UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

TÍTULO DEL INFORME FINAL

"EL FUNTOR TRANSFORMADA IDEAL GENERALIZADO, RESPECTO A UN SISTEMA DE IDEALES"

AUTOR: WILFREDO MENDOZA QUISPE

RESOLUCIÓN : Nº 380 – 2019 - R

Callao, 2020

PERÚ

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico a todos los miembros de mi hogar por haberme brindando un grato y agradable ambiente familiar y asimismo apoyado emocionalmente, porque en ellos encuentro la verdadera motivación para seguir avanzando en las diferentes aspectos de mi vida personal y profesional.

Agradecimiento

Agradezco a Dios

A mi país

A las Instituciones: UNAC y UNMSM

A mi familia

A mis amigos, los presentes y los ausentes.

A mi asesor (Q.E.P.D.)

A las autoridades de la UNAC y FCNM.

INDICE

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

Pág.

RESUMEN

La generalización funtorial de la $\mathcal{B}$ – transformada ideal, forma parte de la cohomología local básica, desarrollado en base a los funtores y categorías derivadas.

Método: En primer lugar se ha introducido el denominado “Funtor Ω - Torsión”, el cual se muestra que es equivalente al funtor $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom\left(R/\Omega^n, \bullet \right)$, donde Ω es un ideal en un anillo Notheriano conmutativo R.

Resultados: Con las nociones teóricas de Cohomología local se ha logrado técnicas de reducción en el estudio de dicha cohomología, para módulos “M” finitamente generados, lo cual ha permitido estudiar e investigar la teoría básica del funtor denotado como D_{Ω} obteniéndose de esta manera el módulo $D_{\Omega}(M)$ llamado el Ω - transformada de M, la teoría del funtor transformada ideal generalizado con respecto a un sistema de ideales.

Conclusión: Generalización del funtor Ω- torsión respecto a un sistema de ideales en el anillo Notheriano Conmutativo R.

Palabra clave: Cohomología, Funtor, Categoría, Local.

ABSTRACT

Funtorial generalization of the ideal transformed $\mathcal{B}$ - is part of the basic local cohomology, developed based on the functors and derived categories.

Method: First, the so-called “Functor Ω - Torsion” has been introduced, which is shown to be equivalent to the functor $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom\left(R/\Omega^n, \bullet \right)$, where Ω is an ideal in a commutative Notherian ring R.

Results: With the theoretical notions of local Cohomology, reduction techniques have been achieved in the study of said cohomology, for finely generated “M” modules, which has allowed studying and investigating the basic theory of the functor denoted as obtaining the module in this way. called the Ω-transformed M, the generalized ideal transformed functor theory with respect to an ideal system.

Conclusion: Generalization of the unt-torsion functor with respect to an ideal system in the Notheriano Commutativo R ring.

Keyword: Cohomology, Functor, Category, Local.

INTRODUCCIÓN

El funtor de Cohomología local tiene como base de estudio al denominado funtor torsión. Es decir el funtor de cohomología local denotado por H_Ω, (donde Ω es ideal en un anillo Notheriano conmutativo R) es el funtor derivado del funtor torsión. La cohomología local en el contexto de la categoría de módulos, y tales módulos han sido considerados sobre anillos notherianos conmutativos, más aún sobre anillos graduados pero siempre bajo la hipótesis de Notherianidad. La teoría que se ha estudiado está familiarizado con el lenguaje de categorías y funtores, con homología de complejos; y con algunos aspectos básicos de algebra conmutativa.

En el desarrollo del trabajo se ha iniciado presentando y mostrando propiedades básicas de Cohomología local, seguido de esto se ha expuesto la importancia de funtor derivado – derecho, el cual nos ha permitido ver que la cohomología local con respecto a un ideal Ω es, un funtor derivado isomorfico tensorado con el límite directo de los complejos de Kozul sobre potencias de un sistema de generadores de Ω. Asimismo con esta teoría de cohomología local, y al igual que en la topología algebraica, se puede definir la denominada "sucesión de Mayer – Victoris", así como también se puede identificar el funtor de cohomologia local $H_\Omega^K(-)$ con el funtor $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^K\left(\frac{R}{\Omega^n},-\right)$ ambos en la categoría de $R-$ módulos en si misma. Finalmente y con estas identificaciones se ha definido el llamado funtor transformado ideal descrito por $D_\Omega(-)$ el cual está relacionando con los funtores $\Gamma_\Omega(-)$ y $\mathrm{H}_\Omega^k(-)$.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la Realidad Problemática

Muchos resultados matemáticos son comprendidos cuando son interpretados tanto analítica como geométricamente. Particularmente la teoría de Homología (respectivamente la Cohomología), es una teoría muy compleja y abstracta; siempre ha sido un problema para su comprensión más aún para su interpretación geométrica.

Con la aparición de las notas de Grothendieck – Hartsthorne, la cohomología local se convierte en una herramienta fundamental para muchos trabajos matemáticos en la teoría de anillos Notherianos conmutativos, más aún permite interpretar los resultados desde el punto de vista geométrico.

1.2 Formulación del Problema

1.2.1 Problema General

¿De que forma se puede establecer una generalización funtorial de la $\mathcal{B}$ – Transformada ideal?

1.2.2 Problema específico

¿Es posible determinar el funtor transformada ideal generalizado con respecto a una familia de ideales?.

¿Existe la posibilidad de mostrar y determinar una propiedad universal, para el Ω-transformada ideal?

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Generalizar funtorialmente el $\mathcal{B}$- Transformada ideal. Para mostrar que el Módulo $D_{\Omega}(M)$ proporcione potenciales herramientas algebraicas.

1.3.2 Objetivo Específicos

- Buscar la generalización del funtor ß-Transformada ideal, para una familia específica de ideales $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = ß$
- Mostrar y determinar una cierta propiedad universal, para la Ω -transformada ideal.

1.4 Limitantes de la Investigación

La naturaleza de la investigación que es teórico, más aún abstracto se encuentra inmerso en la teoría de cohomología teniendo como limitante teórico la categoría de $R-$ módulos para un $R-$ anillo Notheriano conmutativo. No presentándose la posibilidad de que los limitantes de la investigación sea de carácter temporal ni espacial.

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1 Internacionales

La cohomología local se puede considerar como una teoría algebraica moderna de orígenes geométricos. Fue J.P. Serrés, en su investigación: “Faisceaux algebriques coherents”, que representa una piedra angular del desarrollo de la cohomología como una herramienta en geometría algebraica, presagiando ideas cruciales de la cohomología. Serrés en su Trabajo de Investigación, publicado en 1955, también tiene indicios de temas que son centrales en la teoría de cohomología local, y sin embargo no fue hasta 1967 que la publicación de R. Hartshorne’s en sus notas de lectura “Local Cohomology” (De un seminario de Grothendieck, en la universidad de Harvard en 1961) confirma la efectividad de la cohomología local como una herramienta en algebra local. Son estos personajes que trabajaron la cohomología local no poniendo particular interés en la cohomología local funtorial, los módulos torsión y la transformada ideal; temas que son de interés en la presente investigación, básicamente en la transformada ideal generalizada.

2.1.2 Nacionales

Como se puede observar en lo expuesto líneas arriba; la teoría de cohomología local es relativamente moderna, siendo que en nuestro país no se encuentran estudios realizados referente al tema propuesto a estudiar e investigar.

2.2 Marco

2.2.1. Teórico

La teoría funtorial en el presente estudio es fundamental. Es entonces como iniciamos haciendo una introducción del funtor denominado “Ω- Torsión” para un ideal Ω sobre un anillo conmutativo noteriano R, tal funtor será denotado como

Γ_Ω y en consecuencia su funtor derivado derecho H^i_Ω para $i \geq 0$ será referido como el funtor de cohomología local, con respecto al ideal Ω.

Preliminarmente mostraremos que los funtores Γ_Ω y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\dfrac{R}{\Omega^n},\cdot\right)$ son equivalentes; por consiguiente el funtor derivado H^i_Ω es equivalente al funtor $D_\Omega := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\dfrac{R}{\Omega^n},\cdot\right)$, luego para un $R-$ módulo M, se tendrá el módulo $D_\Omega(M)$ llamado el Ω - transformado de M, por consiguiente nosotros estudiaremos y desarrollaremos el funtor transformado ideal generalizado con respecto a un sistema de ideales de R. De este modo, previamente se ha presentado la base teórica requerida para nuestro estudio como son la noción de Cohomología, resoluciones proyectiva e inyectiva así como también los funtores Tor_n y Ext_n para $n\in\mathbb{N}$. La cohomología es estudiada de modo similar (dualizando) a la homología; la cual infinitivamente es un funtor covariante mientras que la cohomología es un funtor contravariante.

Definición (2.2.1.1).- Un complejo de Cocadenas $"C"$ es una sucesión $\{C^n\}_{n\geq 0}$ de $R-$módulos y una sucesión $\{\delta^n\}_{n\geq 0}$ de homomorfismos entre dichos módulos. Tales que $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$ Esto se denota como sigue:

$$C:\ldots\ldots\longrightarrow C^{n-1}\xrightarrow{\ \delta\ } C^n\xrightarrow{\ \delta^n\ } C^{n+1}\xrightarrow{\ \delta^{n+1}\ }\ldots\ldots..$$

En muchas ocasiones se escribe simplemente "δ" en lugar de δ^n, para cualquier n.

Definición (2.2.1.2).- Cada elemento $u\in C^n$ se denomina cocadena, n – dimensional o una n – cocadena. Si $\delta^n(u)=0$, se dice que u es un n – cociclo. El conjunto de los n – cociclos se denota como $Z^n = Z^n(C)$ y es un submódulo de C^n ; más aún es el núcleo de δ^n . La imagen $B^n = B^n(C)$ del operador δ^{n-1} también es un submódulo de C^n

Proposición (2.2.1.1).- $B^n \subseteq Z^n$. En efecto resulta directamente del hecho que $\delta \circ \delta = 0$. Ahora, siendo $B^n \subseteq Z^n$ se tiene el módulo cociente: $\dfrac{Z^n}{B^n} = H^n(C)$; llamado el n – ésimo grupo de cohomología de dimensión "n", del complejo C.

Observación: (2.2.1.1)

i) $H^n(C) = \{\mu + B^n : u \in Z^n\}$; de esta manera los elementos de $H^n(C)$ son clases llamadas "Clases de Cohomología" y son denotadas como [u]

ii) Sean [u], [v] dos clases de $H^n(C)$, entonces [u] = [v] si y solo si $u - v \in B^n$. En este caso se dice que u y v son cociclos cohomologos.

iii) Muchas veces un complejo de cocadenas C se escribe simplemente como $C = (C^n, \delta^n), n \geq 0$ para $n \in \square$.

Definición (2.2.1.3).- Sean $C = (C^n, \delta^n)$ y $D = (D^n, \delta^n)$ dos complejos de cocadenas un homomorfismo (o transformación de cocadenas) $f : C \longrightarrow D$ es una familia de homomorfismos $f = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n \,/\, n \in \square\}$ de R – módulos tal que se tiene: $f_n \circ \delta = \delta \circ f_{n-1}$. Diagramando la definición anterior, se dice que $f : C \to D$ es una transformación de cocadenas si el rectángulo siguiente conmuta.

Figura Nº 2.1: Cuadrado conmutativo para transformación de cocadenas

$$\begin{array}{ccc} C^{n-1} & \xrightarrow{\ \delta\ } & C^n \\ {\scriptstyle f_{n-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ D^{n-1} & \xrightarrow{\ \delta\ } & D^n \end{array}$$

Fuente : Autoría propia – 2019.

Observación (2.2.1.2).- Consideremos una transformación de cocadenas $f:C\longrightarrow D,$ entonces el homomorfismo $f_n:C^n\longrightarrow D^n$ aplica $Z^n(C)$ en $Z^n(D)$ y $B^n(C)$ en $B^n(D)$. Por tanto f_n induce un homomorfismo $f^*=H^n(f):H^n(C)\longrightarrow H^n(D)$ entre los módulos de cohomología n – dimensional $H^n(C)$ y $H^n(D)$. Tal homomorfismo se denomina Homomorfismo Inducido n – dimensional de "*f*".

Definición (2.2.1.4).- Sean $f,g:C\longrightarrow D$ dos transformaciones de cocadenas (morfismos de cadenas). Una Homotopia algebraica entre los morfismos f y g es una sucesión de homomorfismos $h_n:C^n\longrightarrow C^{n+1}$ tales que $\delta\circ h_n+h_n\circ\delta=f-g.$ el cual denotaremos como $f\simeq g.$

Proposición (2.2.1.2).- Si f, g : $C\longrightarrow D$ son dos transformaciones de cocadenas algebraicamente homotópìcas $(f\simeq g)$ entonces los homomorfismos inducidos $f^*,g^*:H^n(C)\longrightarrow H^n(D)$ son iguales. i.e.: Si $f\simeq g$ entonces $f^*=g^*$

Demostración.- Es rutinario utilizando la definición de Morfismos homotópicos entre complejos.

Observación (2.2.1.4).- Una sucesión exacta de cohomología determinada por la sucesión exacta corta: $0\longrightarrow C'\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}C''\longrightarrow 0$ de morfismos entre Complejos de cocadenas tiene la forma:

$$........\longrightarrow H^n(C')\xrightarrow{f^*}H^n(C)\xrightarrow{g^*}H^n(C'')\xrightarrow{\delta^*}H^{n+1}(C')\longrightarrow.......$$ donde

f^* y g^* son los homomorfismos inducidos de f y g respectivamente; mientras que δ^* es el denominado homomorfismo Conexión.

Ejemplo (Complejo de Cocadenas) (2.2.1.1)

Sea $\mathcal{C}=(C_n,\partial_n)$ un complejo de cadenas de $R-$móldulos para cada $n\geq 0(n\in\mathbb{Z})$ escribamos $C^n=Hom(C_n,R)$ módulo dual de C_n , cuyos elementos son los $R-$ homomorfismos $\varphi:C_n\longrightarrow R.$ El Operador $\delta=\delta^n:C^n\longrightarrow C^{n+1}$ es el adjunto de $\partial:C_{n+1}\longrightarrow C_n$. Es decir si $\mu\in C^n$ entonces $\delta(\mu)\in C^{n+1}$ mas aún es un homomorfismo funcional definido por $(\delta(\mu)).x = \mu(\partial(x))$ para cualquier cadena $x \in C_{n+1}$. Esto da lugar a un complejo de cocadenas $C^* = (C^n, \delta^n)$, cuyos grupos de cohomología $H^n(C)$ son denominados los grupos de cohomología del complejo de cadenas C.

Definición (2.2.1.5).- Sea R un anillo, X un $R-$ módulo arbitrariamente dado. Por una **Resolución Proyectiva** de X, se entiende una sucesión exacta larga (Complejo de Cadena)

$$C: \ldots\ldots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

De R - módulos, los cuales satisfacen las tres condiciones siguientes:

(P_1) $C_{-1} = X$

(P_2) $C_n = 0$, para cada n < -1

(P_3) C_n es un $R-$ módulo proyectivo, para cada n ≥ 0.

• En particular, si C_n es un módulo libre para cada n ≥ 0, entonces la sucesión larga $"C"$ es denominada: **Resolución libre** del módulo X.

Nota.- Para la existencia de resoluciones proyectivas; nosotros establecemos la siguiente proposición:

Proposición (2.2.3).- Cada $R-$ módulo X tiene una resolución libre.

Demostración: Por teoría de módulos sabemos que cada R – módulo es isomorfico al módulo cociente de un R–módulo libre. Usando tal resultado: existe una sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\beta_0} X \longrightarrow 0$

Donde F_0 es un módulo libre sobre $R \left(X \cong \dfrac{L}{K} = F_0 \text{ L - Libre} \right)$

Nuevamente aplicando el resultado anterior al módulo

$X_0 \left(X_0 \cong \dfrac{L_0}{K_0} = F_1, L_0 - libre \right)$ se obtiene una sucesión exacta corta:

$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xrightarrow{\beta_1} X_0 \longrightarrow 0.$ *Donde* F_1 es un módulo libre.

Una vez más aplicando el “resultado antes mencionado” al módulo

$X_1\left(X_1 \cong \dfrac{L_1}{K_1} = F_1, L_1 - libre\right)$ se obtiene una sucesión exacta corta.

$0 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\alpha_2} F_2 \xrightarrow{ß_2} X_1 \longrightarrow 0$. Donde F_2 es un módulo libre.

De manera inductiva, obtenemos una secuencia exacta corta.

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} F_n \xrightarrow{ß_n} X_{n-1} \longrightarrow 0$$

Para cada $n \in □$, n > 0, donde F_n es un $R-$ módulo libre.

Definamos una sucesión:

$$C:.......C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} ....$$

De $R-$ módulos y $R-$ homomorfismos, como sigue:

$$C_n = \begin{cases} X, & n=-1 \\ F_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < -1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_n = \begin{cases} ß_0 & , \ n=0 \\ \alpha_{n-1} \circ ß_n, & n>0 \\ 0 & , \ n<0 \end{cases}$$

Para probar que $"C"$ es una resolución libre de X, estableceremos su exactitud.

Para lo cual bastará verificar: $\operatorname{Im}\left(\partial_{n+1}\right) = Ker\left(\partial_n\right)$, para cada $n \geq 0$

En efecto: Para cada n ≥ 0 se tiene la sucesión siguiente:

$$X_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} F_{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} X_n \xrightarrow{\alpha_n} F_n \xrightarrow{\beta_n} X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_{n-1} \longrightarrow$$

La cual ha sido obtenida inductivamente, donde $\partial_{n+1} = \alpha_n \circ \beta_{n+1}$ y $\partial_n = \alpha_{n-1} \circ \beta_n$

Como α_n es monomorfismo y β_n es epimorfismo entonces tenemos:

$\operatorname{Im}\left(\partial_{n+1}\right) = \operatorname{Im}\left(\alpha_n\right) = Ker(\beta_n) = Ker\left(\partial_n\right)$. En efecto:

- Sea $y \in \operatorname{Im}\left(\alpha_n\right) \Leftrightarrow y = \alpha_n(x), x \in X_n = \operatorname{Im}\left(\beta_{n+1}\right)\left(\beta_j - epi\right)$ si y solo si existe

  $t \in F_{n+1} / x = ß_{n+1}(t);$ de donde $y = \alpha_n(x) = \alpha_n\left(\beta_{n+1}(t)\right) = \left(\alpha_n \circ \beta_{n+1}\right)(t) = \partial_{n+1}(t)$

  $\therefore I\left(\partial_{n+1}\right) = \operatorname{Im}\left(\alpha_n\right)$

- Ker $\beta_n = \{x \in F_n \ / \ ß_n(x) = 0\}$ $= \left\{x \in F_n \ / \ \alpha_{n-1}\left(ß_{n(x)}\right) = 0\right\}$

$$= \left\{ x \in F_n \,/\, \left(\alpha_{n-1} \circ \beta_n \right)(x) = 0 \right\} = \left\{ x \in F_n \,/\, \partial_n(x) = 0 \right\} = \ker \partial_n$$

Ahora : Consideremos cualquier homomorfismo. $h : X \longrightarrow Y$

Del módulo X, en cualquier $R - módulo\ Y$. También consideremos las resoluciones:

$C : ...... \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow ....$ una resolución proyectiva cualquiera de X, y sea

$D : ...... \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial} D_n \xrightarrow{\partial} D_{n-1} \longrightarrow ....$ otra resolución proyectiva cualquiera de Y.

Con, esto establecemos primero la siguiente proposición.

Proposición (2.2.1.4).- A) Existe un homomorfismo (transformación de cadena). $f = \left\{ f_n : C_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$, De la sucesión *"C"* en la sucesión *"D"*, tal que: $f_{-1} = h,$ es decir el diagrama siguiente es conmutativo. (Figura N° 2.2)

Figura Nº 2.2: Cuadrados conmutativas para Resoluciones Proyectivas

$$\begin{tikzcd}
C : ...... \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & .... \\
D : ...... \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r] & D_{n-2} \arrow[r] & ....
\end{tikzcd}$$

$f_{n-1} \circ \partial = \partial \circ f_n$, para cada número entero "n".

Fuente : Autoría propia 2019.

Demostración: Primero definimos: $f_{-1} = h$. Segundo para n < -1, y siendo que $C_n = 0,$ entonces f_n esta únicamente definido, esto es: $f_n = 0$.

Para el caso n =0, consideremos el diagrama. (Figura N° 2.3)

Figura Nº 2.3: Línea Vertical Homomorfismo único trivial.

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\partial"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h = f_{-1}"] & 0 \\ D_0 \arrow[r, "\partial"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría propia 2019.

Como C_0 es proyectivo y $\partial : D_0 \longrightarrow Y$ es un epimorfismo, si sigue de la definición de módulos proyectivos que existe un homomorfismo.

$f_0 : C_0 \longrightarrow D_0$

Tal que el diagrama siguiente (Figura N° 2.4) conmuta.

Figura Nº 2.4: Cuadrado Conmutativo de dos homomorfismo triviales

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_0"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "h = f_{-1}"] & 0 \\ D_0 \arrow[r, "\partial"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría propia 2019

Es decir: $\partial \circ f_0 = h \circ \partial = f_{-1} \circ \partial$

Ahora sea n > 0 y asumamos que: $f_m : C_m \longrightarrow D_m$. Está construído para cada entero m < n tal que el rectángulo. (Figura N° 2.5]) es conmutativo para cada m < n.

Figura Nº 2.5 : Cuadrado conmutativo para Hipótesis Inductiva

$$\begin{tikzcd} C_m \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_m"] & C_{m-1} \arrow[d, "f_{m-1}"] \\ D_m \arrow[r, "\partial"] & D_{m-1} \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría propia – 2019

De este modo obtenemos el diagrama. Conmutativo siguiente (Figura N° 2.6)

Figura Nº 2.6: Cuadrados conmutativos bajo hipótesis inductiva.

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "f_{n-2}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & D_{n-2} \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría propia.

Ahora a continuación presentemos un resultado básico de álgebra homológica el cual denotaremos por R*.

R*: "Consideremos el siguiente diagrama (Figura N° 2.7) de homomorfismo de R – módulos:

Figura Nº 2.7: Cuadrados conmutativos para R– módulos y R-homomorfismos arbitrarios

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "j"] & Z \arrow[d, "k"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Fuente: Sze – Tsen Hu - 1996

Donde X es proyectivo, el cuadrado conmutativo, la fila superior semiexacta, la inferior exacta. Entonces existe un homomorfismo, $h: X \longrightarrow A$ tal que: $f \circ h = j \circ d$ “. Utilizando el resultado R* existe un homomorfismo.

$f_n : C_n \longrightarrow D_n$, tal que $\partial \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial$, de esta manera se completa la construcción inductiva de la transformación de cadena $f: C \longrightarrow D$ y por tanto se concluye la demostración de la proposición.

Proposición (2.2.1.5).- Para dos homomorfismos cualesquiera (Transformación de cadenas).

$f = \left\{ f_n : C_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ y $g = \left\{ g_n : C_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$

De la sucesión C en la sucesión D, satisfaciendo $f_{-1} = h = g_{-1}$ son homotopicos.

Demostración: Recordando que dos homomorfismos f, g: $C \xrightarrow{f \simeq g} D$; de la sucesión *“C”* en la sucesión D se dicen **Homotopicos si** existe una familia de homomorfismos

$H = \left\{ h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1} \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ tal que, para cada n $\in \mathbb{Z}$; $\partial \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial = f_n - g_n$

Simbolicamente $h: f \simeq g : C \longrightarrow D$

De acuerdo a la definición de complejos de homotopía, tenemos construido una homotopía (cadena de homotopía). $K: f \simeq g : C \longrightarrow D$. De aquí tenemos construido, para cada entero n un homomorfismo.

$K_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$. Tal que: $\partial \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial = f_n - g_n$. Diagramando (Figura N° 2.8)

Figura Nº 2.8: Cuadrado con diagonal doble de Homomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "K_n"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, shift left, "f_n"] \arrow[dr, shift right, "g_n"'] & D_{n+1} \arrow[d, "\partial"] \\
C_{n-1} \arrow[r, "K_{n-1}"'] & D_n
\end{tikzcd}$$

Fuente: W. S. Massey – 1982.

Para cualquier entero n ($n \in \mathbb{Z}$). Entonces:

- Para cada n < -1, $K_n = 0$ es el único homomorfismo de C_n en D_{n+1} puesto que $C_n = 0.$
- Para n = -1, tenemos $K_{n-1} = K_{-2} = 0,$ y $f_n - g_n = f_{-1} - g_{-1} = h - h = 0;$ de aquí en este caso tenemos construido un homomorfismo:

$$K_{-1} : X = C_{-1} \longrightarrow D_0$$

Satisfaciendo: $\partial \circ K_{-1} = 0.$ La existencia de K_{-1} es obvio, en efecto: podemos tomar $K_{-1} = 0.$

- Ahora sea $n \geq 0$ y asumamos que tenemos construido:

$$K_m : C_m \longrightarrow D_{m+1}$$

Para cada entero: m < n y que $\partial \circ K_m + K_{m-1} \circ \partial = f_m - g_m,$ es satisfecha para cada entero m < n. Consideremos el siguiente diagrama: (Figura N° 2.9)

Figura Nº 2.9: Homomorfismo vertical invariante

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[d, "j"] & \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Donde j se mantiene para el homomorfismo $j = f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial$

Componiendo j con $\partial : D_n \longrightarrow D_{n-1},$ obtenemos.

$$\partial \circ j = \partial \circ \left(f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial \right) = \partial \circ f_n - \partial \circ g_n - \partial \circ k_{n-1} \circ \partial$$

$$= f_{n-1} \circ \partial - g_{n-1} \circ \partial - \left(f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2} \circ \partial \right) \partial$$

$$= k_{n-2} \circ \partial \circ \partial = 0$$

Como C_n es proyectivo y la fila es exacta, se sigue que existe un homomorfismo.

$K_n : C_n \longrightarrow D_{n-1}$. Satisfaciendo la relación: $\partial \circ K_n + K_{n-1} \circ \partial = f_n - g_n$

Y esto completa la construcción inductiva de la homotopía. $K : f \simeq g : C \longrightarrow D$,

Y por tanto f y g son homotopicos.

Observación (2.2.5):

1. De las dos últimas proposiciones al considerar X = Y y el homomorfismo identidad $h = I_X$. En este caso C y D son dos resoluciones proyectivas cualesquiera de algún módulo X, del resultado "R*" existe un homomorfismo.

   $$f = \left\{ f_n : C_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

   De la sucesión *"D"* en la sucesión *"C"*. Tal que $f_{-1} = I_x$

   Análogamente existe un homomorfismo $g = \left\{ g_n : D_n \longrightarrow C_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ de la sucesión D en la sucesión C tal que $g_{-1} = I_X$

2. Consideremos las composiciones:

   $$g \circ f = \left\{ g_n \circ f_n : C_n \longrightarrow C_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$
   $$f \circ g = \left\{ f_n \circ g_n : D_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Entonces se verifica que $f \circ g$, y $g \circ f$ son endomorfismos de las sucesiones D y C respectivamente, satisfaciendo: $g_{-1} \circ f_{-1} = I_X = f_{-1} \circ g_{-1}$

Por proposición (2.2.5) se tiene que: $g \circ f \simeq I_C \;\; y \;\; f \circ g \simeq I_D$

Nota.- Las transformaciones de cadenas f y g satisfaciendo estas condiciones son usualmente llamados "**Cadenas Equivalentes**". De aquí ambas funciones $f : C \longrightarrow D \wedge g : D \longrightarrow C$ construidas anteriormente son cadenas equivalentes y las resoluciones proyectivas C y D del $R-$ módulo X se dicen: **Homotopicamente Equivalente**, o del mismo tipo de homotopía.

Proposición (2.2.1.6).- Cada $R-$ módulo X tiene una resolución proyectiva, y cualquiera dos resoluciones proyectivas de algún módulo X son homotopicamente equivalentes.

Demostración.- Se obtienen directamente de las definiciones de resoluciones proyectivas. [Ver: James W. Vick].

Definición (2.2.1.6).- Una **Resolución Inyectiva** de un $R-$ módulo X es una sucesión ascendente exacta.

$C:......\longrightarrow C^{n-1}\longrightarrow C^{n}\longrightarrow C^{n+1}\longrightarrow........$

De $R-$ módulos que satisface las tres siguientes condiciones:

(I_1) $\quad C^{-1}=X$

(I_2) $\quad C^{n}=0,\ \text{para todo } n<-1$

(I_3) $\quad C^{n}$ es un $R-$ módulo inyectivo $\forall n\geq 0.$

Observación: (2.2.6)

i) Todo $R-$ módulo X tiene una resolución inyectiva.

ii) Dos Resoluciones inyectiva de un módulo X son equivalentes homotopicamente.

FUNTOR TORSION

- Sean X, Y dos $R-$ módulos dados arbitrariamente. Elijamos una resolución proyectiva

  $C:......\longrightarrow C_{n+1}\xrightarrow{\partial} C_{n}\xrightarrow{\partial} C_{n-1}\longrightarrow.........$

  Del módulo X. y consideremos su producto tensorial $C\otimes Y$ que es la sucesión

  $(\delta_0)\, C\otimes Y:......\longrightarrow C_{n+1}\otimes Y\xrightarrow{\partial_*} C_{n}\otimes y\xrightarrow{\partial_*} C_{n-1}\otimes Y\longrightarrow......$

  Donde $\partial_*=\partial\otimes I$, I : Y$\longrightarrow Y$ (identidad)

Observación (2.2.1.6).- $(\partial *)^2 = 0$ **,** en efecto:

$$(\partial_*)^2 = \partial_* \circ \partial_* = (\partial \otimes I) \circ (\partial \otimes I) = (\partial \circ \partial) \otimes I \circ I = \partial^2 \otimes I = 0 \otimes I = 0$$

Como $(\partial_*)^2 = 0$, entonces la sucesión "$C \otimes Y$" descendente, para todo n $\in \mathbb{Z}$ da lugar al módulo de Homología n – Dimensional, denotado y definido como:

$$H_n(C \otimes Y) = \frac{Z_n(C \otimes Y)}{B_n(C \otimes Y)}$$

Lema (2.2.1.1).- Para cualquier otra resolución proyectiva

$D: ...... \longrightarrow D_{n+1} \longrightarrow D_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow ....$ del módulo X, se tiene

$H_n(C \otimes Y) \cong H_n(D \otimes Y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración.- Previamente recordemos el resultado siguiente:

R**: "Todo R – módulo X tiene una resolución proyectiva. Y dos resoluciones proyectivas del mismo módulo X son equivalentes homotopicamente", utilizando el resultado R** antes mencionado existen transformaciones de cadenas:

$$f = \{ f_n : C_n \longrightarrow D_n : n \in \mathbb{Z} \}, \quad g = \{ g_n : D_n \longrightarrow C_n : n \in \mathbb{Z} \}$$

De las sucesiones descendentes C y D tales que las transformaciones de cadenas.

$$g \circ f = \{ g_n \circ f_n : C_n \longrightarrow C_n : n \in \mathbb{Z} \}$$
$$f \circ g = \{ f_n \circ g_n : D_n \longrightarrow D_n : n \in \mathbb{Z} \}$$

Son homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de C y D.

Es decir: $g \circ f \simeq 1_C \ \wedge \ f \circ g \simeq 1_D$

De otro lado consideremos el endomorfismo identidad I : Y $\longrightarrow Y$, entonces se tienen las transformaciones de cadenas de las sucesiones descendentes $C \otimes Y$ y $D \otimes Y$. Estos son:

$$f \otimes I = \{ f_n \otimes I : C_n \otimes Y \longrightarrow D_n \otimes Y \,/\, n \in \mathbb{Z} \}$$
$$g \otimes I = \{ g_n \otimes I : D_n \otimes Y \longrightarrow C_n \otimes Y \,/\, n \in \mathbb{Z} \}$$

Estas transformaciones inducen los homomorfismos.

$$f_*: H_n(C\otimes Y)\longrightarrow H_n(D\otimes Y)$$
$$g_*: H_n(D\otimes Y)\longrightarrow H_n(C\otimes Y),\ \text{para todo } n\in\mathbb{Z}$$

Como : $g\circ f \simeq 1_C \wedge f\circ g\simeq 1_D$ son homotópicas, entonces se sigue fácilmente que:

$(g\circ f)\otimes I_Y \simeq 1_C\otimes I_Y \quad \wedge \quad (f\circ g)\otimes I_Y\simeq 1_D\otimes I_Y$ si y solamente si

$$(g\otimes I_Y)\circ(f\otimes I_Y)\simeq 1_{C\otimes Y} \qquad \wedge \qquad (f\otimes I_Y)\circ(g\otimes I_Y)\simeq 1_{D\otimes Y}$$

También recordemos que:

- Si $I: C\xrightarrow{ident} C \Rightarrow H_n(I): H_n(C)\xrightarrow{ident} H_n(C)$
- Si $f: C\longrightarrow D \wedge g: D\longrightarrow E \Rightarrow H_n(g\circ f)=H_n(g)\circ H_n(f)$
- Si $f,g: C\longrightarrow D/\ f\simeq g \Rightarrow H_n(f)=H_n(g)$

De donde entonces se tiene que: $g_*\circ f_*$ y $f_*\circ g_*$ son automorfismos identidad de los módulos: $H_n(C\otimes Y)\wedge H_n(D\otimes Y)$ respectivamente. Es decir:

$$g_*\circ f_*: H_n(C\otimes Y)\xrightarrow{id} H_n(C\otimes Y),\ f_*\circ g_*: H_n(D\otimes Y)\xrightarrow{id} H_n(D\otimes Y)$$

Por tanto: $f_*\ y\ g_*$ son isomorfismos

Lema (2.2.1.2).- $H_n(C\otimes Y)=0,\ \text{para todo } n\le 0.$

Demostración. Es inmediato observar que:

- $H_n(C\otimes Y)=0,\ \forall n\le 1,$ pues $C_n=0, \forall n<-1$ y en consecuencia $C_n\otimes Y=0$ y así se tiene que $H_n(C\otimes Y)=0$
- Ahora veamos para los casos: n = 0 $\wedge$ n = -1
- Observemos que la exactitud de: $C_*\xrightarrow{\partial} C_0\xrightarrow{\partial} C_{-1}\xrightarrow{\partial} 0=C_{-2}$

Implica la exactitud de: $C_1\otimes Y\xrightarrow{\partial_*} C_0\otimes Y\xrightarrow{\partial_*} C_{-1}\otimes Y\xrightarrow{\partial_*} C_2\otimes Y=0$ Por tanto tenemos: $H_0(C\otimes Y)=0, \qquad H_{-1}(C\otimes Y)=0$

Observación (2.2.1.7): El módulo $H_n(C\otimes Y)$ depende esencialmente solo del entero "n" $(n\in\mathbb{Z})$ y los $R-$ módulos X e Y.

Definición (2.2.1.7).- Para todo $n \in \mathbb{Z}^{+}$, el R – módulo $H_n\left(C \otimes Y\right)$ recibe el nombre de: **Producto Torsión n – dimensional sobre *R***, de los R – módulos dados X e Y.

Notación.- $H_n\left(C \otimes Y\right) = Tor_n^R\left(X, Y\right)$ o simplemente**:** $H_n(C \otimes Y) = Tor_n(X, Y)$

Si n = 1, usaremos la notación más simple: $H_1\left(C \otimes Y\right) = Tor_1\left(X, Y\right) = Tor(X, Y)$

Proposición (2.2.1.7).- Si el módulo X es proyectivo, entonces $Tor_n(X, Y) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}^{+}$ y todo R – módulo Y.

Demostración.- Como X es proyectivo, tenemos una resolución proyectiva.

$C : .... \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow ....$ con:

$$C_n = \begin{cases} 0, & si\ n \neq 0, -1 \\ X, & si\ n = 0 \vee n = -1 \end{cases}$$

Y $\partial_n = 0$ para todo $n \neq 0$, mientras que $\partial_0 = I : X \longrightarrow X$ es el homomorfismo identidad del módulo X deduciéndose que:

$C \otimes Y : ...... \longrightarrow C_{n+1} \otimes Y \longrightarrow C_n \otimes Y \longrightarrow C_{n-1} \otimes Y ....$ es exacta, por consiguiente: $Tor_n(X, Y) = 0$, para todo módulo Y, *para todo* $n \in \mathbb{Z}^{+}$

Proposición (2.2.1.8).- Si el módulo Y es proyectivo, entonces $Tor_n(X,Y) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ y todo R – módulo X.

Demostración.- Se obtiene de modo rutinario usando la definición y proposición anterior. [Ver: N. Bourbaki].

Proposición (2.2.1.9): Si el módulo X tiene una resolución proyectiva "C" tal que $C_n = 0$ para todo $n > m$, entonces: $Tor_n(X, Y) = 0$, para todo $n > m$ y todo R – módulo Y.

Además: $Tor_m(X, Y) \cong Ker\left(\partial_m \otimes I\right)$ Donde: $\partial_m \otimes I : C_m \otimes Y \longrightarrow C_{m-1} \otimes Y$

Denota el producto tensorial del homomorfismo $\partial_m : C_m \longrightarrow C_{m-1}$ en el complejo C y el endomorfismo identidad I $: Y \longrightarrow Y$

Demostración: Como $C_n \otimes Y = 0,$ para todo $n > m$ entonces $H_n\left(C \otimes Y\right) = 0,$ $\forall n > m$ por consiguiente $Tor_n\left(X,Y\right) = 0,$ $para$ todo $n > m$. Además como $I_m\left(\partial_{m+1} \otimes I\right) = 0$. Tenemos: $Tor_m(X,Y) = H_m\left(C \otimes Y\right)$ si y solo sí.

$$Tor_m(X,Y) = \frac{Ker\left(\partial_m \otimes I\right)}{\mathrm{Im}\left(\partial_{m+1} \otimes I\right)} = Ker\left(\partial_m \otimes I\right)$$

Corolario (2.2.1.1).- Dados dos módulos X e Y sobre un Dominio de ideales Principales (DIP) R, entonces $Tor_n(X,Y) = 0,$ para todo $n > 1.$ Además $Tor(X,Y) \cong Ker\left(f \otimes I\right)$. Donde: $f \otimes I$ representa el producto tensorial del homomorfismo $f : A \longrightarrow F$ en cualquier sucesión exacta corta. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$

Con F R – módulo libre y el endomorfismo identidad I : $Y \longrightarrow Y$.

Demostración: Es consecuencia de la proposición inmediata anterior.

Proposición (2.2.1.10).- Para cualquier R – módulos X, Y arbitrariamente dados y cualquier sucesión exacta corta. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$

Con P, R – módulo proyectivo, tenemos:

$Tor_n(X,Y) \cong Tor_{n-1}(A,Y),$ para todo $n > 1$ y $Tor(X,Y) \cong Ker\left(f \otimes I\right)$; donde $f \otimes I$ representa el producto tensorial sobre R del homorfismo $f : A \longrightarrow P$ y el endomorfismo identidad I : $Y \longrightarrow Y$.

Demostración: (Ver: Sze – Tsen Hu: Homoloy Theory))**.**

Observación (2.2.1.8).

i) Convencionalmente escribiremos $Tor_0\left(X,Y\right) = X \otimes Y$. Para dos R – módulos cualesquiera X e Y.

ii) Para una resolución proyectiva cualquiera

$C : ...... \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow ....$

Definamos una sucesión descendente

$\tilde{C} : ...... \longrightarrow \tilde{C}_{n+1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} \tilde{C}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \tilde{C}_{n-1} \longrightarrow ....$

De $R-$ módulos tomando:

$$\tilde{C}_n = \begin{cases} C_n, & n \neq -1 \\ 0, & n = -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \tilde{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n, & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

iii) Diremos que esta sucesión descendente $\tilde{C}$ es una: "Resolución Proyectiva Reducida", del módulo X.

Nota.- La utilidad de las resoluciones proyectivas reducidas es debida al hecho que todo módulo en estas resoluciones es proyectivo.

Lema (2.2.1.3).- Para R – módulos X e Y arbitrariamente dados y cualquier resolución proyectiva reducida $\tilde{C}$ de X, tenemos:

$H_n\left(\tilde{C} \otimes Y\right) \cong Tor_n(X,Y), \forall n \geq 0$, para todo entero "$n$" no negativo.

Demostración.- Se obtiene al utilizar la definición de resolución proyectiva reducida.

Observación (2.2.9).-

i. Dados los homomorfismos arbitrarios: $h: X \longrightarrow X'$, $k: Y \longrightarrow Y'$ de R – módulos. Elijamos resoluciones proyectivas C y C' para los módulos $X \wedge X'$, respectivamente. Existe una transformación de cadenas $f = \left\{ f_n : C_n \longrightarrow C_n^{'} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ de la sucesión descendente "C" en la sucesión descendente "C'" tal que $f_{-1} = h$, Entonces:

$f \otimes k = \left\{ f_n \otimes k : C_n \otimes Y \longrightarrow C_n^{'} \otimes Y / n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una transformación de cadenas de la sucesión descendente $C \otimes Y$ en la sucesión descendente $C' \otimes Y'$. Por tanto: $f \otimes k$ induce un homomorfismo $\left[(f \otimes k)_* \right]_n : Tor_n(X,Y) \longrightarrow Tor_n(X',Y')$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se comprueba fácilmente que $\left[(f \otimes k)_* \right]_n$ no depende de la elección particular de la transformación de cadenas $f: C \longrightarrow C'$ y está completamente determinado por el entero "n" y los homomorfismos h, k; denotándolo por: $Tor_n(h,k): Tor_n(X,Y) \longrightarrow Tor_n(X',Y')$ en el caso n=1, usaremos la notación más simple: $Tor(h,k): Tor(X,Y) \longrightarrow Tor(X',Y')$ y lo llamamos simplemente

Producto Torsión (sobre R) de h y k. Convencionalmente, definimos: $Tor_0(h,k)=h\otimes k$

ii) Para todo $n\in\mathbb{Z}_0^+$, Tor_n es un funtor covariante de dos variables de la categoría $\mathscr{M}(R)$ con valores en $\mathscr{M}(R)$.(Categoría de los $R-$ módulos)

iii) Consideremos ahora un R- módulo X y una sucesión exacta corta.

$$0\longrightarrow U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$$

De $R-$ módulos. Elijamos una resolución proyectiva reducida.

$\tilde{C}:\ldots\ldots\longrightarrow\tilde{C}_{n+1}\xrightarrow{\partial}\tilde{C}_n\xrightarrow{\partial}\tilde{C}_{n-1}\longrightarrow\ldots\ldots$ del módulo X, $\forall n\in\mathbb{Z}$ la sucesión $0\longrightarrow\tilde{C}_n\otimes U\xrightarrow{i_n\otimes f}\tilde{C}_n\otimes V\xrightarrow{i_n\otimes g}\tilde{C}_n\otimes W\longrightarrow 0$ donde $i_n=I$ representa el endomorfismo identidad del módulo $\tilde{C}_n$, es exacta. Como $\tilde{C}_n$ es proyectivo, así obtenemos una sucesión exacta corta.

$$0\longrightarrow\tilde{C}\otimes U\xrightarrow{i_n\otimes f}\tilde{C}\otimes V\xrightarrow{i_n\otimes g}\tilde{C}\otimes W\longrightarrow 0$$

De sucesiones descendentes, se tiene también una sucesión de homología exacta.

$$\ldots\ldots\longrightarrow H_n\left(\tilde{C}\otimes U\right)\xrightarrow{f_*}H_n\left(\tilde{C}\otimes V\right)\xrightarrow{g_*}H_n\left(\tilde{C}\otimes W\right)\longrightarrow H_{n-1}\left(\tilde{C}\otimes U\right)\longrightarrow\ldots\ldots$$

Donde f_* y g_* están definidos por las transformaciones de cadenas $I\otimes f$ y $I\otimes g$ respectivamente, y ∂ es el homomorfismo de Conexión.

Proposición (2.2.1.11).- Para todo $R-$ módulo X, y cualquier sucesión exacta corta. $0\longrightarrow U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$ De $R-$ módulos tenemos una sucesión exacta.

$$\ldots\ldots\longrightarrow Tor_n(X,U)\xrightarrow{f_*}Tor_n(X,V)\xrightarrow{g_*}Tor_n(X,W)\xrightarrow{\partial}Tor_{n-1}(X,U)\longrightarrow\ldots\ldots$$

Donde $f_*=Tor_n(I,f)$, $g_*=Tor_n(I,g)$, Y ∂ es el homomorfismo Conexión. Esta sucesión finaliza con.

$$\ldots\ldots\longrightarrow Tor(X,W)\xrightarrow{\partial}X\otimes U\xrightarrow{I\otimes f}X\otimes V\xrightarrow{I\otimes g}X\otimes W\longrightarrow 0$$

Demostración [Ver: James W. Vick, Homology Theory y Arens, J. Dugundji].

Corolario (2.2.1.2).- Para cualquier módulo X sobre un "DIP" R y cualquier sucesión exacta corta. $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$. De $R-$ módulos, se tiene una sucesión exacta.

$$.....\longrightarrow Tor(X,U) \xrightarrow{Tor(I,f)} Tor(X,V) \xrightarrow{Tor(I,g)} Tor(X,W) \xrightarrow{\partial} (X \otimes U) \xrightarrow{I\otimes f} (X \otimes V) \xrightarrow{I\otimes g} (X \otimes W) \longrightarrow 0$$

Donde ∂ es el homomorfismo Conexión, y los otros homomorfismos son los productos torsión y los productos tensoriales del homomorfismo identidad $I : X \longrightarrow X$ y los homomorfismos f y g respectivamente.

Demostración.- Consecuencia directa de la proposición (2.2.1.11)

Proposición (2.2.1.12).- Para todo $R-$ módulo Y, y cualquier sucesión exacta corta.

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$, De $R-$módulos, tenemos una sucesión exacta.

$$.....\longrightarrow Tor_n(U,Y) \xrightarrow{f_*} Tor_n(V,Y) \xrightarrow{g_*} Tor_n(W,Y) \xrightarrow{\partial} Tor_{n-1}(U,Y) \longrightarrow .....$$

Donde $f_* = Tor(f,I)$, $g_* = Tor(g,I).$, Y ∂ es el homomorfismo Conexión.

Esta sucesión finalizada con:

$$......\longrightarrow Tor(W,Y) \xrightarrow{\partial} H \otimes Y \xrightarrow{f\otimes I} V \otimes Y \xrightarrow{g\otimes I} W \otimes Y \longrightarrow 0$$

Demostración: [Ver: W.S. Massey].

FUNTOR EXTENSIÓN:

Sean X, Y dos $R-$ módulos dados arbitrariamente. Elijamos una resolución proyectiva del módulo X.

$C : .....\longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow ......$. Es decir:

$C_{-1} = X$

$C_n = 0,$ Para todo $n < -1$

C_n es un R - módulo proyectivo para todo $n \geq 0$

Y sea i : Y$\longrightarrow$ Y el endomorfismo identidad. Escribamos *Hom (C, Y)*, que denotará la sucesión:

$$Hom(C,Y) : .....\longrightarrow Hom(C_{n-1},Y) \xrightarrow{\delta} Hom(C_n,Y) \xrightarrow{\delta} Hom(C_{n+1},Y) \longrightarrow .....$$

Donde δ = Hom (δ, i)., como: $\delta \circ \delta = Hom(\delta \circ \delta, i \circ i) = Hom(0, i) = 0,$ resulta que *Hom (C, Y)* es semiexacta (i.e. $\operatorname{Im}(\delta) \subseteq Her(\delta)$) y por tanto es una sucesión ascendente. Por tanto para todo $n \in \mathbb{Z}$ el módulo de Cohomología n – dimensional.

$$H^n\left[Hom(C,Y)\right] = \frac{Z^n(Hom(C,Y))}{B^n(Hom(C,Y))}$$

De *Hom (C, Y)* está definido.

Lema (2.2.1.4).- Para cualquier otra resolución proyectiva

$D:\ldots\ldots \longrightarrow D_{n+1} \longrightarrow D_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$ del módulo X, tenemos:

$H^n(Hom(C,Y)) \cong H^n\left(Hom(D,Y)\right), \forall n \in \mathbb{Z}$

Demostración**.** Bastará usar dualización

Lema : (2.2.1.5) $H^n\left[Hom(C,Y)\right] = 0, \forall n \leq 0.$

Demostración.- También bastará usar dualización

Observación (2.2.1.10).-

1. Del lema (2.2.1.3) el módulo $H^n\left(Hom(C,Y)\right)$ depende de X e Y, así como de $n \in \mathbb{Z}$.
2. Por el lema (2.2.1.5) el módulo de Cohomología $H^n(Hom(C,Y))$ es trivial, para todo $n \leq 0, n \in \mathbb{Z}$
3. De (1) y (2) damos la siguiente definición:

Definición (2.2.1.8).- Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. El módulo $H^n\left(Hom(C,Y)\right)$ sobre R se denomina:

Producto Extensión *n* – Dimensional Sobre *R*, de los R – módulos X, Y y se denotará como: $Ext(X,Y) := H^n\left(Hom(X,Y)\right)$

Nota.- Cuando no exista peligro de ambigüedad será denotado como $Ext^n(X,Y)$

2) En el caso n = 1, utilizaremos la notación más simple. Ext (X, Y), denominándolo simplemente: **Producto Extensión** (sobre R) de X e Y.

Proposición (2.2.1.13).- Si el módulo X es proyectivo, entonces: $Ext^n(X,Y)=0$

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo R – módulo Y.

Demostración: Se obtiene de modo rutinario, utilizando la definición de, producto extensión y módulo proyectivo.

Proposición (2.2.1.14): Sea Y un módulo inyectivo. Entonces $Ext^n(X,Y)=0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo R – módulo X.

Demostración.- Sea C una resolución proyectiva de X, es decir:

$$C: ......\longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n+1} \longrightarrow ....$$

Es una sucesión descendente exacta de R – módulos, tal que satisface las condiciones:

(i) $C_{-1} = X$

(ii) $C_n = 0,$ para todo $n < -1$

(iii) C_n es una R – módulo proyectivo para todo $n \geq 0.$

Como C es exacta e Y inyectivo, se deduce que $Hom\ (C, Y)$ es también exacta. Por lo tanto se tiene:

$$Ext^n(X,Y) = H^n(Hom(C,Y)) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+$$

Proposición (2.2.1.15).- Si el módulo X tiene una resolución proyectiva "C" tal que $C_n = 0, \forall n > m$. Entonces: $Ext^n(X,Y)=0,$ para todo $n > m$ y para todo R – módulo, además: $Ext^m(X,Y) \cong Co\ker\left[Hom\left(\partial_m, I_Y\right)\right]$

Donde $Hom\left(\partial_m, I_y\right): Hom\left(C_{m-1}, y\right) \longrightarrow Hom\left(C_m, Y\right)$ es el "Hom" del homomorfismo $\partial_m : C_m \longrightarrow C_{m-1}$ de "C" y el endomorfismo identidad $I_Y : Y \longrightarrow Y$ del módulo "Y".

Demostración: (1º) Como $C_n = 0,$ para todo $n > m;$ entonces Hom $\left(C_n, Y\right) = 0,$ para todo $\mathrm{n} > m$

Pero $Ext^n(X,Y) = H^n(Hom(X,Y)) = H^n(Hom(C,Y)) = H^n(Hom(C_n,Y)) = 0, \forall n > m$

(2º) De otro lado: tenemos que: $Ker\left(Hom\left(\partial_{m+1}, I_Y\right)\right) = Hom\left(C_m, y\right);$ y asi

$$Ext^m(X,Y)=\frac{Ker\left(Hom\left(\partial_{m+1},I_Y\right)\right)}{\operatorname{Im}\left(Hom\left(\partial_m,I_Y\right)\right)} = Co\ker\left(Hom(\partial_m,I_Y)\right)$$

Observación (2.2.1.10).- Si R es un "Dominio de Ideales Principales" entonces de la última proposición tenemos el siguiente corolario.

Corolario (2.2.1.3).- Para X, Y dos R – módulos cualesquiera, donde R es un DIP, se tiene: $Ext^n(X,Y)=0$ Para todo $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. Además: $Ext(X,Y)\cong Co\ker\left(Hom\left(f,I_Y\right)\right)$

Donde $Hom\left(f,I_Y\right)$ representa el Hom del homomorfismo $f:R\longrightarrow F$ de cualquier sucesión exacta corta. $0\longrightarrow R\xrightarrow{f}P\xrightarrow{g}X\longrightarrow 0$

Con P, R – módulo libre y el endomorfismo identidad I : $Y \longrightarrow Y$ del *módulo* Y.

Proposición (2.2.1.16). Para X, Y dos R – módulos arbitrariamente dados y cualquier sucesión exacta corta. $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}P\xrightarrow{g}X\longrightarrow 0$. Con P un R – módulo proyectivo, se tiene:

$$Ext^n(X,Y)\cong Ext^{n-1}(A,Y),\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}, n>1$$

y EXt (X,Y) $\cong$ Coker $\left[Hom(f,I_Y)\right]$, donde $Hom(f,I_Y)$ Hom representa el Hom del homomorfismo $f:A\longrightarrow P$ y el endomorfismo $I_Y:Y\longrightarrow Y$ del *módulo* Y.

Demostración.- Por dualidad

Observación (2.2.1.11).- En lo sucesivo escribiremos:

$$Ext^{o}(x,y):=Hom(X,Y),\text{para todo } X,Y \quad R-\text{módulos.}$$

Lema (2.2.1.6): Para R – módulos X, Y cualesquiera arbitrariamente dados y cualquier resolución proyectiva reducida $\tilde{C}$ del módulo X, se tiene:

$$H^n\left[Hom\left(\tilde{C},Y\right)\right]\cong Ext^n(X,Y),\forall n\in\mathbb{Z}_0^+$$

Demostración.[Ver: W. Fulton Algebraic]

Observación (2.2.1.12).- 1) Consideremos, dos homomorfismos arbitrariamente dados de R-módulos: $h:X'\longrightarrow X \quad\wedge\quad k:Y\longrightarrow Y'$, y elijamos resoluciones proyectivas C y C' para los módulos $X \wedge X'$ respectivamente, entonces, existe una transformación de cadenas.

$f=\left\{ f_n : C'_n \longrightarrow C_n \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$

De la sucesión descendente C' en la sucesión descendente C tal que $f_{-1}=h$.

Entonces: $Hom(f,k)=\left\{ Hom(f_n,k) : Hom(C_n,Y) \longrightarrow Hom(C'_n,Y) \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una transformación de cadenas de la sucesión ascendente $Hom(C,Y)$ en la sucesión ascendente Hom (C',Y'). Por tanto $Hom(f,k)$ induce un homomorfismo.

$Hom(f,k)^{*n} : Ext^n(X,Y) \longrightarrow Ext^n(X',Y')$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

2). Por definición del Hom., se comprueba fácilmente que $Hom(f,k)^{*n}$ es independiente de la elección particular de la transformación de cadenas $f : C' \longrightarrow C$ y está completamente determinado por el entero "*n*" y los homomorfismos: h,k. Este homomorfismo se denominará **Producto EXtensión n – Dimensional** sobre R de *h* y *k*, y será denotado:

$Ext^n(h,k) : Ext^n(X,Y) \longrightarrow Ext^n(X',Y') \qquad (\xi_0)$

3). En (ξ_0); para el caso: n = 1, usaremos la notación más simple:

$Ext(h,k) : Ext(X,Y) \longrightarrow Ext(X',Y')$ Denominándolo, **Producto Extensión** (sobre R), de los homomorfismos dado *h* y *k*. Por conveniencia definimos:

$Ext^{o}(h,k) = Hom(h,k)$

Teorema (2.2.1.1).- para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, Ext^n es un funtor de dos variables de la categoría $\mathcal{M}(R)$ con valores en $\mathcal{M}(R)$ $\left(Ext^n : \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R') \right)$ contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.

Demostración.- Se obtiene de manera inmediata por covarianza.

Consideremos un R- módulo X y una sucesión exacta corta.

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$

De R – módulos. Elijamos una resolución proyectiva reducida.

$\tilde{C} : .... \longrightarrow \tilde{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial} \tilde{C}_n \xrightarrow{\partial} \tilde{C}_{n-1} \longrightarrow ....$

Del módulo X. para todo entero "*n*". La sucesión

$0 \longrightarrow Hom\left(\tilde{C}_n, U\right) \xrightarrow{Hom(i_n, f)} Hom\left(\tilde{C}_n, V\right) \xrightarrow{Hom(i_n, g)} Hom\left(\tilde{C}_n, W\right) \longrightarrow 0$ es exacta, puesto que C_n es proyectivo. Asi obtenemos una sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow Hom\left(\tilde{C}, U\right) \xrightarrow{Hom(I, f)} Hom\left(\tilde{C}, V\right) \xrightarrow{Hom(I, g)} Hom\left(\tilde{C}, W\right) \longrightarrow 0$$

de sucesiones ascendentes. Nuevamente obtenemos una sucesión de cohomología exacta.

$$.... \longrightarrow H^n\left[Hom\left(\tilde{C}, U\right)\right] \xrightarrow{f^*} H^n\left(Hom\left(\tilde{C}, U\right)\right) \xrightarrow{g^*} H^n\left(Hom\left(C, W\right)\right)$$

$\xrightarrow{\delta} H^{n-1}\left(Hom\left(\tilde{C}, U\right)\right) \longrightarrow ....$ Donde f^* y g^* están definidos por las transformaciones de cadenas $f^* = Hom(I, f)$ y g^* = Hom (I, g) respectivamente, y ∂ el homomorfismo Conexión.

Teorema (2.2.1.2).- Para todo R – módulo X y para cualquier sucesión exacta corta de R- módulos, $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$, se tiene una sucesión exacta.

$$(\xi_*) .... \longrightarrow Ext^n(X, U) \xrightarrow{f^*} Ext^n(X, V) \xrightarrow{g^*} Ext^n(X, W) \xrightarrow{\partial} Ext^{n+1}(X, U) \longrightarrow ....$$

Donde: $f^* = Ext^n(i, f),\ g^* = Ext^n(i, g)$ y δ el homomorfismo Conexión.

Demostración : [Ver: O. Zariski and P. Samuel].

Observación (2.2.1.13): La sucesión (ξ_*) comienza con

$$0 \longrightarrow Hom(X, U) \xrightarrow{Hom(i, f)} Hom(X, Y) \xrightarrow{Hom(i, g)} Hom(X, W) \xrightarrow{\delta} Ext(X, U) \longrightarrow ....$$

Corolario (2.2.1.3): Para cualquier módulo X sobre un dominio de ideales principales "R" y cualquier sucesión exacta corta.

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$, De R-módulos, tenemos una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow Hom(X, U) \longrightarrow Hom(X, V) \longrightarrow Hom(X, W) \xrightarrow{\delta} Ext(X, U) \longrightarrow Ext(X, V) \longrightarrow Ext(X, W) \longrightarrow 0$$

Aquí, δ es el homomorfismo Conexión mientras que los otros homomorfismos son los Hom y los productos extensión del homomorfismo identidad I : $X \longrightarrow X$ y los homomorfismos f y g respectivamente.

Teorema (2.2.1.13).- Para todo $R-$módulo Y y cualquier sucesión exacta corta.

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\ f\ } V \xrightarrow{\ g\ } W \longrightarrow 0$. De $R-$módulos, tenemos una sucesión exacta.

$$(\xi_{**}) .... \longrightarrow Ext^n(W,Y) \xrightarrow{\ g^*\ } Ext^n(V,Y) \xrightarrow{\ f^*\ } Ext^n(U,Y) \xrightarrow{\ \delta\ } Ext^{n+1}(W,Y) \longrightarrow ....$$

Donde : $f^* = Ext(f,I), \quad g^* = Ext(g,I) \ \wedge \ \delta$ el homomorfismo Conexión.

Demostración: (Ver: Sze – Tsen Hu, introducción al algebra Homología).

Observación (2.3.1.14): La sucesión (ξ_{**}) comienza con:

$$0 \longrightarrow Hom(W,Y) \xrightarrow{\ Hom(g,I)\ } Hom(V,Y) \xrightarrow{\ Hom(f,I)\ } Hom(U,Y) \xrightarrow{\ \delta\ } Ext(W,Y) \longrightarrow .....$$

Nota.- Para caracterizar los productos extensión axiomáticamente, daremos la siguiente:

Definición (2.2.1.9): (Sucesión conexa – ascendente de funtores contravariantes). Una sucesión de funtores contravariantes

$\left\{\phi^n : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_R\right\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$, donde $\mathcal{M}_R = \mathcal{M}(R)$ denota la categoría de $R-$módulos.

Se denomina **Conexa – Ascendente** si y solo si, para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ y toda sucesión exacta corta. $0 \longrightarrow U \xrightarrow{\ f\ } V \xrightarrow{\ g\ } W \longrightarrow 0$, de $R-$módulos existe un homomorfismo. $\delta : \phi^n(U) \longrightarrow \phi^{n+1}(W)$. Tal que se cumple:

(i) La sucesión siguiente es exacta.

$$0 \longrightarrow \phi^0(W) \longrightarrow ..... \longrightarrow \phi^n(W) \longrightarrow \phi^n(V) \longrightarrow \phi^n(U) \longrightarrow \phi^{n+1}(W) \longrightarrow ....$$

(ii) Para un diagrama arbitrario.

Figura Nº 2.10: Cuadrados conmutativos arbitrarios con filas exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "ß"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r, "f'"'] & V' \arrow[r, "g'"'] & W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fuente: Sze – Tsen Hu – 1966.

De R–módulos con filas exacta y cuadrados conmutativos, el siguiente cuadrado (Figura N° 2.11).

Figura Nº 2.11 :Cuadrado Inducido por los funtores ϕ^k.

$$\begin{tikzcd}
\phi^n(U') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi^n(\alpha)"'] & \phi^{n+1}(W') \arrow[d, "\phi^{n+1}(\gamma)"] \\
\phi^n(U) \arrow[r, "\delta"] & \phi^{n+1}(W)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría propia – 2019**.**

Es conmutativo $para$ todo $n \geq 0$.

Ejemplo (2.2.1.2): Sea Y un R – módulo, I: $Y \longrightarrow Y$ el endomorfismo identidad. Entonces la sucesión $\{\xi^n : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_R\}_{n \in \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0}$ de funtores contravariantes, definida por : $\xi^n(X) = Ext^n(X,Y)$, y $\xi^n(f) = Ext(f,I)$

Para todo $X \in Obj(\mathcal{M}_R)$ y todo morfismo $f \in Mor_{\mathcal{M}_R}(X,Y)$ es conexa – ascendente. Puesto que los homomorfismos de Conexión.

$\delta : Ext^n(N,Y) \longrightarrow Ext^n(W,Y)$. Satisfacen las condiciones (i) y (ii) de la definición anterior. (2.2.1.9).

Teorema (2.2.1.4).- Sea $\{\phi^n : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_R\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión cone$X$a de funtores contravariantes que satisface las dos condiciones siguientes:

(a) ϕ^0 es equivalente a ξ^0

(b) $\phi^n(F) = 0$ para todo R – módulo libre y para todo n > 0, entonces tenemos

$$\phi^n(X) \approx \xi^n(X) = Ext^n(X,Y), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y para todo } R \text{ – módulo } X.$$

Demostración.- (Por dualidad))

Construcción de los Productos Extensión:

Sean X, Y dos R – módulos. Elijamos una resolución inyectiva.

$C: \ldots\ldots \longrightarrow C^{n+1} \xrightarrow{\delta} C^{n} \xrightarrow{\delta} C^{n+1} \longrightarrow \ldots\ldots$

Consideremos Hom (X, C) que es la sucesión

Hom (X, C): $\ldots\ldots \longrightarrow Hom(X, C^{n}) \longrightarrow Hom(X, C^{n+1}) \longrightarrow \ldots\ldots$

Donde $\delta^* = Hom(I, \delta)$, donde $I = I_X : X \longrightarrow X$ identidad.

Puesto que: $\delta^* \circ \delta^* = Hom\left(I \circ I, \delta \circ \delta\right) = Hom(I, O) = 0$ entonces Hom (X, C) es semiexacta, y por tanto una sucesión ascendente, $para\ todo\ n \in \mathbb{Z}$, el módulo de Cohomología n – dimensional. $H^{n}\left(Hom(X, C)\right)$

De Hom(X, C) está definido.

Corolario (2.2.1.4).- Para todo entero positivo $n\left(n \in \mathbb{Z}^{+}\right)$ tenemos:

$H^{n}(Hom(X, C)) \approx Ext^{n}\left(X, Y\right)$

Demostración: Definamos una sucesión ascendente

$\tilde{C}: \ldots\ldots \longrightarrow \tilde{C}^{n-1} \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n-1}} \tilde{C}^{n} \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n}} \tilde{C}^{n+1} \longrightarrow$

De R – módulos tomando:

$$\tilde{C}^{n-1} = \begin{cases} C^{n}, & n \neq -1 \\ 0, & n = -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \tilde{\delta}^{n} = \begin{cases} \delta^{n}, & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

Esta sucesión ascendente $\tilde{C}$ se llamará **Resolución Inyectiva reducida del módulo "*Y*"**. Su utilidad es debido al hecho de que todo módulo de $\tilde{C}$ es inyectiva. Como en la demostración para el Hom, también se puede probar que:

$$H^{n}(Hom(X, \tilde{C})) = H^{n}(Hom(X, C))$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}^{+}$ y que existe un isomorfismo natural.

$$H^{o}(Hom(X, \tilde{C})) \cong H^{n}\left(Hom(X, C)\right)$$

De otro lado, todo homomorfismo $f: A \longrightarrow B$ de R – módulos induce un homomorfismo $(f^*)^{n}: H^{n}\left(Hom(B, \tilde{C})\right) \longrightarrow H^{n}\left(Hom\left(A, \tilde{C}\right)\right)$, Para todo entero "$n$".

Claramente, Para todo $n \in \mathbb{Z}_{0}^{+}$, la función $\phi^{n}: \mathscr{M}(R) \longrightarrow \mathscr{M}(R)$, Definida por:

$i)\ \phi^n(X) = H^n(Hom(X,\tilde{C}))$

$ii)\ \phi^n(f) = (f^*)^n,$ para todo $X \in obj(\mathcal{M}(R)) \wedge \forall f \in Mor(\mathcal{M}(R))$

Es un funtor contravariante. Puesto que todo módulo $\tilde{C}^n$ de la sucesión $\tilde{C}$ es inyectivo. Se deduce que toda sucesión exacta corta

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$, de R – módulos determina una sucesión exacta corta.

$0 \longrightarrow Hom(W,\tilde{C}) \xrightarrow{g^\#} Hom(V,\tilde{C}) \xrightarrow{f^\#} Hom(U,\tilde{C}) \longrightarrow 0$ de complejos de co-cadenas, donde $f^\#\ y\ g^\#$ están definidos de manera obvia. Por tanto obtenemos un homomorfismo de Conexión.

$$\delta : \phi^n(U) \longrightarrow \phi^{n+1}(W),\ para\ todo\ n \in \mathbb{Z}_0^+$$

Que satisface (i) y (ii) de la definición de "Conexa ascendente". Esto muestra que: $\{\phi^n : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_R\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$, Es una sucesión conexa – ascendente de funtores contravariantes.

Ahora recuerde que Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de R – módulos, entonces la sucesión:

$0 \longrightarrow Hom(X,A) \xrightarrow{f_*} Hom(X,B) \xrightarrow{g_*} Hom(X,C) \longrightarrow 0$ con

$f_* = Hom(I,f),\ \ g_* = Hom(I,g)$ es también una sucesión exacta corta.

De donde para un R – módulo libre se deduce que: Hom (F, C) es exacta. Por tanto obtenemos: $\phi^n(F) = H^n(Hom(F,\tilde{C})) \cong H^n(Hom(F,\tilde{C})) = 0,$ Para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, y en consecuencia: $\phi^n(X) \cong \xi^n(X) = Ext^n(X,Y),$ Para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, Por consiguiente obtenemos: $H^n(Hom(X,C) \cong Ext^n(X,Y)$ Para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, .

2.2.2 Conceptual

Para un R – módulo M, se obtiene o se construíra el módulo $D_\Omega(M) := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Hom_R(\Omega^n, M)$ llamada la transformada ideal de M con respecto al ideal Ω, o simplemente el Ω-transformada de M. Buscamos ahora como hacer o como construir $D_{\Omega}(M)$, pero en este caso Ω; sea reemplazado por una familia de ideales $\mathcal{L}=\{L_k\}_{k\in\wedge}$ sobre el conjunto dirigido no vacío y parcialmente ordenado $(\wedge,\leq)$. En este contexto presentaremos nuevos u otros fundamentos teóricos (Cohomología local) que conducirá al resultado propuesto.

Definición (2.2.2.1).- Sea R un anillo Noetheriano conmutativo y sean Ω, J dos ideales de R. El ideal cociente de Ω y J se denota y define como:

$[\Omega : J] := \{x \in R : x\,J \subseteq \Omega\}$

Nota.- En esta sección y otros salvo indicación contraria, R siempre denotará un anillo y Ω un ideal de anillo R. A continuación recordemos las definiciones de sistema inverso y límite inverso.

Definición (2.2.2.2).- Sea $(\wedge,\leq)$ un conjunto dirigido parcialmente ordenado, y sea $\{A_i\}_{i\in A}$ una familia de objetos indexados por Λ y supongamos que se tiene una familia de morfismos $f_{ij} : A_j \longrightarrow A_i$, para todo $i \leq j$ tal que:

(1) $f_{ii} = 1_{A_i}$ (2) $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$

Entonces los conjuntos de pares (A_i, f_{ij}) es llamado: un sistema inverso de objetos y morfismos sobre el conjunto Λ.

Definición (2.2.2.3).- Sea $\{(A_i, f_{ij})\}$ un sistema inverso de objetos y morfismo inde$X$ado por el conjunto parcialmente ordenado $(\Lambda,\leq)$. El límite inverso de dicho sistema se denota y define como:

$\varprojlim Ai := \left\{(a_i) \in \prod_{i\in\wedge} A_i : a_i = f_{ij}(a_j), \forall j \leq i\right\}$

Definición (2.2.2.4).- Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ tres categorías arbitrarias, una aplicación $\mathrm{T} : \mathcal{C}_1 x \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ es un bifuntor si: i) $T(A,-) : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ y $T(-,B) : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ son funtores para cualquier $A \in obj(\mathcal{C}_1)$ y $B \in obj(\mathcal{C}_2)$

ii) Para cualquier pareja de morfismos $f \in Mor_{\mathscr{C}_1}(A',A)$ y $g \in Mor_{\mathscr{C}_2}(B',B)$, el siguiente rectángulo (Figura N° 2.12), existe y conmuta.

Figura Nº 2.12: Cuadrado conmutativo para Bifuntores

$$\begin{tikzcd}
T(A',B') \arrow[r, "T(A',g)"] \arrow[d, "T(f,B')"'] & T(A',B) \arrow[d, "T(f,B)"] \\
T(A,B') \arrow[r, "T(A,g)"] & T(A,B)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019

Siempre que T(A,-) y T(-,B) sean funtores covariantes. Es decir: $T(f,B)\circ T(A',g)=T(A,g)\circ T(f,B')$

Observación (2.2.2.1).

(i) Si $T(A,-):\mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{C}_3$ es un funtor covariante y $T(-,B):\mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_3$ es un funtor contravariante, entonces el diagrama (Figura N° 2.13) conmuta.

Figura Nº 2.13 : Cuadrado conmutativo para Funtores Mixtos

$$\begin{tikzcd}
T(A,B') \arrow[r, "T(A,g)"] \arrow[d, "T(f,B')"'] & T(A,B) \arrow[d, "T(f,B)"] \\
T(A',B') \arrow[r, "T(A',g)"] & T(A',B)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Donde $f \in Mor_{\mathscr{C}_1}(A',A)$ y $g \in Mor_{\mathscr{C}_2}(B',B)$,

(ii) Si $T(A,-):\mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ es un funtor contravariante y $T(-,B):\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ es un funtor covariante, entonces el diagrama siguiente conmuta.

Figura Nº 2.14 : Cuadrado Conmutativo para Funtores Contravariantes

$$\begin{tikzcd} T(A',B) \arrow[r, "T(A',g)"] \arrow[d, "T(f,B)"'] & T(A',B') \arrow[d, "T(f,B')"] \\ T(A,B) \arrow[r, "T(A,g)"] & T(A,B') \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019

Donde $f \in Mor_{\mathcal{C}_1}(A',A)$ y $g \in Mor_{\mathcal{C}_2}(B',B)$

(iii) Si $T(A,-):\mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ y $T(-,B):\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ ambos son funtores contravariantes, entonces el diagrama (Figura N° 2.15) siguiente conmuta.

Figura Nº 2.15 : Cuadrado conmutativo para Funtores Contravariantes

$$\begin{tikzcd} T(A,B) \arrow[r, "T(A,g)"] \arrow[d, "T(f,B)"'] & T(A,B') \arrow[d, "T(f,B')"] \\ T(A',B) \arrow[r, "T(A',g)"] & T(A',B') \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Donde $f \in Mor_{\mathcal{C}_1}(A',A)$ y $g \in Mor_{\mathcal{C}_2}(B',B)$

Sea $(\Lambda,\leq)$ un conjunto dirigido no vacío parcialmente ordenado y supóngase que se tiene $\{(M_i, f_{ij})\}$ un sistema inverso de R – módulos (M_i) y morfismos (f_{ij})

indexado en el conjunto Λ. (Es decir para todo i, j $\in \Lambda$ $f_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$, con $i \leq j$ se tiene :

(1) $f_{ii} = I_{M_i}$ (2) $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$, y sea también $L : \mathcal{M}(R)\, x\, \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$

Un bifuntor R – lineal que es contravariante en la primera variable y covariante en la segunda variable [un bifuntor $L : \mathcal{M}(R)\, x\, \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$ es R – lineal cuando es aditivo y además L (r f, g) = r L (f, g) = L (f, r . g), para todo r $\in R$ y para todos los homomorfismos f, g de R – módulos.

Sean M, N dos R – módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R – homomorfismo. Para cada i, j $\in \Lambda$ con i $\leq$ j, el homomorfismo $h_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$ induce un R – homomorfismo $L(h_{ij}, M) : L(M_i, M) \longrightarrow L(M_j, M)$.

Además como L es un bifuntor contravariante y covariante en la primera y segunda variable respectivamente entonces los homomorfismos $L(h_{ij}, M)$ transforman a la familia $\{L(M_j, M)\}_{j \in \Lambda}$ en un sistema directo de R – módulos y R – homomorfismos sobre Λ. Entonces obtenemos el límite directo $\underrightarrow{Lim}_{j \in \Lambda} L(M_j, M)$ también para i, j en Λ con i $\leq$ j, se tiene el siguiente diagrama (Figura N° 2.16) que conmuta.

Figura Nº 2.16: Cuadrado conmutativo para una familia de módulos y Homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
L(M_i, M) \arrow[r, "L(M_i, f)"] \arrow[d, "L(h_{ij}, M)"'] & L(M_i, N) \arrow[d, "L(h_{ij}, N)"] \\
L(M_j, M) \arrow[r, "L(M_j, f)"'] & L(M_j, N)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia.

Asi mismo $\left\{L\left(M_j, f\right)\right\}_{j\in\Lambda}$ es un morfismo del sistema directo, el cual induce un $R-$homomorfismo. $\underset{\overrightarrow{j\in\Lambda}}{Lim}\, L(M_j, f): \underset{\overrightarrow{j\in\Lambda}}{Lim}\, L(M_j, M) \longrightarrow \underset{\overrightarrow{j\in\Lambda}}{Lim}\, L(M_j, N)$

Proposición (2.2.2.1).

(i) El $\underset{\overrightarrow{j\in\Lambda}}{Lim}\, L(M_j, -): \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$ es un funtor covariante $R-$lineal.

(ii) Si $L: \mathcal{M}(R)\, x\, \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}\left(R\right)$ es eXacto a izquierda entonces el funtor $\underset{\overrightarrow{j\in\Lambda}}{Lim}\, L(M_j, -): \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$ también es eXacto a izquieda.

En efecto. Veremos la parte (i), pues (ii) es consecuencia directa de (i).

(i) Escribamos $T = \underset{\overrightarrow{j\in\Lambda}}{Lim}\, L(M_j, -)$. Recordando un funtor $T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es lineal si y solo si para cada X, Y obj (C); se tiene un homomorfismo.

$$T_{XY}: Mor(X, Y) \longrightarrow Mor(T(X), T(Y)$$

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y \mapsto T_{xy}(f): T(X) \longrightarrow T(Y)$$

La covarianza y la linealidad resulta de la definición de límite directo.

Nota.- Los ejemplos siguientes son fundamentales en cohomología local.

Ejemplo (2.2.2.1). Sea R un anillo, $\Omega \subseteq R$ un ideal y sea $\Lambda = \mathbb{N}$ asi $\left(\mathbb{N}, \leq\right)$ es un conjunto dirigido, donde "≤" es la relación menor igual (orden usual). También claramente tenemos $\Omega^n \subseteq \Omega^m$, para m ≤ n. Mas aún Ω^n, Ω^m, ideales de R, y en consecuencia los $R-$homomorfismos canónicos $h_{mn}: M_n \longrightarrow M_m$, con $M_n = \dfrac{R}{\Omega^n}$ y $M_m = \dfrac{R}{\Omega^m}$ $h_{mn}(a + \Omega^n) = a + \Omega^m$, m, n $\in$ $\mathbb{N}$. Luego podemos considerar el sistema inverso $\left\{\left(M_n, h_{mn}\right)\right\} = \left\{\left(\dfrac{R}{\Omega^n}, h_{mn}\right)\right\}$; indexado en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$; de este modo se tiene los funtores:

$Hom_R\left(\dfrac{R}{\Omega^n},-\right):\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R)$ y $Ext_R^k\left(\dfrac{R}{\Omega},-\right):\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R)$

Por consiguiente los funtores covariantes $R-$ lineales

$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\dfrac{R}{\Omega^n},-\right):\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R)$ y

$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\dfrac{R}{\Omega^n},-\right):\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R)$

Ahora como: Hom_R y Ext_R° son funtores eXactos a izquierda equivalente (i.e. existe una equivalencia natural entre ellos), entonces también existe una equivalencia natural entre los funtores eXactos a izquierda. $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\dfrac{R}{\Omega^n},-\right)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\dfrac{R}{\Omega^n},-\right)$.

Ejemplo (2.2.2.2).- Sean R un anillo, $\Omega\subset R$ un ideal, $\Lambda=\mathbb{N}$. Considérese el conjunto dirigido $(\mathbb{N},\leq)$ donde "$\leq$" es la relación menor o igual (orden natural). Para $m\leq n$ consideremos los homomorfismos (inclusiones). $h_{mn}:\Omega^n\longrightarrow\Omega^m$ (pues $\Omega^n\subseteq\Omega^m$). $h_{mn}(\xi)=\xi,$ para todo ξ en Ω^n. Así tenemos el sistema inverso. $\{(\Omega^n,h_{mn})\}$ inde$X$ado en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

En efecto: (i) $h_{nn}:\Omega^n\longrightarrow\Omega^n$ es el homomorfismo identidad; pues $h_{nn}(\xi)=\xi$, para todo $\xi\in\Omega^m$.

ii) Para $m\leq n$ y $n\leq k$ tenemos las inclusiones $\Omega^k\xrightarrow{h_{nk}}\Omega^n\xrightarrow{h_{mn}}\Omega^n$

$\Omega^k\xrightarrow{h_{mk}}\Omega^m$; Ahora sea $\xi\in\Omega^k\subseteq\Omega^n\subseteq\Omega^m$, de donde

(*) $h_{mk}(\xi)=\xi.$ De otro lado $\begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix} h_{mn}\circ h_{nk}(\xi)=h_{mn}(h_{nk}(\xi))=h_{mn}(\xi)=\xi$

Por tanto $h_{mk}=h_{mn}\circ h_{nk}$ entonces tenemos los funtores

$Hom_R(\Omega^n,-):\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R)$ y $Ext_R^k(\Omega^n,-):\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R), k\in\mathbb{N}_0$ y en consecuencia también se tiene los funtores $R-$ lineales covariantes.

$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n,-\right): \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\Omega^n,-\right): \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$

Luego la equivalencia natural que existe entre los funtores Hom_R y Ext_R^k implica equivalencia natural entre los funtores eXactos a izquierda $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n,-\right)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\Omega^n,-\right)$ (Para una mejor descripción de estos límites; ver: M.F. Atiyah, I.G. Macdonald).

SISTEMA DE IDEALES

Definición (2.2.2.5).- Sea $\left(\Lambda,\leq\right)$ un conjunto dirigido parcialmente ordenado, $\Lambda \neq \phi$ (no vacío) y sea $\mathcal{F} = \left\{I_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales de un anillo R. Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia inversa de ideales sobre Λ, si cada vez que, $\left(\alpha,\lambda\right)\in \Lambda\ x\ \Lambda$ con $I_\alpha \subseteq I_\lambda$

Ejemplo (2.2.2.3.).- Sea $\mathcal{F} = \left\{I_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de ideales de R tal que:

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I_{n+1} \subseteq I_n \subseteq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \subseteq I_2 \subseteq I_1$ es decir $\mathcal{F}$ es una cadena no creciente (decreciente) de ideales sobre $\left(\mathbb{N},\leq\right)$ donde "$\leq$" denota la relación menor o igual, entonces $\mathcal{F}$ es una familia inversa de ideales sobre $\mathbb{N}$.

Particularmente, la familia $\mathcal{F} = \left\{I^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $I \subseteq R$ es un ideal de anillo R; es una familia inversa de ideales de R sobre el conjunto de índices $\mathbb{N}$.

Observación (2.2.2.2).- Sea R un anillo, $\left(\Lambda,\leq\right)$ un conjunto dirigido parcialmente ordenado y sea $\mathcal{F} = \left\{I_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales de R sobre el conjunto de índices Λ, entonces se tiene los $R-$ homomorfismos.

$h_{\lambda\alpha} : \dfrac{R}{I_\lambda} \longrightarrow \dfrac{R}{I_\alpha}$, con $\alpha \leq \lambda$, donde $\lambda,\alpha \in \Lambda$, y así tales homomorfismos convierten a $\left(\dfrac{R}{I_\lambda}, h_{\lambda\alpha}\right)$ en su sistema inverso sobre Λ; y en consecuencia se tiene los funtores covariantes $R-$ lineales.

$\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_R\left(\frac{R}{I_\lambda}, -\right); \mathcal{M}_{(R)} \longrightarrow \mathcal{M}_{(R)}$ $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^k\left(\frac{R}{I_\lambda}, -\right); \mathcal{M}_{(R)} \longrightarrow \mathcal{M}_{(R)}, k\in\mathbb{N}_0$ para la justificación de tales hechos, seguir los mismos lineamientos del ejemplo (2.2.2.3.).

Definición (2.2.2.6).- Sea M un $R-módulo\ Y$ sea $\Omega\subseteq R$ un ideal. Escribamos $\Gamma_\Omega(M):=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left[0:_M \Omega\right]$ = $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{m\in M:\Omega_m^k\subseteq 0\right\}$

Nota.- El conjunto $\Gamma_\Omega(M)$ esta formado por los elementos de M, los cuales son anulados por alguna potencia de Ω. Es decir:

$\Gamma_\Omega(M)=\left\{m\in M:\Omega_m^k=0,\ \text{para algún k }\in\mathbb{N}\right\}$

Afirmación.- $\Gamma_\Omega(M)$ es un submodulo de M. La verificación es inmediata.

Observación (2.2.2.3).- Si $f:M\longrightarrow N$ es un $R-$ homomorfismo de módulos entonces $f\left(\Gamma_\Omega(M)\right)\subseteq\Gamma_\Omega(N)$; y así existe una aplicación $\Gamma_\Omega(f):\Gamma_\Omega(M)\longrightarrow\Gamma_\Omega(N)$ lo cual coincide con “f” sobre cada elemento de $\Gamma_\Omega(M)$

En efecto.- (i) Veamos que $f\left(\Gamma_\Omega(M)\right)\subseteq\Gamma_\Omega(N)$ pues sea y $\in$ $f\left(\Gamma_\Omega(M)\right)$; y = *f(m)*, para $m\in\Gamma_\Omega(M)$ de donde existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\Omega^k m$ = 0, observe que y = *f(m)*$\in N$. Ahora $0=f\left(\Omega^k m\right)=\Omega^k f(m)=\Omega^k y$ de donde $\Omega^k y=0$ por tanto $y\in\Gamma_\Omega\left(N\right)$ en consecuencia $f\left(\Gamma_\Omega(M)\right)\subseteq\Gamma_\Omega(N)$.

(ii) Definamos la aplicación $\Gamma_\Omega(f):\Gamma_\Omega(M)\longrightarrow\Gamma_\Omega(N)$ como $\Gamma_\Omega(f)(m)=f(m)$, para todo $m\in\Gamma_\Omega(M)$. Claramente $\Gamma_\Omega(f)$ está bien definida, pues f es aplicación. Nótese que $f_{|\Gamma_\Omega(M)}=\Gamma_\Omega(f)$.

Proposición (2.2.2.2).- Sean $f, f':M\longrightarrow N$, $g:N\longrightarrow L$ tres homomorfismos de $R-$ módulos, y sea $a\in R$, se cumple:

(i) $\Gamma_\Omega(g\circ f)=\Gamma_\Omega(g)\circ\Gamma_\Omega(f)$

(ii) $\Gamma_{\Omega}(f+f')=\Gamma_{\Omega}(f)+\Gamma_{\Omega}(f')$

(iii) $\Gamma_{\Omega}(a.f)=a\,\Gamma_{\Omega}(f)$

(iv) $\Gamma_{\Omega}(1_M)=1_{\Gamma_{\Omega}(M)}$

Demostración.- (i) Como $f:M\longrightarrow N$ y $g:N\longrightarrow L$, y también $g\circ f:M\longrightarrow L,$ entonces se tiene $\Gamma_{\Omega}(f):\Gamma_{\Omega}(M)\longrightarrow\Gamma_{\Omega}(N)$ y $\Gamma_{\Omega}(g):\Gamma_{\Omega}(N)\longrightarrow\Gamma_{\Omega}(L)$ y además. $\Gamma_{\Omega}(g)\circ\Gamma_{\Omega}(f):\Gamma_{\Omega}(M)\longrightarrow\Gamma_{\Omega}(L)$.Luego para cualquier elemento $m\in\Gamma_{\Omega}(M)$. $\Gamma_{\Omega}(g\circ f)(m)=(g\circ f)(m)=$ $g(f(m))=\Gamma_{\Omega}(g)(f(m))$ = $\Gamma_{\Omega}(g)\circ\Gamma_{\Omega}(f)(m)$. (Pues nótese que $f(m)\in\Gamma_{\Omega}(N)$; asi $\Gamma_{\Omega}(g)\big(f(m)\big)=g\big(f(m)\big)$

(ii) $\Gamma_{\Omega}(f+f')(m)=(f+f')(m)=f(m)+f'(m)=\Gamma_{\Omega}(f)(m)=\Gamma_{\Omega}(f')(m)$ para cualquier elemento m $\in\Gamma_{\Omega}(M)$, por tanto $\Gamma_{\Omega}(f+f')=\Gamma_{\Omega}(f)+\Gamma_{\Omega}(f')$.

(iii) $\Gamma_{\Omega}(a.f)(m)=(a.f)(m)=a(f(m))=a\Gamma_{\Omega}(f)(m)$ para todo $m\in\Gamma_{\Omega}(M)$; en consecuencia $\Gamma_{\Omega}(a.f)=a\Gamma_{\Omega}(f)$.

(iv) Para todo elemento $m\in\Gamma_{\Omega}(M)$, se tiene: $\Gamma_{\Omega}(1_M)_{(m)}=1_M(m)=m=1_{\Gamma_{\Omega}(M)}(m)$. Por tanto $\Gamma_{\Omega}(1_M)=1_{\Gamma_{\Omega}(M)}$.

Observación (2.2.2.4).- De la proposición (2.2.2.2) se tiene que Γ_{Ω} es un funtor $R-$ lineal de la categoría de $R-$ módulos $\mathscr{M}(R)$ en si mismo, más aún no es un funtor covariante.

Nota.- El funtor $\Gamma_{\Omega}:\mathscr{M}(R)\longrightarrow\mathscr{M}(R)$ es denominado “Funtor Ω - Torsión”

Proposición (2.2.2.3.).- [Propiedades del funtor Ω - torsión].

Sean J, Ω dos ideales del anillo R y sea M un R - módulo.

(i) $\Gamma_{\Omega}(M)\leq M$ y $\Gamma_{\Omega}(M)=0$

(ii) $\Gamma_{\Omega}\left(\dfrac{M}{\Gamma_{\Omega}(M)}\right)=0$

(iii) Si $J \subset \Omega$, entonces $\Gamma_\Omega(M) \subseteq \Gamma_J(M)$

(iv) Si $\sqrt{\Omega} = \sqrt{J}$, entonces $\Gamma_\Omega(M) = \Gamma_J(M)$

(v) $\Gamma_{\Omega+J}(M) = \Gamma_\Omega(M) \cap \Gamma_J(M)$ = $\Gamma_\Omega(\Gamma_J M)$

Demostración: [Es rutinario, aplicando la definición del funtor Ω - Torsión]

Lema (2.2.2.1).- El funtor Ω - Torsión $\Gamma_\Omega : \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$ es eXacto a izquierda.

Demostración.- Consideremos una sucesión exacta corta de $R-$módulos y $R-$ homomorfismos, es decir, si la siguiente sucesión.

$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$. Es exacta mostraremos que:

$0 \xrightarrow{0} \Gamma_\Omega(M) \xrightarrow{\Gamma_\Omega(f)} \Gamma_\Omega(N) \xrightarrow{\Gamma_\Omega(g)} \Gamma_\Omega(L)$ también es exacta.

(i) $\operatorname{Im}(\theta) = Nuc(\Gamma_\Omega(f))$: Como $\operatorname{Im}(\theta) = 0;$ bastará ver que $\Gamma_\Omega(f)$ sea monomorfismo. Sean m_1, m_2 en $\Gamma_\Omega(M)$ tal que $\Gamma_\Omega(f)(m_1) = \Gamma_\Omega(f)(m_2)$ si y solo si $f(m_1) = f(m_2) \Leftrightarrow (m_1 - m_2) \in Nuc(f) = \{0\}$ entonces $m_1 = m_2$ por tanto $\Gamma_\Omega(f)$ monomorfismo en consecuencia $Nuc(\Gamma_\Omega(f)) = 0 = \operatorname{Im}(\theta).$

$\operatorname{Im}(\Gamma_\Omega(f)) = Nuc(\Gamma_\Omega(g))$: En efecto:Como $g \circ f = 0,$ entonces $\Gamma_\Omega(g \circ f) = 0 \Leftrightarrow$ $\Gamma_\Omega(g) \circ \Gamma_\Omega(f) = 0$ entonces $\operatorname{Im}(\Gamma_\Omega(f)) \subseteq Nuc(\Gamma_\Omega(g))$ (ξ_1)

Pues si $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ tal que $\psi \circ \varphi = 0,$ entonces $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq Nuc(\psi)$

- De otro lado sea $m \in \ker(\Gamma_\Omega(g))$ entonces $\Gamma_\Omega(g)(m) = 0$

(*) donde $m \in \Gamma_\Omega(M)$ si y solo si existe $k \in$ tal que $\Omega_m^k = 0.$ También de (*) g(m) = 0 $\Rightarrow m \in Nuc(g) = \operatorname{Im}(f);$ asi existe $\ell \in$ L tal que m = f (ℓ). La prueba concluye si $\ell \in \Gamma_\Omega(L)$ i.e. $\Omega_\ell^r = 0,$ para algún $r \in$. Para esto notemos que, para cada $a \in \Omega^k$ se tiene $f(a\ell) = a.f(\ell) = a.m = 0 = f(0),$ entonces $a\ell = 0$ (pues f es monomorfismo), y como $a \in \Omega^k, \forall a$ entonces $\Omega_\ell^k = 0,$ luego $m = f(\ell) \in \operatorname{Im}(\Gamma_\Omega(f))$ en consecuencia $Nuc(\Gamma_\Omega(g)) \subseteq \operatorname{Im}(\Gamma_\Omega(f)).$

2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

Definiciones (2.3.1) Cohomología Local de Módulos

1. Para $n \in \mathbb{N}_0$. El n-ésimo funtor derivado de Γ_Ω denotado por H_Ω^n; es llamado el n-esimo Funtor De Cohomología Local con respecto al ideal Ω.
2. De la parte anterior (1º), tenemos el funtor $H_\Omega^n : \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$. De donde para un R – módulo M, se tiene el módulo $H_\Omega^n(M)$, denominado el n – ésimo módulo M de Cohomología local con respecto al ideal Ω.
3. El submodulo $\Gamma_\Omega(M)$ de M, es denominado Ω - torsión.
4. Se dice que M es Ω - torsión libre cuando $\Gamma_\Omega(M) = 0$

   $\Gamma_\Omega(M) = \left\{ m \in M : \Omega_m^k = 0, \text{ para algún k} \in \mathbb{N} \right\}$
5. Se dice que M es con Ω - torsión cuando $\Gamma_\Omega(M) = M$. Es decir:

   $\Gamma_\Omega(M) = M \Leftrightarrow$ para cada $m \in M = \Gamma_\Omega(M)$ se tiene: $\Omega_m^k = 0,$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Nota.- A continuación presentamos algunos hechos básicos de cohomología local. Previamente una observación que nos permitirá calcular $H_\Omega^n(M), n \in \mathbb{N}$ y donde Ω siempre denotará un ideal en un anillo Notheriano conmutativo R.

Observación (2.3.1).- (i) Sea M un R – módulo, consideremos una resolución inyectiva.

$$I^* : 0 \longrightarrow I^{\circ} \xrightarrow{d^{\circ}} I^1 ...... \longrightarrow I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \longrightarrow ....$$

Del módulo "M". Así existe un R – homomorfismo, $\delta : M \longrightarrow I^{\circ}$ tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\delta} I^{\circ} \xrightarrow{\delta^0} I^2 \xrightarrow{\delta^1} I^2 \longrightarrow .... \longrightarrow I^n \xrightarrow{\delta^n} I^{n+1} \longrightarrow ......$$

Es eXacto. De aquí aplicando el funtor Γ_Ω al complejo I* se obtiene:

$0 \longrightarrow \Gamma_\Omega(I^{\circ}) \xrightarrow{\Gamma_\Omega(d^{\circ})} .... \longrightarrow \Gamma_\Omega(I^n) \xrightarrow{\Gamma_\Omega(d^n)} \Gamma_\Omega(I^{n+1}) \longrightarrow ......$ y tomando el n-ésimo módulo de cohomología de este complejo; se tiene el resultado.

$$\frac{Ker\left(\Gamma_\Omega(d^n)\right)}{\mathrm{Im}\left(\Gamma_\Omega(d^{n-1})\right)}$$

El cual, por un hecho standart de álgebra homológica, es independiente (salvo R– isomorfismo) de la elección de la resolución inyectiva I* de M, es claramente $H^n_\Omega(M)$.

ii) Como Γ_Ω es un funtor covariante y R – líneal, también entonces cada funtor cohomología $H^n_\Omega\left(n \in \mathbb{N}_0\right)$ es covariante y R – lineal.

iii) Puesto que Γ_Ω es funtor eXacto a izquierda, H^0_Ω es naturalmente equivalente a Γ_Ω $\left(H^0_\Omega \cong \Gamma_\Omega\right)$. De este modo, podemos libremente usar esta equivalencia natural para identificar estos dos funtores.

iv) La sucesión exacta larga de módulos de cohomología local, resulta de una sucesión exacta corta de R – módulos y R – homomorfismos – a continuación presentamos los detalles.

a) Sea $0 \longrightarrow P \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de R – módulos y R – homomorfismos. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$, existe un homomorfismo Conexión $\partial^n : H^n_\Omega(N) \longrightarrow H^{n+1}_\Omega(P)$, estos homomorfismos Conexión dan lugar a la siguiente sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow H^0_\Omega(P) \xrightarrow{H^0_\Omega(f)} H^0_\Omega(M) \xrightarrow{H^0_\Omega(g)} H^0_\Omega(N) \xrightarrow{\partial^1} H^1_\Omega(P) \xrightarrow{H^1_\Omega(f)} H^1_\Omega(M) \xrightarrow{H^1_\Omega(g)} H^1_\Omega(N)$$

$$\Big\downarrow \partial^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \longleftarrow H^2_\Omega(N) \longleftarrow H^2_\Omega(M) \longleftarrow H^2_\Omega(P)$$

$$\Big\downarrow$$

$$H^n_\Omega(P) \xrightarrow{H^n_\Omega(f)} H^n_\Omega(M) \xrightarrow{H^n_\Omega(g)} H^n_\Omega(N) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}_\Omega(P) \longrightarrow \cdots\cdots\cdots$$

b) Si en el diagrama conmutativo siguiente (Figura N° 2.17).

Figura Nº 2.17: Cuadrado Conmutativo con filas exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia.

De $R-$homomorfismos y $R-$módulos se tiene que las filas son exactas; entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Se tiene el diagrama (Figura N° 2.18) conmutativo.

Figura Nº 2.18 : Cuadrados Conmutativos Inducido por el Funtor Cohomología n – ésimo.

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Omega(P) \arrow[r, "H^n_\Omega(f)"] \arrow[d, "H^n_\Omega(\varphi)"] & H^n_\Omega(M) \arrow[r, "H^n_\Omega(g)"] \arrow[d, "H^n_\Omega(\psi)"] & H^n_\Omega(N) \arrow[d, "H^n_\Omega(\rho)"] \\
H^n_\Omega(P') \arrow[r, "H^n_\Omega(f')"] & H^n_\Omega(M') \arrow[r, "H^n_\Omega(g')"] & H^n_\Omega(N')
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Pues H^n_Ω es un funtor. Además el cuadrado siguiente (Figura N° 2.19) también es conmutativo.

Figura Nº 2.19 : Cuadrado Conmutativo para el Homomorfismo Conexión

$$\begin{tikzcd} H^{n}_{\Omega}(N) \arrow[r, "\partial^{n}"] \arrow[d, "H^{n}_{\Omega}(\varphi)"'] & H^{n+1}_{\Omega}(P) \arrow[d, "H^{n+1}_{\Omega}(\rho)"] \\ H^{n}_{\Omega}(N') \arrow[r, "(\partial')^{n}"] & H^{n+1}_{\Omega}(P') \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Donde ∂^{n} y $\left(\partial^{'}\right)^{n}$ son los homomorfismos Conexión.

Teorema (2.3.2).- Sea R un anillo, $\mathcal{F}=\left\{J_{\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia inversa de ideales de R sobre el conjunto de índices Λ. Entonces:

(i) Existe un funtor covariante $R-$lineal $\Gamma_{\mathcal{F}}:\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R)$ tal que para cada $R-$módulo M, se tiene $\Gamma_{\mathcal{F}}(M)\longrightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left[0:_{M}J_{\lambda}\right]$ y, para un $R-$homomorfismo $f:M\longrightarrow N$, la aplicación $\Gamma_{\mathcal{F}}(f):\Gamma_{\mathcal{F}}(M)\longrightarrow\Gamma_{\mathcal{F}}(N)$ está dada por la restricción de *f* al submodulo $\Gamma_{\mathcal{F}}(M)$ de M.

(ii) Los funtores $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_{R}\left(\dfrac{R}{J_{\lambda}},-\right)$ y $\Gamma_{\mathcal{F}}$ son naturalmente equivalentes. Es decir existe una equivalencia natural que lo denotaremos como $\Phi^{'}_{\mathcal{F}}:\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_{R}\left(\dfrac{R}{J_{\lambda}},-\right)\longrightarrow\Gamma_{\mathcal{F}}$ y por tanto $\Gamma_{\mathcal{F}}$ es un funtor exacto a izquierda.

(iii) En particular $\mathcal{F}=\left\{J^{K}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia de ideales de R, donde $J\subset R$ es un ideal entonces existe una equivalencia natural.

$$\Phi'_J : \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\frac{R}{J^k}, -\right) \longrightarrow \Gamma_J \text{ donde } \Gamma_J := \Gamma_{\mathcal{F}}$$

Demostración:

(i) Recordando la definición de $\Gamma_\Omega(M)$ se tiene: $\Gamma_{J_\lambda}(M) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left[0 :_M J_\lambda^k\right] =$

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left[m \in M : J_\lambda^k m = 0\right]$ donde J_λ es ideal de R. Ahora para $\mathcal{F} = \{J_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$

$$\Gamma_{\mathcal{F}}(M) = \left\{m \in M : J_\lambda^k m = 0, \text{ para algún k} \in \mathbb{N} \text{ y para algún } \lambda \in \wedge\right\}$$

$$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left\{m \in M : J_\lambda^k m = 0, \text{ para algún k} \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left[0 :_M J_\lambda\right]$$

Similar a lo realizado en la proposición (2.2.2.2.) se tiene que $\Gamma_{\mathcal{F}}$ es un funtor covariante, R- lineal; y más aún $\Gamma_{\mathcal{F}}(f) = f_{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)}$, para un $f : M \longrightarrow N$ R – homomorfismo y por tanto el resultado (i).

(iii) Sea $f : M \longrightarrow N$ un R – homomorfismo. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $\Phi_{J_\lambda, M} : Hom_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, M\right) \longrightarrow \left[0 :_M J_\lambda\right]$ un isomorfismo tal que $\Phi_{J_\lambda, M}(h) = h(1 + J_\lambda)$ para cualquier $h \in Hom_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, M\right)$ es decir $h : \frac{R}{J_\lambda} \longrightarrow$ M, homomorfismo. Ahora sean $\lambda, ß \in \Lambda$ tal que $ß \leq \lambda$ y sea $h_{\lambda B} : \frac{R}{J_\lambda} \longrightarrow \frac{R}{J_B}$ un morfismo dado como $h_{\lambda B}(a + J_\lambda) = a + J_B$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $ß \in \Lambda$. Así tenemos que el diagrama (Figura N° 2.20) siguiente conmuta.

Figura Nº 2.20 : Cuadrado Conmutativo para el Funtor "Hom" y el homomorfismo inclusión

$$\begin{tikzcd}
Hom_R\left(\dfrac{R}{J_B}, M\right) \arrow[r, "\Phi_{J_B,M}"] \arrow[d, "Hom_R\left(h_{\lambda B}, M\right)"'] & \left[0:_M J_B\right] \arrow[d, "i_c"] \\
Hom_R\left(\dfrac{R}{J_\lambda}, M\right) \arrow[r, "\Phi_{J_\lambda,M}"'] & \left[0:_M J_\lambda\right]
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Nótese que i_c es la aplicación inclusión de donde existe un único isomorfismo de $R-$ módulos.

$$\Phi'_M : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, M\right) \longrightarrow \varinjlim_{\lambda\in\Lambda}\left(0:_M J_\lambda\right) = \Gamma_{\mathcal{J}}(M)$$

De otro lado se tiene que el diagrama siguiente (Figura N° 2.21) conmuta para todo $\lambda\in\Lambda$

Figura Nº 2.21: Cuadrado Conmutativo para los funtores Hom y Γ_{J_λ}

$$\begin{tikzcd}
Hom_R\left(\dfrac{R}{J_\lambda}, M\right) \arrow[r, "\Phi_{J_\lambda,M}"] \arrow[d, "Hom_R\left(\dfrac{R}{J_\lambda}, f\right)"'] & \left[0:_M J_\lambda\right] \arrow[d, "\Gamma_{J_\lambda}(f) = f|_{[0:_M J_\lambda]}"] \\
Hom_R\left(\dfrac{R}{J_\lambda}, N\right) \arrow[r, "\Phi_{J_\lambda,N}"'] & \left[0:_N J_\lambda\right]
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Entonces obtenemos el rectángulo conmutativo siguiente (Figura N° 2.22):

Figura Nº 2.22 : Cuadrado Conmutativo para los funtores $\varinjlim_{\lambda}\left(Hom_R\right)\ y\ \Gamma_{\mathcal{F}}$

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, M\right) \arrow[r, "\Phi'_M"] \arrow[d, "\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Hom_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, f\right)"'] & \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \arrow[d, "\Gamma_{\mathcal{F}}(f)"] \\
\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Hom_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, N\right) \arrow[r, "\Phi'_N"'] & \Gamma_{\mathcal{F}}(N)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría propia – 2019.

iii) En este caso aplicamos la parte (ii) considerando la familia $\mathcal{F}=\left\{J^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual es una familia inversa de ideales de R sobre el conjunto de índices $\mathbb{N}$, en consecuencia por la parte (i) el funtor $\Gamma_{\mathcal{F}}$ es el J – funtor Γ_J y por lo tanto los $\varinjlim_{k\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\frac{R}{J^k}, -\right)$ y Γ_J son naturalmente equivalente.

Proposición (2.3.1).- Sea M un $R-$ módulo Y sea $\Omega\subseteq R$ un ideal. Entonces son equivalentes. (i) $\Gamma_\Omega(M)\neq 0$ (ii) $\Omega\subseteq Z_R(M)$

Demostración (i) $\Rightarrow$ (ii)**.-** Dado un elemento t $\in$ Ω como $\Gamma_\Omega(M)\neq 0$, entonces existe un elemento "m" no nulo ($m\neq 0$) en $\Gamma_\Omega(M)$ y asi $\Omega^k m=0$ para algún $k\in\mathbb{N}$. Luego por el principio del buen orden (P.B.O), podemos considerar el menor "n" $\left(n\in\mathbb{N}\right)$ es decir $n=\min\left\{k\in\mathbb{N} : \Omega^k m=0\right\}$. De esta manera existe $s\in\Omega^{n-1}$ tal que $sm\neq 0$. De otro lado, tsm = 0 y en consecuencia $t\in Z_R\left(M\right)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Tenemos $Z_R(M) = \bigcup_{P \in Ass_R(M)} P = P_1 \cup P_2 \cup ...... \cup P_n$ como $\Omega \subset Z_R(M)$ y también se sabe que: Si $P_1, P_2, ..., P_n$ ideales primos y Ω un ideal tal que $\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ entonces $\Omega \subseteq P_j$, para algún j = 1, 2, …., n. Entonces por este resultado obtenemos que $\Omega \subseteq P_j$ para algún j = 1, 2, …, n; de donde $\Omega \subseteq [0 :_R m] = P,$ con m$\neq$ 0, $m \in \Gamma_{\Omega}(M),$ y en consecuencia $\Gamma_{\Omega}(M) \neq \{0\}$

CAPÍTULO III
HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis General

El funtor $\mathscr{B}$ - transformada ideal de un Módulo M, respecto a una familia de ideales.

3.1.2 Hipótesis Específicas

- Generalización del funtor $\mathscr{B}$ - transformada ideal para una familia de ideales $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \mathscr{B}$, con $J_\lambda \subset R$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
- El funtor transformada ideal de un $R -$ módulo M respecto a un ideal Ω, en la determinación de una propiedad universal.

3.2 Definición Conceptual de Variables

Variable Independiente

Un sistema de ideales $\mathscr{B} = \{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en un anillo Notheriano Conmutativo R.

Variable dependiente

El funtor ideal generalizado $D_{\mathscr{B}}$ y por ende el módulo $D_{\mathscr{B}}(M)$

3.3 Operacionalización de variables

Tabla Nº 1

Operacionalización de la variable Independiente

Dimensiones	Indicadores	Indices	Método	Técnica
Sistema de ideales $\mathcal{B} = \{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en un anillo Notheriano conmutativo.	Generalización del funtor k-ésimo de Cohomología local	El funtor $D_{\mathcal{B}}$	Teórico : Demostrativo - constructivo	Constructiva

Tabla Nº 2

Operacionalización de la variable dependiente

Dimensiones	Indicadores	Indices	Método	Técnica
La k-ésima cohomología local $H^i_{\mathcal{B}}$	Cálculo o determinación de los módulos $H^k_{\mathcal{B}}(M)$; para $\mathcal{B} = \{\Omega^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde Ω es ideal de un anillo Notheriano R.	La transformada ideal de un módulo M, respecto al sistema $\mathcal{B}$	Para un R–módulo M: se construye el módulo $D_B(M)$ y se identifica con el $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_R(J_\lambda, M)$	Constructiva

CAPÍTULO IV
DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo y diseño de la investigación

El tipo de investigación es básica, según Alva Lucía Marin Villada (2008), “También, llamada investigación Pura, Teórica o Dogmática. Se caracteriza porque gesta de un marco teórico y permanece en él; la finalidad radica en formular nuevas teorías o modificar las existentes, en incrementar los conocimientos científicos o filosóficos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico”.

Es un estudio básico porque mediante el cual, se buscará aportar conocimientos que permitan mejorar algunos detalles del marco teórico (Cohomología local). El diseño es no eXperimental.

4.2 Método de investigación

El método utilizado es teórico constructivo, deductivo – inductivo.

4.3 Población y muestra

Por ser un trabajo, matemático teórico abstracto no existe población que estudiar; sin embargo podemos mencionar que nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de una teoría denominada “Cohomología de módulos”.

4.4 Lugar de estudio y período desarrollado.

El trabajo se ha realizado en los ambientes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao. Algunas veces u ocasionalmenrte en la Biblioteca de la Facultad de Ciencias Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

El período en que se ha desarrollado el trabajo ha sido de un año (Marzo del 2019 hasta Febrero del 2020).

4.5 Técnicas en instrumentos para la recolección de la Información

Por ser un trabajo netamente “matemático” (Teórico – Abstracto); no se requiere procedimientos especiales para la recolección de la información. Simplemente se necesita búsqueda y revisión bibliográfica: libros de especialidad, páginas web, papers, revistas especializadas, etc.

4.6 Análisis y Procesamiento de datos

No hay procesamiento de datos, por ser un trabajo no eXperimental. Mas aún la orientación del proyecto, no es de inversión ni de impacto ambiental.

A continuación presentamos algunos lemas, proposiciones, definiciones, etc., que nos permtiirá un análisis eXhaustivo para los resultados.

Lema (4.6.1).- Sea N un submódulo de M, donde M es de Ω- torsión, entonces N y $\dfrac{M}{N}$ son de Ω - torsión. En efecto: Se obtiene directamente de la definición esto es:

$$\Gamma_{\Omega}\left(\frac{M}{N}\right)=\left\{\xi=m+N\in\frac{M}{N}:\Omega_{\xi}^{k}=N\right\}$$

$$=\left\{\xi=m+N:\Omega^{k}(m+N)=N\right\}$$

$$=\left\{\xi=m+N:\Omega^{k}m=N\right\}=\frac{M}{N}$$

Lema (4.6.2).- Sea M un R – módulo de Ω - torsión y sea r∈Ω, entonces $\varphi: M \longrightarrow M$ dado como $\varphi(m)=rm$ es inyectivo si y solo si M = 0. En efecto como M es Ω - Torsión, entonces $\Omega_x^k=0,$ para algún k ∈ N con x ∈ M, pero r ∈ Ω asi rx=0 si y solo si $\varphi(x)=0=\varphi(0)$ de donde x = 0 pues φ - inyectivo. Para el recíproco calculemos el núcleo de φ, es decir: $Nuc(\varphi)=\{x\in M:\varphi(x)=0\}=\{x\in M:rx=0,r\in\Omega\}=\{x\in M:x=0\}=\{0\}$.

Lema (4.6.3).- Sean M un $R-$ módulo, y $\Omega \subseteq R$ un ideal.

(i) Si Ω contiene un divisor no cero sobre M, entonces M es Ω - torsión libre, esto es, $\Gamma_{\Omega}\left(M\right)=0.$ En efecto sea a un divisor no cero sobre M con $a\in\Omega$ y sea $x\in\Gamma_{\Omega}\left(M\right)$ de donde $\Omega^{k}x=0,$ para algún $k\in\mathbb{N}$, así X = 0.

(ii) Supóngase que M es finitamente generado. Entonces Ω contiene un divisor no cero sobre M, si y solamente si M es Ω - torsión libre.

En efecto.- Asumamos que Ω está formado por elementos todos divisores de cero sobre M, entonces $\Omega\subseteq \underset{J\in AssM}{U J}$ y como M es finitamente generado, se tiene que AssM es finito, de aquí, $\Omega\subseteq J,$ para algún $J\in AssM.$ Por tanto M tiene un submódulo cuyo anulador es exactamente J y de aquí se sigue que $\left[0:_{M}\Omega\right]\neq 0,$ así $\Gamma_{\Omega}(M)\neq 0,$ y por ende el resultado. La otra implicación es inmediata de la parte (i) anterior.

Lema (4.6.4).- Sea M un $R-$ módulo, El módulo $\dfrac{M}{\Gamma_{\Omega}(M)}$ es Ω - torsión libre.

Demostración.- Sea ξ = $m+\Gamma_{\Omega}\left(M\right)$ un elemento en $\dfrac{M}{\Gamma_{\Omega}(M)}$, con $m\in M$ tal que $\Omega^{k}\xi=0,$ para algún $k\in\mathbb{N}$ $\left(i.e.\ \xi\in\Gamma_{\Omega}\left(\dfrac{M}{\Gamma_{\Omega}(M)}\right)\right)$. Probaremos que $\xi=0=\Gamma_{\Omega}(M)$ para lo cual bastará ver que $m\in\Gamma_{\Omega}(M).$

Ahora $\Omega^{k}m\subseteq\Gamma_{\Omega}(M).$ Como $\Omega^{k}m$ es un submódulo de $\Gamma_{\Omega}(M)$ finitamente generado, y cada elemento de $\Omega^{k}m$ es anulado por alguna potencia de $\Omega,$ entonces existe $t\in\mathbb{N}$ tal que $\Omega^{t}\Omega^{k}m=0$. Por consiguiente $m\in\left[0:_{M}\Omega^{k+t}\right]\subseteq\Gamma_{\Omega}(M)$ y por tanto el resultado.

Proposición (4.6.1).- Sean Ω un ideal del anillo R y Q un $R-$ módulo inyectivo. Entonces $\Gamma_{\Omega}(Q)$ también será un $R-$ módulo inyectivo.

En efecto.- [Ver: Hideyuki Matsamura].

Proposición (4.6.2).- Sea Q un R-módulo inyectivo y $\Omega \subset R$ un ideal entonces la sucesión canónica siguiente:

$0 \longrightarrow \Gamma_{\Omega}(Q) \xrightarrow{i_c} Q \xrightarrow{\pi} \dfrac{Q}{\Gamma_{\Omega}(Q)} \longrightarrow 0$ es exacta y escindible.

Demostración.- Claramente i_c y π son los homomorfismos inclusión y proyección al cociente respectivamente, de donde la sucesión es exacta. La escindibilidad resulta de la proposición anterior, donde se establece que $\Gamma_{\Omega}(Q)$ es inyectivo.

Proposición (4.6.3).- Sea M un $R-$ módulo $\Omega \subset R$ un ideal. Si M es de Ω- torsión, entonces existe un R - módulo inyectivo Q de Ω - torsión y un $R-$ momomorfismo ß: $M \longrightarrow Q$.

Demostración.- Recordando el denominado "Lema: Eckmann – Schopt" [i.e. para un R – módulo M existe un R – módulo inyectivo Q juntamente con un R–monomorfismo M $\longrightarrow$ Q, utilizando este lema existe efectivamente un R–módulo inyectivo Q y un R – monomorfismo ß : M$\longrightarrow$ Q, y en consecuencia al aplicar el funtor torsión Γ_{Ω}, se tiene el R–homomorfismo $\Gamma_{\Omega}(ß):\Gamma_{\Omega}(M) \longrightarrow \Gamma_{\Omega}(Q)$ que aún también es inyectivo. Como M es Ω - torsión y Q un R – módulo inyectivo; entonces por la proposición (4.6.1) se tiene el resultado.

Proposición (4.6.4).- Sea M un R – módulo de Ω - Torsión. Entonces existe un resolución inyectiva de M, en la cual cada término es un $R-$ módulo de Ω - Torsión.

Demostración.- Aplicando la proposición inmediato anterior al $R-$ módulo de Ω - torsión M, podemos ver que M puede ser inmerso en un R – módulo inyectivo de Ω - Torsión, que lo denotamos como Q. Ahora procediendo de manera inductiva, y al suponer que se ha construido una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^{o} \xrightarrow{d^{o}} Q^{1} \longrightarrow .... \longrightarrow Q^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} Q^{n}$$

De $R-$ módulos y $R-$ homomorfismos, donde Q^{o}, Q^{1}, Q^{2}, ……, Q^{n-1}, Q^{n} son todos $R-$ módulos inyectivos de Ω - Torsión. Llamando C: = Coker d^{n-1}, y así se obtiene que C es un módulo de Ω - Torsión, puesto que Q^n lo es. Nuevamente aplicando la proposición inmediato anterior al módulo C, se deduce la existencia de un $R-$ módulo inyectivo de Ω - Torsión Q^{n+1} y un $R-$ monomorfismo $\gamma : C \longrightarrow Q^{n+1}$. Sea $d^n : Q^n \longrightarrow Q^{n+1}$ la composición del epimorfismo natural π y el $R-$ monomorfismo γ es decir: $d^n = \gamma \circ \pi$, donde $I^n \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{\gamma} I^{n+1}$ esto completa la demostración por inducción.

Proposición (4.6.5).- Sean M, N dos $R-$ módulos y $\Omega \subset R$ un ideal tal que M es de Ω - torsión, entonces se cumple.

(i) $H^k_\Omega(M) = 0,$ para todo k $>$ 0.

(ii) $H^k_\Omega\left(\Gamma_\Omega(N)\right) = 0$, para todo k $>$ 0.

(iii) La aplicación proyección canónica al cociente.

$$\pi : N \longrightarrow \frac{N}{\Gamma_\Omega(N)} \text{ induce isomorfismos.}$$

$$H^k_\Omega(\pi) : H^k_\Omega(N) \longrightarrow H^k_\Omega\left(\frac{N}{\Gamma_\Omega(N)}\right), \text{ para todo k} > 0.$$

Demostración.- [Ver: M.P. Brod Mann – R.Y. Sharp].

Lema (4.6.5) [De sistemas de ideales]

(i) Sea R un anillo y $\mathcal{G}$ un conjunto no vacío de ideales de R. Entonces el conjunto de todos los productos de familias finitas de ideales tomadas de $\mathcal{G}$. Es decir

$$\phi = \left\{ \prod_{k \in \wedge} J_k \,/\, J_k \in \mathcal{G}, \wedge - \mathit{finito} \right\}, \text{ forma un sistema de ideales.}$$

Particularmente, si $\mathcal{G}$ es un conjunto no vacío multiplicativamente cerrado de ideales de R, entonces $\mathcal{G}$ forma un sistema de ideales en si mismo.

(ii) Sea S un sistema de ideales sobre $\wedge$ y sean $\lambda, \beta \in \wedge$ tal que $\beta \leq \lambda$. Entonces se cumple: $\Gamma_{J_B}(M) \subseteq \Gamma_{J_\lambda}(M) \subseteq \Gamma_S(M) = \bigcup_{\gamma \in \Lambda} \Gamma_{J_r}(M)$

Definición (4.6.1).- Sea "S" un sistema de ideales sobre el conjunto de índices Λ, y R un anillo. Diremos que un $R-$ módulo M es:

(i) S – Torsión, si M = $\Gamma_S(M)$

(ii) S – Torsión libre, si $\Gamma_S(M)$ = 0

Observación (4.6.1).-

(i) $\Gamma_S\left(\dfrac{M}{\Gamma_S(M)}\right)=\Gamma_S(M);$ por tanto $\dfrac{M}{\Gamma_S(M)}$ es S – Torsión libre.

(ii) $\Gamma_S(Q)$ es un $R-$ módulo inyectivo, para un $R-$ módulo inyectivo Q.

(iii) De la parte anterior (ii) se tiene que: Si N es un $R-$ módulo S – Torsión, entonces existe una resolución inyectiva de N, donde cada término es un $R-$ módulo S – Torsión, y por lo tanto $H_S^k(N)=0$ para todo k $>$ 0.

(iv) Los $R-$ módulos $H_S^k(M)$ y $H_S^k\left(\dfrac{M}{\Gamma_s(M)}\right)$ por isomorfos para todo k $>$ 0.

En efecto: Considerando la proyección natural al cociente $\pi : M \longrightarrow \dfrac{M}{\Gamma_S(M)}$ se tiene el isomorfismo buscado $H_S^k(\pi):\ H_S^k(M) \longrightarrow H_S^k\left(\dfrac{M}{\Gamma_s(M)}\right)$ para todo k $>$ 0.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

(5.1) Resultados Descriptivos

En el presente trabajo se ha desarrollado en primer lugar la Teoría básica del funtor $D_{\Omega} := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n, -\right)$, en la categoría de R – módulos es decir $D_{\Omega} : \mathscr{M}(R) \longrightarrow \mathscr{M}(R)$ y por ende para un R – módulo M se ha obtenido el módulo $D_{\Omega}(M)$. Llamado el Ω-transformada de M, mostrándose que tal transformada proporciona herramientas potenciales algebraicas. El uso de esta transformada es una pieza fundamental e importante para nuestro enfoque a la cohomología local. Seguido y basado en lo descrito líneas arriba para D_{Ω} se ha generalizado para un sistema arbitrario de ideales $\mathscr{B} = \{J_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$. Iniciamos retornando y estableciendo algunas definiciones y modelos o ejemplos especiales (particulares).

Previamente recordemos los ejemplos siguientes dados en el capítulo anterior.

1º). Considerando como conjunto de índices a $\mathbb{N}$, con orden usual "≤" (menor o igual). Si R es un anillo y $\Omega \subset R$ un ideal, entonces se tiene el sistema inverso $\left\{\dfrac{R}{\Omega^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de R – módulos bajo los homomorfismos naturales $\varphi_m^n : \dfrac{R}{\Omega^n} \longrightarrow \dfrac{R}{\Omega^m}$, para m, n $\in \mathbb{N}$ con m ≤ n, en tales circunstancias; $\Omega^n \subseteq \Omega^m$. En esta vía se obtiene los siguientes funtores covariantes R – lineales.

$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\dfrac{R}{\Omega^n}, -\right)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\dfrac{R}{\Omega^n}, -\right), k \in \mathbb{N}_0$ de $\mathscr{M}$ (R) en $\mathscr{M}$(R).

2º) Para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ consideremos las inclusiones $i_m^n : \Omega^n \longrightarrow \Omega^m$; la misma que en la parte anterior; los funtores $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n, -\right)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\Omega^n, -\right)$ para $k \in \mathbb{N}_0$, de $\mathscr{M}(R)$ en $\mathscr{M}(R)$, son también covariantes, y una equivalencia natural entre los funtores eXacto a izquierda.

$\varinjlim\limits_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n,-\right)$ y $\varinjlim\limits_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^{\circ}\left(\Omega^n,-\right)$

Definición (5.1.1).- Considerando los funtores de la parte (2º) inmediata anterior los que denotaremos como D_Ω, es decir:

$D_\Omega := \varinjlim\limits_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n,-\right)$ y $\varinjlim\limits_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^{k}\left(\Omega^n,-\right), k\in\mathbb{N}_0$

Llamaremos o nos referimos a D_Ω, como **el funtor Ω - transformada**, más aún $D_\Omega : \mathscr{M}(R) \longrightarrow \mathscr{M}(R)$ es un funtor eXacto a izquierda.

Definición (5.1.2).- Sean R un anillo y $\Omega \subseteq R$ un ideal. Para M un R – módulo, se tiene $D_\Omega(M)$, es decir para el funtor $D_\Omega = \varinjlim\limits_{n\in\mathbb{N}} Hom_R$, $\left(\Omega^n,-\right) : M\ (R) \longrightarrow M\ (R)$ obtenemos $D_\Omega(M) = \varinjlim\limits_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\Omega^n, M\right)$; llamado **el ideal transformada de M con respecto a Ω**, o simplemente el Ω - transformada de M.

Definición (5.1.3).- Los funtores $D_{\mathscr{F}} := \varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Hom_R\left(J_\lambda,-\right)$ y $\varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext^k\left(J_\lambda,-\right)$, $k\in\mathbb{N}_0$ por $\mathscr{F} = \left\{J_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathscr{M}(R)$ en $\mathscr{M}(R)$ pueden ser definidos usando las aplicaciones inclusión $i_c : J_\lambda \longrightarrow J_B$ con $ß \leq \lambda$, para λ, ß∈ Λ y utilizando además los mismos lineamientos siguientes, al considerar: $T = Hom_R$.

Ahora sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto (no vacío) dirigido parcialmente ordenado y supóngase que se da un sistema inverso $\mathscr{F} = \left\{L_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ de R – módulos sobre Λ, con R – homomorfismos $\varphi_ß^\lambda : L_\lambda \longrightarrow L_ß$, para cada $(\lambda, ß) \in \Lambda \times \Lambda$ con ß $\leq \lambda$ y al considerar T : $\mathscr{M}(R) \times \mathscr{M}(R) \longrightarrow \mathscr{M}(R)$ un funtor R – lineal en dos variables contravariante en la primera y covariante en la segunda; se obtiene un funtor R– lineal covariante.

$$\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} T\left(L_\lambda,-\right) : \mathscr{M}(R) \longrightarrow \mathscr{M}(R)$$

De otro lado si $f : M \longrightarrow N$ es un R – homomorfismos de módulos, para $\lambda, \ss \in \Lambda$ con $\beta \leq \lambda$ el homomorfismo $\varphi_{\ss}^{\lambda} : L_{\lambda} \longrightarrow L_{\ss}$ induce un R– homomorfismo $T\left(\varphi_{\ss}^{\lambda}, M\right) : T\left(L_{\ss}, M\right) \longrightarrow T\left(L_{\lambda}, M\right)$. Y el hecho que T es un funtor garantiza que $T\left(\varphi_{\ss}^{\lambda}, M\right)$ torna a la familia $\{T(L_{\lambda}, M)\}_{\lambda \in \Lambda}$ en un sistema directo de R – módulos y R – homomorfismos sobre Λ, y así podemos formar $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} T\left(L_{\lambda}, M\right)$.

Además para $\alpha, \ss \in \Lambda$ con ß $\leq \lambda$, se tiene el diagrama (Figura N° 5.1) conmutativo siguiente.

Figura Nº 5.1 : Cuadrado conmutativo para un Sistema Directo de Morfismos.

$$\begin{array}{ccc}
T\left(L_{\ss}, M\right) & \xrightarrow{T\left(\varphi_{\ss}^{\lambda}, M\right)} & T\left(L_{\lambda}, M\right) \\
{\scriptstyle T\left(L_{\ss}, f\right)} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle T\left(L_{\ss}, f\right)} \\
T\left(L_{\ss}, N\right) & \xrightarrow[T\left(\varphi_{\ss}^{\lambda}, N\right)]{} & T\left(L_{\lambda}, N\right)
\end{array}$$

Fuente: Autoría propia – 2019.

Por consiguiente, la familia $\left\{T\left(L_{\lambda}, f\right)\right\}_{\lambda \in \wedge}$ constituye un sistema directo de morfismos y así induce un R – homomorfismo

$\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} T\left(L_{\lambda}, f\right) : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} T\left(L_{\lambda}, M\right) \longrightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} T\left(L_{\lambda}, N\right)$; Y en consecuencia el funtor $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} T\left(L_{\lambda}, \square\right)$ es R – lineal covariante de $\mathcal{M}\left(R\right)$ en $\mathcal{M}\left(R\right)$ observe además que el pasaje a límites directos que preservan exactitud ; implica que este nuevo funtor es eXacto a izquierda siempre que T lo sea.

Observación (5.1.1).- El funtor $D_{\mathcal{F}}$ establecido en la definición inmediata anterior será denominado "Funtor $\mathcal{F}$ – transformada".

Definición (5.1.4).- Sea R un anillo y M un R – módulo. El módulo $D_{\mathcal{F}}(M) = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_R\left(J_\lambda, M\right)$ es llamado el **ideal transformada generalizada de M con respecto a $\mathcal{F}$,** o, simplemente el $\mathcal{F}$ – transformada de M.

Nota.- Para cada $k \in \mathbb{N}_0$. El k – ésimo funtor derivado a derecha de $D_{\mathcal{F}}$ será denotado como: $R^k D_{\mathcal{F}}$.

Proposición (5.1.1).- Previamente escribamos el funtor identidad Id de la categoría $\mathcal{M}(R)$ Es decir : $Id : \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R)$.

(i) Existen transformaciones naturales de funtores de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R)$

$\xi = \left(\xi_{\mathcal{F}}\right) : \Gamma_{\mathcal{F}} \longrightarrow Id,\ \mathcal{N} = \left(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}\right) : Id \longrightarrow D_{\mathcal{F}}$

$\rho^0 = \left(\rho^0_{\mathcal{F}}\right) : D_{\mathcal{F}} \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}},$ tal que para cada R – módulo M, se cumple:

(i_1) $\xi_M : \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow M$ es la aplicación inclusión.

(i_2) Para cada elemento $m \in M$, $\mathcal{N}_M(m)$ es la imagen natural en $D_{\mathcal{F}}$(M) del homomorfismo $\varphi_{\lambda,m} \in Hom_R\left(J_\lambda, M\right)$ dado por $\varphi_{\lambda,m}(x) = xm$ para todo $x \in J_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$.

(i_3) la sucesión.

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{\xi_M} D_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\rho^0_M} H^1_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0$$ es exacta.

(ii) Sea $k \in \mathbb{N}$, y M un R – módulo. Para cada $\lambda \in \Lambda$, el homomorfismo Conexión

$$\delta^k_{\lambda,M} : Ext^k_R\left(J_\lambda, M\right) \longrightarrow Ext^{k+1}_R\left(\frac{R}{J_\lambda}, M\right)$$

Es un isomorfismo, y más aún el pasaje a límite directo produce un R – isomorfismo.

$$\delta_M^k : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^k\left(J_\lambda, M\right) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^{k+1}\left(\frac{R}{J_\lambda}, M\right).$$

Además definiendo $\varepsilon_M^k : RD_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow H_{\mathcal{F}}^{k+1}(M)$ como $\varepsilon_M^k := \Phi_{\mathcal{F},M}^{k+1} \circ \delta_M^k \circ \psi_{\mathcal{F},M}^k$, donde $\Phi_{\mathcal{F}}^{k+1}\ y\ \psi_{\mathcal{F}}^k$ son la equivalencias naturales. Entonces como M varía a través de la categoría de $\mathcal{M}\left(R\right)$, se tiene que ε_M^k constituye una equivalencia natural de funtores $\varepsilon^k : \mathcal{R}D_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{F}}^{k+1}$.

Demostración.- Se obtiene directamente utilizando la exactitud de los funtores: Hom y Ext.

Proposición (5.1.2).- Sea la inclusión $\xi_M : \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow M$ obtenida y establecida en la parte (i_1) de la proposición (5.1.1). Es inmediato de la sucesión exacta.

$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{\mathcal{N}_M} D_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\rho_M^0} H_{\mathcal{F}}^1(M) \longrightarrow 0$ que:

$\Gamma_{\mathcal{F}}(M) = H_{\mathcal{F}}^1(M) = 0$ si y solamente si $N_M : M \longrightarrow D_F(M)$ es un isomorfismo.

Demostración.- Como puede observarse, se obtiene de manera inmediato de la proposición (5.1.1) parte (i).

Proposición (5.1.3).- Sea M un R – módulo, no necesariamente finitamente generado, asumiendo que Ω contiene una M – sucesión de longitud dos, entonces $\mathcal{N}_M : M \longrightarrow D_\Omega(M)$ es un isomorfismo.

Demostración.- Previamente presentemos y/o recordemos el resultado siguiente: que lo vamos a denotar como "$R_1^{\#}$" esto es:

"$R_1^{\#}$: sea M un R – módulo, no necesariamente finitamente generada. Sea $x_1, ..., x_n$ una M – sucesión de elementos de R. Sea $x_1^{'} \in R$ entonces se cumple:

(a) Si $x_1^{'}, x_2, ..., x_n$ es también una M – sucesión, entonces también lo es $x_1x_1^{'}, x_2, ..., x_n$.

(b) Si $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{N}$, entonces $a_1^{t}, ...a_n^{t_n}$ es también una M – sucesión; y

(c) Si $x_1,...,x_n$ son elementos de un ideal $\Omega \subset$ R, entonces $Ext_R^k\left(\frac{R}{\Omega}, M\right) =$

$H_\Omega^k(M) = 0$ para todo k = 0, 1, ….., n-1.

Utilizando el resultado anterior parte (c), se obtiene que $\Gamma_\Omega(M) = H_\Omega^1(M) = 0,$ y así de la proposición anterior se obtiene que la afirmación es inmediata.

Observación (5.1.2).- (i) De la proposición (5.1.1) se sigue que, para cada $R-$ módulo $\mathcal{M}$, existe un R-Monomomorfismo $q_M : \frac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)} \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(M)$, inducido por $\mathcal{N}_M$, tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)} \xrightarrow{q_M} D_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\rho_M^0} H_{\mathcal{F}}^1(M) \longrightarrow 0$$

es exacta. Y como $\mathcal{N}_M$ induce q_M, una fórmula precisa para esto, puede ser eXtraído de la proposición (5.1.1). Observe también que, como M varía en la categoría $\mathcal{M}$ (R), el monomorfismo $q_M : \frac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)} \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(M)$

Constituye una transformación natural de funtores. Ahora, cada vez que $f : M \longrightarrow N$ es un $R-$ homomorfismo entonces el diagrama siguiente (Figura N° 52) conmuta.

Figura Nº 5.2 : Cuadrado Conmutativo Inducido en un cociente y transformada generalizada

$$\begin{tikzcd} \frac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)} \arrow[r, "q_M"] \arrow[d, "f^*"'] & D_{\mathcal{F}}(M) \arrow[d, "D_{\mathcal{F}}(f)"] \\ \frac{N}{\Gamma_{\mathcal{F}}(N)} \arrow[r, "q_N"] & D_{\mathcal{F}}(N) \end{tikzcd}$$

(donde f* denota el homomorfismo inducido por f)

Fuente: Autoría Propia – 2019.

(ii) La observación (i) inmediata anterior puede particularmente ser útil, cuando es utilizada conjuntamente con el epimorfismo canónico $\pi : M \longrightarrow \dfrac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)}$, lo cual induce los isomorfismos

$H^k_{\mathcal{F}}(\pi) : H^k_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow H^k_{\mathcal{F}}\left(\dfrac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)}\right)$ para todo k $>$ 0.

(iii) la sucesión exacta.

$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{\eta_M} D_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\rho^0_M} H^1_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0$ de la proposición (5.1.1) parte (i), y el caso particular.

$0 \longrightarrow \Gamma_{\Omega}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{\eta_M} D_{\Omega}(M) \xrightarrow{\xi^0_M} H^1_{\Omega}(M) \longrightarrow 0$ son fundamentales para la siguiente proposición.

Proposición (5.1.4) .- Sea M un R – módulo con las notaciones de la proposición (5.1.1) y de la observación inmediato anterior y al considerar el epimorfismo canónico $\pi : M \longrightarrow \dfrac{M}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)}$, se tiene las afirmaciones siguientes:

a) $D_{\mathcal{F}}(\Gamma_{\mathcal{F}}(M)) = 0$

b) $D_{\mathcal{F}}(\pi) : D_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \dfrac{D_{\mathcal{F}}(M)}{\Gamma_{\mathcal{F}}(M)}$ es un isomorfismo

c) $D_{\mathcal{F}}(\eta_M) = \eta_{D_{\mathcal{F}}(M)} : D_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow D_{\mathcal{F}}\left(D_{\mathcal{F}}(M)\right)$ es un isomorfismo.

d) $\Gamma_{\mathcal{F}}(D_{\mathcal{F}}(M)) = 0 = H^1_{\mathcal{F}}(D_{\mathcal{F}}(M))$

e) $H^k_{\mathcal{F}}(\eta_M) : H^k_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow H^k_{\mathcal{F}}(D_{\mathcal{F}}(M))$ es un isomorfismo para cada k $>$1.

Demostración Son obtenidos directamente utilizando los funtores: $D_{\mathcal{F}}, \Gamma_{\mathcal{F}}$ y $H^k_{\mathcal{F}}$.

Observación (5.1.3).- Sea M un R – módulo para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $\pi^M_\lambda : Hom_R\left(J_\lambda, M\right) \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(M)$ el homomorfismo natural.

(i) Sean $\lambda, \alpha \in \Lambda$ y sea $f \in Hom_R\left(J_\lambda, R\right)$, $g \in Hom_R\left(J_\alpha, R\right)$ es una familia inversa de ideales del anillo R sobre Λ verificando que para todo λ , $\alpha \in \Lambda$, existe $\delta \in \Lambda$

tal que $J_\delta \subseteq J_\lambda J_\alpha$. Observe además que $f\,|J_\delta$, (la restricción de f a J_δ), aplica J_δ sobre J_α de donde es fácil verificar que $g\circ\left(f\,|J_\delta\right)=f\circ\left(g\,|J_\delta\right)$.

(ii) Existe una operación binaria "*" en $D_{\mathcal{F}}(R)$ tal que, para $f\in Hom_R\left(J_\lambda,R\right)$ y $g\in Hom_R\left(J_\alpha,R\right)$ se tiene: $\pi_\lambda^R(f)*\pi_\lambda^R(g)=\pi_\delta^R\left(g\circ\left(f\,|J_\delta\right)\right)$

Para cualquier elección de $\delta\in\Lambda$ con $J_\delta\subseteq J_\lambda J_\alpha$ mostrándose además que $D_{\mathcal{F}}(R)$ es un anillo conmutativo con identidad con respecto a sus $R-$ módulos adición y "*" como multiplicación.

(iii) $D_{\mathcal{F}}(M)$ posee la estructura de $D_{\mathcal{F}}(R)$ - módulo tal que, para $\lambda,\alpha\in\Lambda$ y para $f\in Hom_R\left(J_\lambda,R\right)$ y $h\in Hom_R\left(J_\alpha,M\right)$ se tiene:

$\pi_\lambda^R(f)\left(\pi_\alpha^M(h)\right)=\pi_\delta^M(h\circ\left(f\,|J_\delta\right))$ para cualquier elección de $\delta\in\Lambda$ con $J_\delta\subseteq J_\lambda J_\alpha$

(iv) $D_{\mathcal{F}}$ es un funtor covariante, eXacto a izquierda, aditivo de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{C}\left(D_{\mathcal{F}}(R)\right)$.

Así todos los $\mathcal{R}^k D_{\mathcal{F}}, k\in\mathbb{N}_0$ pueden ser considerados como funtores aditivos de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{C}\left(D_{\mathcal{F}}(R)\right)$.

Descripción de la $\mathcal{F}$ – Transformada para un anillo.

La $\mathcal{F}$ – Transformada $D_{\mathcal{F}}(R)$ del anillo R tiene la estructura de un anillo conmutativo. De aquí se tiene $\mathcal{N}_R : R\longrightarrow D_{\mathcal{F}}(R)$ es un homomorfismo de anillos.

A continuación presentamos por intermedio de proposiciones ciertas descripcionesde la $\mathcal{F}$- transformada.

Lema (5.1.1).- Sean M, N y L tres $R-$ módulos y $g:M\longrightarrow N$ un $R-$ homomorfismo tal que el núcleo de g y el conúcleo de g ambos son $\mathcal{F}$ – Torsión.

Sea $\varphi:M\longrightarrow L$ otro $R-$ homomorfismo de módulos, se tiene:

(i) La aplicación $D_{\mathcal{F}}(g):D_{\mathcal{F}}(M)\longrightarrow D_{\mathcal{F}}(N)$ es un isomorfismo.

(ii) Existe un único $R-$ homomorfismo $\varphi': N \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(L)$ tal que el diagrama (Figura N° 5.3) siguiente conmuta.

Figura Nº 5.3 : Cuadrado Conmutativo para el Homomorfismo Composición φ'.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\varphi'"] \\ L \arrow[r, "\mathcal{N}_L"] & D_{\mathcal{F}}(L) \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia

Más aún : $\varphi' = D_{\mathcal{F}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathcal{N}_N$

(iii) Si φ y $\mathcal{N}_N : N \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(N)$ son isomorfismo, entonces el homomorfismo $\varphi': N \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(L)$ obtenido en la parte (ii) es también un isomorfismo.

Demostración: (i) Claramente las sucesiones siguientes son exactas.

$$0 \longrightarrow Nuc(g) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{r} \operatorname{Im}(g) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(g) \xrightarrow{j} N \xrightarrow{p} Co\ker(g) \longrightarrow 0$$

Puesto que Nuc(g) $\subset$ M, Im(g) $\subset$ N y Coker (g) = $\dfrac{N}{\operatorname{Im}(g)}$. Aún las aplicaciones i, r, j y p son obviamente homomorfismo. Nótese que $g = j \circ r$. Pues r (m) = g (m) y j (g (m)) = g (m), para todo m $\in$M. Por consiguiente bastará mostrar que $D_{\mathcal{F}}(j)$ y $D_{\mathcal{F}}(r)$ son ambos isomorfismos.

De la sucesión $0 \longrightarrow Nuc(g) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{r} \operatorname{Im}(g) \longrightarrow 0$ se tiene la sucesión exacta inducida siguiente:

$0 \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(Nuc(g)) \xrightarrow{D_{\mathcal{F}}(i)} D_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{D_{\mathcal{F}}(\lambda)} D_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}(g)) \longrightarrow R^1 D_{\mathcal{F}}(Nuc(g))$ Sin embargo por la proposición (5.1.1) Parte (ii) se tiene $\varepsilon^2 : \mathcal{R}^1 D_{\mathcal{F}}(Nuc(g)) \longrightarrow H^2_{\mathcal{F}}(Nuc(g))$ es un isomorfismo, es decir:

$\mathcal{R}^1 D_{\mathcal{F}}(Nuc(g)) \cong H^2_{\mathcal{F}}(Nuc(g))$, de otro lado por hipótesis, Nuc(g) es $\mathcal{F}$ – torsión. De aquí $D_{\mathcal{F}}(Nuc(g)) = H^2_{\mathcal{F}}(Nuc(g)) = 0$, pues basta observar la proposición (5.1.1) parte (i) y asi $D_{\mathcal{F}}(g)$ es un isomorfismo, ahora también de la sucesión exacta.

$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \xrightarrow{j} N \xrightarrow{p} Co\ker(g) \longrightarrow 0$ se obtiene la sucesión exacta inducida siguiente:

$0 \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}(g)) \xrightarrow{D_{\mathcal{F}}(j)} D_{\mathcal{F}}(N) \xrightarrow{D_{\mathcal{F}}(p)} D_{\mathcal{F}}(Co\ker(g))$ sin embargo, nuevamente por dato se tiene que Conuc(g) es $\mathcal{F}$ – Torsión y nuevamente por proposición (5.1.1) parte (i). $D_{\mathcal{F}}(Conun(g))$ = 0 de aquí $D_{\mathcal{F}}(j)$ es un isomorfismo y por ende el resultado.

(i) Previamente escribamos $L_0 := D_{\mathcal{F}}(L)$ y $h := \mathcal{N}_L : L \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(L) = L_0$, ahora aplicando la transformación natural "$\mathcal{N}$" del funtor Id al funtor $D_{\mathcal{F}}$ (es decir: $\mathcal{N} : Id \longrightarrow D_{\mathcal{F}}$) a los módulos y homomorfismos en el diagrama (Figura N° 5.4) conmuta.

Figura Nº 5.4 : Cuadrado Conmutativo Preliminar

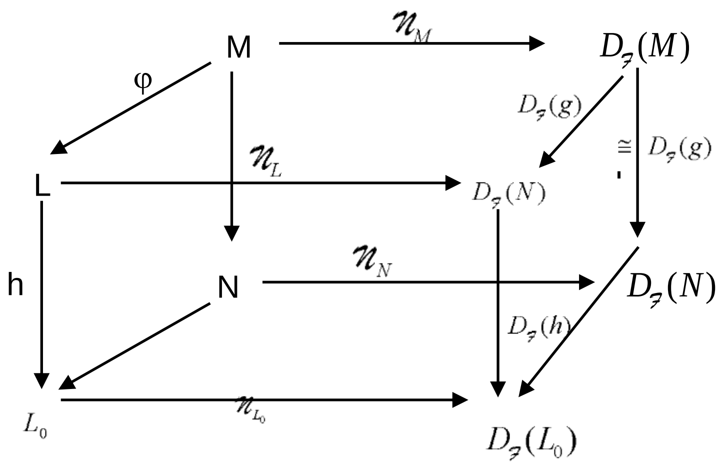
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & L \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r] & L_0 \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019**.**

Obteniendose de esta manera el diagrama conmutativo siguiente

(Figura N° 5.5):

Figura Nº 5.5 : Diagrama Paralelepípedo Conmutativo



Fuente: Autoría Propia – 2019.

Nótese que por la parte (i) $D_{\mathcal{F}}(g)$ es un isomorfismo, y siendo que $D_F(L) = L_0$, se tiene, también que: $D_{\mathcal{F}}(h) = D_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}_L) = \mathcal{N}_{D_{\mathcal{F}}(L)} = \mathcal{N}_{L_0}$ es un isomorfismo.

Ahora, si hubiera un R – homomorfismo $\varphi' : N \longrightarrow L_0$ tal que $\varphi' \circ g = h \circ \varphi$, entonces se cumpliría que

$D_{\mathcal{F}}(\varphi' \circ g) = D_{\mathcal{F}}(h \circ \varphi)$ si y solo $D_{\mathcal{F}}(\varphi') \circ D_{\mathcal{F}}(g) = D_{\mathcal{F}}(h) \circ D_{\mathcal{F}}(\varphi)$ y así tendremos (Puesto que $\mathcal{N} : Id \longrightarrow D_{\mathcal{F}}$ es una transformación natural y en consecuencia.

$$\varphi' = D_{\mathcal{F}}(h)^{-1} \circ \mathcal{N}_{L_0} \circ \varphi' = D_{\mathcal{F}}(h)^{-1} \circ D_{\mathcal{F}}(\varphi') \circ \mathcal{N}_N \ = \ D_{\mathcal{F}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{F}}(g)^{-1} \circ \mathcal{N}_N$$

De otro lado, y de modo inmediato se puede verificar por medio de un diagrama que: $D_{\mathcal{F}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{F}}(g)^{-1} \circ \mathcal{N}_N \circ g = h \circ \varphi$

(iii) Como $\varphi : M \longrightarrow L$ y $n_N : N \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(N)$ son isomorfismos, entonces de la parte (ii), inmediata anterior, se tiene claramente que $D_{\mathcal{F}}(\varphi)$ es un isomorfismo.

Observación (5.1.3).- Sea $f : M \longrightarrow N$ un R – homomorfismo de módulos. De la proposición (5.1.1) parte (i) se tiene $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} : Id \longrightarrow D_{\mathcal{F}}$ es una transformación natural de funtores y más aún que: $Nuc(\mathcal{N}_M)$ y conuc $(\mathcal{N}_M)$ son $\mathcal{F}$ – Torsión. En consecuencia del Teorema (anterior) se sigue que $D_{\mathscr{F}}(f): D_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow D_{\mathscr{F}}(N)$ debe ser el único R- homomorfismo, lo cual hace conmutar al diagrama siguiente (Figura N° 5.6).

Figura Nº 5.6 : Rectángulo Conmutativo para las $\boldsymbol{R}$- homomorfismos, $\boldsymbol{\mathscr{F}}$ y $D_{\mathscr{F}}(f)$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{N}_M"'] & N \arrow[d, "\mathcal{N}_N"] \\
D_{\mathscr{F}}(M) \arrow[r, "D_{\mathscr{F}}(f)"] & D_{\mathscr{F}}(N)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Proposición (5.1.5).- Sean M, N dos R – módulos, $g: M \longrightarrow N$ un R – homomorfismo, donde Nuc(g) y Conuc(g) son ambos $\mathscr{F}$- Torsión.

(i) La aplicación $D_{\mathscr{F}}(g): D_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow D_{\mathscr{F}}(N)$ es un isomorfismo.

(ii) Existe un único R – homomorfismo $\varphi': N \longrightarrow D_{\mathscr{F}}(M)$ tal que el diagrama (Figura N° 5.7).

Figura Nº 5.7: Triángulo Conmutativo en $D_{\mathscr{F}}(M)$

$$\begin{tikzcd}
 & D_{\mathscr{F}}(M) \\
M \arrow[ur, "\mathcal{N}_M"] \arrow[r, "g"] & N \arrow[u, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

Conmuta. De hecho $\varphi' = D_{\mathscr{F}}(g)^{-1} \circ \mathcal{N}_N$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

(iii) La aplicación φ' de (ii) es un isomorfismo si y solo si $\mathcal{N}_N$ es un isomorfismo, y por proposición (5.1.2), este es el caso si y solo si $\Gamma_{\mathcal{F}}(N) = H^1_{\mathcal{F}}(N) = 0$.

Demostración.- Bastará usar el lema (5.1.1) con $Id_M : M \longrightarrow M$ en el papel o conte$X$to de la aplicación $\varphi : M \longrightarrow L$.

Proposición (5.1.6).- Sea R' un anillo con identidad, (no necesariamente conmutativo), y sea $g : R \longrightarrow R'$ un homomorfismo de anillos tal que Im(g) $\subseteq Z(R')$ $(Z(R') \text{ centro de R'})$ y, cuando R' es considerado como un $R-$ módulo a izquierda mediante "g", ambos Nuc(g) y Conuc(g) son $\mathcal{F}$- Torsión. Asumamos también que $\Gamma_{\mathcal{F}}(R') = 0$. Entonces el anillo R' es conmutativo.

Demostración.- De la proposición inmediato anterior parte (ii) existe un único R – homomorfismo $\varphi' : R' \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(R)$, tal que el diagrama siguiente (Figura N° 5.8) conmuta.

Figura Nº 5.8 : Triángulo Conmutativo en $D_{\mathcal{F}}(R)$

$$\begin{tikzcd} & D_{\mathcal{F}}(R) \\ R \arrow[ur, "\mathcal{N}_R"] \arrow[r, "D_{\mathcal{F}}(R)"'] & R' \arrow[u, "\varphi'"'] \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Ahora sean $x_1', x_2' \in R'$. Como coker(g) es $\mathcal{F}$ – torsión, existen $\lambda, \delta \in \Lambda$ tal que J_λ (Respectivamente J_δ) anulan la imagen natural de x_1' (respectivamente de x_2') en el conucleo de g. Sean $y_1 \in J_\lambda, y_1 \in J_\delta$; entonces existen $x_1, x_2 \in R$ tal que $g(x_i) = y_i x_i'$, esto es $g(x_i) = g(y_i) x_i'$, con i = 1, 2. Y como Im(g) $\subset Z(R')$, tenemos: $g(y_1)\,g(y_2)\,x_1^{'}x_2^{'} = g(y_1)\,x_1^{'}g(y_2)\,x_2^{'} = g(x_1)\,g(x_2) = g(x_2)\,g(x_1) =$

$$g(y_2)\;\; x_2^{'}g(y_1)\,x_1^{'} = g(y_1)\,g(y_2)\,x_2^{'}x_1^{'}$$

Por consiguiente $y_1y_2\left(x_1^{'}x_2^{'} - x_2^{'}x_1^{'}\right) = 0.$ De aquí el elemento $\left(x_1^{'}x_2^{'} - x_2^{'}x_1^{'}\right)$ es anulado por $J_{\lambda}J_{\delta}$. Pero $\mathcal{F}$ es un sistema de ideales, de donde existe un elemento $\alpha \in \Lambda$ tal que $J_{\alpha} \subseteq J_{\lambda}J_{\delta}$. Y siendo que $\Gamma_{\mathcal{F}}(R') = 0$, entonces se deduce que $x_1^{'}x_2^{'} - x_2^{'}x_1^{'}$ y por tanto R' es un anillo conmutativo.

Proposición (5.1.7).- Sea R' un anillo conmutativo con identidad, y sea $g: R \longrightarrow R'$ un homomorfismo de anillos, donde los dos $R-$ módulos Nuc(g) y Conuc(g) ambos son $\mathcal{F}$ – Torsión. Entonces el único R-homomorfismo $\varphi': R' \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(R)$ tal que el siguiente diagrama (Figura N° 5.9) conmuta.

Figura Nº 5.9 : Triángulo conmutativo en $D_{\mathcal{F}}(R)$, para un $\boldsymbol{R}-$homomorfismo de Algebras

$$\begin{tikzcd}
 & D_{\mathcal{F}}(R) \\
R \arrow[ur, "\eta_R"] \arrow[r, "g"'] & R' \arrow[u, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Es un homomorfismo de anillos, y por consiguiente un homomorfismo de $R-$ algebra.

Demostración.- La existencia de tal homomorfismo se sigue de la proposición (4.6.1). Ahora sean $x_1^{'}, x_2^{'} \in R'$. Como coker(g) es $\mathcal{F}$ – Torsión, existen $\lambda, \delta \in \Lambda$ tal que J_{λ} (respectivamente J_{δ}) anulan la imagen de $x_1^{'}$ (respectivamente de $x_2^{'}$) en el Conuc(g).

Sean $y_1 \in J_\lambda$, $y_2 \in J_\delta$; entonces existen $x_1, x_2 \in R$ tal que $g(x_i) = y_i x_i^{'}$, esto es $g(x_i) = g(y_i)x_i^{'}$, para i = 1, 2. Observe además que, en el anillo conmutativo $D_{\mathcal{F}}(R)$, se tiene:

$$y_1 y_2 \varphi'(x_1^{'})\varphi'(x_2^{'}) = \varphi'(y_1 x_1^{'})\varphi'(y_2 x_2^{'}) = \varphi'(g(x_1))\varphi'(g(x_2))$$

$$= \mathscr{N}_R(x_1)n_R(x_2) = \mathscr{N}_R(x_1x_2) = \varphi'(g(x_1x_2))$$

$$= \varphi'(g(x_1)g(x_2)) = \varphi'(y_1x_1^{'}y_2x_2^{'}) = y_1y_2\varphi'(x_1^{'}x_2^{'})$$

Así que $y_1y_2\left[\varphi'(x_1^{'})\varphi'(x_2^{'}) - \varphi'(x_1^{'}x_2^{'})\right] = 0$, de aquí, $\varphi'(x_1^1)\varphi'(x_2^1) - \varphi'(x_1^1x_2^1) \in D_{\mathcal{F}}(R)$ es anulado por $J_\lambda J_\delta$, pero existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $J_\alpha \subseteq J_\lambda J_\delta$. Como $D_{\mathcal{F}}(R)$ es $\mathcal{F}$-Torsión libre de la proposición (5.1.1) parte (d), tenemos $\varphi'(x_1^1x_2^1) = \varphi'(x_1^1)\varphi'(x_2^1)$, y además $\varphi'(1_{R'}) = \varphi'(g(1_R)) = \mathscr{N}_R(1_R) = 1_{D_{\mathcal{F}}(R)}$. Por consiguiente φ' es un homomorfismo de anillos.

Proposición (5.1.8).- Sea M un $R-$ módulo y S un subconjunto de R multiplicativamente cerrado, lo cual consiste enteramente de elementos no – divisores de M, y lo cual es tal que $S \cap J_\lambda \neq \phi$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Entonces existe un único R-isomorfismo.

$\varphi_M^{'} : \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left[M :_{s^{-1}M} J_\lambda\right] \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(M)$ haciendo conmutar el siguiente diagrama:

Figura Nº 5.10 : Triángulo Conmutativo en $D_{\mathcal{F}}(M)$, para un $\boldsymbol{R}-$ isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & D_{\mathcal{F}}(M) \\
M \arrow[ur, "\mathscr{N}_M"] \arrow[r, "\subseteq"'] & \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left[M :_{S^{-1}M} J_\lambda\right] \arrow[u, "\varphi_M^{'}"']
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019**.**

En particular cuando M = R y S consiste de elementos no divisores de R, la aplicación $\varphi_R^{'}$ es en este caso un isomorfismo de anillos.

Demostración.- Nótese previamente lo siguiente: Como S consiste enteramente de elementos no – divisores de cero del módulo M, entonces el $R-$ homomorfismo canónico $M \longrightarrow S^{-1}M$ es un monomorfismo, usamos este hecho para identificar M como un $R-$ submodulo de $S^{-1}M$.

Ahora pongamos N : = $\bigcup_{\lambda\in\wedge}\left[M :_{S^{-1}M} J_\lambda\right]$, y sea $g : M \longrightarrow N$ el homomorfismo inclusión. Como Coker(g) = $\Gamma_{\mathcal{F}}\left(\dfrac{S^{-1}M}{M}\right)$ es $\mathcal{F}$-Torsión, y asi existe un único R-homomorfismo $\varphi_M^{'} : M' \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(M)$ lo cual hace al diagrama inmediato anterior conmutativo; esto también se sigue que, en orden para mostrar que $\varphi_M^{'}$ es un isomorfismo, bastará mostrar que: $\Gamma_{\mathcal{F}}(N) = H^1_{\mathcal{F}}(N) = 0.$

En efecto.- Primero mostramos que $H^k_{\mathcal{F}}(S^{-1}M) = 0$, para cada $k \in N_0$. Veamos sea $x \in H^k_{\mathcal{F}}(S^{-1}M)$. Entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $J_\lambda x = 0$. Por hipótesis, existe $t \in S \cap J_\lambda$, así que tx = 0. Como $H^k_{\mathcal{F}}$ es un funtor R-lineal, la multiplicación por “t” en $H^k_{\mathcal{F}}(S^{-1}M)$ proporcionará un automorfismo; por tanto x = 0. En consecuencia $H^k_{\mathcal{F}}(S^{-1}M) = 0$, como queríamos. De aquí $\Gamma_{\mathcal{F}}(N) = 0$. Esto ahora se sigue de la sucesión exacta:

$O \longrightarrow N \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow \dfrac{S^{-1}M}{N} \longrightarrow 0$ que $H^k_{\mathcal{F}}(N) \cong \Gamma_{\mathcal{F}}\left(\dfrac{S^{-1}M}{N}\right)$. Sin embargo, $\left(\dfrac{S^{-1}M}{N}\right) = \left(\dfrac{S^{-1}M/M}{N/M}\right) = \left(\dfrac{S^{-1}M/M}{\Gamma_{\mathcal{F}}\left(S^{-1}M/M\right)}\right)$ y en consecuencia, $H^1_{\mathcal{F}}(N)$ es $\mathcal{F}$-Torsión libre. De aquí $H^1_{\mathcal{F}}(N) = 0$ y finalmente de la proposición (5.1.7) se sigue el resultado.

5.2. Resultados Inferenciales

El resultado principal del trabajo ha permitido INFERIR resultados consistentes en comparar familias de ideales y familias de ideales particulares. Para obtener tales resultados consideramos adicionalmente ciertas hipótesis; así como también debilitamos hipótesis. Tales resultados lo mostraremos mediante ejemplos.

Observación (5.2.1).- Todo lo realizado u obtenido anteriormente para una familia $\mathcal{F} = \{J_\lambda\}_{\lambda \in \wedge}$. También es aplicado al sistema particular de ideales $\left(\Omega^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ donde Ω es ideal de R. En efecto este hecho es un ejemplo muy importante de tal sistema. Produciéndose de este modo una comparación de familia de ideales. De otro lado el resultado obtenido en la proposición (5.1.8), se produce cuando Ω es un ideal principal, pero bajo hipótesis más débiles, lo cual tiene consecuencias muy importantes para nuestro trabajo. A continuación presentamos tal resultado. Recordemos que, para un $R-$ módulo M y un elemento $a \in R$, Ma denota el módulo de fracciones de M, con respecto al subconjunto multiplicativamente cerrado $\left\{a^k : k \in \mathbb{N}_0\right\}$.De esta forma con relación a la comparación de familias de ideales, inferimos a continuación algunos resultados que permiten una mejor ilustración a respecto.

Proposición (5.2.1).- Sea R un anillo, $a \in R$. Existe una equivalencia natural de funtores $T': D_{R_a} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(R_{a^n}, \bullet\right) \longrightarrow (\square)_a$ de $\mathcal{M}_{(R)}$ a $\mathcal{M}_{(R)}$ tal que, para un $R-$ módulo M, y un elemento $f \in D_{R_a}(M)$ representado por $f_k \in Hom_R\left(R_{a^k}, M\right)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se tiene $T_M^{'}(f) = \dfrac{f_k(a^k)}{a^k}$.

Demostración.- Sea R un anillo y M un $R-$ módulo. De la proposición (5.1.5) parte (ii) y (iii) existe un único $R-$ isomorfismo $\mu_M : Ma \longrightarrow D_{R_a}(M)$ tal que el diagrama siguiente (Figura N° 5.11) conmuta.

Figura Nº 5.11 : Triángulo conmutativo en $D_{R_a}(M)$, para un único $\boldsymbol{R}-$ isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} & & D_{R_a}(M) \\ M \arrow[urr, "\mathcal{N}_{R_a,M}"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & M_a \arrow[u, "\mu_M"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Donde "φ" es el homomorfismo natural, observese además que $H_{R_a}^{k}(M_a)=0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ puesto que la multiplicación por "a" proporciona un automorfismo en todos estos módulos de cohomología local. Definamos $T_M^{'} := \mu_M^{-1}$, fácilmente al usar la conmutatividad del diagrama inmediato anterior se muestra u obtiene que $T_M^{'}$ satisface la afirmación requerida. Además resulta inmediato y fácil al utilizar la última igualdad para mostrar que $T_M^{'}$ constituye una equivalencia natural de funtores; puesto que M varía en la categoría $\mathcal{M}(R)$.

Observación (5.2.2).- Con las consideraciones y notación de la proposición inmediato anterior, para un $R-$ módulo M, la sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow D_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow H_{\mathcal{F}}^{1} \longrightarrow 0$$

Se verifica para el caso particular donde $\mathcal{F}=\{\Omega^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\Omega = R_a$: es decir la sucesión siguiente:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{R_a}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{\mathcal{N}_M} D_{R_a}(M) \xrightarrow{\rho_M^{o}} H_{R_a}^{1}(M) \longrightarrow 0$$

Como $T_M^{'} : D_{R_a}(M) \longrightarrow M_a$ entonces se tiene la composición: $T_M^{'} \circ \mathcal{N}_M : M \longrightarrow M_a$ el cual es exactamente el $R-$ homomorfismo canonico $i_M \left(i.e.\ \ i_M = T_M^{'} \circ n_M\right)$.

Ahora poniendo $P_M := \rho_M^o \circ \left(T_M^{'}\right)^{-1}$; se tiene la sucesión exacta de $R-$ módulos y $R-$ homomorfismos.

$$0 \longrightarrow \Gamma_{R_a}(M) \xrightarrow{\xi_M} M \xrightarrow{i_M} M_a \xrightarrow{\rho_M} H^1_{R_a}(M) \longrightarrow 0$$

Y como M varía en $\mathscr{M}(R)$, entonces i_M y p_M constituyen transformaciones naturales de funtores. $i : Id \longrightarrow (\cdot)_a$ y $p : (\cdot)_a \longrightarrow H^1_{R_a}$

Proposición (5.2.2).- Sean R un anillo, M un $R-$ módulo Y "a" un elemento de R.

(i) El núcleo del homomorfismo natural $i_M : M \longrightarrow M_a$ es exactamente $\Gamma_{R_a}(M)$ (es decir $Nuc(i_M) = \Gamma_{R_a}(M)$) y en virtud de la observación inmediato anterior el cociente $\dfrac{M}{\Gamma_{R_a}(M)}$ puede identificarse como un submódulo de M_a. Con esta identificación se tiene : $H^1_{R_a}(M) \cong \dfrac{M_a}{\left(\dfrac{M_a}{\Gamma_{R_a}(M)}\right)}$

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$ con k $>$ 1, se tiene $H^k_{R_a}(M) = 0$

Demostración (i).- Esta parte se obtiene directa e inmediatamente de la observación inmediato anterior.

(ii) Sea $k \in \mathbb{N}$ con k $>$ 1. Ahora por proposición (5.1.1) parte (ii) se tiene $H^k_{R_a}(M) \cong \mathcal{R}^{k-1} D_{R_a}(M)$. Sin embargo, por la proposición inmediato anterior. El funtor D_{R_a} es equivalente al funtor $(\cdot)_a$, como este último funtor $(\cdot)_a$ es eXacto y siendo que k $>$ 1, entonces $\mathcal{R}^{k-1} D_{R_a}(N) = 0$, para cualquier $R-$ módulo N; y en consecuencia $H^k_{R_a}(M) = 0$

Proposición (5.2.3).- Sea M un $R-$ módulo no necesariamente finitamente generado tal que Ω contiene una M – sucesión: $x\,,y$ de longitud dos. Entonces la aplicación $\mathscr{N}_M : M \longrightarrow D_\Omega(M)$ es un isomorfismo.

En efecto.- Para lo cual usando la proposición (5.1.8), con la elección de $S := \{x^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ y teniendo en consideración el resultado $R_1^{\#}$ parte (b), se obtiene el isomorfismo requerido.

Observación (5.2.3).- Sean Ω y J dos ideales en un anillo R.

(i) Si $\Omega \subseteq \sqrt{J}$; entonces existe una única transformación natural de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R)$, denotado por $\sigma_{J,\Omega} : D_J \longrightarrow D_\Omega$ tal que para cada R – módulo M, el diagrama siguiente (Figura N° 5.12) conmuta.

Figura Nº 5.12 : Triángulo Conmutativo en $D_\Omega(M)$; para una transformación natural.

$$\begin{tikzcd}
 & D_\Omega(M) \\
M \arrow[ur, "\mathcal{N}_{\Omega,M}"] \arrow[r, "\mathcal{N}_{J,M}"'] & D_J(M) \arrow[u, "\sigma_{J,\Omega,M}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

(ii) Si $\sqrt{\Omega} = \sqrt{J}$, entonces D_Ω y D_J son naturalmente equivalentes.

(iii) Para la discusión de ejemplos geométricos que eventualmente podrían ser discutidos, la transformada ideal es "independiente del anillo base". Más precisamente si $f : R \longrightarrow R'$ es un homomorfismo de anillos donde R' es anillo conmutativo notheriano; y sea M' un R' - módulo. En momentos que absolutamente quisiéramos precisar, usaremos $M'\Gamma_R$ para indicar que estamos con respecto o relación a M'. Como un R – módulo mediante *f*. Obsérvese que Γ_R puede ser considerado como un funtor de $\mathcal{M}(R')$ en el $\mathcal{M}(R)$. Así podemos formar la transformada ideal $D_{\Omega_{R'}}(M')$ de M' con respecto a la extensión $\Omega R'$ de Ω en R' vía *f*, y luego considerarlo como un R – módulo mediante *f*. Esto es, entonces, el R – módulo $D_{\Omega_{R'}}(M')\Gamma_R$. Alternativamente podemos considerar M'

como un R-módulo $M'\Gamma_R$ y asi formar $D_{\Omega}\left(M'\Gamma_R\right)$ nuestro próximo resultado entre otros, será mostrar la existencia de $R-$ isomorfismo siguiente:

$$D_{\Omega R'}(M') = D_{\Omega R'}(M')\Gamma_R \longrightarrow D_{\Omega}(M'\Gamma_R) =: D_{\Omega}(M')$$

Ejemplo (5.2.1) Primer resultado inferencial.

Con las notaciones y consideraciones de la parte (iii) de la observación inmediata anterior y siendo además R un anillo, R' un anillo conmutativo notheriano y $f : R \longrightarrow R'$ un homomorfismo de anillos. Se tiene que existe una equivalencia natural de funtores.

$\tau : D_{\Omega R'}(\square)\Gamma_R \longrightarrow D_{\Omega}(\square)\Gamma_R$ del $\mathscr{M}\left(R'\right)$ en el $\mathscr{M}\left(R\right)$ tal que, para cada $R'-$ módulo M', el diagrama (Figura N° 5.13) conmuta.

Figura Nº 5.13 : Rectángulo conmutativo, en $D_{\Omega}(M')$. Bajo un homomorfismo de anillos.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "\mathscr{N}_{\Omega R',M'}"] \arrow[d, "1_{M'}"'] & D_{\Omega R'}(M') \arrow[d, "\tau_{M'}"] \\
M' \arrow[r, "\mathscr{N}_{\Omega,M'}"] & D_{\Omega}(M')
\end{tikzcd}$$

Fuente : Autoría Propia – 2019.

Demostración.- Sea M' un R' - módulo. Por la proposición (5.1.1) parte $\left(i_3\right)$ de (i), se tiene que el R' - homomorfismo. $\mathscr{N}_{\Omega R',M'} : M' \longrightarrow D_{\Omega R'}(M')$

Posee núcleo y conúcleo isomorfos a $\Gamma_{\Omega R'}(M')$ y $H^1_{\Omega R'}(M')$ respectivamente. De donde el núcleo y conúcleo de $\mathscr{N}_{\Omega R',M'}\Gamma_R$ son Ω-torsión. En consecuencia de la proposición (5.1.5) se sigue que existe un único R' - homomorfismo $\tau_{M'}: D_{\Omega R'}(M') \longrightarrow D_{\Omega}(M')$ tal que el diagrama siguiente (Figura N° 5.14) conmuta.

Figura Nº 5.14 : Rectángulo Conmutativo para un homomorfismo natural inducido "$\tau_{M'}$"

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "N_{\Omega R',M'}"] \arrow[d, "1_{M'}"] & D_{\Omega R'}(M') \arrow[d, "\tau_{M'}"] \\
M' \arrow[r, "N_{\Omega,M'}"] & D_{\Omega}(M')
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019**.**

Al utilizar la unicidad del Lema (5.1.1), y como M' varía en la categoría $\mathcal{M}(R')$ se obtiene que $\tau_{M'}$ constituye una transformación natural de funtores, y así solo faltaría mostrar que cada $\tau_{M'}$ es un isomorfismo.

Ahora el hecho que M' es un (R,R') - bi módulo es decir que $D_{\Omega}(M')$ hereda una estructura natural como un R', proporciona la multiplicación por x'. Además, como τ es una transformación natural de funtores, tenemos que: $D_{\Omega}(x'Id_{M'}) \circ \tau_{M'} = \tau_{M'} \circ D_{\Omega R'}(x'Id_{M'}) = \tau_{M'} \circ \left(x'Id_{D_{\Omega R'}}(M')\right)$.

Para todo $x' \in R'$, de modo que $\tau_{M'}$ es un $R'-$ homomorfismo. De la misma manera $\mathcal{N}_{\Omega,M'}$ se convierte en un $R'-$ homomorfismo.

De otro lado al usar la proposición (5.1.1) parte (i_3) de (i) se muestra que $\mathcal{N}_{\Omega,M'}: M' \longrightarrow D_{\Omega}(M')$ tiene núcleo y conúcleo los cuales son $\Omega-$ Torsión. De modo que cuando consideramos $\mathcal{N}_{\Omega,M'}$ como un $R'-$ homomorfismo, su núcleo y conucleo son $\Omega R'-$ Torsión. Y nuevamente de la proposición (5.1.1) se sigue que existe un único $R'-$ homomorfismo $\gamma_{M'}: D_{\Omega}(M') \longrightarrow D_{\Omega R'}(M')$ tal que el diagrama (Figura N° 5.15).

Figura Nº 5.15 : Rectángulo Conmutativo para un isomorfismo natural inducido $\tau_{M'}$

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "\mathcal{N}_{\Omega,M'}"'] \arrow[d, "1_{M'}"] & D_{\Omega}(M') \arrow[d, "\gamma_{M'}"] \\
M' \arrow[r, "\mathcal{N}_{\Omega R',M'}"] & D_{\Omega R'}(M')
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

Conmuta. Nuevamente de la unicidad que se establece en la proposición (5.1.5) juntamente con el hecho de que $\tau_{M'}$ y $\gamma_{M'}$ ambos son $R-$ y $R'-$ homomorfismos entonces se produce que : $\gamma_{M'} \circ \tau_{M'} = Id_{D_{\Omega R'}(M')}$ y $\tau_{M'} \circ \gamma_{M'} = Id_{D_{\Omega}(M')}$ y en consecuencia $\tau_{M'}$ es un isomorfismo.

Definición (5.2.1).- [Sucesiones Conexas de Funtores].- Sean R, R' dos anillos $(R' \text{ conmutativo})$ y $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de funtores de la categoría de módulos, $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R')$ [i.e: $T^k : \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(R'),$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$]. Se dice que la sucesión $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión conexa negativa (respectivamente, una sucesión negativa fuertemente conexa), si verifica las condiciones siguientes:

c$_1$) Cada vez que la sucesión de módulos $0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathcal{M}(R)$, entonces existen $R'-$ homomorfismo Conexión $\partial^k : T^k(N) \longrightarrow T^{k+1}(P),$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ tal que la sucesión exacta larga siguiente (Figura N° 5.16): Es un complejo (respectivamente, es exacta).

Figura Nº 5.16 :Sucesiones exacta **larga de un Complejo Inducido**

$$0 \longrightarrow T^{o}(P) \xrightarrow{T^{o}(f)} T^{o}(M) \xrightarrow{T^{o}(g)} T^{o}(N) \xrightarrow{\partial^{o}} T^{1}(P) \xrightarrow{T^{1}(f)} T^{1}(M) \xrightarrow{T^{1}(g)} T^{1}(N)$$

$$\Big\downarrow \delta^{k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \leftarrow T^{2}(N) \xleftarrow{T^{2}(g)} T^{2}(M) \xleftarrow{T^{2}(f)} T^{2}(P)$$

$$\Big\downarrow$$

$$T^{k}(P) \xrightarrow{T^{k}(f)} T^{k}(M) \xrightarrow{T^{k}(g)} T^{k}(N) \xrightarrow{\partial^{k}} T^{k+1}(P) \xrightarrow{T^{k+1}(f)} T^{k+1}(M) \xrightarrow{T^{k+1}(g)} T^{k+1}(N)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Fuente: Autoría Propia – 2019.

c$_2$) Si el diagrama (Figura N° 5.17) de $R-$ módulos y $R-$ homomorfismos siguiente:

Figura Nº 5.17 : Cuadrados Arbitrarios conmutativos de R-Módulos y $R-$ Homomorfismos con filas exactas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 & (\xi_1) \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 & (\xi_2)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Sze – Tsen Hu – 1968.

Es conmutativo, donde las líneas son exacta, entonces existe una aplicación de cadenas, inducida por φ, ψ y ρ del complejo largo de (c_1); para la fila (ξ_1) sobre el correspondiente complejo largo para la fila (ξ_2).

Nota.- En la definición anterior adoptaremos de manera convencional la escritura de los índices como sigue T^K será escrito como T_{-K}; de manera que $\left(T^K\right)_{K\geq 0}$ puede escribirse como $\left(T_k\right)_{k\,\leq\,0}$.

Observación (5.2.4).- 1) Si $T:\mathscr{M}(R)\longrightarrow\mathscr{M}(R')$ es un funtor covariante aditivo tal como Γ_Ω, entonces su sucesión de funtores derivados a derecha $\left(H^K T\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión negativa fuertemente cone*X*a de funtores covariantes de $\mathscr{M}(R)\longrightarrow\mathscr{M}(R')$; además, si $T:\mathscr{M}(R)\longrightarrow\mathscr{M}(R')$ es funtor e*X*acto a izquierda, entonces HºT es naturalmente equivalente a *T*. Nosotros trataremos muchas con funtores covariantes, aditivos, exactos que se simplificará muy considerablemente y adoptaremos la convención siguiente:

ii) Si R' es un anillo conmutativo y $T:\mathscr{M}(R)\longrightarrow\mathscr{M}(R')$ es un funtor covariante aditivo el cual es e*X*acto a izquierda, entonces identificaremos *T* con su 0 – iésimo funtor derivado a derecha Hº *T* (i.e. *T* = Hº *T*). De la misma forma, $Ext_R^{\circ}=Hom_R$

Definición (5.2.2).- Sean $\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0},\left(L^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dos sucesiones cone*X*as negativas de funtores covariantes de $\mathscr{M}(R)$ en $\mathscr{M}(R')$ donde R es un anillo y R' es anillo conmutativo. Un homomorfismo $\Phi:\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}\longrightarrow\left(L^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de sucesiones cone*X*as es una familia $\left(\phi^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ donde, para cada $k\in\mathbb{N}_0,\phi^k:T^k\longrightarrow L^k$ es una transformación natural de funtores, que satisface la siguiente condición: cada vez que la sucesión de R – módulos y R – homomorfismos $0\longrightarrow P\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0$ es exacta; entonces para índice $k\in\mathbb{N}_0$, el siguiente diagrama (Figura N° 5.18).

Figura Nº 5.18 : Cuadrado Conmutativo, para los Homomorfismos, Conexión **– Horizontalmente**.

$$\begin{tikzcd} T^k(N) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_N^K"'] & T^{K+1}(P) \arrow[d, "\phi_P^K"] \\ L^k(N) \arrow[r] & L^{K+1}(P) \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoría Propia - 2019

Conmuta, donde las aplicaciones horizontales son los homomorfismos Conexión apropiadas derivadas de las sucesiones conexas.

Definición (5.2.3).- Un homomorfismo $\Phi = \left(\phi^{\dot{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} : \left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow \left(L^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de sucesiones cone$X$as se dice que es un Isomorfismo (de sucesiones cone$X$as) cuando $\phi^k : T^k \longrightarrow L^k$ es una equivalencia natural de funtores para cada índice $k \in \mathbb{N}_0$.

Observación (5.2.5).- Sean R, R' dos anillos, R' conmutativo y sean $\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}, \left(L^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dos sucesiones cone$X$as negativas de funtores de $\mathscr{M}(R)$ en $\mathscr{M}(R')$.

(i) Sea $\phi^{\mathrm{o}} : T^{\mathrm{o}} \longrightarrow L^{\mathrm{o}}$ una transformación natural de funtores. Tal que:

(♦) La sucesión $\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es fuertemente conexa.

(♦) $T^k(I) = 0,$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y para todo $R-$ módulo I. Entonces existe una única transformación natural.

$\phi^k : T^k \longrightarrow L^k, k \in \mathbb{N}$. Tal que $\left(\phi^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} : \left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow \left(L^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión conexa de homomorfismos.

(ii) Sea $\phi^{\mathrm{o}} : T^{\mathrm{o}} \longrightarrow L^{\mathrm{o}}$ una equivalencia natural de funtores tal que:

La sucesiones $\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ y $\left(L^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ son fuertemente conexas, además asumase que $T^k(I)=L^k(I)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y para todo $R-$ módulo I, entonces existe un isomorfismo de sucesiones conexas $\Phi=\left(\phi^{\dot{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}:\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}\longrightarrow\left(L^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ tal que $\phi^{o}=\phi$.

Ejemplo (5.2.2).- (Segundo Resultado Inferencial).- Sean R,R' dos anillos $\left(R'-conmutativo\right)$ y $T:\mathcal{M}(R)\longrightarrow\mathcal{M}(R')$ un funtor exacto covariante aditivo. Sea $\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión negativa fuertemente conexa de funtores convariantes de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R')$ tal que existe una equivalencia natural $\phi:T^{o}\xrightarrow{\cong}T$ y tal que $T^k(I)=0$ para todo $R-$ módulos inyectivo I. Entonces existe un único isomorfismo de sucesiones conexas $\Phi=\left(\phi^{\dot{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}:\left(T^K\right)_{k\in\mathbb{N}_0}\longrightarrow\left(H^KT\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$

De funtores de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R')$ tal que $\Phi^{o}=\phi$

Ejercicio: Sea R un anillo, $S\subset R$ un subconjunto cerrado de R, entonces las sucesiones $\left(S^{-1}\left(H_{\Omega}^{k}(\square)\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ y $\left(H_{\Omega S^{-1}R}^{k}\left(S^{-1}(\square)\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ son sucesiones isomorficas de funtores de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R')$

Demostración: Para la demostración ó interpretación del ejemplo (5.2.2) bastará [Ver observación (5.2.4) anterior, parte (ii). Luego para solucionar el ejercicio Ver. M.F. Atiyah I.G. Macdonald.

Observación (5.2.5.).- Sean $\left(\Lambda,\leq\right)$ un conjunto parcialmente ordenado, y sea $\mathcal{F}=\left\{I_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia inversa de ideales de un anillo R sobre Λ (es decir para $\left(\lambda,ß\right)\in\Lambda^2$ con $ß\leq\lambda$ se tiene $I_\lambda\subseteq I_ß$}.Momentáneamente escribamos: $L^k:=\varinjlim Ext_R^k\left(\frac{R}{I_\lambda},\square\right)$ Para $k\in\mathbb{N}_0$. Sabemos que los $R-$ homomorfismos naturales $h_{B\lambda}:\frac{R}{I_\lambda}\longrightarrow\frac{R}{I_B}$, para $\lambda,ß\in\Lambda$ con $ß\leq\lambda$ convierte a $\left\{\frac{R}{I_\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ en un sistema inverso sobre Λ produciendo los $R-$ funtores covariantes.

$\underrightarrow{\lim}_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_R\left(\dfrac{R}{I_\lambda},\square\right)$ y $\underrightarrow{\lim}_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^k\left(\dfrac{R}{I_\lambda},\square\right)$ para $k\in\square_0$, de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R)$.

5.3. Otro tipo de resultado de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis

Previamente mostremos un resultado inducido de secuencias exacta, largas y lo establecemos en la siguiente:

Observación (5.3.1).

Cada vez que $O \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow N$, es una sucesión exacta de $R-$ módulos y $R-$ homomorfismos, existen para cada $\lambda\in\Lambda$ los homomorfismos Conexión inducidos. $Ext_R^k\left(\dfrac{R}{I_\lambda},N\right) \longrightarrow Ext_R^k\left(\dfrac{R}{I_\lambda},P\right), k\in\square_0$ lo cual inducen una sucesión (Figura N° 5.19) exacta larga.

Figura Nº 5.19 : Secuencia exacta **larga para el funtor** Ext.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_R\left(\frac{R}{I_\lambda},P\right) \arrow[r] & Hom_R\left(\frac{R}{I_\lambda},M\right) \arrow[r] & Hom_R\left(\frac{R}{I_\lambda},N\right) \arrow[d, "\delta"] \\
& Ext_R^1\left(\frac{R}{I_\lambda},N\right) \arrow[d, "\delta"] & Ext_R^1\left(\frac{R}{I_\lambda},M\right) \arrow[l] & Ext_R^1\left(\frac{R}{I_\lambda},P\right) \arrow[l] \\
& Ext_R^2\left(\frac{R}{I_\lambda},P\right) \arrow[r] & Ext_R^2\left(\frac{R}{I_\lambda},M\right) \arrow[r] & Ext_R^2\left(\frac{R}{I_\lambda},N\right) \arrow[d] \\
& \cdots\cdots\cdots \arrow[d] & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
& Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\lambda},P\right) \arrow[r] & Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\lambda},M\right) \arrow[r] & Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\lambda},N\right) \arrow[d] \\
& & \cdots\cdots\cdots & Ext_R^{K+1}\left(\frac{R}{I_\lambda},P\right) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Autoría Propia – 2019

Además estos homomorfismos Conexión son tales que, para $\alpha, ß \in \Lambda$ con $ß \leq \alpha$ se tiene el rectángulo conmutativo siguiente, (Figura N° 5.20) para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Figura Nº 5.20 : Cuadrado Conmutativo para el Funtor Ext.

$$\begin{tikzcd} Ext_R^K\left(\frac{R}{I_ß}, N\right) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Ext_R^K\left(h_{B\alpha}, N\right)"'] & Ext_R^{K+1}\left(\frac{R}{I_ß}, P\right) \arrow[d, "Ext_R^{K+1}\left(h_{B\alpha_1}, L\right)"] \\ Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, N\right) \arrow[r, "\delta"] & Ext_R^{K+1}\left(\frac{R}{I_ß}, P\right) \end{tikzcd}$$

Fuente: Autoria – Propia 2019.

[Donde δ es el homomorfismo Conexión apropiado y $h_{ß\alpha} : \frac{R}{I_\alpha} \longrightarrow \frac{R}{I_ß}$ es el homomorfismo natural]. De aquí se sigue que tales diagramas inducen R- homomorfismos Conexión.

$$L^k(N) = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} Ext_R^k\left(\frac{R}{I_\lambda}, N\right) \longrightarrow L^{k+1}(P) = \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} Ext_R^{k+1}\left(\frac{R}{I_\alpha}, P\right)$$

Para $k \in \mathbb{N}_0$; además el hecho del pasaje a límites directos que preservan exactitud , implica la sucesión exacta larga siguiente (Figura N° 5.21):

Figura Nº 5.21 : Sucesiones exacta **larga para el funtor** $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext_R^k$.

$$
\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & L^{o} P \arrow[r] & L^{D}(M) \arrow[r] & L^{o}(N) \arrow[d] \\
{} & L^{1}(N) \arrow[l] & L^{1}(M) \arrow[l] & L^{1}(P) \arrow[l] \\
{} \arrow[r] & L^{K} P \arrow[r] & L^{K}(M) \arrow[r] & L^{K}(N) \arrow[d] \\
& & {} & L^{K+1}(P) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Autoría Propia – 2019

De otro lado, las propiedades estándar de los funtores eXtensión aseguran, cada vez que se tiene el diagrama conmutativo. (Figura N° 5.22).

Figura Nº 5.22 : Diagrama Arbitrario de Módulos con Filas exacta **cortas.**

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Autoría Propia - 2019.

De R – módulos y R – homomorfismos con filas exacta, entonces para todo $\alpha \in \Lambda$ se tiene que, el cuadrado (Figura N° 5.23) conmuta para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Figura Nº 5.23 : Cuadrado Conmutativo inducido por el Funtor Ext.

$$\begin{tikzcd}
Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, N\right) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, \rho\right)"'] & Ext_R^{K+1}\left(\frac{R}{I_\alpha}, L\right) \arrow[d, "Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, \varphi\right)"] \\
Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, N'\right) \arrow[r, "\delta"] & Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, L'\right)
\end{tikzcd}$$

Fuente : Autoría Propia – 2019.

Donde "δ" son los homomorfismos Conexión adecuados, y por lo tanto el cuadrado siguiente: (Figura N° 5.24)

Figura Nº 5.24: Cuadrado Conmutativo inducido por el funtor $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext$

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, N\right) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext^{K+1}\left(\frac{R}{I_\alpha}, L\right) \arrow[d] \\
\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha}, N'\right) \arrow[r] & \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext_R^{K+i}\left(\frac{R}{I_\alpha}, L'\right)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoria Propia - 2019

Conmuta para todo $k \in \mathbb{N}_0$, donde las aplicaciones horizontales son los homomorfismos Conexión adecuados. Así hemos hecho que

$\left(\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha},\cdot\right)\right)_{K\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión negativa fuertemente cone*X*a de funtores covariantes de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R)$, desde que tenemos $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha},\Omega\right)=0$, Para todo $k\in\mathbb{N}$ cuando Ω es un R- módulo inyectivo, del aquí se sigue que existe un único isomorfismo de sucesiones cone*X*as. $\tilde{\phi}=\left(\tilde{\phi}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}:\left(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{I_\alpha},\cdot\right)\right)\longrightarrow \left(H^k\Gamma_B\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ para lo cual $\tilde{\phi}^{\circ}$ es la equivalencia natural $\tilde{\phi}_{\mathfrak{z}}':\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Hom\left(\frac{R}{I_\alpha},\cdot\right)\longrightarrow\Gamma_B$. Además estas dos sucesiones conexas son isomorficas para la sucesión negativa (fuertemente) conexa de funtores formando por los funtores derivados a derecha de $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Hom_R\left(\frac{R}{I_\alpha},\cdot\right)$. Un caso especial de la observación (5.2.5.) describe la cohomologia local de módulos como límites de Ext módulos.

Resultado de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis.- Existe un único isomorfismo de sucesiones conexas de funtores de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R)$. $\tilde{\phi}_J=\left(\phi_J^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}:\left(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^K\left(\frac{R}{J^n},\cdot\right)\right)\xrightarrow{\cong}\left(H_J^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ el cual extiende la equivalencia natural $\phi_J^o:\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R\left(\frac{R}{J^n},\cdot\right)\longrightarrow\Gamma_J$, y en consecuencia para cada $R-$ módulo M y cada $k\in\mathbb{N}_0$ se tiene :

$$H_J^K(M)\cong\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^k\left(\frac{R}{J^n},M\right)$$

Demostración.- Se sigue de la observación anterior (5.3.1) de manera rutinaria.

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

6.1. Contrastación y Demostración de la Hipótesis con los Resultados.

- Para un ideal Ω en un anillo Notheriano Conmutativo R se desarrollado la teoría básica del funtor $D_{\Omega} := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom\left(\Omega^{n},\square\right)$ para luego ser discutido cuando $\left\{\Omega^{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea reemplazado por el sistema inverso $\left\{\dfrac{R}{\Omega^{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con los homomorfismos naturales $h_{m}^{n}:\dfrac{R}{\Omega^{n}}\longrightarrow\dfrac{R}{\Omega^{m}}$ para $m,n\in\mathbb{N}$ y $m\leq n$. Asi como también puede ser generalizado para un sistema arbitrario de ideales $B=\left\{J_{\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$.

- Realizado cierta contrastación de la hipótesis para resultados particulares como es el caso D_{Ω} en vez de un ideal Ω se ha considerado un sistema de ideales $\mathcal{B}$. De este modo se ha iniciado la demostración del resultado propuesto como sigue.

  Si $B=\left\{J_{\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia inversa de ideales del anillo R sobre el conjunto Λ, y al escribir $\left(d_{0}\right)\Omega^{k} := \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Ext_{R}^{k}\left(\dfrac{R}{J_{\lambda}},\square\right)$ para $k\in\mathbb{N}_{0}$ y considerar cualquier sucesión exacta de R – módulo $0\longrightarrow L\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0$ y R-homomorfismo, se tiene el denominado homomorfismo Conexión, inducido para cada $\lambda\in\Lambda$.

  $\left(d_{1}\right)Ext_{R}^{k}\left(\dfrac{R}{J_{\lambda}},N\right)\longrightarrow Ext_{R}^{k+1}\left(\dfrac{R}{J_{\lambda}},L\right),k\in\mathbb{N}_{0}$ y este a su vez, haciendo uso de algunos resultados de algebra homológica básica (Ver: [Tze – Zen Hu: Introducción al algebra Homológica: tópico de homología) se tiene el diagrama conmutativo siguiente (Figura N° 6.1):

Figura Nº 6.1: Cuadrado conmutativo, inducido por el Funtor

$$\varinjlim_{\lambda} \; Ext_R^k\left(\frac{R}{J_{\lambda}},\square\right)$$

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{J_\lambda},N\right) \arrow[r] \arrow[d, "\varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{J_\lambda},v\right)"'] & \varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^{K+1}\left(\frac{R}{J_\lambda},L\right) \arrow[d, "\varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^{K+1}\left(\frac{R}{J_\lambda},\alpha\right)"] \\
\varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext^K\left(\frac{R}{J_\lambda},N'\right) \arrow[r] & \varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext^{K+1}\left(\frac{R}{J_\lambda},L'\right)
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoria Propia – 2019

Siempre que el diagrama (figura N° 6.2) de R - módulos y $R-$ homomorfismos conmute.

Figura Nº 6.2 : Diagrama Base Conmutativo de $R-$ módulos y $R-$ homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & O \\
O \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fuente: Autoria – Propia 2019.

De otra forma se construye una sucesión negativa fuertemente cone$X$a $\left(\varinjlim\limits_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{J_\lambda},\square\right)\right)_{k\in\square_0}$ de funtores covariantes de $\mathscr{M}(R)$ en $\mathscr{M}(R)$.

Existe y es único el isomorfismo de secuencias cone$X$as

$\left(d_2\right) C = \left(C^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} : \left(\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext_R^K\left(\frac{R}{J_\lambda},\square\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \xrightarrow{\cong} \left(R^k\Gamma_B\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ donde $\left(R^k\Gamma_B\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es su sucesiones conexas de funtores derivados a derecha de Γ_B .

(Ver: [N. Bourbaki] Tópico "Sucesiones conexas de funtores"]; y en consecuencia también existe y es único el isomorfismo de secuencias conexas de funtores de $\mathcal{M}(R)$ en $\mathcal{M}(R)$.

$\left(d_3\right) q_\Omega = \left(q_\Omega^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} : \left(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext^K\left(\frac{R}{\Omega^n},\square\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow \left(H_\Omega^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ donde H_Ω^k es el funtor cohomología local para cada $k\in\mathbb{N}_0$. (Ver: A. Grothendieck: Tópico funtores a derecha e izquierda).

En forma análoga a lo realizado líneas arriba para obtener las relaciones: $(d_0),(d_1),(d_2)$ y (d_3) se puede trasladar, para un sistema de ideales $B = \left\{J_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Así se ha construido los $R-$ funtores lineales covariantes.

$\left(d_0^{'}\right)$ $\mathrm{D}_\Omega := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_R\left(\Omega^n,\square\right)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^K\left(\Omega^n,\square\right)$ para $k\in\mathbb{N}_0$ en la categoría de $R-$ módulos $\mathcal{M}(R)$. (Ver W. Fulton, tópico categoría de módulos). De aquí para un $R-$ módulo M se llama el llamado ideal transformada ideal de M con respecto a Ω, esto es:

$\left(d_1^{'}\right)$ $\mathrm{D}_\Omega(M) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_R\left(\Omega^n, M\right)$ (Ver: Sze. Tsen Hu; tópico "el $R-$ módulo Hom"].

Ahora para el sistema de ideales "$\mathcal{B}$" se tiene: los funtores $\Gamma_{\mathcal{B}}$ y $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{J_\lambda},\square\right)$

y para cada $k\in\mathbb{N}_0$ el funtor $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext^K\left(\frac{R}{J_\lambda},\square\right)$ es equivalente al k – ésimo funtor derivado $H_{\mathcal{B}}^K = R^k\Gamma_{\mathcal{B}}$ de $\Gamma_{\mathcal{B}}$, el cual se conoce como el k – ésimo funtor cohomología local generalizado respecto a $\mathcal{B}$ (Ver: M.P. Brod Mann tópico "Transformada ideal generalizada), y así también se tiene: el isomorfismo de sucesiones conexas.

$\left(d_2^{'}\right) l_B = \left(l_B^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} : \left(\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext^K\left(\frac{R}{J_\lambda},\cdot\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \xrightarrow{\cong} \left(H_B^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de las igualdades $\left(d_0^{'}\right)$ y $\left(d_2^{'}\right)$ se define los funtores $\mathrm{D}_B := \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R\left(J_\lambda,\cdot\right)$ y $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} Ext^K\left(J_\lambda,\cdot\right)$ para $k\in\mathbb{N}_0$ D_B es conocido como el funtor $\mathscr{B}-$ transformada y así para un $R-$ módulo M se tiene el módulo: $\left(d_3^{'}\right)\mathrm{D}_B\,(M) = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R\left(J_\lambda, M\right)$, llamado el ideal transformada generalizado de M.

6.2 Contrastación de la hipótesis con estudios similares

Joseph Lipman, en sus lecturas sobre cohomología local y dualidad, tales estudios lo realiza basándose en las categorías derivadas y funtores que son ligeramente introducidas, y usadas a lo largo del desarrollo con los llamados **Complejos de Koszul.** Para estudiar los aspectos básicos de cohomología local, así como también los resultados y aplicaciones que se obtenga de ella. Nosotros a diferencia o a contraste del autor en mención se ha estudiado el funtor Transformada ideal generalizado, respecto a un sistema de ideales, basado en una teoría básica y elemental de cohomología local fundamental y básicamente en la categoría de $R-$ módulos, para $R-$ anillo Notheriano Conmutativo.

6.3 Responsabilidad ética.

El Autor asume responsabilidad, de lo realizado en el presente trabajo, siendo el caso que es un trabajo analítico en un conte$\mathcal{X}$to matemático las fuentes teóricas son consideradas y/o mencionadas en las referencias bibliográficas. No e$\mathcal{X}$istiendo responsabilidad ética alguna en otro aspecto.

CONCLUSIONES

- El funtor Ω - transformada (Ω - ideal) se puede generalizar para un sistema de ideales $B = \{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

- El ideal transformada generalizado $D_B(M)$ de módulos M se puede describir en términos de objetos sencillos y muy familiares del álgebra homológica.

- El ideal transformada $D_B(M)$ es independiente del anillo base.

RECOMENDACIONES

- Para un anillo R, es recomendable mostrar el significado geométrico del ideal Transformada $D_{\Omega}(R)$, cuando R es el anillo de funciones regulares sobre una variedad algebraica afin en un campo algebraicamente cerrado.

- Mostrar que el anillo de funciones regulares sobre una variedad quasi – afin puede eXpresarse en términos de una transformada ideal.

- Para un subconjunto abierto no vacío U de una variedad afin V sobre un campo algebraicamente cerrado K, se recomienda mostrar que el anillo de funciones regulares O(U), puede ser identificado de modo natural como un subanillo del campo de funciones K(V).

- Motivar e incentivar a estudiantes de ciencias e ingeniería al estudio de la Cohomología local.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

A Grothendieck et al, *cohomología locale des faisceau$X$ coherents et theorems de lefschetz locau$X$ et globau$X$* (SG.2) North Holland, 1968.

Hideyuki Matsumura, *Conmutativa Ring Theory*. (c) Cambridge University – New York, 2008.

James W. Vick; *homology theory*, © copy right, by Academic press, Inc., University of TeXas, New York and London 1973.

M.F. Atiyah, I – G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, © Addison – Wesley – 1969.

M.P. Brod Mann – R. Y. Sharp, *local cohomology*, 2ª. Edición (c) Cambridge university, New York, 2013.

N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology*. Chapters 1-4. 2nd printing. Springe$R-$ Verlag. New York (2012)

O. Zariski and P. Samuel, *conmutative algebra*, vols 1 and 1L. Van Mostrand 1958, 1960.

R. Arens, J. Dugundji, *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math. 1 (1951).

Sze – Tsen Hu, *Homology Theory*, © copyright by Holden day, Universidad of California, Los Angeles – 1966

Sze – Tsen Hu*. Introducción al Algebra Homológica © copyright by Holden day*. San Francisco California. 1968.

W. Fulton, Algebraic Curves, An *Introduction to Algebraic Geometry – Springe$R$* $-$ 2008.

W.S. Massey, *Introduccion a la topología algebraica*, Reverte, 1982.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA

Problema	Objetivos	Hipótesis	Operacionalización de Variables			Diseño metodológico
			Variable	Dimensión	Indicador	
GENERAL ¿De que forma se puede establecer una generalización funtorial de la $\mathscr{B}-$ Transformada ideal?	**GENERAL** Generalizar funtorialmente el $\mathscr{B}$ - Transformada ideal. Para mostrar que el Módulo $D_{\Omega}(M)$ proporcione potenciales herramientas algebraicas.	**GENERAL** El funtor $\mathscr{B}$ - transformada ideal de un Módulo M, respecto a una familia de ideales.	**INDEPENDIENTE** Un sistema de ideales $\mathscr{B}=\{J_{\lambda}\}_{\lambda\in\wedge}$ **1**	La i-ésima cohomología local: H_{Ω}^{i}, donde Ω es ideal.	El funtor D_B $\lim\limits_{\overrightarrow{\lambda\in\wedge}} Hom_R(J_{\lambda},\square)$	• El tipo de investigación es básica, y el método utilizado en constructivo y deductivo. • No existe población que estudiar. • El lugar de estudio ha sido principalmente en los ambientes de la FCNM – UNAC. • No es un trabajo eXperimental por tanto no se requiere procedimientos especiales para la recolección de información.
ESPECIFICOS ¿Es posible determinar el funtor transformada ideal generalizado con respecto a una familia de ideales?. ¿Existe la posibilidad de mostrar y determinar una propiedad universal, para el Ω-transformada ideal?	**ESPECIFICOS** • Buscar la generalización del funtor ß-Transformada ideal, para una familia específica de ideales $\{J_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}=$ ß • Mostrar y determinar una cierta propiedad universal, para la Ω - transformada ideal.	**ESPECIFICAS** Generalización del funtor $\mathscr{B}$ - transformada ideal para una familia de ideales $\{J_{\lambda}\}_{\lambda\in\wedge}=\mathscr{B}$, con $J_{\lambda}\subset R$ para todo $\lambda\in\Lambda$. El funtor transformada ideal de un $R-$ módulo M respecto a un ideal Ω, en la determinación de una propiedad universal	**DEPENDIENTE** El funtor ideal generalizado D_B y por ende el módulo $D_{\mathscr{B}}(M)$	La i-ésima cohomología local H_{B}^{i} donde $\mathscr{B}$ es una familia de ideales.	El límite directo del funtor $Hom_R(J_{\lambda},M)$	

ANEXOS

Definición de módulo proyectivo e inyectivo:

Sea R un anillo. Diremos que:

(1) Un $R-$módulo P es proyectivo si para todo $R-$homomorfismo $\varphi : P \longrightarrow N$ y todo R – epimorfismo $\psi : M \longrightarrow N$ de R – módulos, existe un R – homomorfismo $\rho : P \longrightarrow M$ tal que $\psi \circ \rho = \varphi$.

(2) Un R – módulo Q es inyectivo si, para todo $R-$homomorfismo $\varphi : M \longrightarrow Q$ y todo R – monomorfismo $\psi : M \longrightarrow N$ de R – módulos, existe un R – homomorfismo $j : N \longrightarrow Q$ tal que $j \circ \psi = \varphi$

Categoría y Funtores

(1) Una categoría "$\mathcal{C}$" consiste de objetos A, B, C y morfismos $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ tales que para cualquier par de objetos A, B y B, C hay un apareamiento $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) x Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \xrightarrow{\varphi} Mor(A,C)$ llamado composición que verifica:

(i) φ es asociativa. Es decir dado los morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, se cumple: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(ii) Para todo objeto A, existe un morfismo $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$, llamado identidad tal que cumple: $f \circ 1_A = f$, $1_A \circ g = g$ para $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$

(2) Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ dos categorías. Un funtor entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ descrito por $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es una aplicación que asigna un objeto X de $\mathcal{C}$ $(X \in obj(C))$ en un objeto $T(X)$ de $\mathcal{C}'$ es decir $(T(X) \in obj(C))$

Si además verifica:

(i) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$

(ii) $T(1_A) = 1_{T(A)}$

Se dice que "T" es un funtor covariabnte. Si en lugar de (i) se verifica (i′) $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$

Se dice que "T" es un funtor contravariante.

Definición (Categoría Dual u opuesta)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, una categoría opuesta o dual $\mathcal{C}^{OP}$ tiene como objeto, los objetos de $\mathcal{C}$ y $Mor_{\mathcal{C}^{OP}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$.

Transformación Natural

Sean $T,S:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ dos funtores Covariantes (Contravariantes). Una transformación natural $\varphi : T \longrightarrow S$ es un sistema de morfismos $\{\varphi_x \in Mor_{\mathcal{C}}(T(x),S(x)\}_{x \in Obj(\mathcal{C})}$ y con respecto a los morfismos: para todo $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ los siguientes diagramas Funtoriales (Figura N° 7.1 y Figura N° 7.2) conmutan.

Figura Nº 7.1 : Cuadrado Conmutativo de Funtores Covariantes

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & T(Y) \arrow[d, "\varphi_y"] \\
S(X) \arrow[r, "S(f)"] & S(Y)
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Autoría Propia 2019.

Figura Nº 7.2 : Cuadrado Conmutativo de Funtores Contravariantes

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "T^{-1}(f)"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & T(Y) \arrow[d, "\varphi_y"] \\
S(X) \arrow[r, "S^{-1}(f)"] & S(Y)
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Autoría Propia 2019.

Complejo de Cadenas

Un complejo de cadenas K es una sucesión

$$K:\ldots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots$$

De grupos abelianos y homomorfismos llamados Operadores borde tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$

Nota.-

- Los elementos de K_n se denominan n – cadenas.
- Los elementos de $Z_n K = \ker \partial_n$ se denominan n – ciclos.
- Los elementos de $B_n K = I_m \partial_{n+1}$ se denominan n – bordes.

Observación.-

i) Como $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0,$ entonces $BnK \subseteq ZnK$

ii) De (i) se puede definir el cociente $\dfrac{ZnK}{BnK}$ que denotaremos como $Hn(K)$ es decir $Hn(K) = \dfrac{ZnK}{BnK}$ el cual es un grupo llamado grupo de Homología n – dimensional del complejo K.

iii) Los elementos de $H_n K$ son clases, llamado clases de Homología.