2 \varphi}{\rho \left(\ln(b/c) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln(c/a) \right)} \hat{a}_\rho ; c < \rho < b$$

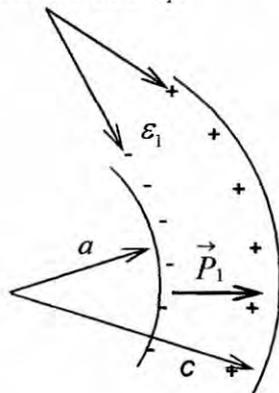
Hallo \vec{P} utilizando la relación: $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

$$\vec{P}_{1(\rho)} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \varphi}{\rho \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln(b/c) + \ln(c/a) \right)} \hat{a}_\rho ; a < \rho < c$$

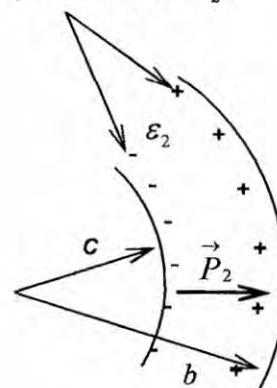
$$\vec{P}_{2(\rho)} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \varphi}{\rho \left(\ln(b/c) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln(c/a) \right)} \hat{a}_\rho ; c < \rho < b$$

En las figuras mostradas a continuación se observa porciones de material dieléctrico polarizado, de las regiones (1) y (2), y los correspondientes vectores polarización.

Cargas de polarización en el dieléctrico de permitividad ϵ_1 .



Cargas de polarización en el dieléctrico de permitividad ϵ_2 .



sup

b) Cálculo de "σ" para cada superficie conductora

Sabemos: $\sigma = \epsilon \vec{E} \cdot \hat{n}$

Para la superficie de radio $\rho = a$: $\hat{n} = +\hat{a}_\rho$

$$\sigma_{(\rho=a)} = + \frac{\epsilon_1 \phi}{a \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln(b/c) + \ln(c/a) \right)}$$

Para la superficie de radio $\rho = b$: $\hat{n} = -\hat{a}_\rho$

$$\sigma_{(\rho=b)} = - \frac{\epsilon_2 \phi}{b \left(\ln(b/c) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln(c/a) \right)}$$

c) Cálculo de σ_{Pol} y ρ_{Pol}

Hallo σ_{Pol} aplicando la ecuación: $\sigma_{Pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$

Luego:

$$\text{Si } \rho = a: \hat{n} = -\hat{a}_\rho \implies \sigma_{Pol(\rho=a)} = - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \phi}{a \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln(b/c) + \ln(c/a) \right)}$$

$$\text{Si } \rho = b: \hat{n} = +\hat{a}_\rho \implies \sigma_{Pol(\rho=b)} = + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \phi}{b \left(\ln(b/c) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln(c/a) \right)}$$

Para hallar ρ_{Pol} utilizo la ecuación: $\rho_{Pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$

Al hallar la divergencia del vector polarización \vec{P} se obtiene como resultado cero, por lo tanto la densidad de carga volumétrica de polarización también es cero. Es decir:

$$\rho_{Pol} = 0$$

ful

CORRIENTE ELÉCTRICA

5.1 DEFINICION DE CORRIENTE ELÉCTRICA

La corriente eléctrica es un fenómeno físico producido por el movimiento de cargas eléctricas. Es decir, cuando las cargas eléctricas están en movimiento el efecto fundamental que originan es el denominado corriente eléctrica.

5.2 TIPOS DE CORRIENTE

El movimiento de cargas eléctricas origina dos tipos de corriente: corrientes de convección y corrientes de conducción.

Las *Corrientes de convección* están originadas por el movimiento de partículas con carga positiva o negativa (iones) en el vacío o en un gas enrarecido. Ejemplo: haces de electrones en un tubo de rayos catódicos y los violentos movimientos de partículas cargadas durante una tormenta. Las corrientes de convección implican un transporte de masa y no están regidas por la ley de Ohm.

Las *Corrientes de conducción* están originadas principalmente por el movimiento de electrones libres a través de un cuerpo conductor bajo la influencia de un campo eléctrico. Este tipo de corrientes está regido por la ley de ohm.

5.3 INTENSIDAD DE CORRIENTE ELECTRICA

Macroscópicamente, una corriente eléctrica se caracteriza por la intensidad de corriente I , que se calcula por:

$$I = \frac{dQ}{dt} ; \text{ donde la unidad SI de "I" es el ampere (A) = coulomb (C)/segundo(s)}$$



Microscópicamente, una corriente eléctrica puede ser descrita por un flujo de cargas debido a una densidad de corriente \vec{J} .

* Para una corriente de convección se cumple que: $\vec{J} = N q \vec{V}$ (en A/m²)

Donde: N = número de portadores de carga por unidad de volumen.

q = carga de los portadores.

\vec{V} = velocidad de los portadores de carga.

Además: $\rho = N q$ = densidad de carga volumétrica.

Entonces: $\vec{J} = \rho \vec{V}$

Si S es una superficie finita, la corriente que la atraviesa es:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

* En el caso de las corrientes de conducción puede haber más de un tipo de portador de carga (electrones, iones) moviéndose con distintas velocidades. Por lo tanto se cumple que:

$$\vec{J} = \sum_i N_i q_i \vec{V}_i \quad (\text{en A/m}^2)$$

Asimismo se cumple que: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (en A/m²)

Donde: σ = conductividad en siemens por metro (S/m)

Esta última ecuación es la forma puntual de la ley de Ohm.

5.4 LEY DE CONTINUIDAD Y LEY DE LA CORRIENTE DE KIRCHHOFF

Expresa la conservación de la carga: Todas las cargas, ya estén en reposo o en movimiento, deben considerarse en todo momento.

Considere un volumen arbitrario V limitado por una superficie S . Dentro de la región existe una carga neta Q . Si fluye una corriente I a través de la superficie hacia fuera de la región, la carga en el interior del volumen debe disminuir con una razón igual a la

ful

corriente. A la inversa, si fluye una corriente neta a través de la superficie hacia el interior de la región, la carga en el interior del volumen debe aumentar con una razón igual a la corriente. La corriente que sale de la región es el flujo total de salida del vector densidad de corriente a través de la superficie S. Tenemos:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie de \vec{J} , tenemos que:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}, \quad \text{o también:} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (\text{en A/m}^3)$$

* En el caso de corrientes estacionarias, la densidad de carga no cambia con el tiempo, $\partial \rho / \partial t = 0$. Por lo tanto, la ecuación anterior se convierte en:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

Por consiguiente, las corrientes eléctricas estacionarias tienen divergencia nula, es decir, son solenoidales. Esto quiere decir que las líneas de flujo de las corrientes estacionarias se cierran sobre sí mismas, a diferencia de las líneas de la intensidad de campo electrostático, que se originan y terminan en cargas. Esta última ecuación nos conduce a la siguiente forma integral para cualquier superficie cerrada:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0,$$

que puede escribirse como

$$\boxed{\sum_j I_j = 0}$$

Esta ecuación es una expresión de la *ley de corriente de Kirchhoff*. Establece que la *suma de algebraica de todas las corrientes que salen de una unión en un circuito eléctrico es cero*.

ful

5.5 CORRIENTES CONTINUAS Y LEY DE OHM

El caso de corrientes continuas se considera régimen estacionario, donde se cumple que:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\rho_{(r,t)} = \rho_{(r)}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Asimismo, en un régimen estacionario se cumple que el balance de corrientes que entra y sale de un nodo en un circuito suma cero. En ciertos materiales se ve que al aplicarles un campo eléctrico aparece una densidad de corriente, proporcional al campo. Esta relación se conoce como ley de Ohm.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \text{ donde: } \sigma = \text{conductividad del medio}$$

5.6 ECUACIONES QUE RIGEN EL FLUJO DE CORRIENTE CONTINUA

1) $\vec{E} = -\nabla\phi$

2) $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

3) $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

4) Si $\sigma = \text{constante}$, se cumple que: $\nabla^2\phi = 0$, además hay que agregar las condiciones de frontera.

5) ϕ Es continuo en todos los puntos donde \vec{E} es finito

6) $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

7) Continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico. Es decir:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 J_{1t} = \sigma_1 J_{2t}$$

ful

Observación: la componente tangencial de la densidad de corriente no es continua.

8) Continuidad de la componente normal de \vec{J} . Es decir:

$$J_{1n} = J_{2n} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

5.7 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Un circuito es una malla de resistencias, fuentes, condensadores, inductancias, etc., unidos por medio de conductores perfectos (poca resistencia).

Un nodo es un punto donde convergen dos o más conductores. Se cumple que en un nodo la suma de las corrientes es cero, es decir:

$$\sum I = 0 \quad (\text{Primera ley de Kirchoff})$$

Dos nodos son consecutivos si existe un camino por el circuito que los una sin pasar por otro nodo, y cada camino se llama rama.

La segunda ley de Kirchoff o ley de voltajes establece que la suma de las caídas de potencial en cada camino cerrado es igual a cero, es decir:

$$\sum V = 0$$

La potencia en un elemento del circuito con corriente continua o estacionaria es:

$$P = V I$$

En el caso de resistencias, esta potencia se disipa y se puede determinar en función del voltaje V o la corriente I , y el valor de la resistencia, mediante las siguientes ecuaciones:

$$P = (V^2/R) = I^2 R$$

ful

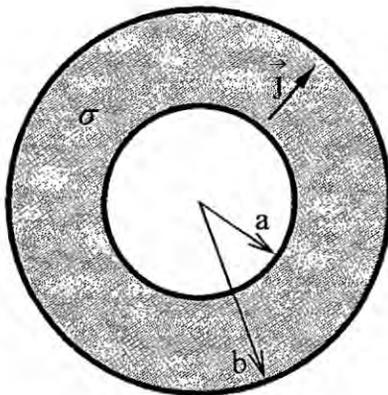
5.8 PROBLEMAS RESUELTOS DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Problema N° 1

Las superficies esféricas, de radios $a=2\text{ cm}$ y $b=6\text{ cm}$, son perfectamente conductoras y la región entre ellas está rellena con un material conductor para el cual $\sigma = 80 \text{ siemens/m}$. Si la densidad de corriente es $\vec{J} = (10/\pi r^2)\hat{a}_r \text{ A/m}^2$ para $2\text{ cm} < r < 6\text{ cm}$, encuentre: a) el flujo de corriente de un conductor perfecto al otro por unidad de longitud; b) el campo eléctrico \vec{E} ; c) la diferencia de potencial entre los conductores perfectos; d) la potencia total disipada en el material conductor por metro de longitud.

Resolución

Por tratarse de dos superficies esféricas de radios a y b , con un material conductor entre ellas, la figura correspondiente es:



Datos:

$$a = 2\text{ cm} = 0,02\text{ m}$$

$$b = 6\text{ cm} = 0,06\text{ m}$$

$$\sigma = 80 \text{ siemens/m}$$

$$\vec{J} = \left(\frac{10}{\pi r^2} \hat{a}_r \right) \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

a) Cálculo de "I" (intensidad de corriente eléctrica)

Cuando se conoce la densidad de corriente \vec{J} , la intensidad de corriente eléctrica I se halla aplicando:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \dots (1)$$

fuf

En coordenadas esféricas: $d\vec{S} = r^2 \text{Sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{a}_r$

Reemplazando $d\vec{S}$ en la ecuación (1) y resolviendo obtenemos: $I = 40 \text{ A}$

b) Cálculo de \vec{E} (intensidad de campo eléctrico) :

Por ley de Ohm: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Despejando \vec{E} tenemos:

$$\rightarrow \vec{E} = \left(\frac{10}{\pi r^2} \hat{a}_r \right) \left(\frac{1}{80} \right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{8\pi r^2} \hat{a}_r$$

c) Cálculo de " $\Delta\phi$ " (diferencia de potencial):

Conocido \vec{E} (ver cálculos en (b)), la diferencia de potencial $\Delta\phi$ se calcula utilizando la siguiente relación:

$$\Delta\phi = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} ;$$

Luego: $\Delta\phi = -\int_{0,06}^{0,02} \frac{1}{8\pi r^2} \hat{a}_r \cdot dr \hat{a}_r \Rightarrow \Delta\phi = 1,326 \text{ V}$

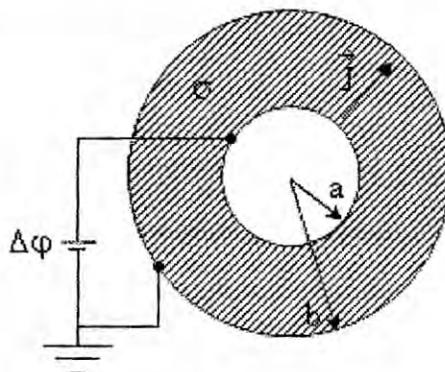
Otro método para hallar " $\Delta\phi$ ":

Por condición: $\sigma = 80 \text{ s/m}$, es decir " σ " es una cantidad constante, luego se cumple la ecuación de Laplace.

Si " ϕ " depende sólo de la coordenada " r ", la solución a la ecuación de Laplace a utilizar, es:

$$\phi_{(r)} = -\frac{A}{r} + B \dots (1)$$

Si la superficie de radio " b " la conectamos a tierra (potencial igual a cero), entonces la superficie de radio " a " estará a un potencial $\Delta\phi$ (ver la figura).



ful

A continuación aplico Condiciones de Frontera (C.F.) para hallar las constantes A y B:

1ra C.F.) Si $r = b$: $\varphi_{(r=b)} = 0$

$$\text{Luego: } 0 = -\frac{A}{0,06} + B \dots (2)$$

2da C.F.) Si $r = a$: $\varphi_{(r=a)} = \Delta\varphi$

$$\text{Luego: } \Delta\varphi = -\frac{A}{0,02} + B \dots (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3) obtengo: $A = -0,03\Delta\varphi$; $B = -0,5 \Delta\varphi$

Reemplazando en (1) obtengo: $\varphi_{(r)} = \frac{0,03\Delta\varphi}{r} - 0,5\Delta\varphi$

Hallo \vec{E} aplicando gradiente de potencial. Es decir: $\vec{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow \vec{E} = \frac{0,03\Delta\varphi}{r^2} \hat{a}_r$

Se halló que (ver cálculos en (b)): $\vec{E} = \frac{1}{8\pi r^2} \hat{a}_r$

Igualando ambas ecuaciones de \vec{E} , tenemos:

$$\frac{0,03\Delta\varphi}{r^2} \hat{a}_r = \frac{1}{8\pi r^2} \hat{a}_r \Rightarrow \Delta\varphi = 1,326 \text{ V}$$

d) Cálculo de "P" (Potencia disipada por el conductor)

La potencia disipada por un conductor de resistencia R se calcula por: $P = I^2 R$

Se halló que $I = 40 \text{ A}$. La resistencia eléctrica R se halla dividiendo $\Delta\varphi$ con I (1,326V/40A). Reemplazando "I" y "R" obtenemos:

$$P = 33,15 \text{ mW}$$

Problema N° 2

Dentro de la región $1 < \rho < 5\text{cm}$, $0 < \phi < 0,3\pi$, $0 < z < 2\text{cm}$, se tiene una densidad

de corriente dada como $\vec{J} = (200 \cos\phi) \hat{a}_\phi / (\rho + 0,01) \text{ A/m}^2$. a) ¿Cuál es la corriente en

la dirección de \hat{a}_ϕ que cruza la superficie: a) $\phi = 0$, $1 < \rho < 5\text{cm}$, $0 < z < 2\text{cm}$?

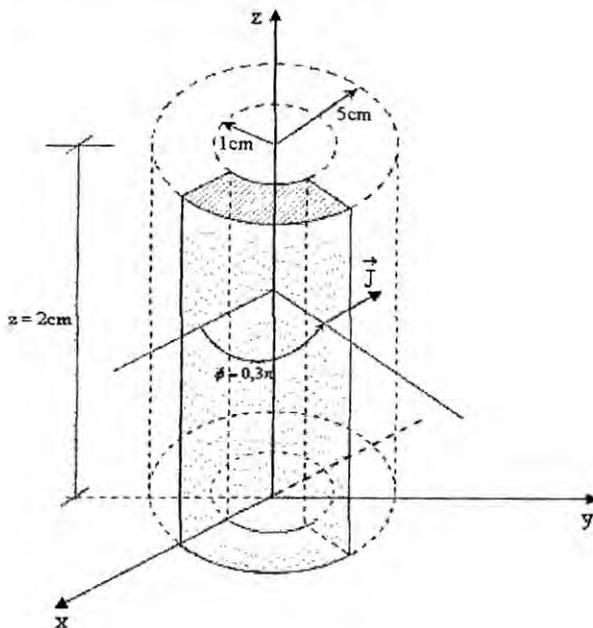
b) $\phi = 0,3\pi$, $1 < \rho < 5\text{cm}$, $0 < z < 2\text{cm}$?

c) Calcule $\nabla \cdot \vec{J}$ en $\rho = 2\text{cm}$, $\phi = 0,15\pi$ y $z = 1\text{cm}$.

ful

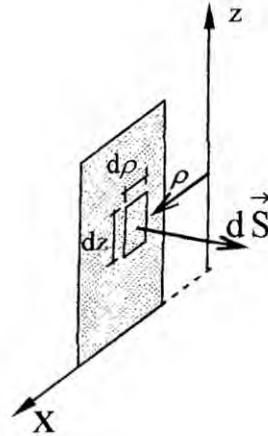
Resolución

Según el enunciado la figura sería:



Por condición:

$$\vec{J} = \frac{200 \cos \phi}{(\rho + 0,01)} \hat{a}_\phi \frac{A}{m^2}$$



a) Cálculo de "I" que cruza la superficie: $\phi = 0$, $1 < \rho < 5\text{cm}$, $0 < z < 2\text{cm}$

Sabemos: $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$; donde: $d\vec{S} = d\rho dz \hat{a}_\phi$

Luego:
$$I = \int_{\rho=0,01}^{0,05} \int_{z=0}^{0,02} \frac{200 \cos 0^\circ}{(\rho + 0,01)} \hat{a}_\phi \cdot d\rho dz \hat{a}_\phi$$

$$I = 200 \left(\int_{\rho=0,01}^{0,05} \frac{d\rho}{(\rho + 0,01)} \right) \left(\int_{z=0}^{0,02} dz \right) \Rightarrow I = 4 \text{ Ln}3 = 4,39 \text{ A}$$

b) Cálculo de "I" que cruza la superficie: $\phi = 0,3\pi$, $1 < \rho < 5\text{cm}$, $0 < z < 2\text{cm}$.

En este caso, la expresión de "I" quedará de la siguiente forma:

$$I = \int_{\rho=0,01}^{0,05} \int_{z=0}^{0,02} \frac{200 \cos(54^\circ)}{(\rho + 0,01)} \hat{a}_\phi \cdot d\rho dz \hat{a}_\phi = 2,58 \text{ A}$$

c) Cálculo de $\nabla \cdot \vec{J}$ en $\rho = 2\text{cm}$, $\phi = 0,15\pi$ y $z = 1\text{cm}$.

En coordenadas cilíndricas, la divergencia de \vec{J} sólo depende de la coordenada ϕ , tendrá la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{200 \cos \phi}{\rho + 0,01} \right] = \frac{-200 \text{sen} \phi}{\rho(\rho + 0,01)} = -151330,2$$

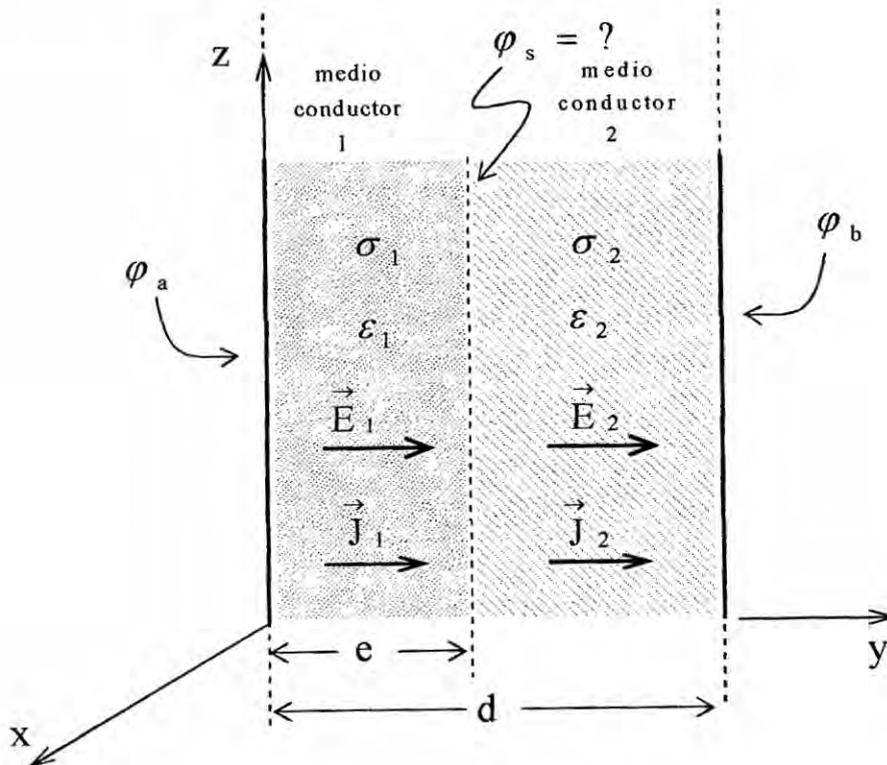
fu

Problema N° 3

Dos placas paralelas planas e infinitas de metal, están separadas una distancia d . El espacio entre las placas se llena con dos medios conductores, siendo la superficie de separación entre estos medios un plano paralelo entre las placas metálicas. El primer medio (conductividad σ_1 , permitividad ϵ_1) es de espesor e , y el segundo medio (conductividad σ_2 , permitividad ϵ_2) es de espesor $d - e$. Las placas metálicas se mantienen a los potenciales φ_a y φ_b , respectivamente. En el estado estacionario, ¿Cuál es el potencial de la superficie de separación de los dos medios y cuál es la densidad superficial de carga libre en esta superficie de separación?

Resolución:

En la figura siguiente se muestra las dos placas planas de metal descritas en el enunciado. Observe que en la región entre las placas hay dos medios conductores a los cuales denominaremos: medio conductor (1) y medio conductor (2).



Como en el medio (1): $\sigma_1 = cte$, y en el medio (2): $\sigma_2 = cte$, entonces para resolver este problema podemos aplicar la ecuación de Laplace.

fu

a) Cálculo de " $\varphi_{(s)}$ " (Potencial en la superficie de separación)

En este caso el potencial " φ " sólo depende de la coordenada "y", por lo tanto se trata de un problema unidimensional en coordenadas rectangulares. Para resolver este problema utilizamos la solución a la ecuación de Laplace siguiente:

$$\varphi_{(y)} = Ay + B$$

Aplicando esta ecuación a cada medio por separado, tenemos:

En el medio (1): $\varphi_{1(y)} = A_1y + B_1 \dots (1)$

En el medio (2): $\varphi_{2(y)} = A_2y + B_2 \dots (2)$

Para hallar las constantes A_1 , B_1 , A_2 y B_2 aplico las Condiciones de Frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si $y = 0$: $\varphi_{1(y=0)} = \varphi_a \Rightarrow B_1 = \varphi_a \dots (I)$

2da C.F.) Si $y = d$: $\varphi_{2(y=d)} = \varphi_b \Rightarrow A_2(d) + B_2 = \varphi_b \dots (II)$

3ra C.F.) Si $y = e$: $\varphi_{1(y=e)} = \varphi_{2(y=e)}$ (φ es continuo en todos los puntos donde \vec{E} es finito)

Luego: $A_1(e) + B_1 = A_2(e) + B_2 \dots (III)$

4ta C.F.) Si $y = e$: $J_{1n} = J_{2n}$ (la componente normal de \vec{J} es continua)

Como $J = \sigma E$, entonces la igualdad anterior equivale a: $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$

Reemplazando los campos eléctricos por gradiente de potencial y simplificando la ecuación, obtenemos:

$$\Rightarrow \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \dots (IV)$$

Resolviendo las ecuaciones (I), (II), (III) y (IV) obtenemos:

$$B_1 = \varphi_a \quad ; \quad A_1 = \frac{\sigma_2(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d - e)}$$

$$A_2 = \frac{\sigma_1(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d - e)} \quad ; \quad B_2 = \frac{e(\sigma_2 - \sigma_1)\varphi_b + d\sigma_1\varphi_a}{\sigma_2 e + \sigma_1(d - e)}$$

Reemplazando las constantes A_1 , B_1 , A_2 y B_2 en las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\varphi_{1(y)} = \frac{\sigma_2(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d - e)} y + \varphi_a \dots (3)$$

$$\varphi_{2(y)} = \frac{\sigma_1(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d - e)} y + \frac{e(\sigma_2 - \sigma_1)\varphi_b + d\sigma_1\varphi_a}{\sigma_2 e + \sigma_1(d - e)} \dots (4)$$

Hallo el potencial " φ_s " evaluando la ecuación (3) o la ecuación (4) para $y = e$. Al evaluar en la ecuación (3) obtengo:

$$\varphi_s = \varphi_1|_{y=e} = \frac{\sigma_2\varphi_b e - \sigma_1\varphi_a(d - e)}{\sigma_2 e - \sigma_1(d - e)}$$

b) Cálculo de σ_s (densidad superficial de carga libre)

La densidad superficial de carga libre " σ_s " se determina utilizando la siguiente ecuación:

$$\sigma_s = \sigma_2 - \sigma_1$$

Se cumple que: $\sigma = \varepsilon E$, luego: $\sigma_s = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1$

Aplico gradiente de potencial para hallar E_1 y E_2 , y reemplazando estos gradientes en la ecuación anterior obtengo finalmente que:

$$\therefore \sigma_s = \frac{(\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1)(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e - \sigma_1(d - e)}$$

Problema N° 4

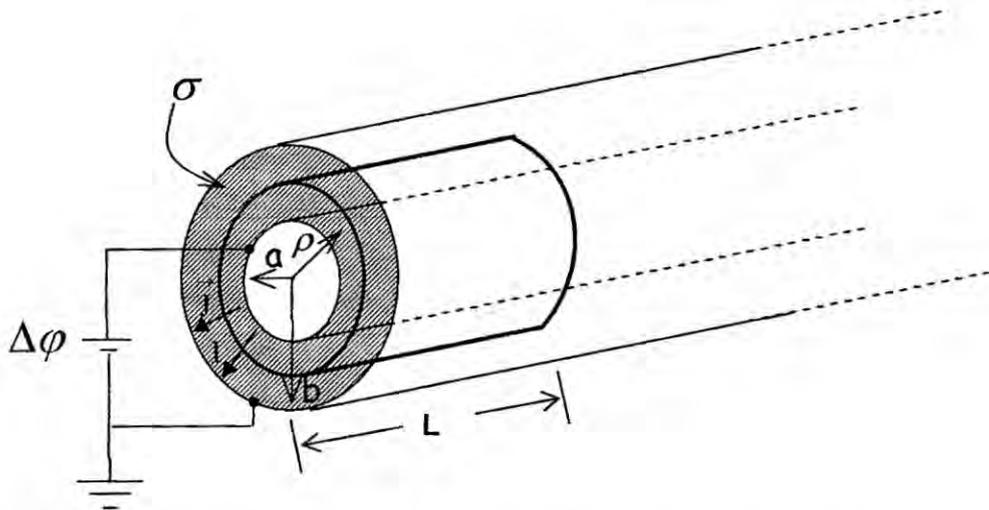
Dos cáscaras cilíndricas largas de metal, de radios a y b ($b > a$), se colocan coaxialmente y se mantienen a la diferencia de potencial $\Delta\varphi$. Si la región entre las cáscaras se llena de un medio de conductividad σ , calcule la intensidad de corriente por unidad de longitud y la resistencia eléctrica.

Considere que la conductividad de los cilindros es mucho mayor que σ .

fuf

Resolución:

Como la diferencia de potencial entre los conductores cilíndricos es $\Delta\varphi$, vamos a suponer que el conductor de radio a se halla a un potencial $\Delta\varphi$, por lo tanto el otro tendrá potencial nulo (o se halla conectado a tierra), tal como se muestra en la figura mostrada a continuación.



Si la conductividad " σ " es constante, entonces se cumple la ecuación de Laplace. Además, en este caso " φ " sólo depende de la coordenada " ρ ", por lo tanto la solución a la ecuación de Laplace a utilizar, en coordenadas cilíndricas, es:

$$\varphi_{(\rho)} = A \ln \rho + B \dots (1)$$

Las constantes A y B se hallan utilizando las condiciones de frontera siguientes:

1ra C.F.) Si $\rho = b$: $\varphi_{(\rho=b)} = 0$

Luego: $0 = A \ln b + B \Rightarrow B = -A \ln b \dots (2)$

2da C.F.) Si $\rho = a$: $\varphi_{(\rho=a)} = \Delta\varphi$

Luego: $\Delta\varphi = A \ln a + B \Rightarrow \Delta\varphi = A \ln a - A \ln b$

$$\Rightarrow A = \frac{\Delta\varphi}{\ln(a/b)} ; \text{ o también: } A = \frac{-\Delta\varphi}{\ln(b/a)}$$

Reemplazando la constante A en la ecuación (2) tenemos:

$$B = -A \ln b \Rightarrow B = \frac{\Delta\varphi \ln b}{\ln(b/a)}$$

Finalmente reemplazo las constantes A y B en la ecuación (1):

$$\varphi(\rho) = -\frac{\Delta\varphi}{\text{Ln}(b/a)} \text{Ln}\rho + \frac{\Delta\varphi \text{Ln}b}{\text{Ln}(b/a)}$$

Para hallar aplico gradiente de potencial. Es decir:

$$\vec{E}_{(\rho)} = -\nabla\varphi_{(\rho)} \Rightarrow \vec{E}_{(\rho)} = \frac{\Delta\varphi}{\rho \text{Ln}(b/a)} \hat{a}_\rho$$

Cálculo de I/L (corriente por unidad de longitud)

Sabemos que: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$\text{Luego: } \frac{I}{2\pi\rho L} \hat{a}_\rho = \sigma \frac{\Delta\varphi}{\rho \text{Ln}(b/a)} \hat{a}_\rho \quad \therefore \frac{I}{L} = \frac{2\pi\sigma\Delta\varphi}{\text{Ln}(b/a)}$$

Cálculo de R/L (resistencia por unidad de longitud)

$$\text{Se sabe: } R = \frac{\Delta\varphi}{I} \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\text{Ln}(b/a)}{2\pi\sigma}$$

ful

MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

La magnetostática en el vacío estudia los campos magnéticos estáticos en el espacio libre y las leyes que los rigen.

- * Los campos magnéticos estáticos son campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias o corrientes continuas (no variables con el tiempo).
- * Las principales leyes que rigen los campos magnetostáticos son la ley de Biot-Savart y la ley de Ampère.
- * Para el estudio de la magnetostática en el vacío la única cantidad de campo vectorial fundamental necesaria es la densidad de flujo magnético \vec{B} .

6.1 POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO O ESPACIO LIBRE

Forma diferencial	Forma integral	
1) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	← Ley de Gauss para el magnetismo
2) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$	← Ley de Ampère

Demostración de la ley de GAUSS para el magnetismo

Si tomamos integral de volumen a la ecuación (1), tenemos: $\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$

Aplicando el teorema de la divergencia, la ecuación anterior queda:

ful

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Luego: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Conclusión: *No hay fuentes de flujo magnético, y las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas.*

Demostración de la ley de Ampere

Integrando ambos lados de la ecuación (2), sobre una superficie abierta, tenemos:

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Aplicando el teorema de Stokes, la ecuación anterior queda: $\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$

Luego: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ (ley de Ampère en el vacío o en un medio no magnético)

Donde: I es la corriente neta encerrada por la curva cerrada C .

Nota.- en función de \vec{H} (intensidad de campo magnético), la ley de Ampère se expresa por:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$

Donde: $I = I_{enc.}$ = corriente neta encerrada por la curva cerrada C o trayectoria Amperiana.

* Recuerde que \vec{H} y \vec{B} , en el vacío o espacio libre, están relacionados por la

siguiente ecuación: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

6.2 ECUACIÓN DE LA FUERZA DE LORENTZ

Se sabe que cuando se coloca una pequeña carga de prueba "q" en un campo eléctrico \vec{E} , experimenta una fuerza eléctrica \vec{F}_e .

ful

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Se ha demostrado experimentalmente que cuando la carga de prueba está en movimiento en un campo magnético \vec{B} , la carga "q" también experimenta una *fuerza magnética* \vec{F}_m .

$$\vec{F}_m = q\vec{V} \times \vec{B}$$

La *fuerza electromagnética* total sobre una carga "q" es entonces $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$. Es decir:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \text{ (Ecuación de la fuerza de Lorentz)}$$

Esta ecuación se puede considerar como un postulado fundamental de nuestro modelo electromagnético porque no puede derivarse de otros postulados.

6.3 POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

Si \vec{B} es solenoidal ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), entonces \vec{B} se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial, digamos \vec{A} , de manera que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (T) \quad ; \quad \vec{A} = \text{potencial magnético vector (en Wb/m)}$$

Como se sabe para definir un vector se requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. Por lo tanto falta la divergencia de \vec{A} .

Al tomar el rotacional de \vec{B} (además recuerde que por el segundo postulado de la magnetostática en el vacío: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$), tenemos:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Además: $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$

fup

Luego:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Con la finalidad de simplificar la ecuación anterior, elegimos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (\text{Ecuación vectorial de Poisson})$$

La solución a esta ecuación, por ser similar a la ecuación de Poisson de la electrostática, será:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \quad \left(\frac{Wb}{m} \right)$$

Relación entre \vec{A} (potencial magnético vector) y ϕ (flujo magnético):

Se sabe: $\phi = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S}$; donde: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \implies \phi = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$

Por el teorema de Stokes: $\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

Luego: $\phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

6.4 LEY DE BIOT-SAVART

Nos permite calcular la densidad de flujo magnético \vec{B} o la intensidad de campo magnético \vec{H} originada por una corriente eléctrica I que circula por un circuito, a una cierta distancia de dicha corriente.

Para deducir la ecuación de la ley de Biot-Savart analizaremos el caso de un alambre delgado con sección transversal S . En este caso el diferencial de volumen dV' es

igual a: $dV' = S d\vec{\ell}$, entonces $\vec{J} dV' = JS d\vec{\ell} = I d\vec{\ell}$. Luego la ecuación del

potencial magnético vector \vec{A} será:

fu

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Entonces, la densidad de flujo magnético \vec{B} ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) queda expresada por:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \nabla \times \left(\frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \nabla \times d\vec{\ell} + \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times d\vec{\ell} \right)$$

Donde: $\nabla \times d\vec{\ell} = 0$; $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \hat{a}_r$

Reemplazando tenemos que \vec{B} viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times \hat{a}_r}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

O también:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

A esta última ecuación se le conoce como ley de Biot-Savart.

fp

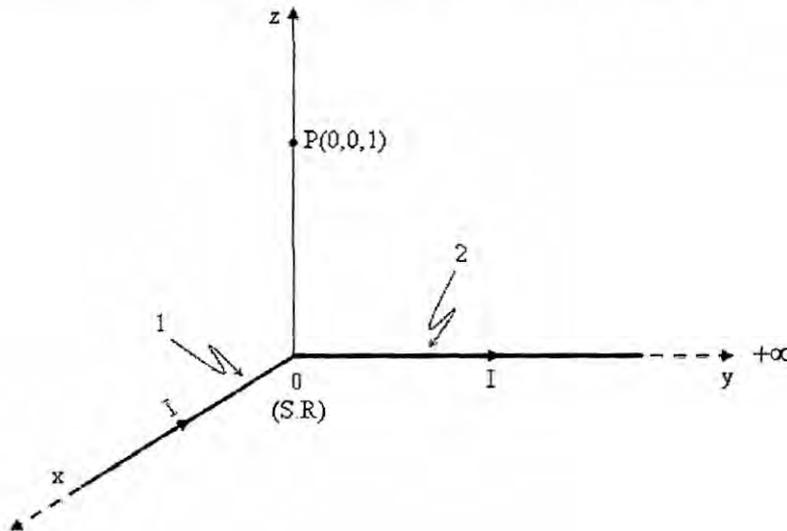
6.5 PROBLEMAS RESUELTOS DE MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema N° 1

Una corriente filamentaria de 10 A se dirige del infinito hasta el origen, sobre el eje x positivo, y luego regresa al infinito a lo largo del eje y positivo. Utilice la ley de Biot-Savart para encontrar \vec{B} y \vec{H} en el punto $P(0,0,1)$.

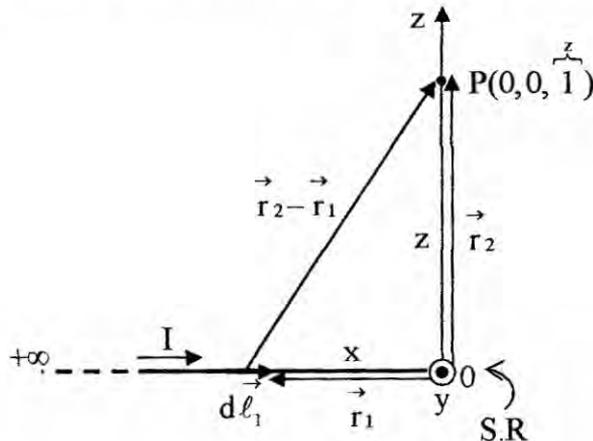
Resolución

Para resolver este problema vamos a dividir el alambre rectilíneo infinito en dos partes a las cuales denominaremos "1" y "2", tal como se observa en la figura.



a) Cálculo de \vec{B}_P

Por principio de Superposición: $\vec{B}_P = \vec{B}_P(1) + \vec{B}_P(2) \dots (1)$
Aplico Ley de Biot y Savart para el segmento (1):



De la figura:

$$\vec{r}_2 = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1 = x \hat{a}_x$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$d\vec{l}_1 = -dx \hat{a}_x$$

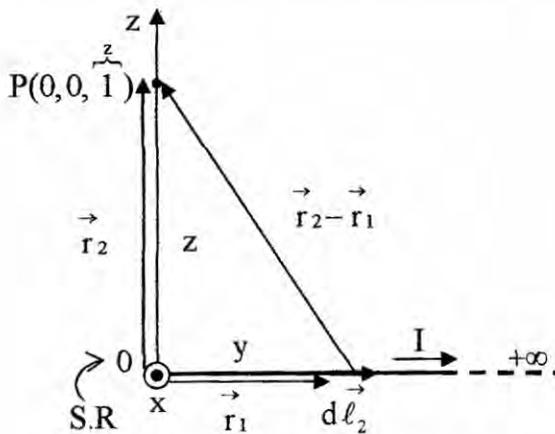
fal

$$\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots (2)$$

Reemplazando: $\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{+\infty}^0 \frac{-dx \hat{a}_x \times (z\hat{a}_z - x\hat{a}_x)}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{+\infty}^0 \frac{z dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_y$

$$\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{a}_y = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (10)}{4\pi (1)} \hat{a}_y = (10^{-6} \text{T}) \hat{a}_y$$

Aplico Ley de Biot y Savart para el segmento (2):



De la figura:

$$\vec{r}_2 = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1 = y \hat{a}_y$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$d\vec{\ell}_1 = dy \hat{a}_y$$

$$\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots (3)$$

Reemplazando: $\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dy \hat{a}_y \times (z\hat{a}_z - y\hat{a}_y)}{(y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z dy}{(y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_x$

$$\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{a}_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (10)}{4\pi (1)} \hat{a}_x = (10^{-6} \text{T}) \hat{a}_x$$

Finalmente, reemplazo $\vec{B}_{P(1)}$ y $\vec{B}_{P(2)}$ en la ecuación (1):

$$\vec{B}_P = (10^{-6} \text{T})(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

b) Cálculo de \vec{H}_P :

$$\vec{H}_P = \vec{H}_{P(1)} + \vec{H}_{P(2)} ; \text{ siendo : } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Reemplazando obtenemos:

$$\vec{H}_P = 0,796 (\hat{a}_x + \hat{a}_y) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

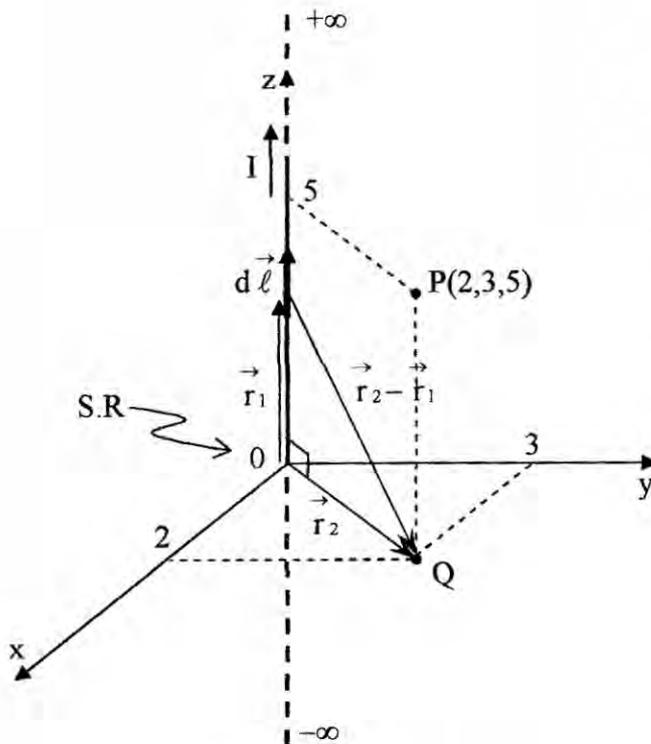
fp

Problema N° 2

Encuentre \vec{H} en P (2; 3; 5) en coordenadas cartesianas, si existe un filamento portador de corriente de longitud infinita, que pasa a través del origen y el punto C. Una corriente de 50 A se dirige desde el origen hasta C, donde la localización de C es (0; 0; 1).

Resolución:

1er Caso: Cálculo de \vec{H} en el punto P (2; 3; 5) debido a $I = 50$ A que se dirige desde el origen hasta C (0; 0; 1).



Por simetría de la figura se

cumple que: $\vec{H}_P = \vec{H}_Q$

(Además se cumple que P y Q tienen el mismo vector intensidad de campo magnético y tienen el mismo sentido, esto lo hacemos para simplificar cálculos).

Por Ley de Biot y Savart:

$$\vec{H}_Q = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots (1)$$

De la figura: $d\vec{\ell} = dz \hat{a}_z$; $\vec{r}_2 = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$

$$\vec{r}_1 = z \hat{a}_z ; \quad \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{13 + z^2}$$

En (1):

$$\vec{H}_Q = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \hat{a}_z \times (2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - z\hat{a}_z)}{(13 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(13 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_y - \frac{3I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(13 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_x$$

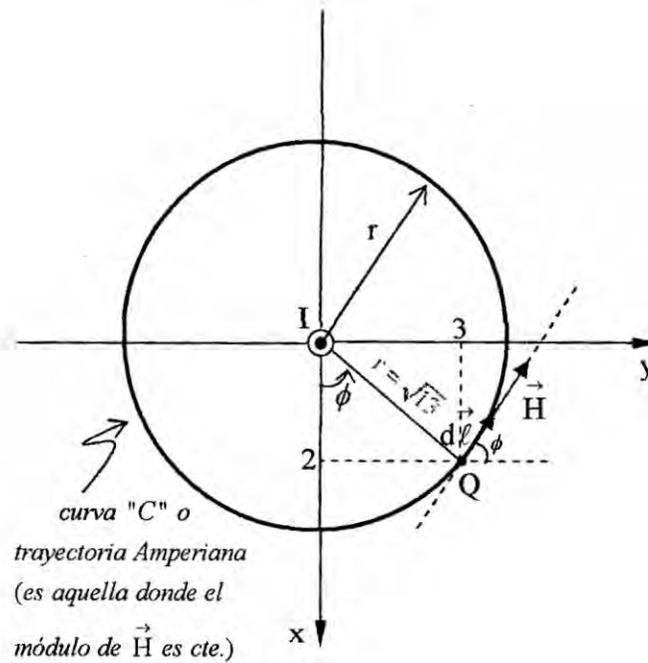
fl

$$\vec{H}_Q = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{2}{13} \right) \hat{a}_y - \frac{3I}{4\pi} \left(\frac{2}{13} \right) \hat{a}_x = \frac{50}{13\pi} \hat{a}_y - \frac{75}{13\pi} \hat{a}_x$$

$$\therefore \vec{H}_Q = (1,224 \hat{a}_y - 1,84 \hat{a}_x) \text{ A/m}$$

Otro método: Por ley de Ampere

Vista de planta



Por Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$$

$$H (2\pi r) = I \implies H = \frac{I}{2\pi r}$$

Vectorialmente: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$

De la figura: $\hat{a}_\phi = -\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y$

Luego:

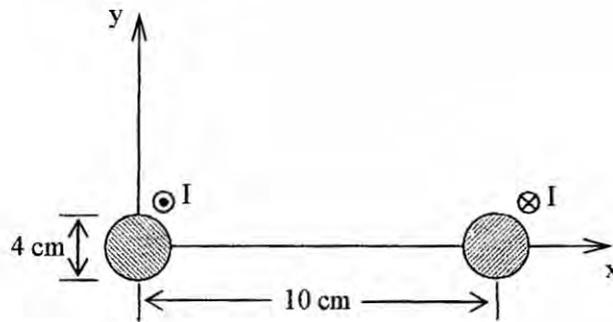
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} (-\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y) \rightarrow \vec{H} = (1,224 \hat{a}_y - 1,84 \hat{a}_x) \text{ A/m}$$

fu

Problema N° 3

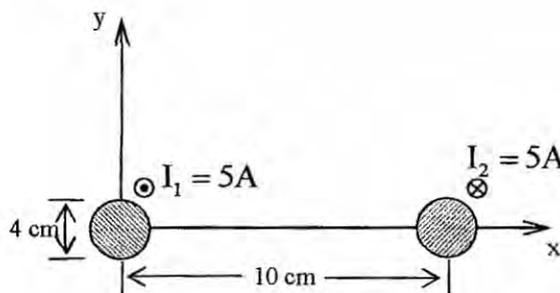
Considere la línea de transmisión de dos hilos cuya sección transversal se ilustra en la figura. Cada uno de los alambres tiene 2 cm de radio y están separados por 10 cm. Por el alambre con centro en (0,0) fluye una corriente de 5 A, Mientras que por el otro, centrado en (10cm, 0) fluye la corriente de retorno. Calcule \vec{B} y \vec{H} en:

- a) (5 cm, 0) ; b) (10 cm, 5 cm)



Resolución

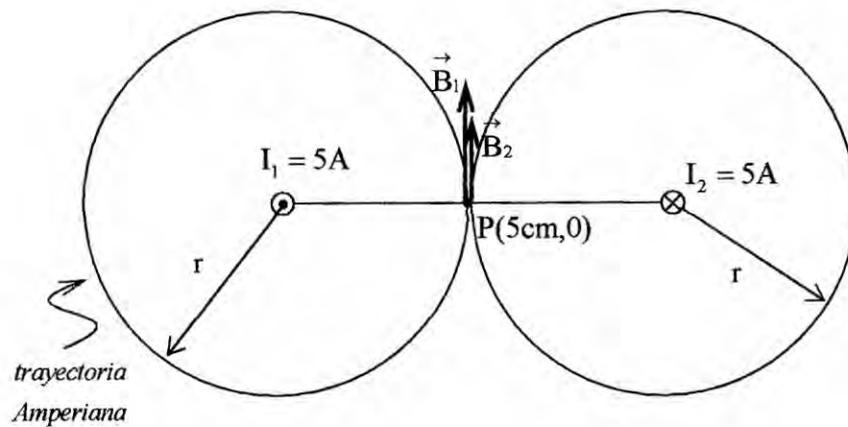
Llamaremos I_1 a la corriente de ida e I_2 a la corriente de retorno, como se muestra en la figura siguiente.



- a) Cálculo de \vec{B} y \vec{H} en el punto (5cm; 0):

En el punto P (5 cm; 0) se crean dos Campos magnéticos, porque hay dos corrientes eléctricas. A continuación se muestran los vectores \vec{B}_1 y \vec{B}_2 , debido a las corrientes I_1 e I_2 .

ful



Por el principio de Superposición aplicado a los campos magnéticos se cumple:

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \dots (1)$$

Hallo \vec{B}_1 aplicando ley de Ampere

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I ; I = I_{\text{encerrada}}$$

$$B_1 (2\pi r) = \mu_0 I_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} ; \text{Vectorialmente: } \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_y$$

$$\text{Análogamente tenemos que } \vec{B}_2 \text{ quedará expresado por: } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \hat{a}_y$$

Reemplazo en (1):

$$\vec{B}_p = 2\vec{B}_1 ; \text{ porque } \vec{B}_2 = \vec{B}_1 \text{ (dado que } I_2 = I_1)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_p = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \hat{a}_y = (4 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

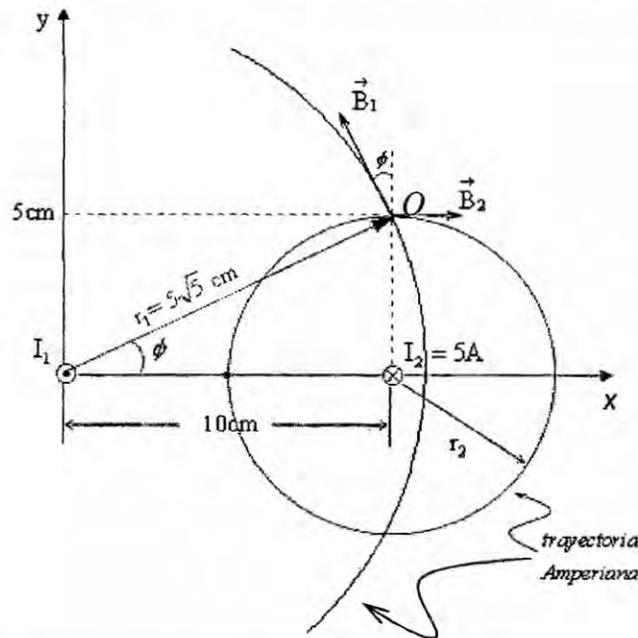
Para hallar \vec{H} aplico: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en el vacío)

$$\Rightarrow \vec{H}_p = \frac{\vec{B}_p}{\mu_0} = \frac{I_1}{\pi r} \hat{a}_y = (31,83 \hat{a}_y) \frac{A}{m}$$

fup

b) Cálculo de \vec{B} y \vec{H} en el punto Q (10cm; 5cm)

En el punto Q, los vectores \vec{B}_1 y \vec{B}_2 tienen las direcciones mostradas en la figura siguiente.



Por el principio de Superposición: $\vec{B}_Q = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \dots (2)$

Donde:

$$* \vec{B}_2 = B_2 \hat{a}_x ; B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \left(\text{módulo de } \vec{B} \text{ para un alambre } \infty \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \hat{a}_x = (2 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x) T$$

$$* \vec{B}_1 = B_1 \hat{a}_\phi \begin{cases} B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \\ \hat{a}_\phi = -\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y \end{cases} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} (-\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y)$$

$$\therefore \vec{B}_1 = (-0,4 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x + 0,8 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

Finalmente, reemplazando en (2):

$$\Rightarrow \vec{B}_Q = (1,6 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x + 0,8 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

Para hallar \vec{H} aplico: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en el vacío)

$$\Rightarrow \vec{H}_Q = \frac{\vec{B}_Q}{\mu_0} = (12,74 \hat{a}_x + 6,366 \hat{a}_y) \frac{A}{m}$$

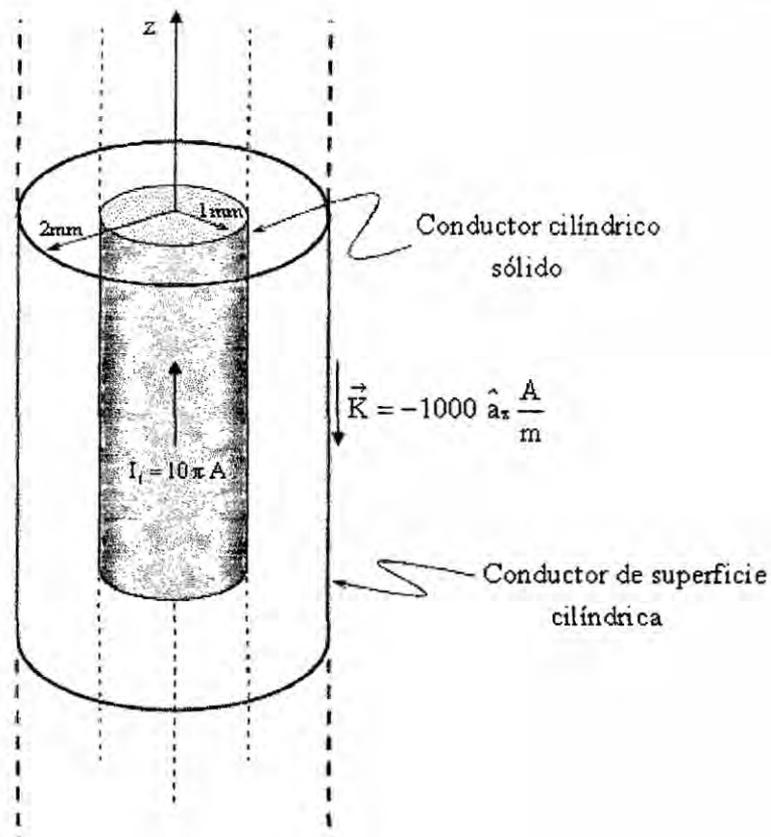
ful

Problema N° 4

Un conductor sólido tiene una sección transversal circular de radio 1 mm , centrado en el eje z , y porta una corriente total distribuida uniformemente de $10\pi\text{ A}$ en la dirección \hat{a}_z . Hay una corriente laminar $\vec{K} = -1000 \hat{a}_z\text{ A/m}$ en $\rho = 2\text{ mm}$. Encontrar \vec{H} en la región: a) $0 \leq \rho \leq 1\text{ mm}$; b) $1 \leq \rho \leq 2\text{ mm}$; c) $2 \leq \rho \leq 4\text{ mm}$ d) ¿Qué valor de la corriente laminar debe estar colocada en $\rho = 4\text{ mm}$; tal que $\vec{H} = 0$ para $\rho > 4\text{ mm}$?

Resolución:

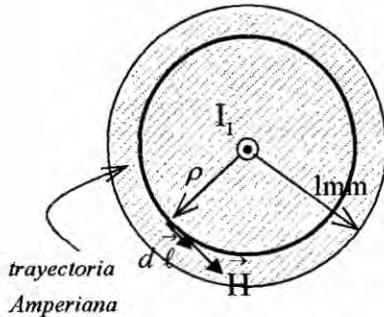
De acuerdo con lo señalado en el enunciado, la figura correspondiente es:



ful

a) Cálculo de \vec{H} en la región $0 \leq \rho \leq 1\text{mm}$

Sección transversal del conductor sólido



Por ley de Ampere:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I; \quad I = I_{\text{encerrada}}$$

$$H(2\pi\rho) = I_{\text{encerrada}} \dots (1)$$

Hallo $I_{\text{encerrada}}$:

Si la corriente está uniformemente distribuida, se cumple que:

$$J = \text{cte} \Rightarrow \frac{I_1}{\pi(1 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{I_{\text{enc}}}{\pi\rho^2} \Rightarrow I_{\text{enc}} = 10^7 \pi \rho^2$$

Reemplazando en (1):

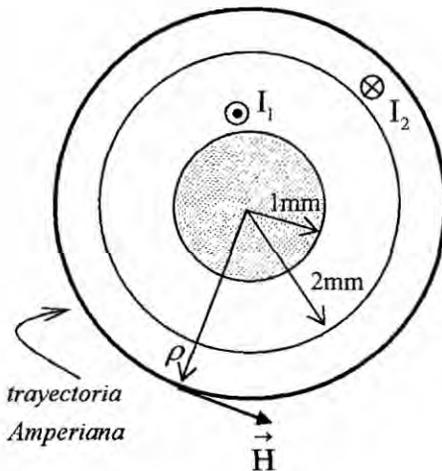
$$H(2\pi\rho) = 10^7 \pi \rho^2 \Rightarrow \vec{H} = (5 \cdot 10^6 \rho \hat{a}_\phi) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

b) Cálculo de \vec{H} en la región $1\text{mm} < \rho < 2\text{mm}$

$$\text{En este caso: } H = \frac{I_1}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{H} = \left(\frac{5}{\rho} \hat{a}_\phi \right) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

c) Cálculo de \vec{H} en la región $2\text{mm} < \rho < 4\text{mm}$

Sección transversal



Por ley de Ampère: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enc}}$

$$H(2\pi\rho) = I_1 + I_2 \dots (2)$$

Donde:

$$I_1 = 10 \pi \text{ A}$$

$$I_2 = I_{\text{LAMINAR TOTAL}} = \left(-1000 \hat{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) (2\pi(2 \cdot 10^{-3})\text{m}) = -4 \pi \text{ A}$$

En (2):

$$H(2\pi\rho) = 10\pi \text{ A} + (-4\pi \text{ A}) = 6\pi \text{ A} = I'_{\text{enc}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{3}{\rho}, \quad \therefore \vec{H} = \left(\frac{3}{\rho} \hat{a}_\phi \right) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

d) Piden \vec{K}_1 tal que el $\vec{H}_{(\rho = 4\text{mm})} = 0$

$$\Rightarrow \vec{H}_{(\rho = 4\text{mm})} = 0 \text{ si } I_{\text{enc}} = 0$$

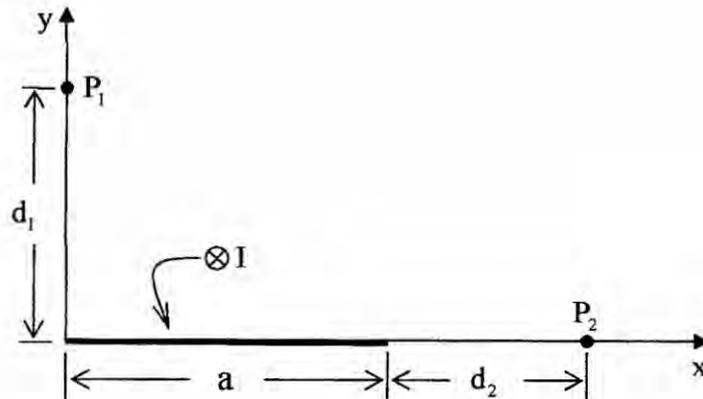
$$\text{Del ejercicio anterior se obtuvo: } I'_{\text{enc}} = 6\pi \rightarrow 6\pi + I_{\text{enc}1} = 0 \Rightarrow I_{\text{enc}1} = -6\pi \text{ A}$$

$$\text{Luego: } \vec{K}_1 = \frac{-6\pi \text{ A}}{2\pi(4 \cdot 10^{-3}\text{m})} \hat{a}_z = -750 \hat{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ful

Problema N° 5

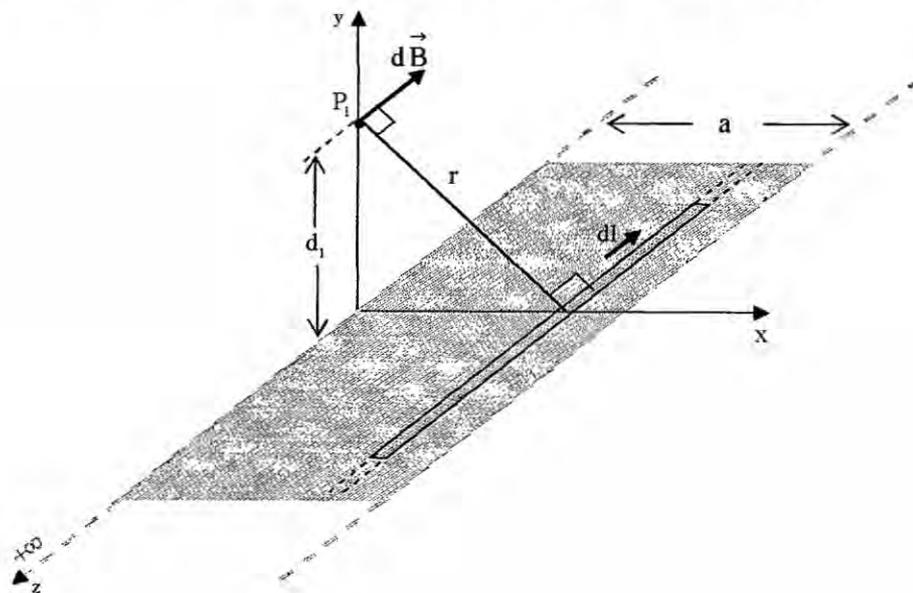
Una corriente I fluye longitudinalmente por una lámina conductora delgada y muy larga de anchura a , como se muestra en la figura. Suponga que la corriente fluye hacia el interior del papel y determine la densidad de flujo magnético \vec{B} en los puntos $P_1 (0; d_1)$ y $P_2 (a + d_2; 0)$.



Resolución:

a) Cálculo de \vec{B} en el punto $P_1 (0; d_1)$:

Para calcular \vec{B} en el punto P_1 , debido a la corriente I que fluye por la lámina conductora delgada y muy larga, analizo a partir de un elemento diferencial de la forma de un hilo infinito, tal como se indica en la figura mostrada a continuación.



ful

Se sabe : $B_{(\text{Hilo})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, donde: r es la distancia perpendicular al hilo infinito.

En nuestro caso:

$$dB_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \implies d\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \hat{u} \dots (1)$$

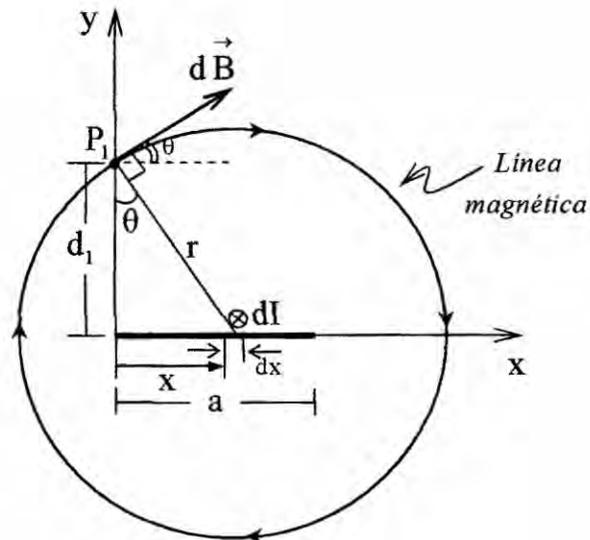
donde:

$$dI = \frac{I}{a} dx$$

$$r = \sqrt{d_1^2 + x^2}$$

de la figura :

$$\hat{u} = \text{Cos}\theta \hat{a}_x + \text{Sen}\theta \hat{a}_y$$



Reemplazando en (1):

$$d\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a \sqrt{d_1^2 + x^2}} (\text{Cos}\theta \hat{a}_x + \text{Sen}\theta \hat{a}_y)$$

$$\text{Integrando tenemos: } \vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int \frac{(\text{Cos}\theta \hat{a}_x + \text{Sen}\theta \hat{a}_y) dx}{\sqrt{d_1^2 + x^2}}$$

$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\int_0^a \frac{d_1 dx}{d_1^2 + x^2} \hat{a}_x + \int_0^a \frac{x dx}{d_1^2 + x^2} \hat{a}_y \right]$$

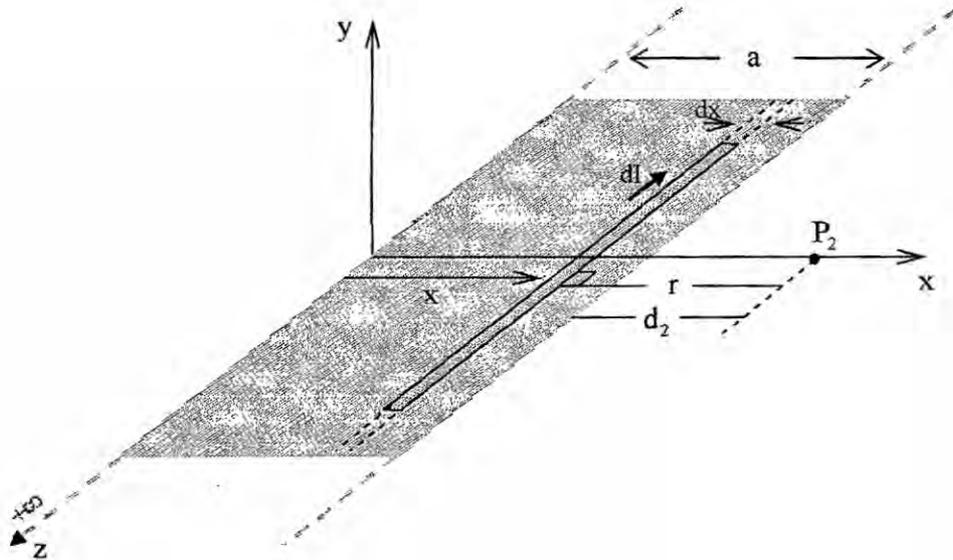
Resolviendo, obtenemos:

$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\text{Arctg}\left(\frac{a}{d_1}\right) \hat{a}_x + \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{d_1}\right) \hat{a}_y \right]$$

ful

b) Cálculo de \vec{B} en el punto $P_2(a + d_2; 0)$

En este caso procedemos de manera similar que en a).



Ya sabemos que la magnitud de \vec{B} , debido a una corriente I , que circula por un hilo infinito, a una distancia r de dicho hilo, viene dada por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En nuestro caso, este campo "B" será un diferencial de campo para la lámina, es decir:

$$dB_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}, \text{ donde: } r = (a + d_2 - x). \text{ Además se cumple:}$$

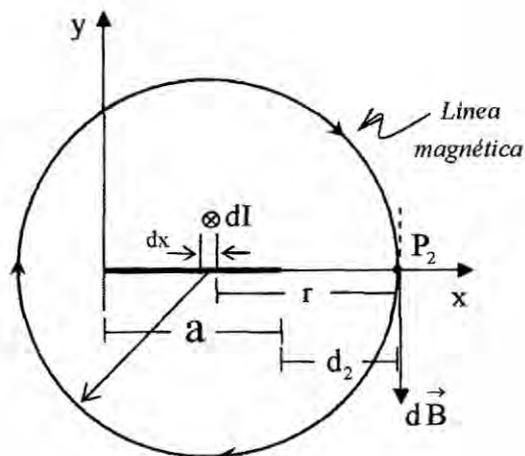
$$\frac{I}{a} = \frac{dI}{dx} \Rightarrow dI = \frac{I}{a} dx, \quad \text{Luego: } dB_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a + d_2 - x)}$$

Vectorialmente sería:

$$d\vec{B}_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a + d_2 - x)} \hat{u} \dots (2)$$

Del gráfico:

$$\hat{u} = -\hat{a}_y$$



ful

Reemplazando en (2) e integrando:

$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^a \frac{dx}{(a + d_2 - x)} (-\hat{a}_y),$$

Resolviendo la integral obtenemos:
$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \left(\frac{a + d_2}{d_2} \right) \hat{a}_y$$

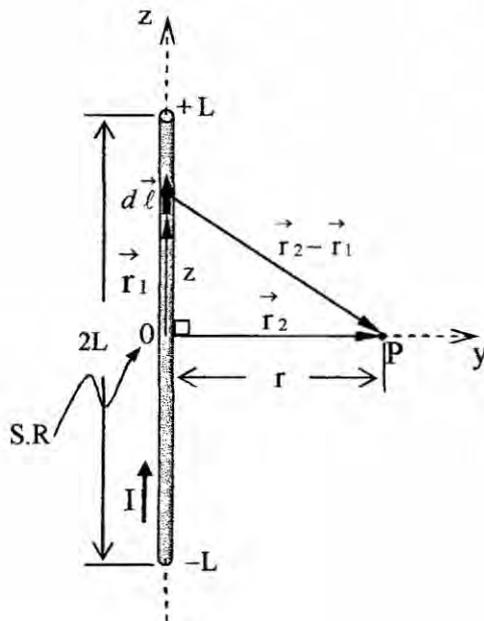
Problema N° 6

Una corriente continua I fluye por un alambre recto de longitud $2L$. Calcule la inducción magnética \vec{B} en un punto localizado a una distancia " r " del alambre y en el plano que lo divide en dos segmentos iguales. Determine primero el vector potencial magnético " \vec{A} ".

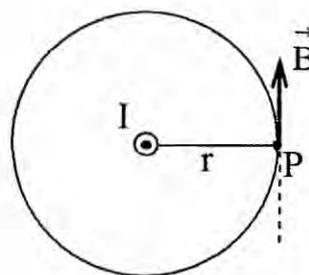
Resolución:

Por tratarse de un alambre recto de longitud $2L$, la figura es:

Aplicando la regla de la mano derecha el vector \vec{B} está entrando al punto P.



Vista de Planta



Para un Hiló con corriente I , se cumple que:

$$\vec{A}_{(\vec{r})} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

De la figura:

$$d\vec{\ell} = dz \hat{a}_z; \quad \vec{r}_2 = r \hat{a}_y; \quad \vec{r}_1 = z \hat{a}_z; \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

fp

Reemplazando: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z=-L}^{+L} \frac{dz \hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + r^2} \right) \right]_{-L}^{+L} \hat{a}_z$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right) \hat{a}_z$$

Hallo $\vec{B}(\vec{r})$; aplicando rotacional :

Se cumple: $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})}$

En este caso \vec{A} depende de la coordenada "r", por lo tanto su rotacional en coordenadas cilíndricas

viene dado por: $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r} (A_{(z)}) \hat{a}_\phi$

Resolviendo se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \hat{a}_\phi$$

ful

CAMPO MAGNÉTICO EN LA MATERIA

7.1 MAGNETIZACIÓN EN LOS MATERIALES Y DENSIDADES DE CORRIENTE EQUIVALENTES

La magnetización es un fenómeno físico que se presenta cuando ciertos materiales son sometidos a un campo magnético externo.

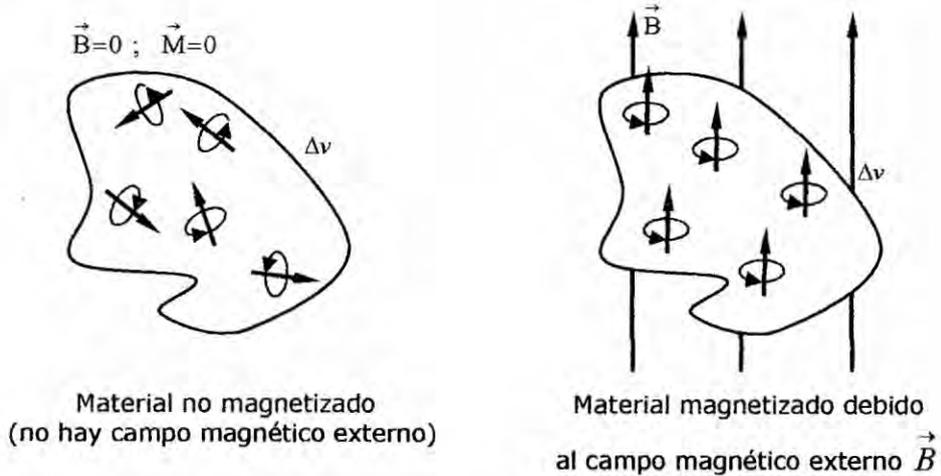
En la magnetización, los dipolos microscópicos del material tienden a orientarse en la misma dirección del campo magnético externo. En la figura se muestra a un material magnetizado como consecuencia de estar sometido a un campo magnético externo.

Recuerde que según el modelo atómico elemental de la materia, todos los materiales están compuestos por átomos, cada uno de éstos tiene un núcleo cargado positivamente y electrones de carga negativa alrededor. Los electrones orbitantes originan corrientes circulantes y forman dipolos magnéticos microscópicos. Así mismo, tanto los electrones como el núcleo de un átomo rotan (giran) sobre sus ejes con ciertos momentos dipolares magnéticos. El momento dipolar magnético de un núcleo giratorio por lo general es despreciable en comparación con el de un electrón orbitante o giratorio, debido a la masa mucho mayor y a la menor velocidad angular del núcleo.

En ausencia de un campo magnético externo, los dipolos magnéticos de los átomos de la mayoría de los materiales (con excepción de los imanes permanentes) tienen orientaciones aleatorias, de manera que no hay momento magnético neto. La aplicación de un campo magnético externo ocasiona tanto la alineación de los

momentos magnéticos de los electrones giratorios como un momento magnético inducido que se debe a un cambio en el movimiento orbital de los electrones.

En la figura del lado derecho que se muestra a continuación se observa un modelo teórico del comportamiento de un material magnetizado debido a un campo magnético externo \vec{B} .

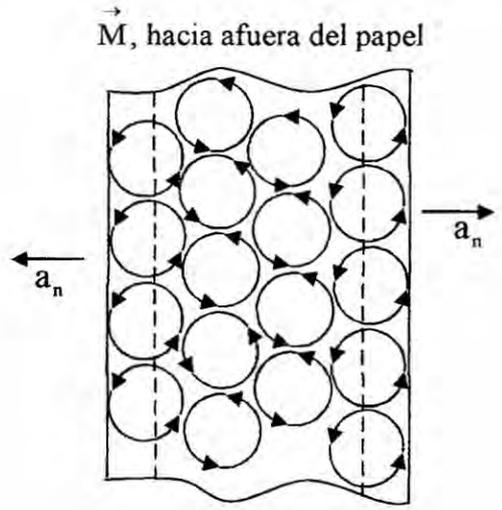


La **magnetización** (\vec{M}) es una Cantidad vectorial que se define como la densidad de momento dipolar magnético por unidad de volumen.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{m}_k}{\Delta v} \text{ (A/m)}$$

El vector magnetización caracteriza de forma completa al material magnetizado, de modo que si llegamos a conocer el valor de ese vector en todos los puntos del material podremos calcular inmediatamente los efectos magnéticos que puede producir en sus inmediaciones.

Corte transversal de un material magnetizado



ful

Utilizando la ecuación de \vec{M} , el potencial vector magnético creado en todo el espacio por el material magnetizado es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

El problema de esta ecuación es que usualmente no conocemos a priori el valor del vector magnetización, por lo que no es un camino práctico para resolver problemas reales.

La magnetización macroscópica, medible, de un medio material es el resultado de infinidad de corrientes microscópicas que circulan, aproximadamente, en el mismo sentido y en planos paralelos. El conjunto de esas corrientes equivale a ciertas densidades de corriente macroscópicas, denominadas **densidades de corriente de magnetización**, que se describen a partir del vector magnetización como:

$$\boxed{\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}} \quad ; \quad \boxed{\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n}}$$

donde \vec{J}_M es la densidad volúmica de corriente de magnetización y \vec{J}_{SM} la densidad superficial de corriente de magnetización. El vector \hat{n} es el vector unitario normal a cada punto de la superficie y dirigido hacia fuera del volumen del material.

7.2 POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO Y DENSIDAD DE POLOS MAGNÉTICOS

Se sabe que el potencial escalar magnético φ^* debido al material magnético viene dado por:

$$\varphi_{(r)}^* = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \vec{M} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Esta ecuación equivale a:

$$\varphi_{(r)}^* = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{n} dA'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

donde S_0 es la superficie de la región V_0 .

Inf

Observando la última ecuación es conveniente definir dos cantidades escalares:

- Densidad de polos magnéticos: $\rho_{M(r)} = -\nabla' \cdot \vec{M}(r') \quad (\text{A/m}^2)$
- Densidad superficial de la intensidad de polos magnéticos: $\sigma_{M(r)} = \vec{M}(r') \cdot \hat{n} \quad (\text{A/m})$

Estas cantidades son muy útiles aunque algo artificiales. Desempeñan el mismo papel en la teoría del magnetismo que ρ_{pol} y σ_{pol} en la teoría de dieléctricos.

7.3 INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO – LEY DE AMPERE EN MEDIOS MAGNÉTICOS

Debido a las corrientes de magnetización existentes en un medio material, la ley de Ampère queda expresada de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M)$$

como $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$, la ecuación anterior equivale a la siguiente:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

donde: $\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{H}$ = intensidad de campo magnético en A/m

Luego, la forma final de la ley de Ampère para este campo es:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \quad \circ \quad \boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{LIBRE}}$$

Estas ecuaciones nos permiten trabajar en el interior de medios materiales de igual modo que si estuviésemos en el vacío, teniendo en cuenta de forma explícita únicamente las corrientes libres (usualmente corrientes de conducción).

sup

7.4 RELACIÓN ENTRE EL CAMPO MAGNÉTICO Y EL VECTOR MAGNETIZACIÓN

Se sabe que un campo magnético externo produce una magnetización en un material, esto significa que los dipolos microscópicos del material tienden a orientarse en la misma dirección del campo externo. Se cumple que la intensidad de campo magnético \vec{H} en los diferentes puntos de un medio material y el vector magnetización \vec{M} están relacionados por la siguiente expresión:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

donde χ_m es la llamada susceptibilidad magnética del medio.

En las sustancias altamente magnéticas la relación entre \vec{M} y \vec{H} no es lineal, por lo tanto:

$$\vec{M} = \chi_{m(\vec{H})} \vec{H}$$

Para el caso lineal tenemos que: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \iff \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H}$

Se definen $\mu_r = 1 + \chi_m$ y $\mu = \mu_0 \mu_r$ (H/m) como las permeabilidades relativa y absoluta, respectivamente, del material. Por lo tanto:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

7.5 COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES MAGNÉTICOS

Los materiales magnéticos se clasifican en tres grupos principales de acuerdo con sus valores de μ_r (permeabilidad relativa). Se dice que un material es

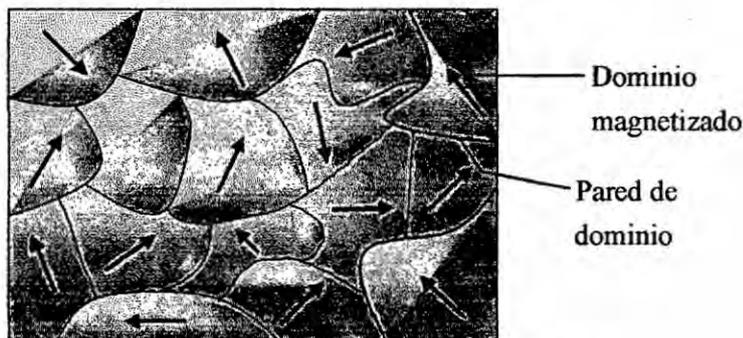
- *Diamagnético*, si $\mu_r \leq 1$ (χ_m es un número negativo muy pequeño)
- *Paramagnético*, si $\mu_r \geq 1$ (χ_m es un número positivo muy pequeño)
- *Ferromagnético*, si $\mu_r \gg 1$ (χ_m es un número positivo grande)

ful

La susceptibilidad magnética χ_m de la mayoría de los materiales *diamagnéticos* conocidos (cobre, germanio, plata, oro) es del orden de -10^{-5} y la de los materiales *paramagnéticos*, como aluminio, magnesio, titanio y tungsteno, es del orden de 10^{-5} .

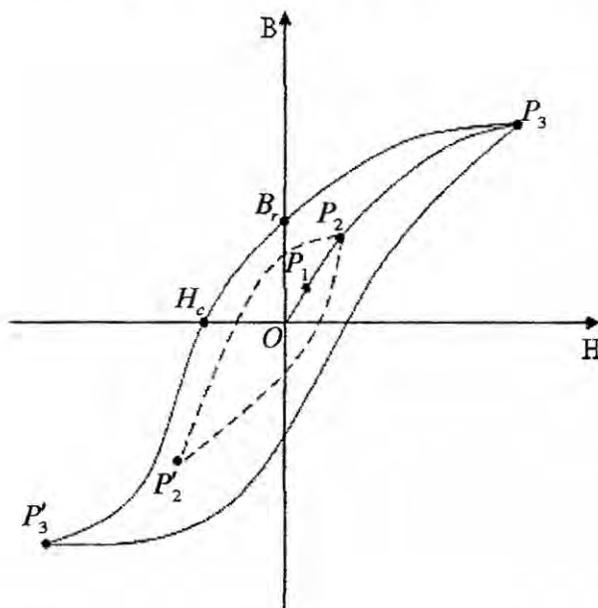
La magnetización de los materiales *ferromagnéticos* puede ser varios órdenes de magnitud mayor que de las sustancias paramagnéticas.

El *ferromagnetismo* puede explicarse en función de *dominios* magnetizados. De acuerdo con este modelo, que se ha confirmado experimentalmente, un material ferromagnético (como hierro, cobalto o níquel) está compuesto por varios dominios pequeños, cuyas dimensiones lineales van de unas cuantas micras a aproximadamente 1 mm. Estos dominios, que contienen cerca de 10^{15} o 10^{16} átomos, están totalmente magnetizados, en el sentido de que contienen dipolos magnéticos alineados como resultado de los electrones giratorios, incluso en ausencia de un campo magnético externo. La teoría cuántica establece la existencia de poderosas fuerzas de acoplamiento entre los momentos dipolares magnéticos de los átomos en un dominio, manteniendo los momentos dipolares en paralelo. Entre dominios adyacentes hay una región de transición de unos 100 átomos de espesor, llamada *pared de dominio*. En un estado no magnetizado, los momentos magnéticos de los dominios adyacentes de un material ferromagnético tienen direcciones diferentes, como lo ilustra el material policristalino de la figura. Si se contempla como un todo, la naturaleza aleatoria de las orientaciones en los diversos dominios no produce una magnetizado neta.



fu

Cuando se aplica un campo magnético externo a un material ferromagnético, las paredes de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo aplicado se mueven de manera tal que los volúmenes de estos dominios crecen a expensas de los otros dominios. Como resultado, aumenta la densidad de flujo magnético. Los movimientos de las paredes de los dominios son reversibles en el caso de la aplicación de un campo débil, digamos hasta cierto punto P_1 en la curva de magnetización $B-H$ de la figura. Sin embargo, si el campo aplicado es más fuerte (superior al punto P_1), los movimientos de las paredes de los dominios ya no son reversibles y se produce también una orientación del dominio en la dirección del campo aplicado. Por ejemplo, si un campo aplicado se reduce a cero en el punto P_2 , la relación $B-H$ ya no sigue la curva continua P_2P_1O , sino pasará de P_2 a P'_2 por la curva punteada de la figura. Este fenómeno de retardo de la magnetización con respecto al campo que la produce se denomina *histéresis*, término derivado de una palabra griega que significa "ir detrás". Si el campo aplicado es más fuerte (por encima de P_2 , hasta P_3), el movimiento de la pared de dominio y la rotación del dominio ocasionarán, en esencia, una alineación total de los momentos magnéticos microscópicos con respecto al campo aplicado, diciéndose que en este punto el material magnético ha llegado a la *saturation*. La curva $OP_1P_2P_3$ en el plano $B-H$ se denomina *curva de magnetización normal*.



Si el campo magnético aplicado se reduce a cero desde el valor en P_3 , la densidad de flujo magnético no se reduce a cero sino que toma el valor en Br . Este valor se denomina *densidad de flujo residual o remanente* (en Wb/m^2) y depende de la máxima

inf

intensidad de campo aplicado. La existencia de una densidad de flujo remanente hace posible los imanes permanentes.

Los materiales ferromagnéticos utilizados en generadores eléctricos, motores y transformadores deben tener una magnetización muy grande para un campo muy pequeño aplicado y deben tener curvas de histéresis altas y estrechas. Conforme la intensidad del campo magnético aplicado varía periódicamente entre $\pm H_{max}$, se sigue la curva de histéresis una vez por ciclo. El área de la curva de histéresis corresponde a la pérdida de energía (*pérdida por histéresis*) por unidad de volumen en un ciclo. La pérdida por histéresis es la energía perdida en forma de calor para superar la fricción que se presenta durante el movimiento de paredes de los dominios y la rotación de los dominios. Los materiales ferromagnéticos, que tienen curvas de histéresis altas y estrechas con área pequeña, se conocen como materiales "suaves"; normalmente son materiales recocidos con pocas dislocaciones e impurezas, lo que facilita el movimiento de las paredes de los dominios.

Por otra parte, los buenos imanes permanentes deben presentar gran resistencia a la desmagnetización. Para esto se requiere que sus curvas de histéresis sean más anchas. Estos materiales se conocen como materiales ferromagnéticos "duros".

Los dominios magnetizados se desorganizan si elevamos la temperatura de un material ferromagnético hasta el punto donde la energía térmica excede la energía de acoplamiento de los momentos dipolares magnéticos. Por encima de esta temperatura crítica, conocida como *temperatura de Curie*, un material ferromagnético se comporta como una sustancia paramagnética. La temperatura de Curie de la mayoría de los materiales ferromagnéticos está entre unos cientos y mil grados Celsius, la del hierro es de 770°C.

Las ferritas corresponden a otra clase de materiales magnéticos. Algunas ferritas son compuestos de tipo cerámico con conductividades muy bajas (por ejemplo, 10^{-4} a

ful

1 (S/m), en comparación con 10^7 (S/m) para el hierro). La baja conductividad limita las pérdidas por corrientes parásitas a altas frecuencias. Es por esto que las ferritas son comunes en aplicaciones de alta frecuencia y microondas, como núcleos para antenas de FM (frecuencia modulada), transformadores de alta frecuencia y cambiadores de fase. Las ferritas también tienen una amplia gama de aplicaciones en los dispositivos de memoria de núcleo magnético y disco magnético de computadores.

7.6 CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS

Para resolver problemas relacionados con campos magnéticos en regiones con medios que tienen propiedades físicas diferentes, es necesario estudiar las condiciones (en la frontera) que deben satisfacer los vectores \vec{B} y \vec{H} en las superficies de separación de los distintos medios. Las ecuaciones que se utilizan en este caso son similares a las que se utilizaron en la frontera de campos electrostáticos.

1. La componente normal de \vec{B} es continua a través de una superficie de separación, es decir:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (\text{T})$$

En el caso de materiales lineales e isotrópicos, $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$ y $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$, por lo tanto la ecuación anterior se convierte en:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

2. La componente tangencial de \vec{H} es continua a través de la frontera de casi todos los medios físicos; es discontinua únicamente cuando se supone la superficie de separación con un conductor ideal perfecto o con un superconductor.

Para los campos magnetostáticos normalmente tenemos:

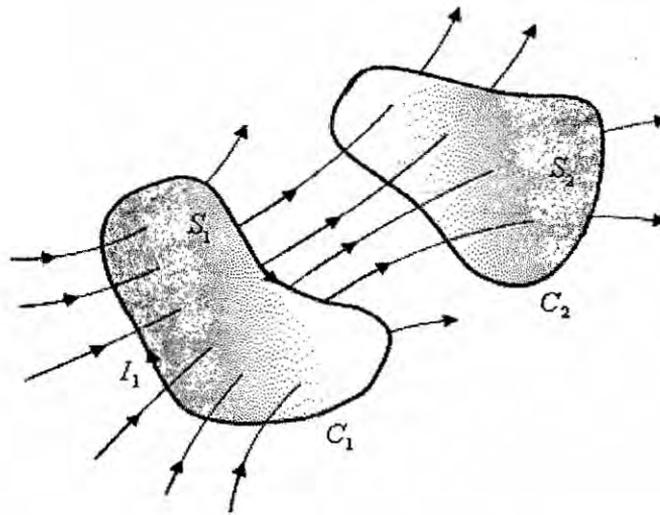
$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$$

Juy

7.7 INDUCTANCIAS E INDUCTORES

Sean dos espiras cerradas cercanas, C_1 y C_2 , que limitan las superficies S_1 y S_2 , respectivamente, como se observa en la figura. Si por la espira C_1 fluye una corriente I_1 , entonces se creará un campo magnético \vec{B}_1 . Parte del flujo magnético ocasionado por \vec{B}_1 estará ligado a la espira C_2 , es decir, pasará a través de la superficie S_2 limitada por C_2 . Si designamos este flujo mutuo con ϕ_{12} , entonces:

$$\phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \quad (\text{Wb}) \quad \dots (1)$$



Como \vec{B}_1 es directamente proporcional a I_1 (según la ley de Biot-Savart), entonces el flujo ϕ_{12} también es proporcional a I_1 . Por lo tanto:

$$\phi_{12} = L_{12} I_1, \quad \dots (2)$$

donde la constante de proporcionalidad L_{12} se denomina *inductancia mutua* entre las espiras C_1 y C_2 , cuya unidad SI es el henry (H). En este caso, C_2 tiene N_2 vueltas y el flujo ligado Λ_{12} debido a ϕ_{12} es

$$\Lambda_{12} = N_2 \phi_{12} \quad (\text{Wb}) \quad \dots (3)$$

La ecuación (2) se generaliza como

$$\Lambda_{12} = L_{12} I_1 \quad (\text{Wb}), \quad \dots (4)$$

$$\circ \quad \boxed{L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \quad (\text{H}) \quad \dots (5)}$$

fup

La inductancia mutua entre dos circuitos es el flujo magnético ligado con un circuito por unidad de corriente en el otro. En la ecuación (5) está implícito que la permeabilidad del medio no cambia con I_1 . Es decir, las ecuaciones (2) y (5) sólo son aplicables a medios *lineales*.

Una parte del flujo magnético producido por I_1 está ligado únicamente a C_1 y no a C_2 . El flujo total ligado a C_1 causado por I_1 es

$$\Lambda_{11} = N_1 \phi_{11} > N_1 \phi_{12} \dots (6)$$

La autoinductancia del circuito C_1 se define como el flujo ligado magnético por unidad de corriente en el propio circuito, es decir,

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \quad (\text{H}) \dots (7)$$

La autoinductancia de una espira o de un circuito depende de la forma geométrica y de la disposición física del conductor que constituye la espira o el circuito, así como de la permeabilidad del medio. En el caso de un medio lineal, la autoinductancia no depende de la corriente en la espira o en el circuito.

Un conductor dispuesto en la forma adecuada (como un alambre conductor enrollado formando una bobina) y que proporciona cierta cantidad de autoinductancia se conoce como *inductor*. Un inductor puede almacenar energía magnética.

El procedimiento para determinar la autoinductancia, o denominada simplemente *inductancia*, de un inductor es el siguiente:

1. Se elige un sistema de coordenadas apropiado para la geometría dada.
2. Se asume que circula una corriente I en el alambre conductor o circuito.
3. Se determina \vec{B} a partir de I usando la ley circuital de Ampère si existe simetría; en caso contrario se utiliza la ley de Biot-Savart.
4. Se halla el flujo ligado a cada vuelta, ϕ , a partir de \vec{B} mediante integración:
 $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, donde S es el área sobre la cual existe \vec{B} y que está ligada a la corriente supuesta.
5. Se determina el flujo ligado Λ multiplicando ϕ por el número de vueltas N .
6. Se determina la autoinductancia L usando el cociente $L = \Lambda / I$.

ful

Para determinar la inductancia mutua L_{12} entre dos circuitos sólo se requiere una ligera modificación al procedimiento anterior. Después de elegir un sistema de coordenadas apropiado, se continúa de la siguiente manera: Se supone una corriente I_1 a través del circuito 1; se calcula \vec{B}_1 ; se encuentre ϕ_{12} integrando \vec{B}_1 sobre la superficie S_2 ; se determina el flujo ligado $\Lambda_{12} = N_2\phi_{12}$; se determina $L_{12} = \Lambda_{12} / I_1$.

7.8 ENERGÍA MAGNÉTICA

Consideremos una espira cerrada con autoinductancia L_1 en la cual la corriente inicialmente es cero. Se conecta a la espira un generador de corriente que aumenta la corriente i_1 de cero a I_1 , induciéndose una fuerza electromotriz en la espira que se opone al cambio en corriente. Hay que realizar cierto trabajo para superar esta fuerza electromotriz. Sea $v_1 = L_1 di_1 / dt$ el voltaje de la inductancia. El trabajo requerido es:

$$W_1 = \int v_1 i_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

que se almacena como *energía magnética*.

En el caso de dos espiras acopladas por las que circulan corrientes, la energía almacenada en el campo magnético viene dada por:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm L_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

En el caso de una corriente I que fluye por un inductor con inductancia L , la energía magnética almacenada es

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (\text{J})$$

ENERGÍA MAGNÉTICA EN TÉRMINOS DE CANTIDADES DE CAMPO

Energía magnética en términos de \vec{B} y \vec{H} :
$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (\text{J})$$

Energía magnética en términos de B y μ :
$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu} dV \quad (\text{J})$$

ful

De esta última ecuación podemos determinar la autoinductancia de manera más fácil a partir de la energía magnética almacenada, calculada en términos de \vec{B} o \vec{H} , en lugar de usar el flujo ligado. Es decir:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (\text{H})$$

7.9 FUERZAS Y PARES MAGNÉTICOS

A continuación analizaremos las fuerzas y los pares en circuitos que transportan corrientes en campos magnéticos estáticos.

FUERZAS Y PARES SOBRE CONDUCTORES POR LOS QUE CIRCULAN CORRIENTES

Se sabe que la fuerza magnética sobre un circuito completo (cerrado) de contorno C por el que circula una corriente I en un campo magnético \vec{B} es

$$\vec{F}_m = I \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (\text{N})$$

Cuando hay dos circuitos por los que circulan corrientes I_1 e I_2 , respectivamente, la situación es análoga a la de un circuito por el que circula una corriente en el campo magnético creado por el otro. En presencia de un campo magnético \vec{B}_{12} , ocasionado por la corriente I_1 en C_1 , la fuerza \vec{F}_{12} sobre el circuito C_2 puede escribirse como

$$\vec{F}_{12} = I_2 \oint_{C_2} d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_{12}$$

donde \vec{B}_{12} es, a partir de la ley de Biot-Savart,

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Al combinar estas dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_2 \times (d\vec{\ell}_1 - (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

fup

que es la ley de la fuerza de Ampère entre dos circuitos por los que circulan corrientes.

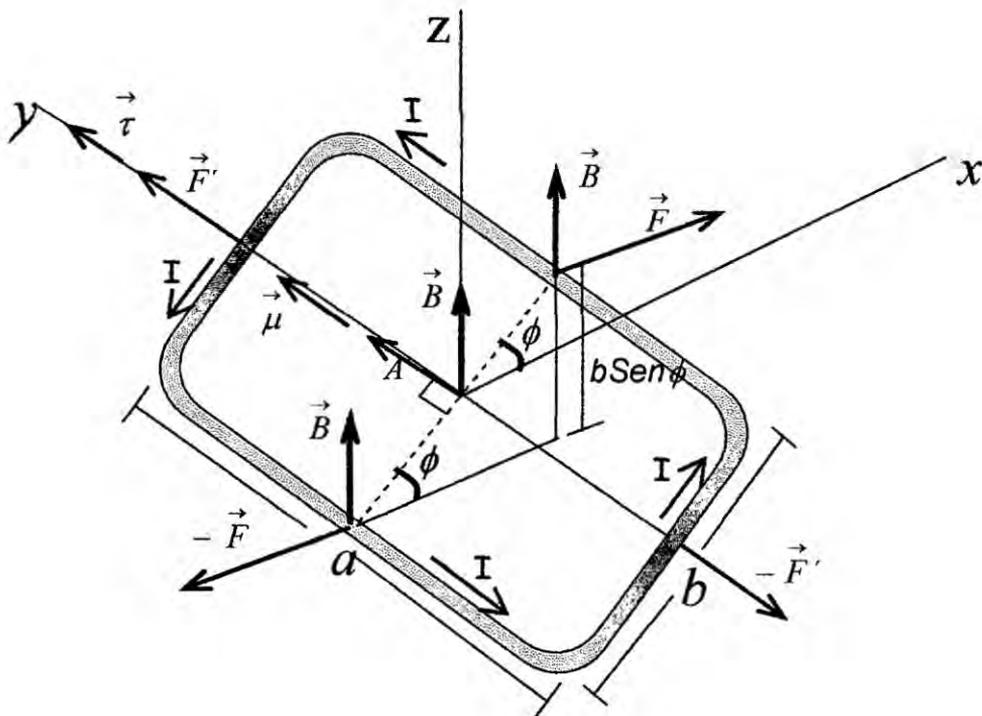
La fuerza \vec{F}_{21} sobre un circuito C_1 , debida al flujo magnético ocasionado por la corriente I_2 en C_2 , según la tercera ley de Newton viene dada por:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

PAR EXPERIMENTADO POR UN CIRCUITO POR EL QUE CIRCULA UNA CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Cuando un circuito, como por ejemplo una espira rectangular con corriente, se halla en el interior de un campo magnético uniforme, la fuerza total sobre la espira es cero (dado que las fuerzas sobre lados opuestos se cancelan por parejas), sin embargo el momento de torsión neto no es igual a cero.

En la figura se muestra una espira rectangular de cable cuyas dimensiones son a y b . Una línea perpendicular al plano de la espira (es decir, una normal al plano) forma un ángulo ϕ con la dirección del campo magnético \vec{B} ; la corriente en la espira es I . Los cables por donde entra y sale la corriente en la espira y la fuente de tensión no se han graficado para que el diagrama no se complique.



fal

El momento de torsión neto es: $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$ (N.m)

Donde:

\vec{m} = momento dipolar magnético = $I \vec{A}$; \vec{A} = Vector área o vector superficie.

La magnitud del momento de torsión sobre la espira con corriente será

$$\tau = I A B \sin\phi \quad (\text{N.m})$$

donde A es el área de la espira igual a ab

El momento de torsión es mayor cuando $\phi = 90^\circ$, \vec{B} está en el plano de la espira y la normal a este plano es perpendicular a \vec{B} . El momento de torsión es cero cuando ϕ es cero o 180° y la normal a la espira es paralela o antiparalela al campo.

raf

7.10 PROBLEMAS RESUELTOS DE CAMPO MAGNÉTICO EN LA MATERIA

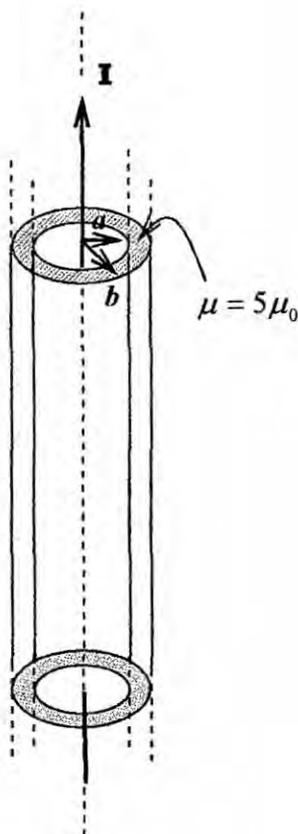
Problema N°1

Un hilo largo por el que circula una corriente $I = 10 \text{ A}$ está rodeado por un tubo cilíndrico de radio interior $a = 5 \text{ cm}$ y radio exterior $b = 8 \text{ cm}$. El tubo es concéntrico con el hilo y podemos suponerlo también muy largo. El tubo tiene una permeabilidad magnética $\mu = 5\mu_0$. Calcular:

- La intensidad de campo magnético \vec{H} en todo el espacio
- La densidad de flujo magnético \vec{B} en todo el espacio.
- La magnetización \vec{M} en todo el espacio.
- La densidad superficial de corriente de magnetización \vec{J}_{SM} para $\rho = a$ y $\rho = b$.
- La densidad volúmica de corriente de magnetización \vec{J}_M .

Resolución

De acuerdo con el enunciado, la figura correspondiente es la que se muestra en la figura.

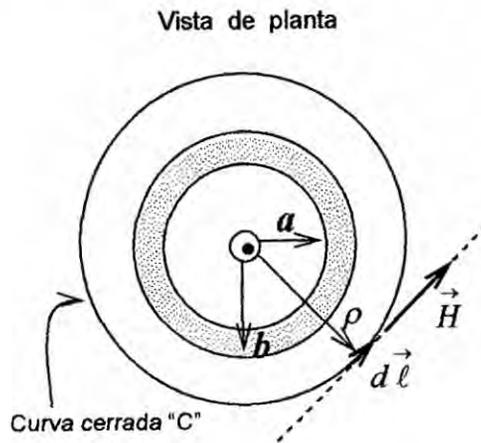


En este problema debemos tener en cuenta que:

- La corriente eléctrica "I" crea a su alrededor un campo magnético \vec{B} .
- El campo magnético \vec{B} creado por la corriente "I" magnetiza al material con el cual está hecho el tubo cilíndrico, originándose en su interior corrientes de magnetización.
- Las corrientes de magnetización alteran finalmente el campo magnético inicial, por lo tanto en la región donde se halla el material magnético, el campo magnético \vec{B} tendrá un valor diferente.

fel

a) Cálculo de \vec{H} en todo el espacio



Por ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{Libre}}$$

$$H(2\pi\rho) = I \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I}{2\pi\rho} = \frac{5}{\pi\rho} \frac{A}{m}$$

$$\text{Vectorialmente: } \vec{H} = \frac{5}{\pi\rho} \hat{a}_\phi \left(\frac{A}{m} \right)$$

b) Cálculo de \vec{B} en todo el espacio

- Para $0 < \rho < a$ y $\rho > b$ (En ambos casos el medio es el vacío)

En el vacío se cumple: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$\text{Luego: } \vec{B} = \frac{5\mu_0}{\pi\rho} \hat{a}_\phi \quad (T)$$

- Para $a < \rho < b$ (en este caso el medio es un material magnético, donde:

$$\mu = 5\mu_0)$$

En un medio magnético se cumple: $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

$$\text{Luego: } \vec{B} = \frac{25\mu_0}{\pi\rho} \hat{a}_\phi \quad (T)$$

c) Cálculo de \vec{M} en todo el espacio

Se sabe que: $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H}$

- Para $0 < \rho < a$ y $\rho > b$: $\vec{M} = 0$ (Porque no hay material magnético)

- Para $a < \rho < b$: $\vec{M} = 4\vec{H} = \left(\frac{20}{\pi\rho} \hat{a}_\phi \right) \frac{A}{m}$

ful

d) Cálculo de \vec{J}_{SM} para $\rho = a$ y $\rho = b$

Sabemos que: $\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n}$

- Para $\rho = a = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$: $\hat{n} = -\hat{a}_\rho$

$$\vec{J}_{SM} = \left(\frac{20}{\pi a} \hat{a}_\phi \right) \times (-\hat{a}_\rho) \implies \vec{J}_{SM} = (127,3236 \hat{a}_z) \frac{A}{m}$$

- Para $\rho = b = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$: $\hat{n} = +\hat{a}_\rho$

$$\vec{J}_{SM} = \left(\frac{20}{\pi b} \hat{a}_\phi \right) \times (+\hat{a}_\rho) \implies \vec{J}_{SM} = (-79,577 \hat{a}_z) \frac{A}{m}$$

e) Cálculo de \vec{J}_M (densidad volúmica de corriente de magnetización)

Se sabe que: $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

En coordenadas cilíndricas, cuando \vec{M} sólo tiene componente M_ϕ , el rotacional de \vec{M} queda:

$$\nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\phi) \right] \hat{a}_z$$

Luego:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{20}{\pi} \right) \hat{a}_z = 0$$

Problema N°2

La región $0 \leq z \leq 2 \text{ m}$ está ocupada por una placa infinita de material permeable

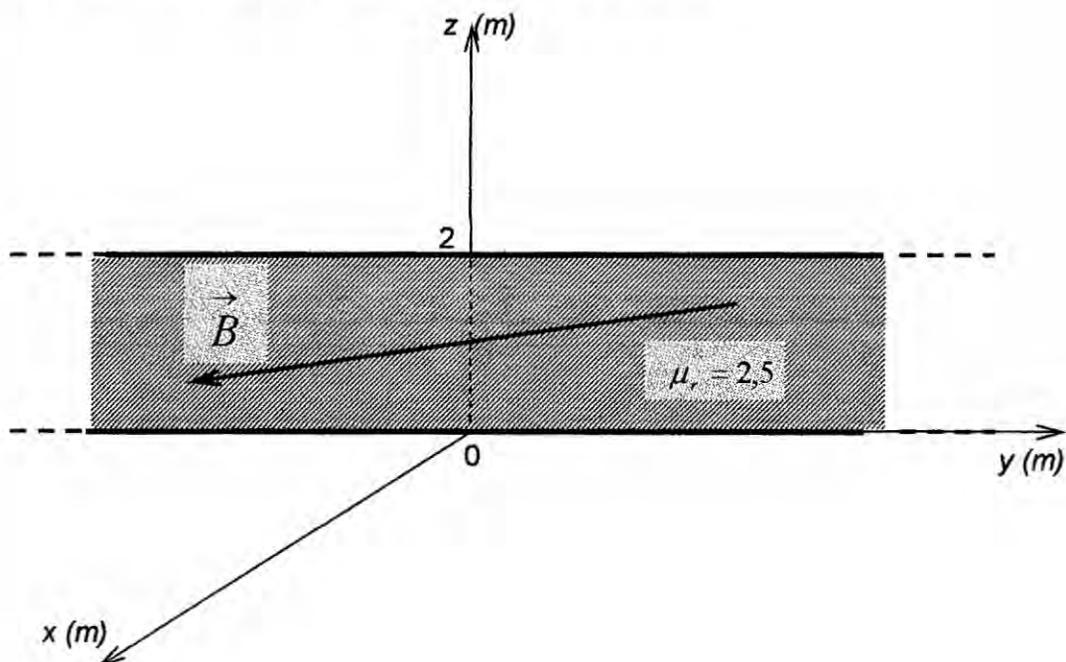
($\mu_r = 2,5$). Si $\vec{B} = 10y \hat{a}_x - 5x \hat{a}_y$, mWb/m^2 dentro de la placa, determine:

- La densidad de corriente \vec{J}
- La magnetización \vec{M}
- La densidad superficial de corriente de magnetización \vec{J}_{SM} en $z = 0$.
- La densidad volúmica de corriente de magnetización \vec{J}_M .

ful

Resolución:

Según lo descrito en el enunciado, la figura correspondiente es la que se muestra a continuación. Donde \vec{B} representan al campo magnético dentro de la placa infinita de material permeable que está ubicada en la región $0 \leq z \leq 2m$.



a) Cálculo de \vec{J} (densidad de corriente)

La densidad de corriente \vec{J} se puede determinar a partir de la Ley de Ampere en su forma diferencial. Es decir:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} \quad \dots \quad (1)$$

Donde: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$; por condición: $\vec{B} = (10y \hat{a}_x - 5x \hat{a}_y) mWb/m^2$

Reemplazo \vec{H} en (1):

$$\vec{J} = \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \right) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \vec{B}$$

El rotacional de \vec{B} , en coordenadas rectangulares, cuando \vec{B} tiene componentes B_x y B_y , se reduce a:

$$\nabla \times \vec{B} = \left[\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right] \hat{a}_z$$

ful

Luego, \vec{J} viene dado por:

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-5x) - \frac{\partial}{\partial y}(10y) \right] \hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{J} = (-4,775 \hat{a}_z) \text{ kA/m}^2$$

b) Cálculo de \vec{M} (magnetización)

Si se conoce \vec{H} , la magnetización \vec{M} se calcula con la siguiente ecuación:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

Reemplazando $\mu_r = 2,5$ y el vector \vec{B} (dato del problema), obtengo:

$$\vec{M} = (4,775y \hat{a}_x - 2,387x \hat{a}_y) \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

c) Cálculo de \vec{J}_{SM} (densidad superficial de corriente de magnetización) en $z = 0$

Se sabe que: $\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n}$

Como $z = 0$ en el lado inferior de la placa que ocupa la región $0 \leq z \leq 2\text{ m}$, entonces:

$$\hat{n} = -\hat{a}_z$$

Luego:

$$\vec{J}_{SM} = (4,775y \hat{a}_x - 2,387x \hat{a}_y) \frac{\text{kA}}{\text{m}} \times (-\hat{a}_z)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_{SM} = (2,387x \hat{a}_x + 4,775y \hat{a}_y) \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

d) Cálculo de \vec{J}_M (densidad volúmica de corriente de magnetización)

Se sabe que: $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

Calculando el rotacional de \vec{M} en coordenadas rectangulares se obtiene:

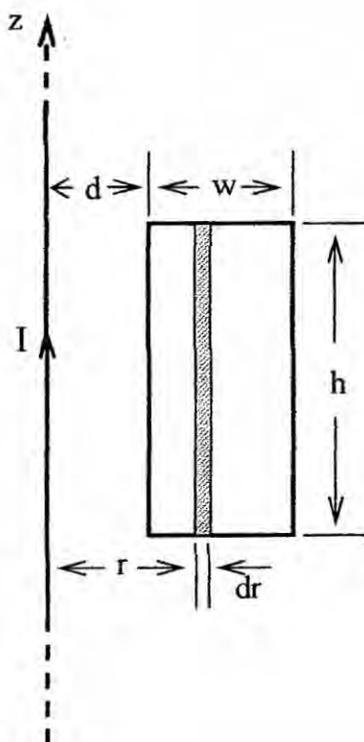
$$\vec{J}_M = -7,162 \hat{a}_z \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$$

ful

7.11 PROBLEMAS RESUELTOS DE INDUCTANCIAS

Problema N° 1

Determine la inductancia mutua entre una espira rectangular conductora y un alambre recto muy largo, como se muestra en la figura.



Resolución:

Para resolver este problema elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas, porque

se conoce que para un hilo muy largo (hilo ∞): $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$

Además, elijo como circuito (1) al hilo ∞ y como circuito (2) la espira.

Para calcular la inductancia mutua entre la espira rectangular conductora y el alambre recto muy largo, de manera directa utilizamos la siguiente ecuación:

$$L_{12} = \frac{N_2 \phi_{12}}{I_1} \dots (1)$$

Hallo ϕ_{12} (flujo ligado para una vuelta del circuito 1 sobre el circuito 2)

Se sabe: $\phi_{12} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \dots (2)$

fu

Se sabe que para un hilo ∞ , con corriente I_1 , el campo magnético \vec{B}_1 , a una distancia

r del hilo, viene dado por: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_\phi$

De la figura: $d\vec{S}_2 = h dr \hat{a}_\phi$

Reemplazo \vec{B}_1 y $d\vec{S}_2$ en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_\phi \cdot h dr \hat{a}_\phi = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \int_{r=d}^{d+w} \frac{dr}{r} \\ \therefore \Phi_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{d+w}{d} \right) \end{aligned}$$

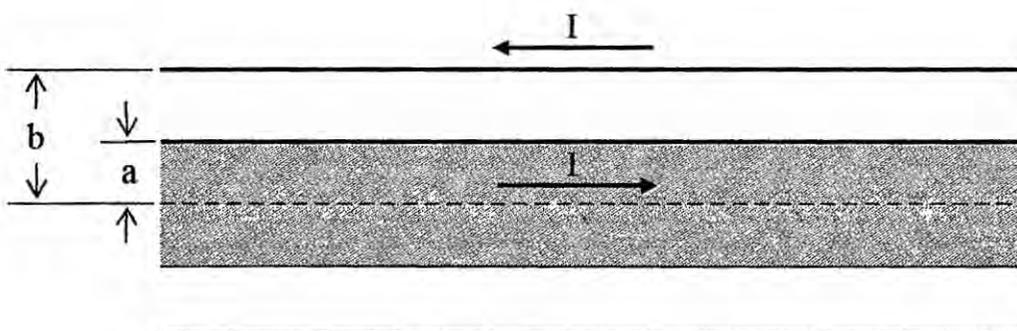
Además, en nuestro caso: $N_2 = 1$ (una espira)

Reemplazando finalmente en la ecuación (1) tenemos que la inductancia mutua entre la espira rectangular conductora y el alambre recto muy largo es:

$$\therefore L_{12} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{d+w}{d} \right)$$

Problema N° 2

Una línea de transmisión coaxial llena de aire tiene un conductor interior sólido de radio a y un conductor externo muy delgado de radio interior b (ver figura). Determine la inductancia por unidad de longitud de la línea.



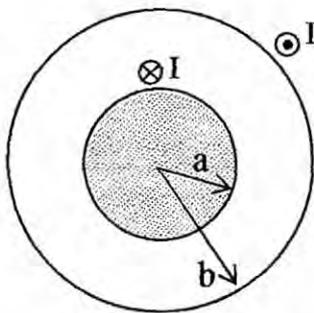
fu

Resolución:

En un inductor de la forma de una línea de transmisión coaxial o de hilos paralelos, se aconseja resolver el problema de la siguiente manera.

- Elegimos primero un sistema de coordenadas cilíndricas.
- Calculo \vec{B} para cada región ($\rho < a$ y $a < \rho < b$)

Sección transversal del cable coaxial



Aplicando la ley de Ampere se obtiene que para puntos $\rho < a$, el campo magnético \vec{B} es igual a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi$$

Para puntos $a < \rho < b$, el campo magnético \vec{B} viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{a}_\phi$$

- Hallo "L'" (Inductancia por unidad de longitud)

La inductancia por unidad de longitud está dada por el cociente entre la inductancia "L" y la unidad de longitud "l". Es decir:

$$L' = \frac{L}{\ell} \dots (1)$$

Donde, por principio de superposición: $L = \underbrace{L_{\text{interna}}}_{\text{(debido al cable interior)}} + \underbrace{L_{\text{externa}}}_{\text{(debido al cable exterior)}} \dots (2)$

Para calcular la inductancia "L" aplico concepto de energía magnética (W_m), es decir:

$$L = \frac{2W_m}{I^2}; \quad W_m = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

Luego, para la región interior ($\rho < a$)

$$L_{\text{int}} = \frac{2}{I^2} \left[\frac{1}{2\mu_0} \int_{z=0}^{\ell} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \left(\frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz \right]$$

$$L_{\text{int}} = \frac{\mu_0}{4\pi^2 a^2} \left(\int_{\rho=0}^a \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_{z=0}^{\ell} dz \right)$$

$$\therefore L_{\text{int}} = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$$

Jup

* Del resultado obtenido se puede concluir que la inductancia interna (L_{int}) no depende del radio del conductor \Rightarrow Para todo alambre muy largo se cumple

que: $L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$

Para la región exterior $a < \rho < b$

$$\circ L_{ext} = \frac{2}{I^2} \left[\frac{1}{2\mu_0} \int_{z=0}^{\ell} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=a}^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz \right]$$

$$L_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \left(\int_{\rho=a}^b \frac{d\rho}{\rho} \right) \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_{z=0}^{\ell} dz \right)$$

$$\Rightarrow L_{ext} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Reemplazo L_{int} y L_{ext} en la ecuación (2):

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación (1) y obtengo la inductancia por unidad de longitud para un cable coaxial:

$$\therefore L' = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right)$$

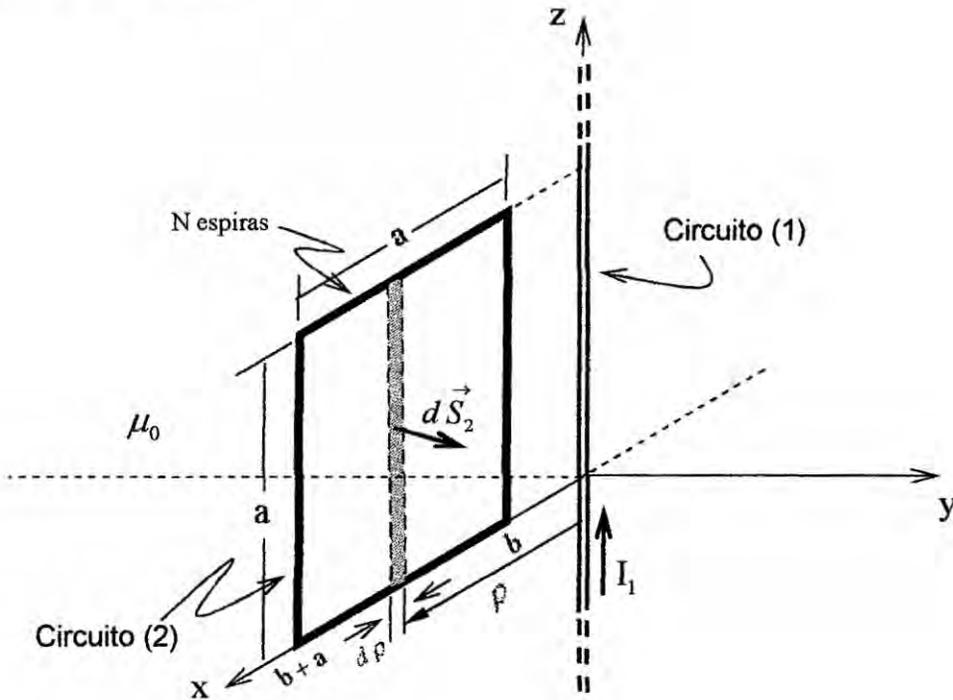
Problema N° 3

Un filamento infinito está a lo largo del eje z en el espacio libre, y una bobina cuadrada de N vueltas está en el plano $y = 0$ con sus esquinas en $(b; 0; 0)$, $(b + a; 0; 0)$, $(b + a; 0; a)$, $(b; 0; a)$. Calcule la inductancia mutua entre el filamento y la bobina en términos de a, b, N y μ_0 .

ful

Resolución:

Del enunciado la figura sería:



Este problema lo resolvemos de manera similar al problema anterior. Es decir:

- Elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas
- Elegimos como circuito (1) al hilo ∞ y como circuito (2) la espira.

- Hallo \vec{B}_1 :

Se sabe que para un hilo ∞ con corriente I_1 , el campo magnético \vec{B}_1 , a una distancia

ρ del hilo, viene dado por:
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \hat{a}_\phi$$

- Hallo Φ_{12} (flujo ligado para una vuelta del circuito 1 sobre el circuito 2)

Se sabe:
$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 ; \text{ donde: } d\vec{S}_2 = a d\rho \hat{a}_\phi$$

Luego:
$$\Phi_{12} = \int_{\rho=b}^{b+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \hat{a}_\phi \cdot a d\rho \hat{a}_\phi = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b+a}{b} \right)$$

- Hallo " Λ_{12} "

Sabemos :
$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$$

Handwritten signature

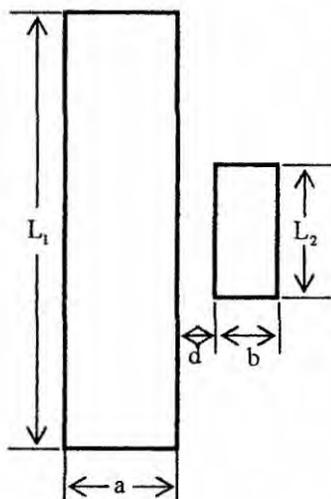
En nuestro caso $N_2 = N$ (espiras) $\Rightarrow \Lambda_{12} = \frac{N\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$

- Halla "L12" (inductancia mutua entre el filamento y la bobina)

Se sabe: $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} \Rightarrow L_{12} = \frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$

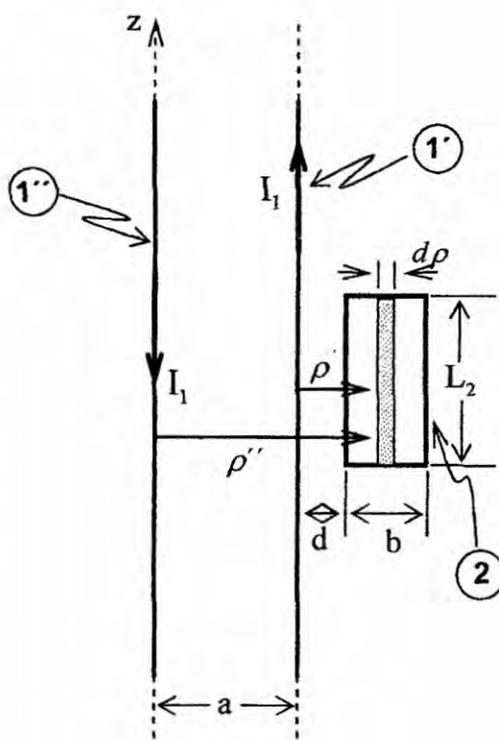
Problema N° 4

Determine la inductancia mutua entre dos espiras rectangulares coplanares con lados paralelos, como se muestra en la figura. Suponga que $L_1 \gg L_2$ ($L_2 > b > d$).



Resolución:

Por condición del problema: $L_1 \gg L_2$, entonces los lados de longitud L_1 de la espira grande se pueden considerar como hilos infinitos, por lo tanto el sistema dado equivale al mostrado a continuación:



ful

Asimismo:

- Elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas.
- Elegimos como circuito (1) a la espira de longitud L_1 , y como circuito (2) a la espira de longitud L_2 .
- Asumo que por el circuito (1) (hilos infinitos) circula una corriente I_1 .
- Hallo \vec{B}_1 : (Densidad de flujo magnético debido al circuito (1) o hilos infinitos)

Por principio de superposición:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{1'} + \vec{B}_{1''}$$

Donde:

$$\vec{B}_{1'} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{a}_\phi \quad ; \quad \vec{B}_{1''} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} (-\hat{a}_\phi)$$

Luego:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{a}_\phi + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} (-\hat{a}_\phi)$$

- Hallo Φ_{12} (flujo ligado para una vuelta del circuito 1 sobre el circuito 2)

Se sabe: $\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$; donde: $d\vec{S}_2 = L_2 d\rho \hat{a}_\phi$

Luego: $\Phi_{12} = \int_{S_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{a}_\phi \cdot L_2 d\rho \hat{a}_\phi + \int_{S_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} (-\hat{a}_\phi) \cdot L_2 d\rho \hat{a}_\phi$

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1 L_2}{2\pi} \left[\int_d^{d+b} \frac{d\rho}{\rho} - \int_{a+d}^{a+d+b} \frac{d\rho}{\rho} \right] = \frac{\mu_0 I_1 L_2}{2\pi} \left[\text{Ln} \left(\frac{d+b}{d} \right) - \text{Ln} \left(\frac{a+d+b}{a+d} \right) \right]$$

$$\therefore \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1 L_2}{2\pi} \left[\text{Ln} \left(\frac{(d+b)(a+d)}{d(a+d+b)} \right) \right]$$

- Hallo " Λ_{12} "

Sabemos: $\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$; $N_2 = 1 \Rightarrow \Lambda_{12} = \Phi_{12}$

- Hallo " L_{12} " (inductancia mutua entre las dos espiras rectangulares)

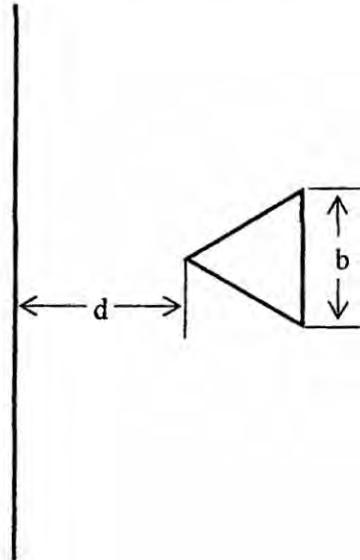
Se sabe: $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}$

$$\therefore L_{12} = \frac{\mu_0 L_2}{2\pi} \left[\text{Ln} \left(\frac{(d+b)(a+d)}{d(a+d+b)} \right) \right]$$

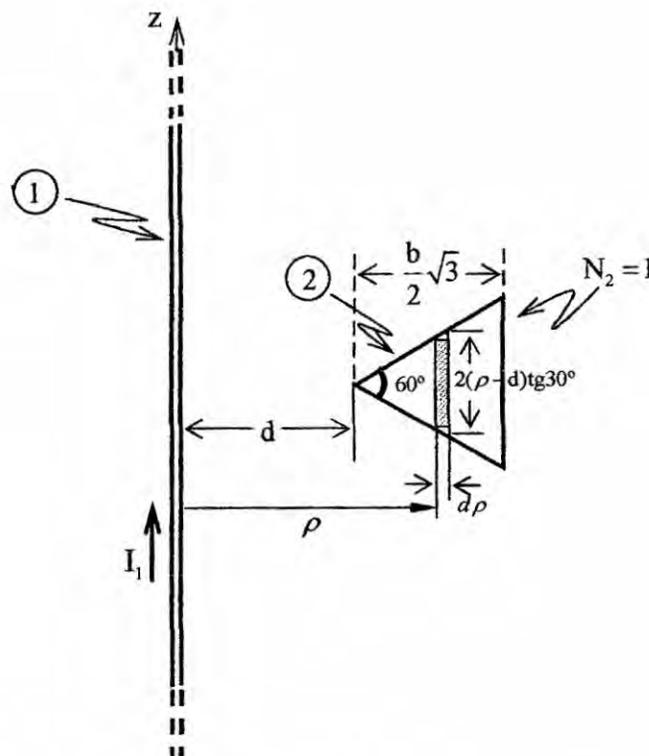
fuf

Problema N° 5

Determine la inductancia mutua entre un alambre recto muy largo y una espira conductora con forma de triangulo equilátero, como se ilustra en la figura.



Resolución:



- Elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas.
- Elegimos como circuito (1) al hilo ∞ y como circuito (2) a la espira triangular.
- Asumimos que por el circuito (1) circula una corriente I_1 .

fu

- Hallo \vec{B}_1 :

El campo magnético \vec{B}_1 , debido al hilo ∞ con corriente I_1 , a una distancia ρ del hilo ∞ , viene dado por:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \hat{a}_\phi$$

- Hallo Φ_{12} (flujo ligado para una vuelta del circuito 1 sobre el circuito 2)

Se sabe: $\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$; donde: $d\vec{S}_2 = 2(\rho - d) \text{tg}30^\circ d\rho \hat{a}_\phi$

$$\text{Luego: } \Phi_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{S_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \hat{a}_\phi \cdot (\rho - d) d\rho \hat{a}_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi} \int_d^{d + \frac{b}{2}\sqrt{3}} \frac{(\rho - d)}{\rho} d\rho$$

$$\Rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi} [\rho - d \text{Ln} \rho]_d^{d + \frac{b}{2}\sqrt{3}} = \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi} \left[\frac{b}{2}\sqrt{3} + d \text{Ln} \left(\frac{2d}{2d + b\sqrt{3}} \right) \right]$$

- Hallo " Λ_{12} ": Sabemos: $\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$

En nuestro caso $N_2 = 1$ (una espira)

$$\Lambda_{12} = \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi} \left[\frac{b}{2}\sqrt{3} + d \text{Ln} \left(\frac{2d}{2d + b\sqrt{3}} \right) \right]$$

- Hallo " L_{12} " (inductancia mutua): Se sabe: $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}$

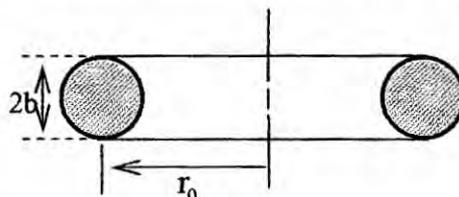
$$\therefore L_{12} = \frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi} \left[\frac{b}{2}\sqrt{3} + d \text{Ln} \left(\frac{2d}{2d + b\sqrt{3}} \right) \right]$$

Problema N° 6

Determine la autoinductancia de una bobina toroidal con N vueltas de alambre devanado alrededor de un marco de aire con radio medio r_0 y sección transversal circular de radio b. Obtenga una expresión aproximada suponiendo $b \ll r_0$.

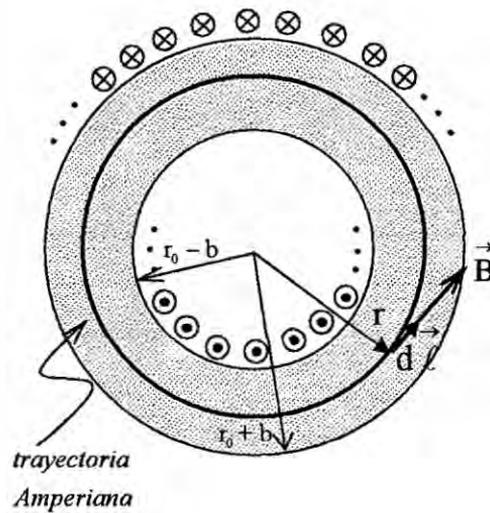
Resolución:

Del enunciado del problema, la figura correspondiente a la sección transversal circular es:



ful

A continuación se muestra un corte transversal de la bobina toroidal.



Cálculo de "L" (inductancia de la bobina toroidal)

- Para la resolución de este problema elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas.

- Hallo \vec{B} para el caso de un Toroide.

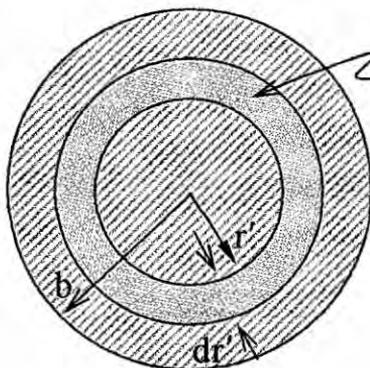
Por Ley de Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc}$

Luego: $B(2\pi r) = \mu_0 (NI) \rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad \therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{a}_\phi$

- Hallo " ϕ ":

Sabemos: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \dots (1)$

Encontramos $d\vec{S}$ en la dirección \hat{a}_ϕ :



$d\vec{S} = 2\pi r' dr' \hat{a}_\phi$

Analizando la sección transversal del toroide, tomando como eje de referencia el centro de dicha sección, y por condición del problema: $b \ll r_0$ en la región $r_0 - b < r < r_0 + b$, se concluye que:

$\vec{B}_{(r)} \approx \vec{B}_{(r_0)} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_0} \hat{a}_\phi$

ful

Reemplazando en (1):

$$\begin{aligned} \oint \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \hat{a}_\phi \cdot 2\pi r' dr' \hat{a}_\phi &= \frac{\mu_0 N I}{r_0} \int_0^b r' dr' = \frac{\mu_0 N I}{r_0} \left(\frac{b^2}{2} \right) \\ \Rightarrow \oint &= \frac{\mu_0 N I b^2}{2r_0} \text{ (flujo ligado a una vuelta)} \end{aligned}$$

- Hallo "Λ":

Sabemos : $\Lambda = N\oint \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0 N^2 I b^2}{2r_0}$ (flujo ligado a N vueltas o flujo total)

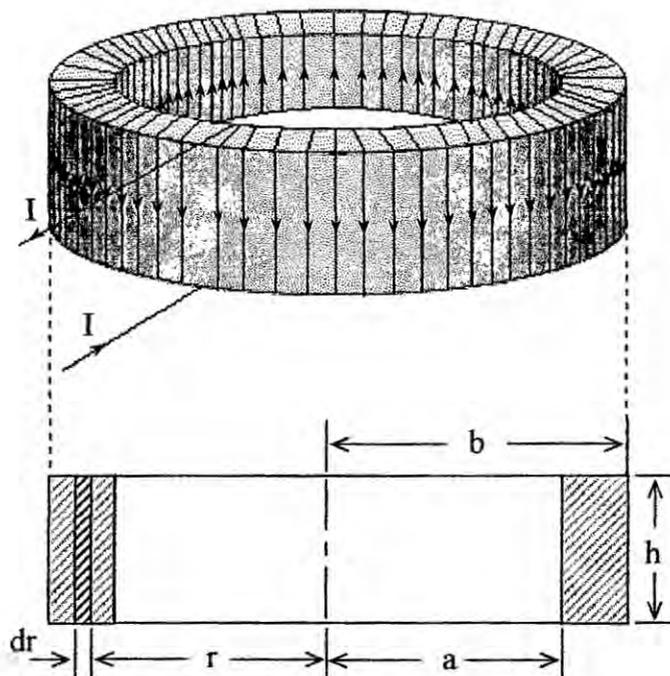
- Finalmente Hallo "L" (autoinductancia o inductancia de la bobina toroidal)

Sabemos : $L = \frac{\Lambda}{I}$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 b^2}{2r_0} \text{ (inductancia para un toroide de sección circular).}$$

Problema N° 7

Alrededor de un marco toroidal de sección transversal rectangular con las dimensiones presentadas en la figura, se enrollan muy juntas N vueltas de alambre. Suponiendo que la permeabilidad del medio es μ_0 . Determine la autoinductancia de la bobina toroidal

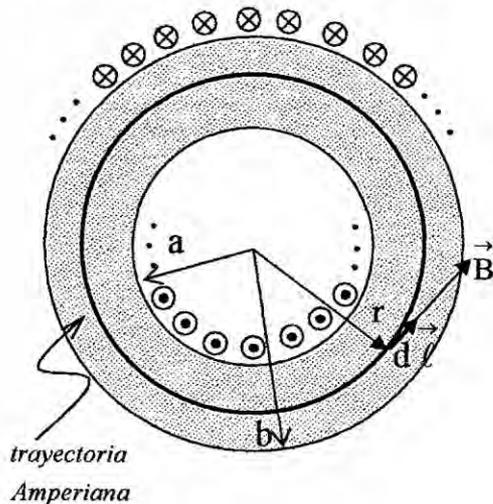


Juf

Resolución:

- Para la resolución de este problema elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas.
- Para calcular la autoinductancia del toroide, primero hallamos \vec{B} para un Toroide.

Sección Transversal del Toroide



$$\text{Por Ley de Ampere: } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

$$\text{Luego: } B(2\pi r) = \mu_0 (NI)$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

- Hallamos " \emptyset " (flujo magnético ligado a una vuelta):

$$\text{Se sabe: } \emptyset = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} ; \text{ donde: } d\vec{S} = h dx \hat{a}_\phi$$

$$\text{Luego: } \emptyset = \int_S \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{a}_\phi \cdot h dx \hat{a}_\phi = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \emptyset = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right)$$

- Hallamos " Λ " (flujo magnético ligado a N vueltas o flujo total):

$$\text{Sabemos: } \Lambda = N\emptyset \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \text{ (flujo ligado a N vueltas o flujo total)}$$

- Hallamos "L" (autoinductancia o inductancia del toroide)

$$\text{Porque lo provoca el circuito sobre si mismo, se cumple: } L = \frac{\Lambda}{I}$$

$$\therefore L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right)$$

ful

LEY DE FARADAY Y ECUACIONES DE MAXWELL

8.1 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA Y LEY DE FARADAY

La inducción electromagnética es un fenómeno físico que origina la inducción de una fuerza electromotriz y una corriente eléctrica, a través de un circuito, debido a un campo magnético variable. Este fenómeno fue descubierto por Michael Faraday en 1831.

La inducción electromagnética es el principio fundamental sobre el cual operan transformadores, generadores y motores eléctricos.

8.2 POSTULADO FUNDAMENTAL DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

En todos los puntos del espacio, sean estos en el vacío o en un medio material, se cumple que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A esta ecuación se le denomina Postulado Fundamental de la Inducción Electromagnética. En ella se observa la relación que existe entre la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y la densidad de flujo magnético variable con el tiempo \vec{B} , verificándose en este caso que \vec{E} es un campo no conservativo. Este postulado nos asegura que un campo magnético variable con el tiempo origina un campo eléctrico. Esta aseveración ha sido verificada experimentalmente. Esta ecuación es una de las

cuatro ecuaciones de Maxwell, las cuales constituyen las ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética.

Cuando se toma la integral de superficie en ambos lados de esta ecuación y aplicamos el teorema de Stokes, obtenemos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Esta ecuación es válida para cualquier superficie S limitada por el curva cerrada C, haya o no un circuito físico alrededor de C. De esta ecuación se puede concluir que el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera con el circuito como borde.

Cuando tenemos un circuito estacionario con un contorno C y superficie S, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si definimos:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \text{fuerza electromotriz inducida en el circuito con contorno } C$$

$$\text{y } \phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{flujo magnético que atraviesa la superficie } S$$

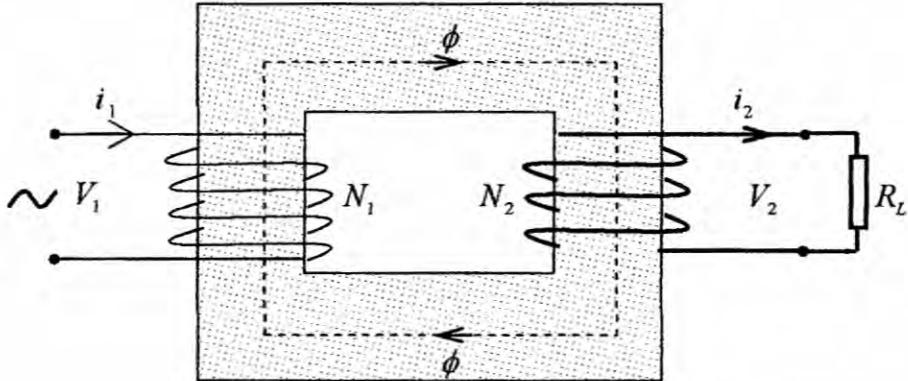
La ecuación anterior queda finalmente de la siguiente forma: $\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} \text{ (V)}$

De esta ecuación se concluye que *la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado estacionario es igual a la razón negativa de incremento del flujo magnético ligado al circuito*. Este enunciado corresponde a la *ley de Faraday de la inducción electromagnética*. El signo negativo es explicado por la *ley de Lenz* que afirma que la fuerza electromotriz inducida hará que fluya una corriente en el circuito cerrado, con dirección tal que se oponga al cambio del flujo magnético ligado.

ful

8.3 TRANSFORMADORES

Un transformador es un dispositivo de corriente alterna que cambia el valor de voltajes, corrientes e impedancias. Está constituido por dos o más bobinas acopladas magnéticamente a través de un núcleo ferromagnético común, como se muestra en la figura.



Para la trayectoria cerrada en el circuito magnético trazado por el flujo magnético ϕ tenemos

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathfrak{R} \phi$$

donde N_1 , N_2 e i_1 , i_2 son el número de vueltas y la corriente en los circuitos primario y secundario, respectivamente. El lado izquierdo de la ecuación es igual a la integral de línea cerrada $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ alrededor del núcleo del transformador, resultado de la ley circuital de Ampère, y representa la *fuerza magnetomotriz* neta (en ampere-vuelta). El símbolo \mathfrak{R} en el lado derecho de la ecuación se denomina *reluctancia* del circuito magnético, la cual depende de la geometría y es inversamente proporcional a la permeabilidad del material del núcleo.

Para el caso de los transformadores ideales suponemos que no hay flujo de fuga y que $\mu \rightarrow \infty$, $\mathfrak{R} = 0$, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Sup

Esta relación establece que *la razón de las corrientes en los devanados primario y secundario ideal es igual a la inversa de la razón de transformación.*

Además, de la ley de Faraday se concluye que:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Es decir, *la razón de los voltajes entre el devanado primario y el secundario de un transformador ideal es igual a la razón de transformación.*

Cuando el devanado secundario termina en una resistencia de carga R_L , como se observa en la figura, la carga efectiva vista por la fuente conectada al devanado primario es

$$(R_1)_{efec} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{(N_1/N_2)V_2}{(N_2/N_1)i_2} \Rightarrow (R_1)_{efec} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$$

Para el caso de una fuente senoidal $V_{1(t)}$ y una impedancia de carga Z_L , la carga efectiva para la fuente es $(N_1/N_2)^2 Z_L$, una transformación de impedancia. Luego, se cumple:

$$(Z_1)_{efec} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

Finalmente hay que señalar que en los transformadores reales tenemos las siguientes condiciones: la existencia de flujo de fuga, inductancias finitas, resistencia diferente de cero en el devanado y la presencia de histéresis y pérdidas por corrientes parásitas. Además, la naturaleza no lineal del núcleo ferromagnético complica aún más el problema de un análisis exacto de los transformadores reales.

ful

8.4 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos. El gran aporte de James Clerk Maxwell (1831-1879) fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros científicos, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético. De las ecuaciones de Maxwell se desprende la existencia de ondas electromagnéticas propagándose con velocidad V , dada por la siguiente ecuación:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

El valor de esta velocidad, que depende del medio material, coincide con el valor de la velocidad de la luz en dicho medio, siendo ϵ y μ la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del medio, respectivamente. Esto le permitió a Maxwell concluir que la luz es una forma de radiación electromagnética, unificando la óptica con el electromagnetismo. Para el caso del vacío o el espacio libre, V es igual a c , por lo tanto se cumple que:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Donde:

$$c = \text{velocidad de la luz en el vacío o en el espacio libre} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\epsilon_0 = \text{permitividad del vacío} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 = \text{permeabilidad del vacío} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

La formulación original de las ecuaciones de Maxwell fue realizada en 1865 y contenía 20 ecuaciones de 20 variables. En 1873 Maxwell intentó una formulación simplificada que finalmente no resultó popular. La formulación moderna, con notación vectorial, fue realizada en 1884 por Oliver Heaviside y Josiah Willard Gibbs.

Las ecuaciones de Maxwell se muestran a continuación en la siguiente tabla.

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV$
Ley de Gauss para el campo magnético (ausencia de monopolos magnéticos)	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Ley de Ampère generalizada	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

* La última ecuación de Maxwell (Ley de Ampère generalizada) nos indica que un campo eléctrico variable con el tiempo producirá un campo magnético, aunque no exista un flujo de corriente libre (es decir, incluso si $\vec{J} = 0$). El término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ se denomina *densidad de corriente de desplazamiento* y su introducción en esta ecuación fue una de las contribuciones principales de Maxwell.

En la siguiente tabla tenemos el significado de cada símbolo y su unidad de medida en el SI.

Símbolo	Significado	Unidad de medida SI
\vec{E}	Intensidad de campo eléctrico	voltio por metro (V/m)
\vec{H}	Intensidad de campo magnético	ampere por metro (A/m)
\vec{D}	Densidad de flujo eléctrico	coulomb por metro cuadrado (C/m ²)
\vec{B}	Densidad de flujo magnético	tesla (T) o weber por metro cuadrado (Wb/m ²)
ρ	Densidad volumétrica de cargas libres	culombio por metro cúbico (C/m ³)
\vec{J}	Densidad de corrientes libres	ampere por metro cuadrado (A/m ²)
$d\vec{S}$	Vector del elemento diferencial de superficie normal a la superficie S	metro cuadrado (m ²)
dV	Elemento diferencial de volumen encerrado por la superficie S	metro cúbico (m ³)
$d\vec{\ell}$	Vector del elemento de longitud del contorno que limita la superficie S.	metro (m)

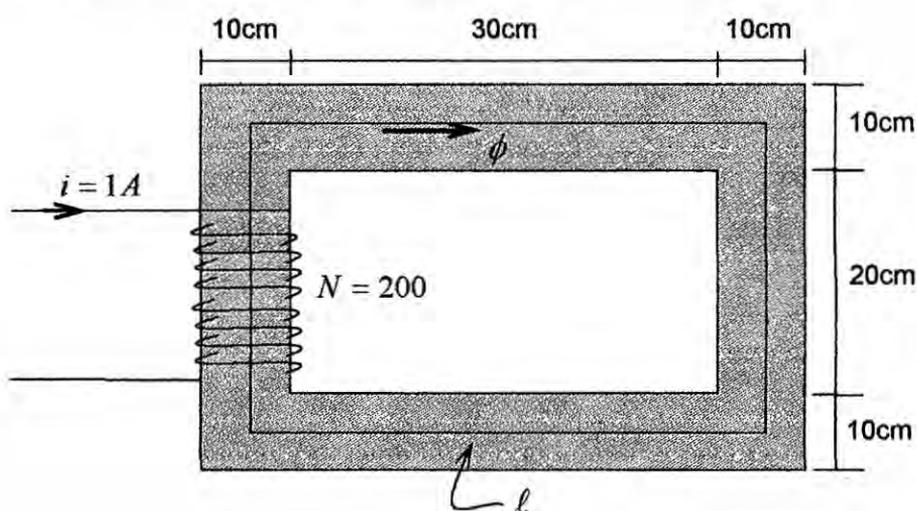
fnf

8.5 PROBLEMAS RESUELTOS DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Problema N° 1

La figura muestra un núcleo ferromagnético de permeabilidad relativa 2 500. La profundidad del núcleo (perpendicular a la página) es de 10 cm y las otras dimensiones se muestran en la figura. Si por la bobina de 200 vueltas circula 1A, calcule:

- La magnitud de la intensidad de campo magnético en el núcleo
- La magnitud de la densidad de flujo magnético resultante
- El flujo magnético total en el núcleo
- El valor de la reluctancia al paso del flujo magnético



Resolución

- a) **Cálculo de "H" (magnitud de la intensidad de campo magnético)**

Por ley de Ampere: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{Libre}}$; donde: $I_{\text{Libre}} =$ corriente neta libre encerrada

por "C"

Evaluando la integral y reemplazando $I_{\text{Libre}} = NI$ (corriente neta libre encerrada por la curva cerrada C), tenemos:

$$H \ell = Ni \quad \Rightarrow \quad H = \frac{Ni}{\ell} \quad \dots \quad (1)$$

ful

Por datos del problema:

$$N = 200 \quad ; \quad i = 1A \quad ;$$

$$\ell = 2(40\text{ cm}) + 2(30\text{ cm}) = 140\text{ cm} = 1,4\text{ m} \quad (\text{ver la figura})$$

Reemplazo en la ecuación (1):

$$H = \frac{200(1A)}{1,4\text{ m}} = 142,857 \frac{A}{m}$$

b) Cálculo de "B" (magnitud de la densidad de flujo magnético resultante)

Se sabe que: $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$

Luego:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2500 \cdot 142,857\text{ T} = 0,4488\text{ T}$$

c) Cálculo de " ϕ " (flujo magnético total en el núcleo)

Cuando B es perpendicular al área A , el flujo magnético ϕ viene dado por:

$$\phi = B A$$

Donde: $A = 10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 100\text{ cm}^2 = 10^{-2}\text{ m}^2$

Entonces: $\phi = 0,4488\text{ T} \cdot 10^{-2}\text{ m}^2 = 4,488\text{ mWb}$

d) Cálculo de la reluctancia \mathfrak{R}

La reluctancia del circuito se calcula por:

$$\mathfrak{R} = \frac{Ni}{\phi} \longrightarrow \mathfrak{R} = \frac{200(1A)}{4,488\text{ mWb}} = 44563,28 \frac{A}{\text{Wb}}$$

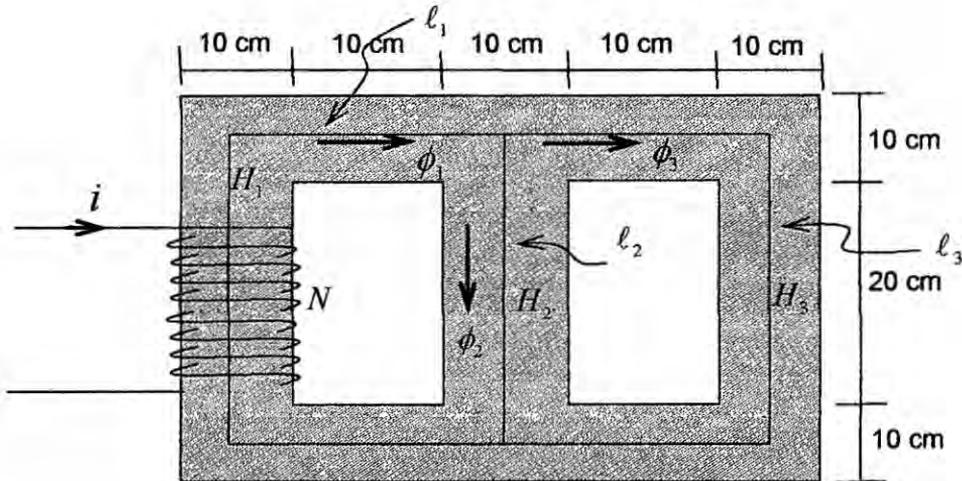
ful

Problema N° 2

En el circuito magnético de la figura, se sabe que: $\phi_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$; $\phi_3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$.

Además, el espesor del núcleo es 10 cm y la bobina tiene 300 vueltas. Calcule:

- El flujo magnético ϕ_1
- Las magnitudes de las densidades de flujo magnético: B_1, B_2 y B_3
- Las magnitudes de las intensidades de campo magnético: H_1, H_2 y H_3 . Se sabe que la permeabilidad relativa del núcleo ferromagnético es 2 000.
- La corriente que circula por la bobina



Resolución

a) Cálculo del flujo magnético ϕ_1

Para el circuito magnético dado se cumple que:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} + 3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

b) Cálculo de B_1, B_2 y B_3

Cuando se conoce el flujo magnético " ϕ ", " B " se halla dividiendo " ϕ " entre el área " A ". Es decir:

$$B = \frac{\phi}{A} \quad ; \quad \text{donde: } A = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$

Prof

Luego:

$$B_1 = \frac{\phi_1}{A_1} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 0,8 \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\phi_2}{A_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 0,5 \text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\phi_3}{A_3} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 0,3 \text{ T}$$

6 Cálculo de H_1 , H_2 y H_3

Se cumple que: $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$

Entonces:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0,8 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 2000} = 318,31 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0,5 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 2000} = 198,94 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0,3 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 2000} = 119,36 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

7 Cálculo de i

Aplicando la ley de Ampère a la curva cerrada del lado izquierdo se cumple que:

$$Ni = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 \quad \Rightarrow \quad 300i = 318,31(0,7) + 198,94(0,3)$$

$$\Rightarrow i = 0,94 \text{ A}$$

fuf

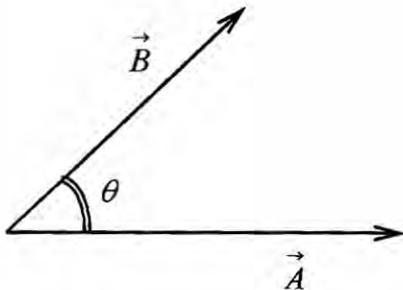
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

La teoría electromagnética requiere de fundamentos matemáticos para poder estudiar los campos electromagnéticos en el espacio. Puesto que las variables electromagnéticas son funciones de coordenadas espaciales tridimensionales y del tiempo, necesitamos conocer como mínimo los sistemas de coordenadas: rectangular o cartesiano, cilíndrico y esférico. Asimismo necesitamos conocer las definiciones básicas del Análisis vectorial. El presente capítulo dará estas herramientas matemáticas que nos permiten resolver situaciones problemáticas relacionadas con los campos electromagnéticos.

9.1 PRODUCTOS ENTRE VECTORES

Producto escalar de vectores o producto punto

El producto escalar de dos vectores \vec{A} y \vec{B} es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\text{Si: } \vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Se cumple que: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$, es decir que el producto escalar de vectores es conmutativo.

Asimismo se cumple que:

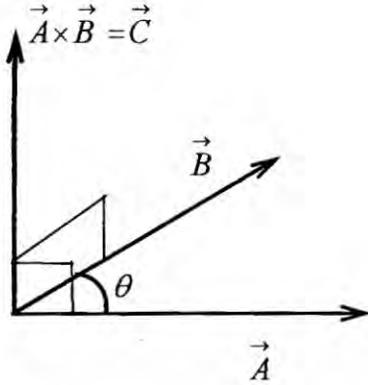
$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1; \quad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1; \quad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0; \quad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0; \quad \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

ful

Producto vectorial de vectores o producto cruz

El producto vectorial de dos vectores \vec{A} y \vec{B} es un tercer vector \vec{C} cuya magnitud es $AB \operatorname{sen} \theta$ y cuya dirección es perpendicular al plano formado por los vectores \vec{A} y \vec{B} .



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen} \theta \vec{\mu}_C$$

También:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

El módulo de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen} \theta$$

Se cumple que: $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$, es decir que el producto vectorial no es conmutativo.

También se cumple que:

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0; \hat{j} \times \hat{j} = 0; \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}; \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}; \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

Producto escalar triple

Es el producto escalar de un vector con el producto vectorial de otros dos vectores.

Si \vec{A}, \vec{B} y \vec{C} son vectores, entonces su producto escalar triple se denota por

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

Donde:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

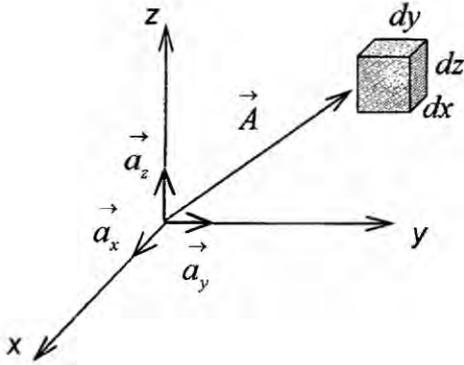
Asimismo se cumple la siguiente relación de productos escalares triples:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

ful

9.2 SISTEMAS DE COORDENADAS

1) COORDENADAS CARTESIANAS O RECTANGULARES (x, y, z)



Los intervalos de las variables de las coordenadas x, y y z son

$$-\infty < x < \infty ; -\infty < y < \infty ; -\infty < z < \infty$$

Vectores Unitarios:

En el eje x : $\hat{a}_x \equiv \hat{i}$

En el eje y : $\hat{a}_y \equiv \hat{j}$

En el eje z : $\hat{a}_z \equiv \hat{k}$

En coordenadas cartesianas, un vector \vec{A} puede expresarse como

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

La magnitud o módulo del vector \vec{A} viene dado por: $|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

Elementos diferenciales de longitud, área y volumen en coordenadas cartesianas

- El desplazamiento diferencial está dado por: $d\vec{\ell} = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z$

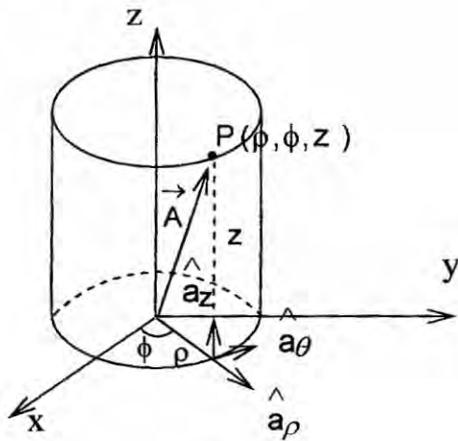
- El área normal diferencial está dada por:

$$d\vec{S} = dy dz \hat{a}_x + dx dz \hat{a}_y + dx dy \hat{a}_z$$

- El volumen diferencial está dado por: $dV = dx dy dz$

ful

2) COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES (ρ, ϕ, z)



Los intervalos de las variables de las coordenadas ρ, ϕ y z son

$$0 < \rho < \infty; 0 < \phi < 2\pi; -\infty < z < \infty$$

Vectores unitarios: $\hat{a}_\rho; \hat{a}_\phi; \hat{a}_z$

En coordenadas cilíndricas, un vector \vec{A} puede expresarse como

$$\vec{A} = A_\rho \hat{a}_\rho + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

La magnitud de \vec{A} es: $|\vec{A}| = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$

Las relaciones entre las variables (x, y, z) del sistema de coordenadas cartesianas y las variables (ρ, Φ, z) del sistema cilíndrico son las siguientes:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi, \quad z = z$$

Elementos diferenciales de longitud, área y volumen en coordenadas cilíndricas

- El desplazamiento diferencial está dado por: $d\vec{\ell} = d\rho \hat{a}_\rho + \rho d\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z$

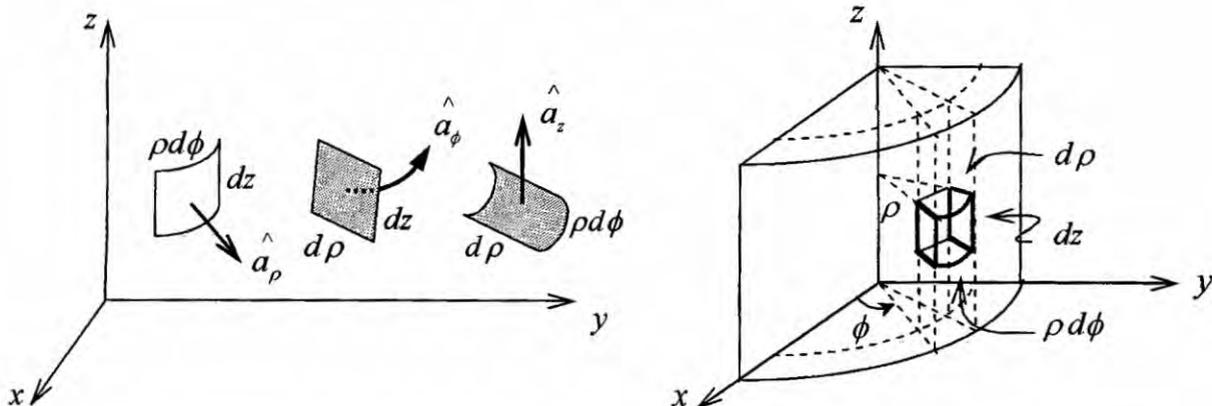
- El área normal diferencial está dada por

$$d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{a}_\rho + d\rho dz \hat{a}_\phi + \rho d\rho d\phi \hat{a}_z$$

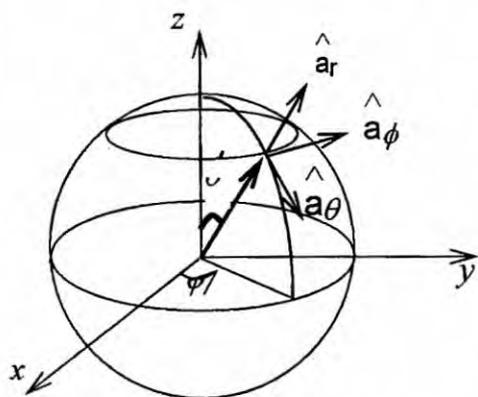
ful

- El volumen diferencial está dado por

$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$



3) COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)



Los intervalos de las variables de las coordenadas r, θ y ϕ son

$$0 < r < \infty; 0 < \theta < \pi; 0 < \phi < 2\pi$$

Vectores unitarios: $\hat{a}_r; \hat{a}_\theta; \hat{a}_\phi$

En coordenadas esféricas, un vector \vec{A} puede expresarse como

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$$

La magnitud de \vec{A} es: $|\vec{A}| = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$

Elementos diferenciales de longitud, área y volumen en coordenadas esféricas

- El desplazamiento diferencial es

$$d\vec{\ell} = \hat{a}_r dr + \hat{a}_\theta r d\theta + \hat{a}_\phi r \text{Sen}\theta d\phi$$

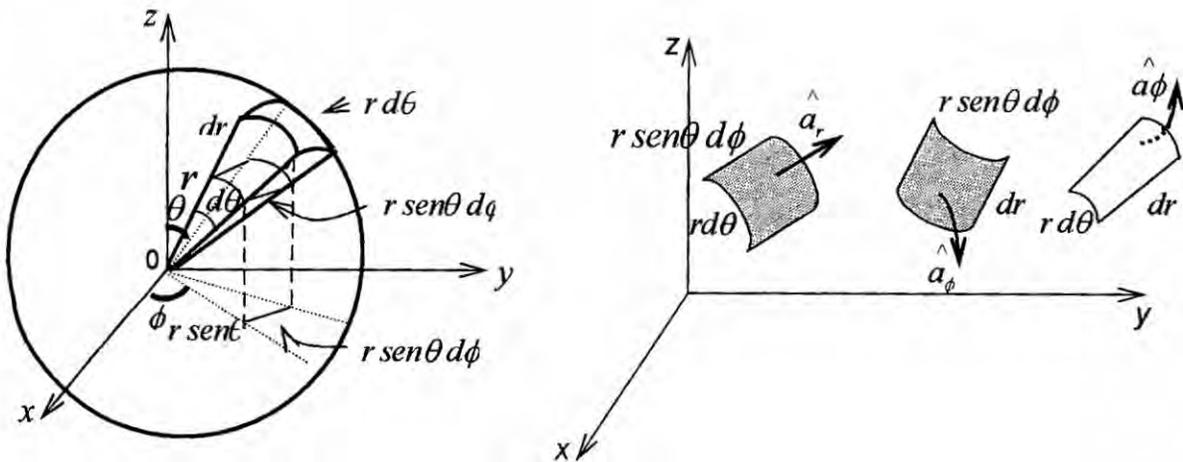
- El área normal diferencial es

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi \hat{a}_r \\ &\quad r \text{sen}\theta dr d\phi \hat{a}_\theta \\ &\quad r dr d\theta \hat{a}_\phi \end{aligned}$$

- El volumen diferencial es

$$dV = r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

fup



9.3 OPERADORES VECTORIALES

1) GRADIENTE

En coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{a}_z$$

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{a}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{a}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{a}_\phi$$

2) DIVERGENCIA

En coordenadas rectangulares (x, y, z) :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

ful

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{Sen} \theta F_\theta) + \frac{1}{r \text{Sen} \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

3) ROTACIONAL

En coordenadas rectangulares (x, y, z) :

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z$$

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{a}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{a}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r \text{sen} \theta} \left(\frac{\partial(F_\phi \text{sen} \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{a}_\phi$$

4) LAPLACIANO

En coordenadas rectangulares (x, y, z) :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

fnp

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{Sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

9.5 TEOREMAS INTEGRALES

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

“El Flujo de un campo vectorial \vec{F} a través de una superficie cerrada S es igual a la integral de la divergencia de \vec{F} sobre el volumen V que delimita”

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

TEOREMA DE STOKES

“La circulación de un campo vectorial \vec{F} a través de una curva cerrada L es igual a la integral del rotacional de \vec{F} sobre cualquier superficie limitada por la curva”

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

IDENTIDAD DE GREEN

Como consecuencia directa del teorema de la divergencia, resulta la identidad siguiente:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S (\phi \nabla \varphi - \varphi \nabla \phi) \cdot d\vec{S}$$

donde ϕ y φ son dos campos escalares

ful

9.6 IDENTIDADES VECTORIALES

Si φ y ψ son campos escalares mientras que \vec{F} y \vec{G} son campos vectoriales, se cumple:

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi(\nabla\varphi) - \varphi(\nabla\psi)}{\psi^2}$$

$$\nabla\varphi^n = n\varphi^{n-1}\nabla\varphi \quad (n = \text{entero})$$

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})$$

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \vec{F} + \varphi\nabla \cdot \vec{F}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\nabla \times \vec{G}) \cdot \vec{F}$$

ful

$$\nabla \times (\varphi \vec{F}) = (\nabla \varphi) \times \vec{F} + \varphi \nabla \times \vec{F}$$

$$\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G}) \vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (\text{Teorema de la divergencia})$$

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\oint_L \varphi d\vec{\ell} = \int_S \nabla \varphi \times d\vec{S}$$

$$\oint_S \varphi d\vec{S} = \int_V \nabla \varphi dV$$

$$\oint_S \vec{F} \times d\vec{S} = - \int_V \nabla \times \vec{F} dV$$

Prof

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N° 1

Encuentre la circulación de la función vectorial esférica $\vec{F} = r^{-2} \hat{a}_r$; desde el punto $(r, \theta, \phi) = (3, 50^\circ, 20^\circ)$ hasta el punto $(r, \theta, \phi) = (2, 75^\circ, 80^\circ)$.

Resolución

Sabemos que la circulación de una función vectorial \vec{F} , a través de una curva cerrada L, viene dada por:

$$\text{Circulación de } \vec{F} = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

En coordenadas esféricas, el elemento diferencial $d\vec{\ell}$ es igual a

$$d\vec{\ell} = dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{a}_\phi$$

Reemplazando \vec{F} y $d\vec{\ell}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_L r^{-2} \hat{a}_r \cdot (dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{a}_\phi) = \oint_L r^{-2} dr \\ \Rightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{r=3}^2 r^{-2} dr = \left. -\frac{1}{r} \right|_3^2 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Problema N° 2

Encuentre el campo eléctrico \vec{E} debido a los siguientes potenciales:

a) $\varphi = r^3\theta - 3\phi$

b) $\varphi = \frac{1}{\rho} \phi z^{1/2}$

c) $\varphi = 3e^{-2x}$

Resolución

Cuando el potencial φ es conocido, el campo eléctrico \vec{E} se halla aplicando gradiente de potencial; es decir:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

uf

Caso (a): $\varphi = r^3 \theta - 3\phi$

En este caso "φ" está expresado en coordenadas esféricas, luego su gradiente viene

dado por:
$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \text{ Sen}\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \hat{a}_\phi$$

Entonces:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left[3r^2\theta \hat{a}_r + \frac{1}{r} r^3 \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \text{ sen}\theta} (-3) \hat{a}_\phi \right] = \left(-3r^2\theta \hat{a}_r - r^2 \hat{a}_\theta + \frac{3}{r \text{ sen}\theta} \hat{a}_\phi \right) \frac{V}{m}$$

Caso (b): $\varphi = \frac{1}{\rho} \phi z^{1/2}$

En coordenadas cilíndricas, el gradiente de "φ" viene dado por:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \hat{a}_\phi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{a}_z$$

Luego:
$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left[\frac{-\phi z^{1/2}}{\rho^2} \hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{z^{1/2}}{\rho} \hat{a}_\phi + \frac{1}{2} \frac{\phi}{\rho z^{1/2}} \hat{a}_z \right]$$

$$\vec{E} = \left(\frac{\phi z^{1/2}}{\rho^2} \hat{a}_\rho - \frac{z^{1/2}}{\rho^2} \hat{a}_\phi - \frac{1}{2} \frac{\phi}{\rho z^{1/2}} \hat{a}_z \right) \frac{V}{m}$$

Caso (c): $\varphi = 3e^{-2x}$

En coordenadas rectangulares, el gradiente de "φ" viene dado por:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{a}_z$$

Luego:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left[-6e^{-2x} \hat{a}_x \right] = 6e^{-2x} \hat{a}_x \left(\frac{V}{m} \right)$$

Problema N° 3

De los siguientes campos vectoriales, ¿Cuál o cuáles representan campos electrostáticos en el vacío?

a) $\vec{A} = e^{-y} (\text{cos}x \hat{a}_x - \text{sen}x \hat{a}_y)$

b) $\vec{B} = 5e^{-2z} (\rho \hat{a}_\rho + \hat{a}_z)$

c) $\vec{C} = \frac{1}{r} (2\text{cos}\theta \hat{a}_r + \text{sen}\theta \hat{a}_\theta)$

Resolución

Se sabe que un campo Electroestático en el vacío es aquel cuyo ROTACIONAL es igual a CERO; es decir:

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \text{ es un campo electrostático}$$

Caso a): $\vec{A} = e^{-y} (\cos x \hat{a}_x - \text{sen} x \hat{a}_y) = e^{-y} \cos x \hat{a}_x - e^{-y} \text{sen} x \hat{a}_y$

En coordenadas rectangulares, el rotacional de \vec{A} viene dado por:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z$$

Luego:

$$\rightarrow \nabla \times \vec{A} = \underbrace{\left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(-e^{-y} \text{sen} x)}{\partial z} \right)}_0 \hat{a}_x + \underbrace{\left(\frac{\partial(e^{-y} \cos x)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right)}_0 \hat{a}_y + \left(\frac{\partial(-e^{-y} \text{sen} x)}{\partial x} - \frac{\partial(e^{-y} \cos x)}{\partial y} \right) \hat{a}_z$$

$$\nabla \times \vec{A} = (-e^{-y} \cos x + e^{-y} \cos x) \hat{a}_z = 0$$

$\therefore \vec{A}$ es un campo electrostático en el vacío.

Caso b): $\vec{B} = 5 e^{-2z} (\rho \hat{a}_\rho + \hat{a}_z) = 5\rho e^{-2z} \hat{a}_\rho + 5e^{-2z} \hat{a}_z$

En coordenadas cilíndricas, el rotacional de \vec{A} viene dado por:

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \hat{a}_\rho + \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho B_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{a}_z$$

Luego:

$$\rightarrow \nabla \times \vec{B} = \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(5e^{-2z})}{\partial \phi} - \frac{\partial(0)}{\partial z} \right)}_0 \hat{a}_\rho + \left(\frac{\partial(5\rho e^{-2z})}{\partial z} - \frac{\partial(5e^{-2z})}{\partial \rho} \right) \hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\frac{\partial(\rho(0))}{\partial \rho} - \frac{\partial(5\rho e^{-2z})}{\partial \phi} \right)}_0 \hat{a}_z$$

$$\nabla \times \vec{B} = -10\rho e^{-2z} \hat{a}_\phi \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \text{ NO es un campo electrostático en el vacío.}$$

Caso c): $\vec{C} = \frac{1}{r} (2\cos\theta \hat{a}_r + \text{sen}\theta \hat{a}_\theta) = \frac{2}{r} \cos\theta \hat{a}_r + \frac{1}{r} \text{sen}\theta \hat{a}_\theta$

En coordenadas esféricas, el rotacional de \vec{A} viene dado por:

$$\nabla \times \vec{C} = \frac{1}{r \text{sen}\theta} \left(\frac{\partial(\text{sen}\theta C_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial C_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r C_\phi)}{\partial r} \right) \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r C_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right) \hat{a}_\phi$$

fu

$$\nabla \times \vec{C} = \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\left(\frac{\partial(\sin \theta(0))}{\partial \theta} - \frac{\partial(\frac{1}{r} \sin \theta)}{\partial \phi} \right)}_0 \hat{a}_r + \frac{1}{r} \underbrace{\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\frac{2}{r} \cos \theta)}{\partial \phi} - \frac{\partial(r(0))}{\partial r} \right)}_0 \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r(\frac{1}{r} \sin \theta))}{\partial r} - \frac{\partial(\frac{2}{r} \cos \theta)}{\partial \theta} \right) \hat{a}_\phi$$

$$\nabla \times \vec{C} = \frac{2}{r^2} \sin \theta \hat{a}_\phi \neq 0 \Rightarrow \vec{C} \text{ NO es un campo electrostático en el vacío.}$$

Problema N° 4

Si $\vec{r} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z$; $r = |\vec{r}|$; n es un entero, demuestre que:

- a) $\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r}$
- b) $\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$
- c) $\nabla^2 (r^n) = n(n+1) r^{n-2}$

Resolución

Si el vector \vec{r} está dado en coordenadas rectangulares, entonces el módulo de \vec{r} está dado por:

$$\vec{r} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Caso a) } \nabla r^n = \nabla (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^n = \nabla \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}}_{\phi}$$

$$\text{En coordenadas rectangulares: } \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{a}_z \dots \text{ (I)}$$

Derivamos " ϕ " con respecto a " x ":

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \right] = \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} - 1} (2x) = nx \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{n-2} = nx r^{n-2}$$

Análogamente, las derivadas de " ϕ " con respecto a " y " y " z " son:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = ny r^{n-2} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = nz r^{n-2}$$

Reemplazando en la ecuación (I) tenemos:

$$\nabla r^n = n r^{n-2} [x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z] = n r^{n-2} \vec{r} \text{ Lo que se quería demostrar}$$

ful

Caso b): $\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = \nabla \cdot \left([x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{n}{2}} (x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z) \right)$

$$\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = \nabla \cdot \underbrace{\left(x [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{n}{2}} \hat{a}_x + y [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{n}{2}} \hat{a}_y + z [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{n}{2}} \hat{a}_z \right)}_{\vec{F}}$$

Sabemos: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \dots$ (II)

Derivamos " F_x " con respecto a " x ":

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[x (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \right] = (1) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} + x (n x r^{n-2}) = r^n + n x^2 r^{n-2}$$

Análogamente, la derivada de " F_y " con respecto a " y " y la derivada de " F_z " con respecto a " z ", son:

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = r^n + n y^2 r^{n-2} \quad ; \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = r^n + n z^2 r^{n-2}$$

Reemplazando en la ecuación (II) tenemos:

$$\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = r^n + n x^2 r^{n-2} + r^n + n y^2 r^{n-2} + r^n + n z^2 r^{n-2}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (r^n \vec{r}) = 3r^n + n r^{n-2} (x^2 + y^2 + z^2) = 3r^n + n r^{n-2} r^2 = (n + 3) r^n$$

Lo que se quería demostrar

Caso c): $\nabla^2 (r^n) = \nabla^2 \left(\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}}_{\varphi} \right)$

En coordenadas rectangulares, el Laplaciano de " φ " es:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \dots$$
 (III)

Derivamos dos veces " φ " con respecto a " x ":

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) ; \text{ donde: } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = n x (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} - 1}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[n x (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} - 1} \right] = n(1) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} - 1} + n x \left(\frac{n}{2} - 1 \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} - 2} (2x)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = n r^{n-2} + n x^2 (n - 2) r^{n-4}$$

Análogamente, las segundas derivadas de " φ " con respecto a " y " y " z ", son:

Prof

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = n r^{n-2} + n y^2 (n-2) r^{n-4} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = n r^{n-2} + n z^2 (n-2) r^{n-4}$$

Reemplazando en la ecuación (III) tenemos:

$$\nabla^2 (r^n) = n r^{n-2} + n x^2 (n-2) r^{n-4} + n r^{n-2} + n y^2 (n-2) r^{n-4} + n r^{n-2} + n z^2 (n-2) r^{n-4}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 (r^n) = 3n r^{n-2} + n(n-2) r^{n-4} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = n(n+1) r^{n-2}$$

Lo que se quería demostrar

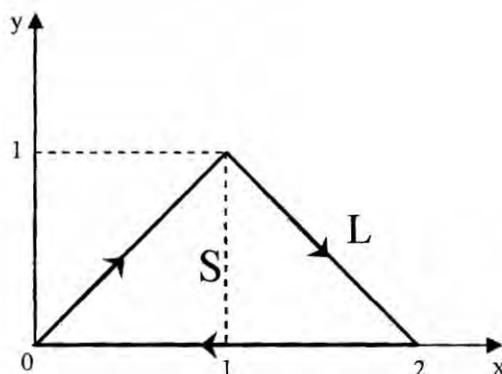
Problema N° 5

Dado que $\vec{F} = x^2 y \hat{a}_x - y \hat{a}_y$,

halle:

a) $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ en donde L se muestra en la figura.

b) $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ donde S es el área acotada por L.



Resolución

8 Cálculo de $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ (Circulación de \vec{F} a través de L)

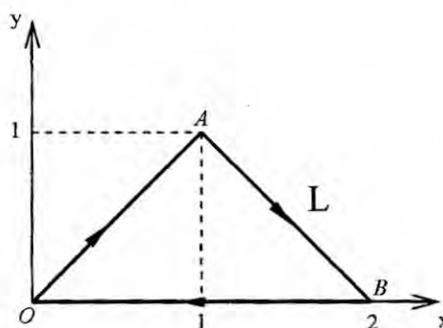
Por condición: $\vec{F} = x^2 y \hat{a}_x - y \hat{a}_y$

De la figura:

Tramo OA: $y = x$; $0 \leq x \leq 1$

Tramo AB: $y = 2 - x$; $1 \leq x \leq 2$

Tramo BO: $y = 0$; $2 \leq x \leq 0$



Entonces:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^O \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \dots (1)$$

Donde:

$$\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x=0}^1 [x^2(x), -(x)] \cdot (dx, dy) \quad ; \quad dy = dx$$

ful

$$\int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x=0}^1 (x^3 - x) dx = -\frac{1}{4}$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x=1}^2 [x^2(2-x), -(2-x)] \cdot (dx, dy) ; dy = -dx$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x=1}^2 [2x^2 - x^3, x - 2] \cdot (dx, -dx) = \int_{x=1}^2 (2x^2 - x^3 + 2 - x) dx = \frac{17}{12}$$

$$\int_B^O \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{porque en este caso } y = 0)$$

Reemplazamos en la ecuación (1) $\therefore \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{4} + \frac{17}{12} + 0 = \frac{7}{6}$

9 Cálculo de $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

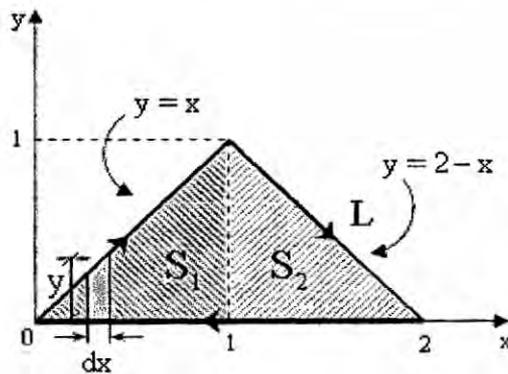
De la figura tenemos:

* Área S_1 :

Regla de la mano derecha

$$d\vec{S}_1 = y dx (-\hat{a}_z) ; y = x$$

* Área S_2 : $d\vec{S}_2 = y dx (-\hat{a}_z) ; y = 2 - x$



Luego: $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}_2 \dots (2)$

Hallo $\nabla \times \vec{F}$ (Rotacional de \vec{F}):

En coordenadas rectangulares, cuando \vec{F} sólo tiene componentes F_x y F_y , el rotacional de \vec{F} queda:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (-y) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) \right) \hat{a}_z = -x^2 \hat{a}_z$$

Reemplazamos en la ecuación (2):

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{x=0}^1 (-x^2 \hat{a}_z) \cdot (-x) dx \hat{a}_z + \int_{x=1}^2 (-x^2 \hat{a}_z) \cdot -(2-x) dx \hat{a}_z$$

$$\therefore \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = \frac{7}{6}$$

Conclusión: Se verifica que: $\boxed{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}}$ (Teorema de Stokes)

ful

Problema N° 6

Compruebe el teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

para la función vectorial $\vec{A} = r^2 \hat{a}_r + r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \hat{a}_\theta$

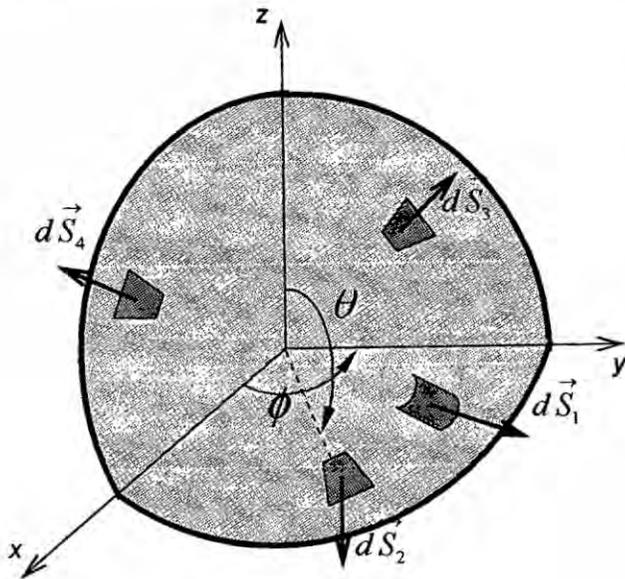
Se sabe que S es la superficie de una porción de esfera definida por $0 < r < 3m$, $0 < \phi < \pi/2$, $0 < \theta < \pi/2$.

Resolución

Para comprobar que se cumple el teorema de la divergencia calculo por separado cada uno de los lados de la igualdad y verifico si son iguales.

Cálculo de $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

La gráfica de la porción de esfera, descrita en el enunciado, es la siguiente:



De la figura:

$$d\vec{S}_1 = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \hat{a}_r ; r = 3m$$

$$d\vec{S}_2 = r \operatorname{sen}\theta d\phi dr \hat{a}_\theta ; \theta = \pi/2$$

$$d\vec{S}_3 = r d\theta dr \hat{a}_\phi ; \phi = 0^\circ$$

$$d\vec{S}_4 = r d\theta dr (-\hat{a}_\phi) ; \phi = \pi/2$$

La integral cerrada, a través de la superficie S , la descomponemos en cuatro integrales abiertas. Es decir:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{A} \cdot d\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{A} \cdot d\vec{S}_4 \dots (I)$$

Donde:

Inf

$$\int_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^2 (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi) = \frac{81\pi}{2}$$

$$\int_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{r=0}^3 \int_{\phi=0}^{\pi/2} r \sin\theta \cos\phi (r \sin\theta \, d\theta \, dr) = 9$$

$$\int_{S_3} \vec{A} \cdot d\vec{S}_3 = 0 \quad (\text{porque } \vec{A} \text{ no tiene componente } \hat{a}_\phi)$$

$$\int_{S_4} \vec{A} \cdot d\vec{S}_4 = 0 \quad (\text{porque } \vec{A} \text{ no tiene componente } \hat{a}_\phi)$$

Reemplazo en la ecuación (I):

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{81\pi}{2} + 9 + 0 + 0 = 136,2345$$

Cálculo de $\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) \, dV$

Se sabe: $\vec{A} = r^2 \hat{a}_r + r \sin\theta \cos\phi \hat{a}_\theta$

La divergencia de \vec{A} , en coordenadas esféricas, es:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r^2) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \cdot r \sin\theta \cos\phi) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (0)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = 4r + 2 \cos\theta \cos\phi$$

Luego:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) \, dV = \int_{r=0}^3 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (4r + 2 \cos\theta \cos\phi) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) \, dV = \frac{81\pi}{2} + 9 = 136,2345$$

∴ se demuestra el teorema de la divergencia

ful

APÉNDICE

TABLA DE INTEGRALES

Si $u = u_{(x)}$, $v = v_{(x)}$ y $a, b = \text{constantes}$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{integración por partes})$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \text{sen } u du = -\text{cos } u + C$$

$$\int \text{cos } u du = \text{sen } u + C$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u du = \ln|\text{sen } u| + C$$

$$\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

Prof

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{8} (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{8} \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

fuf

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$\int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

fuf

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$\int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln|a + bu|) + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3} [(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2 \ln|a + bu|] + C$$

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b} \ln|a + bu| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2 + 3b^2 u^2 - 4abu) \sqrt{a + bu} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \text{ si } a > 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$$

$$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u} du = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$$

$$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a + bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$$

$$\int u^n \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[u^n (a + bu)^{3/2} - na \int u^{n-1} \sqrt{a + bu} du \right]$$

Jul

$$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu| \right) + C$$

$$\int u\sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$$

$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}}$$

$$\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

$$\int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u) \sin u + C$$

$$\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

$$\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

$$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \sin au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int u \sin u du = \sin u - u \cos u + C$$

for

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u \, du = u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$\int \csc^3 u \, du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$$

$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

$$\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du$$

$$\int \cot^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du$$

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$$

$$\int \csc^n u \, du = \frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du$$

$$\int \operatorname{sen} a u \operatorname{sen} b u \, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \cos a u \cos b u \, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$$

$$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du$$

$$\int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$\int u \tan^{-1} u \, du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

ful

$$\int \text{sen}^{-1} u \, du = u \text{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int \text{cos}^{-1} u \, du = u \text{cos}^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$$

$$\int u \text{sen}^{-1} u \, du = \frac{2u^2-1}{4} \text{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$\int u e^{au} \, du = \frac{1}{a^2} (au-1) e^{au} + C$$

$$\int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$$

$$\int e^{au} \text{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \text{sen} bu - b \text{cos} bu) + C$$

$$\int e^{au} \text{cos} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \text{cos} bu + b \text{sen} bu) + C$$

$$\int u^n \text{sen}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \text{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int u^n \text{cos}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \text{cos}^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int u^n \tan^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1+u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

$$\int \frac{1}{u \ln u} \, du = \ln |\ln u| + C$$

$$\int \text{senh} u \, du = \text{cosh} u + C$$

$$\int \text{cosh} u \, du = \text{senh} u + C$$

fu

$$\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1} |\sinh u| + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \ln \left| \tan \frac{1}{2} u \right| + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int u \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{2u-au-3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} \, du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} \, du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int u \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{2u-au-3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

Prof

$$\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$$

$$\int \sqrt{2au-u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2} du = \sqrt{2au-u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

Handwritten signature

BIBLIOGRAFÍA

- 10 *ANTONIO GONZÁLEZ FERNÁNDEZ – SCHAUM . Problemas de Campos Electromagnéticos.* Madrid, España. Mc Graw-Hill – 2005.
- 11 *BERKELEY PHYSICS COURSE – VOL 2. Electricidad y Magnetismo.* Berkeley, E.U.A. Segunda Edición – 1994 - Editorial Reverté.
- 12 *CHENG, DAVID K. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería.* Wilmington, Delaware, EU.A. - 1997 - Addison – Wesley Iberoamericana.
- 13 *DIOSES OTÍN, FEDERICO. ALFAOMEGA. Campos electromagnéticos.* España – Ediciones UPC – 2000.
- 14 *HAYT JR., WILLIAM H. Teoría electromagnética.* México, D.F. Séptima Edición – 2006 - Mc Graw-Hill.
- 15 *KRAUSS-FLEISCH. Electromagnetismo con aplicaciones.* México, D.F. Quinta Edición - 2000– Mc Graw-Hill.
- 16 *REITZ – MILFORD – CHRISTY. Fundamentos de la teoría electromagnética.* Wilmington, Delaware, EU.A. Cuarta Edición – 1996 - Addison Wesley Iberoamericana.
- 17 *SADIKU, MATTHEW N.O. Elementos de electromagnetismo.* México, D.F. Tercera Edición– 2003 - Oxford University Press.
- 18 *TALLEDO CORONADO, ARTURO. Teoría de Campos Electromagnéticos.* Lima, Perú. Cuarta Edición –1998 - Editorial “Ciencias”.

Prof