

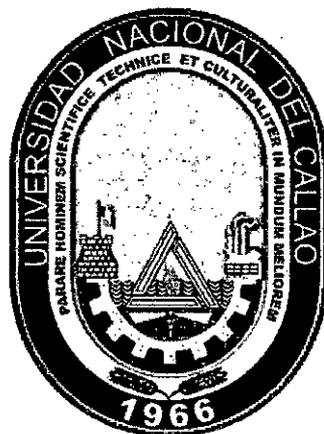


OCT 2019

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA**

**UNIDAD DE INVESTIGACION**



**“CONTROLABILIDAD Y  
OBSERVABILIDAD NO LINEAL DE UN  
ROBOT MANIPULADOR DE DOS  
GRADOS DE LIBERTAD”**

**JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA**

Callao, 2019

PERU

## INDICE

LISTA DE FIGURAS	2
LISTA DE TABLAS	2
RESUMEN	3
ABSTRACT	3
INTRODUCCION	4
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.1. Descripción de la realidad problemática	5
1.2. Formulación del problema	7
1.3. Objetivos	7
1.4. Limitantes de la investigación	7
II. MARCO TEORICO	8
2.1. Antecedentes	8
2.2. Bases teóricas	9
2.3. Conceptual	29
2.3. Definición de términos básicos	32
III. HIPOTESIS Y VARIABLES	33
3.1. Hipotesis	33
3.2. Definición conceptual de variables	34
3.3. Operacionalización de variables	35
IV. DISEÑO METODOLOGICO	36
4.1. Tipo y diseño de investigación	36
4.2. Método de investigación	36
4.3. Población y muestra	36
4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado	36
4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información	36
4.6. Análisis y procesamiento de datos	37
V. RESULTADOS	56
VI. DISCUSION DE RESULTADOS	58
CONCLUSIONES	59
RECOMENDACIONES	59
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	60
ANEXOS	52



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Paracaidista en caída libre	21
Figura 2	Manipulador de dos enlaces	31
Figura 3	Manipulador de dos enlaces con torques de entrada $u_1, u_2$	34
Figura 4	Respuesta en el tiempo ante una entrada escalón	44

## LISTA DE TABLAS

Tabla N° 1	Operacionalización de variables	32
Tabla N° 2	Matriz de consistencia	64

2 

## RESUMEN

Este trabajo de investigación considera un manipulador robótico de dos enlaces (o péndulo doble) con torques de control  $u_1$  y  $u_2$  aplicados en las juntas. La dinámica de tal brazo robot es obtenida mediante las ecuaciones de Lagrange. La dinámica así obtenida es no lineal. Esta es linealizada para encontrar las matrices de controlabilidad y observabilidad, luego hallando el rango de cada matriz se determina que son de rango completo, por lo que se concluye que se puede aplicar un control del sistema por realimentación de estados por ubicación de polos.

Se investiga también sobre la controlabilidad de este sistema no lineal, determinándose que se realiza operaciones complejas y muy laboriosas, determinando en sus cálculos la pérdida de rango. Se concluye que el sistema es controlable en la región de operación.

**Palabras claves:** sistema lineal, sistema no lineal, grados de libertad, modelo matemático, controlabilidad, observabilidad.

## ABSTRACT

This work of investigation consider a frictionless, rigid two-link robot manipulator (or double pendulum) with control torques  $u_1$  y  $u_2$  applied at the joints. The dynamics of such a robot-arm is obtained via the Lagrange equations. The dynamics obtained is nonlinear. This is linealized for to found the matriz of controlability and observability,

found the rank, this matrices are full range, for to concluyed to applied the feeback of states to systems and applied the method of ubicacion of poles.

Also investigation the contrability of no linear systems, to determine complex operations and too laborious, to determine in this calculus los of rank. It is concluded that systems it is controllabile in the región of operation.

**Keywords:** linear systems, nonlinear systems, degrees of freedom, mathematical model, controllability, observability.

## INTRODUCCION

El presente trabajo de Investigación se titula "Controlabilidad y Observabilidad no lineal de un robot manipulador de dos grados de libertad". La planta es un sistema que consiste en un manipulador de dos brazos identificados por sus posiciones angulares; se aplica dos torques para su movimiento rotacional.

La planta en su posición inicial es totalmente vertical con ambos enlaces hacia abajo, que es la posición de equilibrio estable. Tiene otras tres posiciones de equilibrio inestables, que se presentan en su rotación. Si el sistema rota siempre en forma circular, se repiten periódicamente las mismas posiciones de equilibrio. Luego de aplicar las ecuaciones de Lagrange al sistema dinámico de dos grados de libertad, se encuentran dos ecuaciones que representan la dinámica del movimiento, es decir dos ecuaciones diferenciales que representan el modelo matemático.

Resulta que estas dos ecuaciones diferenciales son no lineales; por lo que se aplica la linealización de la dinámica del sistema en un punto de operación cercano al estado de equilibrio estable. De esta linealización resultan dos ecuaciones diferenciales lineales, que luego son representados en forma de ecuaciones de estado y de salida.

Se encuentra su controlabilidad y su observabilidad, resultando que ambas son de rango completo; por lo que el sistema es controlable y observable. Como estos dos requisitos se cumplen se puede diseñar un controlador por realimentación de estados por ubicación de polos.

En cuanto a la controlabilidad no lineal para el modelo de estados de sistemas no lineales debido a las derivadas continuas se determina la pérdida de rango por lo que no es recomendable para el diseño del controlador por realimentación de estados.

## I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

La mayor parte de los robots industriales actuales son esencialmente brazos articulados. De hecho, según la definición del "Robot Institute of America", un robot industrial es un manipulador programable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, mediante movimientos variados, programados para la ejecución de distintas tareas.

El sistema mecánico, está compuesto por diversas articulaciones. Normalmente se distingue entre el brazo y el órgano terminal o efector final que puede ser intercambiable, empleando pinzas o dispositivos específicos para distintas tareas. El aumento del número de articulaciones aporta mayor maniobrabilidad, pero dificulta el problema de control, obteniéndose normalmente menores precisiones por acumulación de errores. Muchos robots industriales actuales tienen menos de los seis grados de libertad de rotación o traslación que se requieren en general para posicionar y orientar en el espacio el órgano terminal.

Las ecuaciones que describen el movimiento del brazo articulado son ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas, para las que, en caso general, resulta difícil obtener soluciones analíticas. Físicamente, los términos de acoplamiento representan: pares gravitacionales que dependen de la posición de las articulaciones, pares de reacción debidos a las aceleraciones de otras articulaciones, y pares debido a la aceleración de Coriolis y fuerzas centrífugas. La magnitud de estas interacciones depende de las características del brazo y la carga.

Los actuadores generan las fuerzas o pares necesarios para animar la estructura mecánica. Se utilizan tecnologías hidráulicas y neumáticas para desarrollar potencias importantes, pero en la actualidad se ha extendido el empleo de motores eléctricos y en particular motores de corriente continua servocontrolados, empleándose en algunos casos motores paso a paso y otros actuadores electromecánicos sin escobillas. Existen también robots industriales de accionamiento directo que permiten eliminar los problemas mecánicos inherentes al empleo de engranajes y otras transmisiones. Se investiga en nuevos

actuadores que disminuyan la inercia, suministren un par elevado, aumenten la precisión, originen menos ruido magnético y sean de bajo peso y consumo.

Por otra parte, se trata de buscar otras opciones al sistema convencional de accionamiento de articulaciones, empleándose para ello conceptos biomecánicos. De esta forma, se investiga en manipuladores con actuadores tipo musculo tanto para el brazo como como para la mano del robot.

Los sistemas de control de robots pueden considerarse funcionalmente descompuestos según una estructura jerárquica. En el nivel inferior se realizan las tareas de servocontrol y supervisión de las articulaciones empleando servomecanismos convencionales con realimentación de posición y velocidad para genera señales de control sobre actuadores de las articulaciones. Aquí las cargas inerciales, acoplamientos entre articulaciones y efectos de gravedad son todos dependientes de la posición. El problema aumenta con la velocidad de operación.

El segundo nivel de control se ocupa de la generación de trayectorias, es decir el desplazamiento de una posición a otra. El generador de trayectorias debe suministrar a los servomecanismos las referencias apropiadas para conseguir la evolución deseada del órgano terminal. Los niveles superiores se ocupan de la comunicación con el usuario, interpretación de los programas, percepción sensorial y planificación.

Para este trabajo de investigación se determina investigar la controlabilidad y observabilidad de un robot manipulador con dos articulaciones de rotación que se mueven en un plano vertical con dos grados de libertad.

Se sabe que la dinámica del sistema es no lineal y dentro del área de control es un sistema inestable.

Con el objeto de estabilizar al manipulador es que diseña el controlador y así, este cumpla su cometido. Existen diferentes técnicas de control tanto para sistemas lineales como también sistemas no lineales. Por ejemplo, para el caso de la técnica de realimentación de estados, se requiere que el sistema sea controlable y observable. Cumplidos estos requisitos se procede a diseñar la ley de control y

luego el observador, ambos constituyen el controlador que estabilizara el proceso. Si no se cumple con los requisitos de sistema observable y sistema controlable, entonces no se aplica la técnica de realimentación de estados.

## 1.2. Formulación del problema

Del análisis de la situación problemática, se plantea el problema en forma de pregunta:

### Problema general:

¿Es controlable y observable el robot manipulador de dos grados de libertad?

### Problema específico:

¿Es controlable y observable el robot manipulador rígido con dos articulaciones de rotación que se mueven en un plano vertical con dos grados de libertad?

## 1.3 Objetivos

**El objetivo general:** es determinar la controlabilidad y observabilidad del manipulador de dos grados de libertad

**El objetivo específico:** es determinar la controlabilidad y observabilidad del manipulador rígido con dos articulaciones que se mueven en un plano vertical con dos grados de libertad.

## 1.4 Limitantes de la investigación

Las limitantes de la investigación de tipo cuantitativa presentadas en este caso son las siguientes:

### Teórica

Existen investigaciones afines para manipuladores de un solo enlace, es decir de un grado de libertad; pero para dos grados de libertad existen muy pocas para su tratamiento no lineal y modelamiento en este caso por las ecuaciones de Lagrange. Además, la información teórica es muy escasa. Muchos libros que tienen buena información teórica de nivel avanzado se encuentran en inglés y no están disponibles en las bibliotecas de la UNAC es decir ni en la Biblioteca de la

Facultad como tampoco en la biblioteca central. Libros en castellano o español no presentan la información que se necesita para este trabajo de investigación. Es decir tanto la biblioteca de la Facultad y de la Universidad solo cuentan con libros básicos o comunes de pregrado y para posgrado y doctorado es nulo.

### **Temporal**

Esta investigación donde se realiza cálculos teóricos avanzados está limitada por el tiempo en su desarrollo matemático donde se realiza complejas operaciones matemáticas para sistemas de tipo no lineal que luego tendrán que linealizarse. La complejidad también radica en realizar operaciones de varias variables como es el caso del manipulador con dos grados de libertad, donde se realiza operaciones con matrices de orden cuatro. Las operaciones no son numéricas en muchos casos, esto limita y afecta el tiempo de desarrollo del trabajo de investigación.

### **Espacial**

En cuanto a la limitación espacial, este trabajo se ve afectado por la falta de referencias bibliográficas de la UNAC para casos de teorías de aplicación avanzadas, por lo que tiene que salirse del campus de la UNAC para buscar información en otras universidades del país.

## **IV. MARCO TEORICO**

### **2.1 Antecedentes**

\* En el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico CENIDET, Cuernavaca, México, existe una Tesis de Maestría, titulada "Implementación de una red neuronal holográfica para el control de un brazo robot articulado", presentada por José Juan Hernández Mora. Concluye que las redes neuronales artificiales son una buena alternativa para el control o la identificación de sistemas no lineales, sin la necesidad de conocer de manera exacta el modelo matemático, ya que, con sólo conocer las entradas al sistema y las salidas que estas generan, se puede obtener un modelo inverso de la planta basado en una red neuronal artificial. Aunque su eficiencia depende mucho del tipo de modelo de red neuronal que se utilice.

\* En la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional de México D.F., existe una Tesis para la obtención del Título de Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica; dicha tesis se titula "Control de sistemas mecatrónicas", presentada por Leonardo Lope Antonio y Litzahaya Salas García. Quienes concluyen que en esta investigación se desarrolló el modelo dinámico para un robot manipulador y una grúa, empleando el método de Euler-Lagrange, el cual permitió establecer las fuerzas de entrada necesarias para mover el sistema.

El análisis y control de sistemas mecatrónicas no es sencillo debido al número de variables que presenta cada sistema, el robot manipulador analizado tiene seis variables a controlar, tres variables de posición y tres variables de velocidad, la grúa tiene diez variables a controlar, cinco de posición y cinco de velocidad, además los modelos matemáticos que describen la posición y orientación de los sistemas son no lineales, con los que el análisis de estos sistemas requiere de técnicas más desarrolladas para su estudio. En esta tesis se diseñó un controlador PID, el cual se sintonizó hasta lograr un buen desempeño del sistema.

## **2.2. Bases teóricas**

Las herramientas matemáticas que se presentan a continuación como marco teórico, es el soporte del desarrollo del presente trabajo de investigación. El modelo matemático obtenido es el resultado de la aplicación de las leyes de Newton, las ecuaciones de Lagrange, el desarrollo en series de Taylor, las propiedades de las funciones vectoriales, las matemáticas de la geometría diferencial.

- **Linealización de modelos matemáticos no lineales**

Para aplicar los métodos de control a un sistema o planta se requiere que este sea lineal, debido a que el desarrollo de esta teoría está centrada en sistemas lineales; ya sea que el sistema o planta tenga representación como función de transferencia o como ecuaciones de estado; ya sea que el sistema sea continuo o el sistema sea discreto. La aplicación de estas propiedades, la arquitectura creada es posible si el sistema es lineal, que cumple la propiedad de superposición; es por ello que se justifica la linealización de la dinámica alrededor

de un punto de operación. Es necesario entonces disponer de métodos para linealizar modelos. La linealización generalmente consiste en una expansión en series de Taylor de la ecuación de estado (no lineal) alrededor de un punto de operación definido naturalmente por el sistema o seleccionado arbitrariamente para satisfacer alguna necesidad de control.

- **Expansión en series infinitas**

Cuando un modelo es muy complejo matemáticamente es necesario recurrir a técnicas como las representaciones en series infinitas. Las soluciones en serie infinitas son usadas generalmente para aproximar el valor de una función en un punto de operación del sistema o planta, con cierto grado de aproximación. Con rango de desplazamiento aceptable o muy pequeño alrededor del punto de operación para consideraciones de ingeniería. Dado que las series son infinitas en sus términos, la aproximación de la serie a una de primer orden es la más conveniente, dado que se puede aplicar las propiedades de superposición y todos los fundamentos de los sistemas lineales a la ecuación de la recta así obtenida.

- **Aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor**

La función  $f$  es tal que sus primeras derivadas son continuas en un intervalo cerrado

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^k$$

donde  $f(x)$  es la expansión alrededor del punto  $x_0$ .

- **Derivada de una función escalar por un vector**

Donde  $f(x): 1 \times 1$  y  $x: m \times 1$

$$\frac{df(x)}{dx} = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_{m-1}} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_m} \right]$$

- **Derivada de una función vectorial por un escalar**

Donde:  $f(x): n \times 1$  y  $x: 1 \times 1$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- **Derivada de una función escalar por un vector**

Si  $f(x)$  es una función escalar de variable vectorial suave, donde  $x$  es el vector de estado, entonces su gradiente es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- **Derivada de una función vectorial por un vector**

Donde  $f(x): n \times 1$  y  $x: m \times 1$

El jacobiano de  $f(x)$  tiene la forma:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

- **Modelo escalar no lineal de una variable de estado**

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

Aproximando  $f(x(t))$  por una expansión en series de Taylor alrededor de un punto de operación  $x_0$

$$f(x(t)) = f(x_0) + \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(\cdot)}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

Despreciando los términos de segundo orden y órdenes superiores, se tiene

$$f(x(t)) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)$$

El punto de operación debe satisfacer la condición de ser un punto de equilibrio de la ecuación de estado, es decir

$$f(x_0) = 0$$

En este caso los puntos de operación no son arbitrarios.

Definiendo la variable  $x_\delta = x - x_0$ , entonces

$$\frac{dx_\delta}{dt} = \frac{dx}{dt} = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0) = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_0} \cdot x_\delta$$

Definiendo

$$A = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_0}$$

Reescribiendo se tiene

$$\frac{dx_\delta}{dt} = A \cdot x_\delta$$

- **Modelo escalar no lineal de una variable de estado y una variable de entrada**

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

Aproximando  $f(x(t), u(t))$  por una expansión en series de Taylor alrededor del punto de operación  $x_o, u_o$ .

$$f(x(t), u(t)) = f(x_o, u_o) + \left. \frac{df(.)}{dx} \right|_{x_o, u_o} \cdot (x - x_o) + \left. \frac{df(.)}{du} \right|_{x_o, u_o} \cdot (u - u_o) \\ + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f(.)}{dx^2} \right|_{x_o, u_o} \cdot (x - x_o)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f(.)}{du^2} \right|_{x_o, u_o} \cdot (u - u_o)^2 + \dots$$

Aproximando la serie a términos de primer orden se tiene

$$f(x(t), u(t)) = f(x_o, u_o) + \left. \frac{df(.)}{dx} \right|_{x_o, u_o} \cdot (x - x_o) + \left. \frac{df(.)}{du} \right|_{x_o, u_o} \cdot (u - u_o)$$

Además, el punto de operación debe satisfacer la condición  $f(x_o, u_o) = 0$ , donde  $x_o$  generalmente puede ser seleccionado arbitrariamente ajustando el valor de la entrada  $u_o$ .

Definiendo

$$A = \left. \frac{df(.)}{dx} \right|_{x_o, u_o}, \quad B = \left. \frac{df(.)}{du} \right|_{x_o, u_o}, \quad x_\delta = x - x_o, \quad u_\delta = u - u_o$$

Entonces se tiene

$$\dot{x}_\delta = A x_\delta + B u_\delta$$

Si además se tiene una señal de salida

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Aproximando la función no lineal  $g(x(t), u(t))$  por una expansión en series de Taylor y truncando los términos de orden superior, se tiene:

$$g(x(t), u(t)) = g(x_o, u_o) + \left. \frac{dg(.)}{dx} \right|_{x_o, u_o} \cdot (x - x_o) + \left. \frac{dg(.)}{du} \right|_{x_o, u_o} \cdot (u - u_o)$$

Definiendo

$$C = \left. \frac{dg(.)}{dx} \right|_{x_o, u_o}, \quad D = \left. \frac{dg(.)}{du} \right|_{x_o, u_o}, \quad y_o = g(x_o, u_o), \quad y_\delta = y - y_o$$

Entonces se tiene

$$y_\delta = C x_\delta + D u_\delta$$

- **Modelo con múltiples estados, múltiples entradas y múltiples salidas**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{q-1}(t) \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ g_{q-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_q(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix}$$

Usando la notación vectorial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Extendiendo al caso vectorial la expansión en series de Taylor

$$\dot{x}_\delta = A x_\delta + B u_\delta$$

$$y_\delta = C x_\delta + D u_\delta$$

Donde  $x_\delta = x - x_o$ ,  $u_\delta = u - u_o$ ,  $y_o = g(x_o, u_o)$ ,  $y_\delta = y - y_o$

$$A = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_o, u_o}, \text{ dimension}(A) \text{ es } n \times n$$

$$B = \left. \frac{df(\cdot)}{du} \right|_{x_o, u_o}, \text{ dimension}(B) \text{ es } n \times m$$

$$C = \left. \frac{dg(\cdot)}{dx} \right|_{x_o, u_o}, \text{ dimension}(C) \text{ es } q \times n$$

$$D = \left. \frac{dg(\cdot)}{du} \right|_{x_o, u_o}, \text{ dimension}(D) \text{ es } q \times m$$

- **Controlabilidad lineal**

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo  $t_0$  si se puede transferir desde cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Sea el sistema en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde:

$x$  = vector de estados (vector de dimension  $n$ )

$u$  = señal de control (escalar)

$A$  = matriz de  $n \times n$

$B$  = matriz de  $n \times 1$

Se dice que este sistema descrito es de estado controlable en  $t = t_0$ , si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

La solución de este sistema es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Aplicando la definición de controlabilidad completa del estado recién establecida, se tiene que

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k$$

Sustituyendo se obtiene

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau$$

Si se define

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

$$= - [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial  $x(0)$ , la ecuación 11.55 debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz  $n \times n$  de orden  $n$

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

De este análisis, se puede concluir la condición para controlabilidad completa del estado de la forma siguiente. El sistema obtenido mediante la ecuación 11.51 es de estado completamente controlable si y solo si los vectores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  son linealmente independientes o la matriz  $n \times n$ ,  $[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$  es de rango  $n$ .

El resultado obtenido se extiende al caso en el que el vector de control  $u$  es de dimensión  $r$ . Si el sistema se describe por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde  $u$  es de dimensión  $r$ , se demuestra que la condición para controlabilidad completa del estado es que la matriz  $n \times nr$

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

sea de rango  $n$ , o que tenga  $n$  vectores columna linealmente independiente. La matriz  $M_c$

$$M_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

se conoce como matriz de controlabilidad.

- **Observabilidad lineal**

Se dice que un sistema es observable en el tiempo  $t_0$  si con el sistema en el estado  $x(t_0)$ , es posible determinar este a partir de la observación de la salida  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito.

Sea el sistema no forzado descrito mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

donde

$x$  = vector de estado (vector de dimension  $n$ )

$y$  = vector de salida (vector de dimension  $m$ )

$A$  = maytriz de  $n \times n$

$C$  = matriz de  $m \times n$

El concepto de observabilidad es muy importante porque, en la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante realimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control. Al analizar las condiciones de observabilidad, se considera el sistema sin excitación. La razón de esto es la siguiente. Si el sistema se describe mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du$$

Como las matrices  $A, B, C$  y  $D$  se conocen al igual que  $u(t)$ , los dos últimos términos del segundo miembro de esta última ecuación son cantidades conocidas. Por lo tanto, se puede restar del valor observado  $y(t)$ .

- **Observabilidad completa en tiempo continuo**

Sea el sistema descrito mediante las ecuaciones

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

El vector de salida es

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Refiriéndose a las ecuaciones se tiene que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0)$$

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0)$$

Así, si el sistema es completamente observable, dada la salida  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq t_1$ , entonces  $x(0)$  se determina de la ecuación 11.65. Se demuestra que esto requiere que el rango de la matriz  $M_o$  de controlabilidad de  $nm \times n$  sea  $n$  o tiene  $n$  vectores columnas linealmente independientes

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- **Controlabilidad y Observabilidad no lineal**

El modelo dinámico para sistemas no lineales es de la forma

$$\dot{x} = f(x) + h(x)u$$

Donde  $x$  es el vector de estado del espacio de estado  $M$  y  $u$  es el vector de entrada.

La controlabilidad se determina cuando el determinante de la matriz  $M_c$  es diferente de cero, donde

$$M_c = [h \quad ad_f h \quad ad_f^2 h \quad \dots \quad ad_f^{n-1} h]$$

El caso no lineal y no forzado tiene la siguiente descripción:

$$\dot{x} = f(x)$$

$$y(t) = h(x)$$

Cuya matriz de observabilidad generalizada es:

$$M_o = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

- **Sistema no lineal**

El modelo general de un sistema lineal es de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Las funciones vectoriales  $f(x), g(x)$  reciben el nombre de campos vectoriales. Estos campos vectoriales son diferenciables respecto de las componentes de  $x$ , un número ilimitado de veces. Una expresión equivalente es que son campos suaves.

- **Derivada de Lie**

Sea  $h(x)$  una función escalar suave, es decir que admite infinitas diferenciaciones respecto de las componentes de  $x$ . Sea  $f(x)$  un campo vectorial suave, entonces se define la derivada direccional de la función escalar  $h(x)$  con respecto al campo vectorial  $f(x)$ , la cual se designa mediante  $L_f h(x)$ , de la siguiente forma:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = \dot{h}(x)$$

La derivada de Lie  $L_f h(x)$  sigue siendo una función escalar de  $x$ . La derivada de la función  $h(x)$  mide la velocidad de variación instantánea, de la función escalar  $h(x)$  con respecto a la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  que pasa por el punto  $x$ .

- **Derivadas reiteradas**

La notación  $L_f h(x)$  facilita los calculos reiterados de derivadas direccionales. Si calculamos la tasa de variación de la función escalar  $L_f h(x)$  con respecto a la misma dirección  $f(x)$ , se simplifica el resultado haciendo:

$$\frac{d}{dt} [L_f h(x)] = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} f(x) = L_f (L_f h(x)) = \ddot{h}(x)$$

Lo cual se designa como

$$L_f^2 h(x) = L_f(L_f h(x))$$

En general designamos las derivadas direccionales reiteradas como:

$$L_f^n h(x) = \left[ \frac{\partial (L_f^{n-1} h)(x)}{\partial x} \right] f(x) = L_f(L_f^{n-1} h)(x) = h^{(n)}(x)$$

- **Derivada direccional**

Para calcular la derivada direccional de una función escalar  $h(x)$  respecto del campo vectorial  $f(x)$ , y luego evaluar la derivada direccional  $L_f h(x)$  de la función escalar resultante respecto de otro campo vectorial  $g(x)$ , se obtiene:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (L_f h(x)) \right] g(x) = [L_g(L_f h)](x) = L_g L_f h(x)$$

Esta operación no es conmutativa, es decir:

$$L_g L_f h(x) \neq L_f L_g h(x)$$

- **Controlabilidad y Observabilidad no lineal**

El modelo dinámico para sistemas no lineales es de la forma

$$\dot{x} = f(x) + h(x)u$$

Donde  $x$  es el vector de estado del espacio de estado  $M$  y  $u$  es el vector de entrada.

La controlabilidad se determina cuando el determinante de la matriz  $M_c$  es diferente de cero, donde

$$M_c = [h \quad ad_f h \quad ad_f^2 h \quad \dots \quad ad_f^{n-1} h]$$

- **Derivadas y Corchetes de Lie**

**Definición 1.** Dada la función escalar suave  $h(x): R^n \rightarrow R$  y un campo vectorial suave  $f(x): R^n \rightarrow R^n$ , se puede definir una nueva función escalar  $L_f h = \nabla h \cdot f$  llamada la derivada de Lie, es decir la derivada direccional de  $h$  a lo largo de la dirección del vector  $f$ . Repetidas derivadas de Lie se definen recursivamente:

$$L_f^0 h = \nabla h \cdot f^0 = h$$

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) \cdot f, \quad i = 1, 2, \dots$$

Del mismo modo, si  $g$  es otro campo vectorial, la función escalar  $L_g L_f h(x)$  es:

$$L_g L_f h(x) = \nabla(L_f h) \cdot g$$

Uno puede ver fácilmente la relevancia de las derivadas de Lie para sistemas dinámicos para consideraciones del siguiente sistema de única salida.

$$\dot{x} = f(x)$$

$$y = h(x)$$

Las derivadas de la salida son

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial [L_f h]}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h$$

- **Definición 2.** Sean  $f$  y  $g$  dos campos vectoriales en  $R^n$ . El corchete de Lie de  $f$  y  $g$  se define como un tercer campo vectorial de la forma:

$$[f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$$

El corchete de Lie  $[f, g]$  es escrito comúnmente como  $ad_f g$  (donde  $ad$  se establece como adjunta). Los corchetes de Lie repetidos pueden ser escritos recursivamente por

$$ad_f^0 g = g$$

$$ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g], \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

- **Lema 1.** Los corchetes de Lie tienen las siguientes propiedades:

- (i) Bilinealidad

$$[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] = \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]$$

$$[f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2]$$

Donde  $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2$  son vectores de campo suaves y  $\alpha_1, \alpha_2$  son constantes escalares.

- (ii) Anticonmutatividad

$$[f, g] = -[g, f]$$

- (iii) Identidad de Jacobi

$$L_{ad_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h$$

Donde  $h(x)$  es una función escalar suave de  $x$

- **Modelamiento matemático**

Se define el modelo matemático, de manera general, como la formulación de una ecuación que expresa las características de un sistema físico o de un proceso formulado en forma matemática.

De forma general el modelo se representa mediante una relación funcional de la forma:

$$\text{variable dependiente} = f \left( \begin{array}{l} \text{variables} \\ \text{independientes} \end{array}, \text{parametros}, \begin{array}{l} \text{funciones} \\ \text{de fuerza} \end{array} \right)$$

Donde:

*variable dependiente* = comportamiento o estado de un sistema

*variable independiente* = dimensiones que determinan el comportamiento

*parámetros* = reflejo de las propiedades del sistema

*funciones de fuerza* = influencias externas que actúan sobre el sistema

La expresión matemática anterior va desde una simple relación algebraica hasta un enorme y complicado grupo de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, a través de sus observaciones, Newton formuló su segunda ley del movimiento, la cual establece que la razón de cambio del *momentum* con respecto al tiempo de un cuerpo, es igual a la fuerza resultante que actúa sobre él. La expresión matemática, o el modelo, de la segunda ley es la conocida ecuación  $F = ma$

Donde  $F$  es la fuerza neta que actúa sobre el objeto,  $m$  es la masa del objeto y  $a$  es su aceleración. La segunda ley puede escribirse de la forma

$$a = \frac{F}{m}$$

Donde  $a$  es la variable dependiente que refleja el comportamiento del sistema,  $F$  es la función de fuerza y  $m$  es un parámetro que representa una propiedad del sistema. Obsérvese que en este caso específico no existe variable independiente porque aún no se predice como varía la aceleración con respecto al tiempo o al espacio.

La ecuación posee varias de las características típicas de los modelos matemáticos del mundo físico:

1. Describe un proceso o sistema natural en términos matemáticos.
2. Representa una idealización y una simplificación de la realidad. Es decir, ignora los detalles insignificantes del proceso natural y se concentra en sus manifestaciones esenciales. Por ende, la segunda ley de Newton no incluye los efectos de la relatividad, que tienen una importancia cuando se aplica a objetos y fuerzas que interactúan sobre o alrededor de la superficie de la Tierra, a velocidades y en escalas visibles a los seres humanos.

3. Finalmente, conduce a resultados reproducibles y, en consecuencia, llega a emplearse con la finalidad de predecir. Por ejemplo, dada la fuerza aplicada sobre un objeto de masa conocida, la ecuación se emplea para calcular la aceleración.

Debido a su forma algebraica sencilla, la solución de la ecuación se obtiene con facilidad. Sin embargo, es posible que otros modelos matemáticos de fenómenos físicos sean mucho más complejos y no se resuelven con exactitud, o que requieran para su solución de técnicas matemáticas más sofisticadas que la simple algebra. Para ilustrar un modelo más complicado de este tipo, se utiliza la segunda ley de Newton para determinar la velocidad final de la caída libre de un cuerpo que se encuentra cerca de la superficie de la tierra. Nuestro cuerpo en caída libre será el de un paracaidista, como se muestra en la figura de abajo.

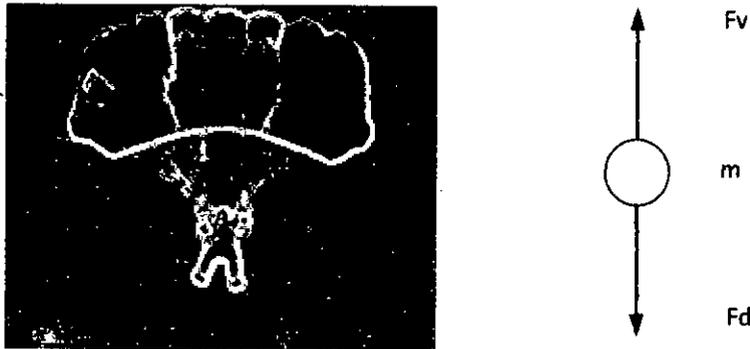


Figura 1: Paracaidista en caída libre  
Fuente: UNAC (2019); elaboración propia

Un modelo para este caso se obtiene expresando la aceleración como la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo.

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

Donde  $v$  es la velocidad de caída del paracaidista,  $m$  es la masa,  $F$  es la fuerza resultante,  $F_d$  es la fuerza hacia abajo debida a la atracción de la gravedad y  $F_v$  es la fuerza hacia arriba debida a la resistencia del aire.

$$F_d = mg$$

$$F_v = cv$$

Aquí  $c$  es el coeficiente de resistencia o arrastre.

$$F_d - F_v = ma$$

$$mg - cv = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = dt$$

$$\int \frac{d\left(\frac{c}{m}v - g\right)}{\frac{c}{m}v - g} = -\frac{c}{m} \int dt$$

$$\ln\left(\frac{c}{m}v - g\right) = -\frac{c}{m}t + \ln(K)$$

$$\ln\left(\frac{c}{m}v - g\right) = \ln\left(e^{-\frac{c}{m}t}\right) + \ln(K) = \ln\left(Ke^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

$$\frac{c}{m}v - g = Ke^{-\frac{c}{m}t}$$

Inicialmente el paracaidista está en reposo, es decir  $v = 0$  en  $t = 0$ ,  $K = -g$   
Resolviendo se encuentra que

$$v = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

Note que la ecuación obtenida es un ejemplo de la forma general de ecuación modelo, donde  $v = v(t)$  es la variable dependiente,  $t$  es la variable independiente,  $c$  y  $m$  son parámetros y  $g$  es la función de fuerza. A la ecuación obtenida se le llama solución analítica o exacta ya que satisface con exactitud la ecuación diferencial original. Por desgracia, hay muchos modelos matemáticos que no pueden resolverse con exactitud. En muchos de estos casos, la única alternativa consiste en desarrollar una solución numérica que se aproxime a la solución exacta. Como ya se mencionó, los métodos numéricos son aquellos en los que se reformula el problema matemático para lograr resolverlo mediante operaciones aritméticas. Esto puede ilustrarse para el caso de la segunda ley de Newton, observando que la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se puede aproximar mediante:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Donde  $\Delta v$  y  $\Delta t$  son diferencias en la velocidad y en el tiempo, respectivamente, calculadas sobre intervalos finitos,  $v(t_i)$  es la velocidad en el tiempo inicial  $t_i$  y  $v(t_{i+1})$  es la velocidad algún tiempo más tarde  $t_{i+1}$ . A la ecuación anterior se le denomina una aproximación en diferencia finita dividida de la derivada en el tiempo  $t_i$ . Sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m}v(t_i)$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[ g - \frac{c}{m} v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i)$$

De otra forma

$$v[i + 1] = v[i] + \left[ g - \frac{c}{m} v[i] \right] (t[i + 1] - t[i])$$

Note que el término entre corchetes en el lado derecho de la propia ecuación diferencial. Es decir, este término nos da un medio para calcular la razón de cambio o la pendiente de  $v$ . Así, la ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación que puede utilizarse para determinar algebraicamente la velocidad en  $t_{i+1}$  usando la pendiente y los valores anteriores de  $v$  y  $t$ . Si se da un valor inicial para la velocidad en algún tiempo  $t_i$ , es posible calcular con facilidad la velocidad en un tiempo posterior  $t_{i+1}$ . Este nuevo valor de la velocidad en  $t_{i+1}$  sirve para calcular la velocidad en  $t_{i+2}$  y así sucesivamente. Es decir, a cualquier tiempo,

$$\text{valor nuevo} = \text{valor anterior} + \text{pendiente} \times \text{tamaño del paso}$$

Obsérvese que esta aproximación formalmente se conoce como *método de Euler*. Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas. Dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es provechoso usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de la respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo, la representación mediante la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra. Una vez obtenido un modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos, así como computadoras para estudiarlo y sintetizarlo.

- **Simplicidad contra precisión.** Al obtener un modelo matemático se debe establecer un compromiso entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. Al obtener un modelo matemático razonablemente simplificado, a menudo resulta necesario ignorar ciertas propiedades físicas inherentes al sistema. En particular, si se pretende obtener un modelo matemático de parámetros concentrados lineal (es decir, uno en el que se empleen ecuaciones diferenciales), siempre es necesario ignorar ciertas no linealidades y

parámetros distribuidos que pueden estar presentes en el sistema dinámico. Si los efectos que estas propiedades ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños, se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico. Se debe ser consciente de que un modelo de parámetros concentrados lineal, que puede ser válido si opera a bajas frecuencias, tal vez no sea válido en frecuencias suficientemente altas, debido a que la propiedad no considerada de los parámetros distribuidos puede convertirse en un factor importante en el comportamiento dinámico del sistema.

- **Sistemas lineales.** Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada cada vez y sumando los resultados. Este principio permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación diferencial lineal a partir de soluciones simples. Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

- **Modelamiento de sistemas mecánicos**

La ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda ley de Newton, que se aplica a cualquier sistema mecánico. También se aplica la ecuación de Lagrange para deducir las ecuaciones del movimiento usando energías potenciales y cinéticas.

- **Leyes de Kirchhoff**

Son dos leyes que se basan en la conservación de la energía y la carga en los circuitos eléctricos. Estas leyes son utilizadas para hallar corrientes y tensiones en cualquier punto de un circuito eléctrico de corriente continua o corriente alterna.

- **Segunda ley de Newton.**

La derivada del momento lineal o ímpetu de un cuerpo respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre él, es decir

$$F = \dot{p}$$

Donde  $p = mv$  es el momento,  $m$  es la masa y  $v$  la velocidad. Esta ecuación se usa cuando la masa es variable como ocurre en los cohetes. Pero cuando la masa es constante, entonces

$$F = \dot{p} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

donde  $a$  es la aceleración y  $x$  es el desplazamiento

- **Ecuaciones de Lagrange de movimiento**

Considerando un sistema con  $N$  grados de libertad que se describe por medio de un conjunto de  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Estas coordenadas son irrestrictas e independientes; es decir no están relacionadas entre sí por medio de condiciones geométricas o cinemáticas.

Entonces, en términos de las coordenadas generalizadas elegidas, las ecuaciones de Lagrange tienen la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, N$$

donde  $\dot{q}_j$  son las velocidades generalizadas,  $T$  es la energía cinética del sistema,  $V$  es la energía potencial,  $D$  es la función de disipación de Rayleigh y  $Q_j$  es la fuerza generalizada que aparece en la  $j$ -ésima ecuación.

Las fuerzas generalizadas  $Q_j$  se obtienen con

$$Q_j = \sum_l F_l \cdot \frac{\partial r_l}{\partial q_j} + \sum_l M_l \cdot \frac{\partial \omega_l}{\partial \dot{q}_j}$$

donde  $F_l$  y  $M_l$  son las representaciones vectoriales de las fuerzas y los momentos aplicados externamente, el índice  $l$  indica cual fuerza o momento externo se esta considerando,  $r_l$  es el vector de posición para el lugar donde la fuerza se aplica y  $\omega_l$  es la velocidad angular del sistema con respecto al eje a lo largo del se aplica el momento considerado. El símbolo "." Que aparece en la ecuación indica el producto escalar puntual de dos vectores.

Para sistemas conservativos, no se cuenta con la fuerza de entrada, por lo que la ecuación de Lagrange queda de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

### 2.3. Conceptual

- **Fuerza de Coriolis**

La fuerza de Coriolis es una fuerza ficticia que aparece cuando un cuerpo está en movimiento con respecto a un sistema en rotación y se describe su movimiento en ese referencial. La fuerza de Coriolis es diferente de la fuerza centrífuga. La fuerza de Coriolis siempre es perpendicular a la dirección del eje de rotación del sistema y a la dirección del movimiento del cuerpo vista desde el sistema en rotación. La fuerza de Coriolis tiene dos componentes: una componente tangencial, debida a la componente radial del movimiento del cuerpo, y una componente radial, debida a la componente tangencial del movimiento del cuerpo.

La componente del movimiento del cuerpo paralela al eje de rotación no engendra fuerza de Coriolis. El valor de la fuerza de Coriolis es:

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

donde:

$m$  = masa del cuerpo

$v$  = velocidad del cuerpo en el sistema de rotacion

$\omega$  = velocidad angular del sistema en rotacion vista desde un sistema inercial

$\times$  = es el producto vectorial

- **Matriz inversa**

Una matriz con coeficientes en los reales es invertible si y sólo si el determinante de A es distinto de cero. Además, la inversa satisface la igualdad:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A^T)}{\det(A)}$$

Dada una matriz de 2x2 con determinante no nulo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A esta dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{con } \det(A) \neq 0, \quad \text{ademas } A \cdot A^{-1} = I$$

Dada una matriz de 3x3 con determinante no nulo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A esta dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{bmatrix}$$

con  $\det(A) \neq 0$ , ademas  $A \cdot A^{-1} = I$

$$A = (ei - fh)$$

$$D = -(bi - ch)$$

$$G = (bf - ce)$$

$$B = -(di - fg)$$

$$E = (ai - cg)$$

$$H = -(af - cd)$$



$$C = (dh - eg)$$

$$F = -(ah - bg)$$

$$I = (ae - bd)$$

- **Matriz transpuesta**

La matriz transpuesta  $A^T$  de una matriz  $A$  es una en la cual las filas y columnas se intercambian. Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = [a \quad b \quad c]$$

- **Cinemática directa de los manipuladores**

La cinemática es la ciencia que trata del movimiento sin considerar las fuerzas que lo ocasionan. Dentro de la cinemática se estudian la posición, velocidad, aceleración y todas las derivadas de mayor orden de las variables de posición (respecto al tiempo o a cualquier otra variable). Por ende, el estudio de la cinemática de los manipuladores se refiere a todas las propiedades del movimiento, las geométricas y las basadas en el tiempo.

- **Cinemática inversa de los manipuladores**

Este problema se plantea de la siguiente manera: dada la posición y orientación del efector final del manipulador, se calcula todos los conjuntos posibles de ángulos articulares que podrían utilizarse para obtener esta posición y orientación dadas. Este es un problema geométrico algo complicado que se resuelve de manera rutinaria miles de veces diariamente en el sistema humano y en otros sistemas biológicos. En el caso de un sistema artificial como un robot necesitamos crear un algoritmo en la computadora de control que pueda realizar este cálculo.

- **Manipulador**

Un manipulador tiene de vínculos rígidos, conectados entre si por articulaciones que permiten el movimiento relativo de los vínculos adyacentes. Estas

articulaciones generalmente consisten en instrumentos con sensores de posición, los cuales permiten medir la posición relativa de los vínculos adyacentes.

- **Grados de libertad**

El número de grados de libertad que posee un manipulador es el número de variables de posición independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo. Este es un término general que se utiliza para cualquier mecanismo. En el caso de robots industriales comunes como un manipulador, es generalmente una cadena cinemática abierta y como la posición de cada articulación se define generalmente con una sola variable, donde el número de articulaciones es igual al número de grados de libertad. Por ejemplo, el manipulador robótico de dos enlaces tiene dos grados de libertad.

## 2.4. Definición de términos básicos

- **Sistema lineal**

Un sistema lineal es aquel que cumple con el principio de superposición. Es decir, el sistema cumpla con la propiedad de ser aditivo y homogéneo.

- **Sistema no lineal**

No cumple el principio de superposición y presenta propiedades que no presenta el sistema lineal.

- **Ecuación de estado**

Es el modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de infinito orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. Para prescindir del número de entradas, salidas y estados, las variables son expresadas como vectores y las ecuaciones algebraicas se escriben en forma matricial (esto último solo puede hacerse cuando el sistema dinámico es lineal e invariante en el tiempo).

- **Rango de una matriz**

El rango de una matriz es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango fila y el rango columna siempre son iguales: este número es llamado simplemente rango de A.

- **Robot**

Un robot es una entidad virtual o mecánica artificial. En la práctica, esto es por lo general un sistema electromecánico que normalmente es conducido por un programa de una computadora o por un circuito eléctrico. Este sistema electromecánico, por su apariencia o sus movimientos, ofrece la sensación de tener un propósito propio. La independencia creada en sus movimientos hace que sus acciones sean la razón de un estudio razonable y profundo en el área de la ciencia y tecnología

- **VANT**

Un VANT es un vehículo sin tripulación, reutilizable, capaz de mantener de manera autónoma un nivel de vuelo controlado y sostenido, y propulsado por un motor de explosión, eléctrico o de reacción.

### **III. HIPOTESIS Y VARIABLES**

#### **3.1 Hipótesis**

##### **Hipótesis general**

El modelamiento del sistema permitirá encontrar la controlabilidad y la observabilidad del robot manipulador de dos grados de libertad

##### **Hipótesis específica**

El modelamiento del robot manipulador rígido con dos articulaciones de rotación que se mueven en un plano vertical con dos grados de libertad permitirá encontrar la controlabilidad y la observabilidad.

### 3.2 Definición conceptual de variables

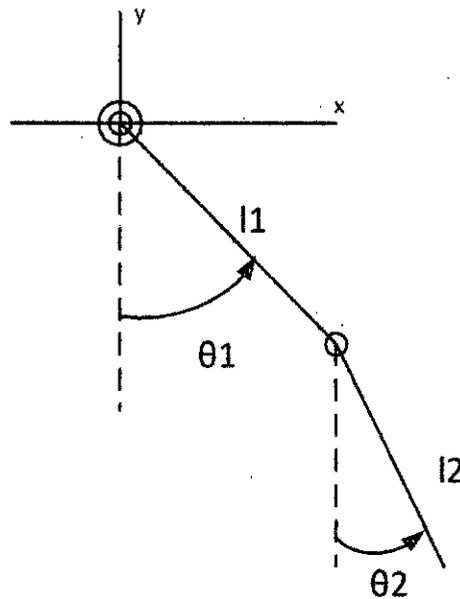


Figura 2: Manipulador de dos enlaces  
Fuente: UNAC (2019); elaboración propia

El manipulador es un mecanismo de dos grados de libertad asociados a los ángulos de posición de los dos enlaces, donde el objetivo es mantener el manipulador en la posición vertical inestable, bajo el control de la fuerza externa del motor. El manipulador un estado estable cuando los dos enlaces están verticalmente hacia abajo. El manipulador posee tres estados inestables. Uno, cuando el enlace 1 esta vertical hacia abajo y el enlace 2 esta vertical hacia arriba. Dos, cuando el enlace1 está vertical hacia arriba y el enlace 2 esta vertical hacia abajo. Tres, cuando el enlace1 y el enlace 2 ambos están vertical hacia arriba. Precisamente este último caso es el que selecciona para el control. Para mantener esta posición se requiere la aplicación de fuerzas externas sobre el sistema. Las variables que intervienen en presente problema, objeto de la investigación se definen como: Posición angular del enlace 1 ( $\theta_1$ ), Posición angular del enlace 2 ( $\theta_2$ ), Fuerza externa ( $\tau$ )

### 3.3 Operacionalización de variables

Durante el modelamiento matemático de la planta, las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de salida en función de las entradas están dadas por:

$$\dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \tau, t)$$

$$\dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \tau, t)$$

Al linealizar estas ecuaciones no lineales, transforma en ecuación de estado y la ecuación de salida:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

La Operacionalización se muestra en la siguiente tabla:

**Tabla 1**  
Operacionalización de variables  
Fuente: UNAC; elaboración propia

Tipos de variables	Dimensión	Indicador	Instrumento
Variables independientes (variables de entrada)	Angulo de rotación del primer enlace	Posición angular del primer enlace	Sensor de posición angular
	Angulo de rotación del segundo enlace	Posición angular del primer enlace	Sensor de posición angular
	Torque aplicado al péndulo	Torque del motor	Torquimetro
Variable dependiente (variable de salida)	Angulo de rotación del primer enlace	Respuesta en el tiempo	Registrador de datos
	Angulo de rotación del segundo enlace		

## **IV. DISEÑO METODOLOGICO**

### **4.1 Tipo y diseño de la investigación**

La investigación es de tipo cuantitativa, de mucho análisis matemático avanzado y el tema tiene aplicación al área de Robótica.

En cuanto al diseño de la investigación, para encontrar el modelo matemático o dinámica del sistema se ha utilizado las ecuaciones de Lagrange, para el manipulador robótico de dos grados de libertad.

Luego como el sistema es no lineal se linealiza para así poder aplicar todas las propiedades de los sistemas lineales.

El modelo linealizado se representa en la forma de ecuación de estado y ecuación de salida.

Se determina la matriz de controlabilidad y la matriz de observabilidad, para encontrar si el sistema es observable y además si el sistema es observable y si lo es se puede diseñar un control por realimentación de estados por ubicación de polos para estabilizar al sistema manipulador.

### **4.2 Método de investigación**

El método de investigación es analítico. Todo el problema se ha particionado de tal manera de resolverlo por etapas. Esto ha facilitado el desarrollo analítico, con resultados que son útiles para la siguiente etapa, así de esta manera se llega a la solución final con resultados, observaciones y conclusiones finales.

### **4.3 Población y muestra**

La investigación no es de tipo estadístico; la investigación es analítica.

### **4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado**

La investigación no es de tipo estadístico; la investigación es analítica.

### **4.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

La investigación no es de tipo estadístico; la investigación es analítica.

## 4.6 Análisis y procesamiento de datos

- **Modelamiento del robot manipulador de doble enlace**

El movimiento del manipulador se realiza en el plano tal como se muestra en la figura 3, por lo que primero se determina la posición de las masas en su movimiento rotacional, donde su posición esta dada por los ángulos que sustentan de cada enlace. También se determinan la velocidad tangencial de cada masa. Esta información es importante para la determinación de la energía cinética y la energía potencial y así mismo estas dos energías calculadas analíticamente se reemplazan en la ecuación de Lagrange, para finalmente determinar el modelo matemático o dinámica del sistema, que se representa por dos ecuaciones diferenciales, ya que el sistema tiene dos grados de libertad.

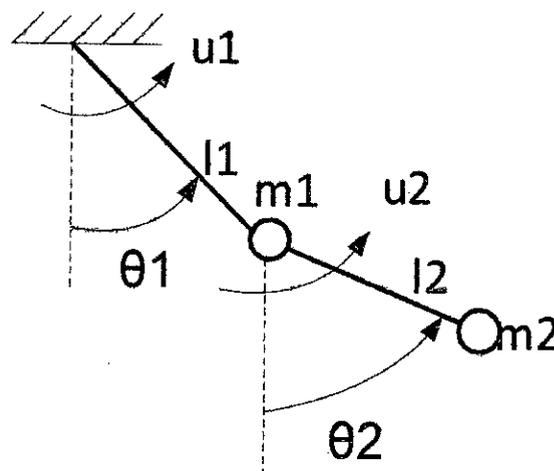


Figura 3: Manipulador de dos enlaces y torques de entrada  $u_1$  y  $u_2$   
Fuente: UNAC (2019); elaboración propia

donde:

$m_1$  = masa  $m_1$

$m_2$  = masa  $m_2$

$l_1$  = longitud del enlace 1 rígido

$l_2$  = longitud del enlace 2 rígido

$u_1$  = torque 1

$u_2$  = torque 2

$\theta_1$  = ángulo del enlace 1

$\theta_2$  = ángulo del enlace 2

Posición de m1:

$$x_1 = l_1 \text{sen}\theta_1 \quad 1$$

$$y_1 = -l_1 \text{cos}\theta_1 \quad 2$$

Posición de m2:

$$x_2 = l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 \quad 3$$

$$y_2 = -l_1 \text{cos}\theta_1 - l_2 \text{cos}\theta_2 \quad 4$$

La velocidad tangencial de m1:

$$\dot{x}_1 = (l_1 \text{cos}\theta_1)\dot{\theta}_1$$

$$\dot{y}_1 = (l_1 \text{sen}\theta_1)\dot{\theta}_1$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$$

$$v_1^2 = (l_1^2 \text{cos}^2\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + (l_1^2 \text{sen}^2\theta_1)\dot{\theta}_1^2 = (\text{cos}^2\theta_1 + \text{sen}^2\theta_1)l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$\text{cos}^2\theta_1 + \text{sen}^2\theta_1 = 1$$

$$v_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad 5$$

La velocidad tangencial de m2:

$$\dot{x}_2 = (l_1 \text{cos}\theta_1)\dot{\theta}_1 + (l_2 \text{cos}\theta_2)\dot{\theta}_2$$

$$\dot{y}_2 = (l_1 \text{sen}\theta_1)\dot{\theta}_1 + (l_2 \text{sen}\theta_2)\dot{\theta}_2$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

$$v_2^2 = (l_1^2 \text{cos}^2\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + (l_2^2 \text{cos}^2\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2(\text{cos}\theta_1)(\text{cos}\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ + (l_1^2 \text{sen}^2\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + (l_2^2 \text{sen}^2\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2(\text{sen}\theta_1)(\text{sen}\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$



$$v_2^2 = (\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + (\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)$$

$$\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1$$

$$\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1$$

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad 6$$

Energía cinética de m1:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad 7$$

Energía cinética de m2:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)] \quad 8$$

Energía cinética total:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad 9$$

Energía potencial de m1:

$$V_1 = m_1gh_1$$

$$h_1 = l_1 - l_1\cos\theta_1 = l_1(1 - \cos\theta_1)$$

$$V_1 = m_1gl_1(1 - \cos\theta) \quad 10$$

Energía potencial de m2:

$$V_2 = m_2 g (h_1 + h_2)$$

$$h_2 = l_2 - l_2 \cos \theta_2 = l_2 (1 - \cos \theta_2)$$

$$V_2 = m_2 g ((l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2))) \quad 11$$

Energía potencial total:

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) \quad 12$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = u_1 \quad 13$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = u_2 \quad 14$$

No existe fricción viscosa, entonces  $D = 0$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = u_1 \quad 15$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = u_2 \quad 16$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = m_2 g l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

Reemplazando, obtenemos las ecuaciones dinámicas del robot manipulador:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g l_1 \text{sen} \theta_1 = u_1 \quad 17$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g l_2 \text{sen} \theta_2 = u_2 \quad 18$$

- **Linealización del sistema no lineal**

Linealizando para ángulos  $\theta_2, \theta_1$  muy pequeños donde el sistema tiene equilibrio estable. En este caso

$$\text{sen} \theta_1 \approx \theta_1$$

$$\text{sen} \theta_2 \approx \theta_2$$

$$\cos\theta_1 \approx 1$$

$$\cos\theta_2 \approx 1$$

$$\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) \approx \theta_2 - \theta_1$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) \approx 1$$

Eliminando los términos no lineales, se obtienen las ecuaciones linealizadas del sistema

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gl_1\theta_1 = u_1 \quad 19$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_2gl_2\theta_2 = u_2 \quad 20$$

Despejando

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{l_1}\theta_1 + \frac{m_2g}{l_1}\theta_2 + \frac{1}{m_1l_1^2}u_1 - \frac{1}{m_1l_1l_2}u_2$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1l_2}\theta_1 - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1l_2}\theta_2 - \frac{1}{m_1l_1l_2}u_1 + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1m_2l_2^2}u_2$$

Haciendo

$$x_1 = \theta_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{l_1}x_1 + \frac{m_2g}{l_1}x_3 + \frac{1}{m_1l_1^2}u_1 - \frac{1}{m_1l_1l_2}u_2$$

$$x_3 = \theta_2 \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 = x_4$$

$$x_4 = \dot{\theta}_2 \rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2$$

$$= -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1l_2}x_1 - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1l_2}x_3 - \frac{1}{m_1l_1l_2}u_1 + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1m_2l_2^2}u_2$$



Representando en la forma de ecuación de estado y salida linealizada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m_1 + m_2)g}{l_1} & 0 & \frac{m_2 g}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} & 0 & -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1 l_1^2} & -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2^2} \end{bmatrix} u \quad 21$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad 22$$

Con

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Asumiendo

$$l_1 = l_2 = 0.5 \text{ metros}, \quad m_1 = m_2 = 0.5 \text{ Kilogramos}, \quad g = 9.8 \text{ m/seg}^2$$

Se obtiene la ecuación de estado y la ecuación de salida linealizada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19.6 & 0 & 9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 39.2 & 0 & 39.2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -8 \\ 0 & 0 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

#### • Cálculo de la controlabilidad lineal

Utilizando Matlab se obtienen los siguientes resultados

```
>> B=[0 0; 8 -8; 0 0; -8 16];
```

```
>> B
```

```
B =
```

```
0 0
8 -8
0 0
-8 16
```

```
>> A=[0 1 0 0; -19.6 0 9.8 0; 0 0 0 1; 39.2 0 39.2 0],
```

```
A =
```

```
    0    1.0000    0    0
  -19.6000    0    9.8000    0
    0    0    0    1.0000
  39.2000    0   39.2000    0
```

```
>> Mc=[B A*B A*A*B A*A*A*B]
```

```
Mc =
```

```
    0    0    8   -8    0    0   -235.2  313.6
    8   -8    0    0  -235.2  313.6    0    0
    0    0   -8   16    0    0    0   313.6
   -8   16    0    0    0   313.6    0    0
```

```
>> rank(Mc)
```

```
ans = 4
```

como el rango es 4 el sistema es controlable

### Calculo de la observabilidad lineal

```
>> C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
```

```
>> C
```

```
C =
```

```
    1    0    0    0
    0    0    1    0
```

```
>> Mo=[C; C*A; C*A*A; C*A*A*A]
```

Mo =

```
    1.    0    0    0
    0    0    1    0
    0    1    0    0
    0    0    0    1
   -19.6  0    9.8  0
    39.2  0   39.2  0
    0   -19.6  0    9.8
    0    39.2  0   39.2
```

```
>> rank(Mo)
```

```
ans = 4
```

como el rango es 4, es decir de rango completo, entonces el sistema es observable.

### Programa de cálculo con Matlab

```
clear all; close all; clc;
%Calculo de la ecuacion de estado y de la ecuacion de salida
m1=0.5;
m2=0.5;
l1=0.5;
l2=0.5;
g=9.8;
A=[0 1 0 0; -(m1+m2)*g/l1 0 m2*g/l1 0; 0 0 0 1; (m1+m2)*g/(m1*l2) 0
(m1+m2)*g/(m1*l2) 0]
B=[0 0; 1/(m1*l1*l2) -1/(m1*l1*l2); 0 0; -1/(m1*l1*l2)
(m1+m2)/(m1*m2*l2*l2)]
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0]
D=[0]
%Calculo de la Controlabilidad
Mc=[B A*B A*A*B A*A*A*B]
%Calulo del rango de la matriz Mc
rank(Mc)
%Calculo de la observabilidad
Mo=[C; C*A; C*A*A; C*A*A*A]
%Calculo del rango de la matriz Mo
rank(Mo)
step(A,B,C,D)
grid
```

resultados de la corrida

A =

```
    0  1.0000    0    0
  -19.6000    0  9.8000    0
```

0	0	0	1.0000
39.2000	0	39.2000	0

B =

0	0
8	-8
0	0
-8	16

C =

1	0	0	0
0	0	1	0

D =

0

Mc =

0	0	8.0000	-8.0000	0	0	-235.2000	313.6000
8.0000	-8.0000	0	0	-235.2000	313.6000	0	0
0	0	-8.0000	16.0000	0	0	0	313.6000
-8.0000	16.0000	0	0	0	313.6000	0	0

ans =

4

Mo =

1.0000	0	0	0
0	0	1.0000	0
0	1.0000	0	0
0	0	0	1.0000
-19.6000	0	9.8000	0
39.2000	0	39.2000	0
0	-19.6000	0	9.8000
0	39.2000	0	39.2000

ans =

4

Respuesta en el tiempo ante un escalón de entrada

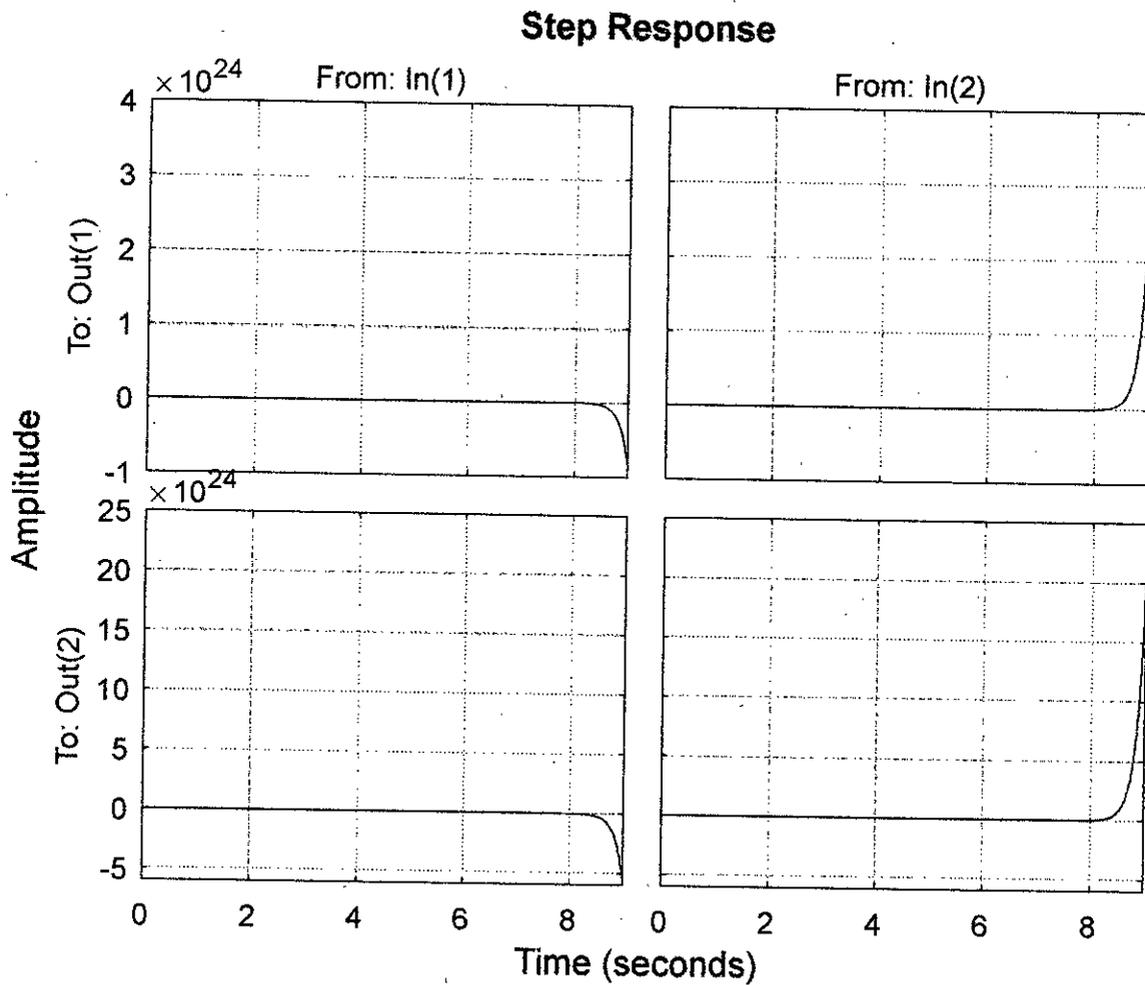


Figura 4: Respuesta en el tiempo ante una entrada escalón  
Fuente: UNAC (2019); elaboración propia

Se observa en la respuesta en el tiempo que el sistema es inestable. También ya el sistema es controlable y observable se puede diseñar un controlador por realimentación de estados de tal manera de estabilizarlo.

- **Modelo en espacio de estados del robot manipulador**

Las ecuaciones dinámicas del robot manipulador son:

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2\sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 = u_1$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$+m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = u_2$$

Expresando convenientemente las ecuaciones dinámicas del manipulador en una sola ecuación, se obtiene:

$$H\ddot{\theta} + P\dot{\theta} + G = u$$

$H$  = matriz de masas del manipulador

$P$  = matriz de terminos centrifugos y Coriolis

$G$  = vector de terminos de gravedad

Donde

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Se utiliza el termino ecuación en el espacio de estados debido al termino  $P$  que contiene términos tanto de posición como de velocidad.

Cada elemento de  $H$  y de  $G$  son funciones complejas que dependen de  $\theta$ , la posición de todas las articulaciones del manipulador: cada elemento de  $P$  es una función compleja tanto de  $\theta$  como de  $\dot{\theta}$ .

Se puede separar los diversos tipos de términos que aparecen en las ecuaciones dinámicas y formar la matriz de masa del manipulador, la matriz de Coriolis y términos centrífugos y el vector de gravedad.

$$H = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad 23$$

$$P = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) & -m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ -m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) & m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \quad 24$$

$$G = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \text{sen}\theta_1 \\ m_2gl_2 \text{sen}\theta_2 \end{bmatrix} \quad 25$$

Despejando la ecuación del manipulador

$$H\ddot{\theta} = u - G - P\dot{\theta}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por la inversa de  $H$ , es decir  $H^{-1}$

$$H^{-1}H\ddot{\theta} = H^{-1}(u - G - P\dot{\theta})$$

$$H^{-1}H = I$$

$$I\ddot{\theta} = H^{-1}(u - G - P\dot{\theta})$$

$$I\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = H^{-1}(u - G - P\dot{\theta})$$

Entonces las ecuaciones dinámicas del manipulador pueden ser halladas por la solución de la ecuación de estado del manipulador

También

$$H^{-1} = \frac{(\text{adj}(H))^T}{\det(H)} \quad 26$$

Con

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad 27$$

$$\det(H) = H_{11}H_{22} - H_{21}H_{12} \quad 28$$

Se observa que:

$$H_{21} = H_{12} \quad 29$$

Por lo que

$$\det(H) = H_{11}H_{22} - H_{12}^2 \quad 30$$

Definiendo

$$K = \frac{1}{\det(H)} = \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \quad 31$$

$$H^{-1} = \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \quad 32$$

$$u - G - P\dot{\theta} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = -P_{22}$$

$$P_{12} = P_{21}$$

$$u - G - P\dot{\theta} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = H^{-1}(u - G - P\dot{\theta}) = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) \quad 33$$

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - G_1 - P_{11}\dot{\theta}_1 - P_{12}\dot{\theta}_2 \\ u_2 - G_2 - P_{12}\dot{\theta}_1 + P_{11}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 34$$

#### • Controlabilidad del manipulador

La controlabilidad de un sistema dinámico es una preocupación de cualquier diseñador. El prerequisite para el diseño del controlador de este sistema es un análisis de la matriz de controlabilidad no lineal para el control en la región de interés.

El modelo dinámico para este sistema es de la forma

$$\dot{x} = f(x) + h(x)u \quad 35$$

$$\det(H) = H_{11}H_{22} - H_{12}^2 \quad 30$$

Definiendo

$$K = \frac{1}{\det(H)} = \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \quad 31$$

$$H^{-1} = \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \quad 32$$

$$u - G - P\dot{\theta} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = -P_{22}$$

$$P_{12} = P_{21}$$

$$u - G - P\dot{\theta} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = H^{-1}(u - G - P\dot{\theta}) = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) \quad 33$$

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - G_1 - P_{11}\dot{\theta}_1 - P_{12}\dot{\theta}_2 \\ u_2 - G_2 - P_{12}\dot{\theta}_1 + P_{11}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 34$$

### • Controlabilidad del manipulador

La controlabilidad de un sistema dinámico es una preocupación de cualquier diseñador. El prerequisite para el diseño del controlador de este sistema es un análisis de la matriz de controlabilidad no lineal para el control en la región de interés.

El modelo dinámico para este sistema es de la forma

$$\dot{x} = f(x) + h(x)u \quad 35$$

Donde  $x$  es el vector de estado del espacio de estado  $M$  y  $u$  es el vector de entrada. El análisis puede probar que el espacio de estado  $M$  puede ser demasiado pequeño

para modelar adecuadamente el sistema, de este modo falla la representación del estado real que alguna entrada de control podría excitar. Por lo tanto, el control basado en el modelo dinámico sería inútil. O el espacio de estado podría ser demasiado grande donde el sistema podría ser de estado conocido y no puede posiblemente alcanzar algún estado deseado usando un conjunto de entradas dadas.

- **Derivación de la matriz de Controlabilidad no lineal**

El análisis de la controlabilidad no lineal para este sistema requiere determinar el rango  $m$  de la matriz de controlabilidad  $C$ , donde  $m = 4$  es la dimensión de  $M$ . Esto es, la matriz resultante es:

$$C = [h \quad ad_f h \quad ad_f^2 h \quad ad_f^3 h] \quad 36$$

Donde  $h$  es de la ecuación anterior y los otros elementos independientes representan vectores columnas de los corchetes de Lie. Cuando la matriz tiene rango completo el sistema se dice que es completamente controlable localmente. La matriz de controlabilidad es derivada usando la notación algebraica de Lie, la definición de un corchete de Lie es: sea  $f$  y  $h$  dos vectores de campo suaves en  $R^n$ . Entonces el corchete de Lie de  $f$  y  $h$  es un tercer vector de campo definido por

$$[f, h] = \nabla h \cdot f - \nabla f \cdot h = ad_f h \quad 37$$

Los corchetes de Lie son definidos recursivamente como

$$ad_f^0 h = h \quad 38$$

$$ad_f^i h = [f, ad_f^{i-1} h] \text{ para } i = 1, 2, \dots \quad 39$$

- **Elementos de la matriz de controlabilidad**

Para simplificar la derivación se usan las siguientes definiciones:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} \quad 40$$

El vector de estado es reescrito como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 41$$

Definiendo las constantes

$$A_1 = (m_1 + m_2)l_1^2 \quad 42$$

$$A_2 = m_2 l_1 l_2 \quad 43$$

$$A_3 = m_2 l_2^2 \quad 44$$

$$A_4 = (m_1 + m_2)gl_1 \quad 45$$

$$A_5 = m_2 gl_2 \quad 46$$

reemplazando

$$H = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \cos \theta \\ A_2 \cos \theta & A_3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -A_2 x_3 x_4 \sin \theta & -A_2 \dot{\theta} \sin \theta \\ -A_2 \dot{\theta} \sin \theta & A_2 x_3 x_4 \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} A_4 \sin x_1 \\ A_5 \sin x_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - G_1 - P_{11} \dot{\theta}_1 - P_{12} \dot{\theta}_2 \\ u_2 - G_2 - P_{12} \dot{\theta}_1 + P_{11} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} (u_1 - G_1 - P_{11}\dot{\theta}_1 - P_{12}\dot{\theta}_2)H_{22} - (u_2 - G_2 - P_{12}\dot{\theta}_1 + P_{11}\dot{\theta}_2)H_{12} \\ -(u_1 - G_1 - P_{11}\dot{\theta}_1 - P_{12}\dot{\theta}_2)H_{12} + (u_2 - G_2 - P_{12}\dot{\theta}_1 + P_{11}\dot{\theta}_2)H_{11} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = f(x) + h(x)u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} [u]$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0$$

El primer corchete de Lie es

$$ad_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} h$$

47

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{h}_{31} & \dot{h}_{32} & 0 & 0 \\ \dot{h}_{41} & \dot{h}_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_4}{\partial x_1} & \frac{\partial h_4}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{f}_{31} & \dot{f}_{32} & \dot{f}_{33} & \dot{f}_{34} \\ \dot{f}_{41} & \dot{f}_{42} & \dot{f}_{43} & \dot{f}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$ad_f h = \begin{bmatrix} (ad_f h)_1 \\ (ad_f h)_2 \\ (ad_f h)_3 \\ (ad_f h)_4 \end{bmatrix}$$

el cuál es el segundo vector columna de C

El segundo corchete de Lie es

$$ad_f^2 h = \frac{\partial ad_f h}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f h$$

48

donde

$$\frac{\partial ad_f h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (ad_f h)_1}{\partial x_1} & \frac{\partial (ad_f h)_1}{\partial x_2} & \frac{\partial (ad_f h)_1}{\partial x_3} & \frac{\partial (ad_f h)_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial (ad_f h)_2}{\partial x_1} & \frac{\partial (ad_f h)_2}{\partial x_2} & \frac{\partial (ad_f h)_2}{\partial x_3} & \frac{\partial (ad_f h)_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial (ad_f h)_3}{\partial x_1} & \frac{\partial (ad_f h)_3}{\partial x_2} & \frac{\partial (ad_f h)_3}{\partial x_3} & \frac{\partial (ad_f h)_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial (ad_f h)_4}{\partial x_1} & \frac{\partial (ad_f h)_4}{\partial x_2} & \frac{\partial (ad_f h)_4}{\partial x_1} & \frac{\partial (ad_f h)_4}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 h = \begin{bmatrix} (ad_f^2 h)_1 \\ (ad_f^2 h)_2 \\ (ad_f^2 h)_3 \\ (ad_f^2 h)_4 \end{bmatrix}$$

El tercer y último corchete de Lie es

$$ad_f^3 h = \frac{\partial ad_f^2 h}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f^2 h$$

49

donde

$$\frac{\partial ad_f^2 h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(ad_f^2 h)_1}{\partial x_1} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_1}{\partial x_2} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_1}{\partial x_3} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial(ad_f^2 h)_2}{\partial x_1} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_2}{\partial x_2} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_2}{\partial x_3} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial(ad_f^2 h)_3}{\partial x_1} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_3}{\partial x_2} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_3}{\partial x_3} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial(ad_f^2 h)_4}{\partial x_1} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_4}{\partial x_2} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_4}{\partial x_3} & \frac{\partial(ad_f^2 h)_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$ad_f^3 h = \begin{bmatrix} (ad_f^3 h)_1 \\ (ad_f^3 h)_2 \\ (ad_f^3 h)_3 \\ (ad_f^3 h)_4 \end{bmatrix}$$

La controlabilidad está mostrando cada vez la pérdida de rango de la matriz C. esto es, estudiando las regiones de interés podemos determinar si el sistema es controlable dada alguna entrada, en la región deseada. Examinando la matriz para para las regiones y condiciones bajo el cual la pérdida de rango puede producir restricciones para el uso en el diseño de un controlador con entradas especial o trayectorias para evitar tales regiones y/o condiciones.

### Caso 1

La primera región de interés para el control es el objetivo de control deseado de balanceo del péndulo con los brazos hacia arriba, es decir  $\theta_1 = \theta_2 = 180^\circ$ . Con estas condiciones la matriz de control se examina para ver si allí hay algunas condiciones que causa la pérdida de rango de matriz de controlabilidad.

La matriz encontrada permanece con rango completo incluso cuando el amortiguamiento se considera despreciable y cesa todo movimiento. Esto es, dentro de alguna vecindad de la región de control deseada el péndulo permanece controlable.

## Caso 2

El siguiente caso de interés es cuando el enlace de control esta en  $\theta_1 = 90^\circ$  y el péndulo este estirado hacia afuera cuando el enlace esta a  $\theta_2 = 90^\circ$ . Esta región sería difícil de llevar al péndulo, desde la posición hacia abajo usando un controlador.

El análisis de la tercera columna de la matriz de controlabilidad revela que si el amortiguamiento es despreciable y cesa el movimiento entonces enfocando esta columna el vector se anula y el sistema encontrado es incontrolable para esta región de estado local.

## Caso 3

Cuando  $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$  los enlaces están hacia abajo y el sistema es de estado estable y la controlabilidad es de rango completo por lo que el sistema es controlable.

## V. RESULTADOS

Las ecuaciones dinámicas del robot manipulador, obtenidas son no lineales, por lo que no se pueden aplicar las propiedades de control para su análisis

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2\sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 = u_1$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\dot{\theta}_1\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2gl_2\sin\theta_2 = u_2$$

La linealización de estas ecuaciones permite encontrar nuevas ecuaciones lineales a las que si se pueden aplicar todas las propiedades del control lineal. Así se obtiene:

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gl_1\theta_1 = u_1$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_2gl_2\theta_2 = u_2$$

Se determina la controlabilidad y la observabilidad del modelo en ecuaciones de estado. Representando en la forma de ecuación de estado y salida linealizada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(m_1 + m_2)g}{l_1} & 0 & \frac{m_2 g}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} & 0 & -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1 l_1^2} & -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_1 l_1 l_2} & \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2^2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Asumiendo

$$l_1 = l_2 = 0.5 \text{ metros}, \quad m_1 = m_2 = 0.5 \text{ Kilogramos}, \quad g = 9.8 \text{ m/seg}^2$$

Se obtiene la ecuación de estado y la ecuación de salida linealizada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19.6 & 0 & 9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 39.2 & 0 & 39.2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -8 \\ 0 & 0 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

De la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Construyendo la matriz de controlabilidad  $M_c$  y la matriz de observabilidad  $M_o$ :

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(M_c) = 4$$

$$\text{rango}(M_o) = 4$$

Como el rango de ambas matrices es igual a 4, es decir ambas matrices son de rango completo. También como resultado se ha encontrado la ecuación de estados del manipulador.

## **VI. DISCUSION DE RESULTADOS**

### **Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados**

Como primer resultado, aplicando las ecuaciones de Lagrange se obtiene el modelo matemático del sistema, que viene a ser dos ecuaciones diferenciales no lineales.

Como segundo resultado se obtiene el sistema lineal del modelo no lineal alrededor del punto de operación, en forma de ecuaciones de estado y de salida.

Como tercer resultado se obtienen las matrices de controlabilidad y observabilidad con lo que se determina que el sistema es observable y controlable

Como cuarto resultado, se obtiene la ecuación de estado del manipulador.

Por último, se calcula la controlabilidad del sistema no lineal y se determina que el sistema pierde rango cuando se calcula la controlabilidad. También se menciona que este proceso matemático es demasiado complicado en su manipulación matemática; por lo que se concluye que es más recomendable la linealización, es decir la obtención del sistema lineal, por la facilidad de trabajo literal y analítico.

Se demuestra que se obtiene las matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema linealizado.

### **Contrastación de los resultados con otros estudios similares.**

No hay estudios similares con los cuales se puedan contrastar este trabajo analítico.

### **Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.**

Como el trabajo de investigación es analítico, todo el proceso seguido son aplicaciones de las leyes físicas, hace mucho tiempo establecidas. Las operaciones que se realizan son de manejo matricial, desarrollo en derivadas parciales muy laboriosas. No se ha utilizado tablas de datos o informaciones de otros trabajos. Las figuras se han realizado con el software VISIO, se ha programado en Matlab; es decir son autoría propia, con lo que se garantiza la responsabilidad ética

## CONCLUSIONES

Calculando las matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema linealizado, se observa que ambas matrices son de rango completo, por lo que se concluye que el sistema es controlable y observable. Por lo tanto, se puede diseñar un sistema de control por realimentación de estados por el método de ubicación de polos, con diseño del observador para controlar el sistema, llevándolo a la estabilidad.

El sistema presenta cuatro estados de equilibrio, cuando un primer ciclo. Cuando el sistema pendular esta con los brazos hacia abajo ( $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ ), el sistema es de equilibrio estable. Cuando el sistema pendular esta con los brazos hacia arriba ( $\theta_1 = \theta_2 = 180^\circ$ ), el sistema es de equilibrio inestable. Cuando el sistema pendular esta con los brazos uno hacia abajo y el otro hacia arriba ( $\theta_1 = 0^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ ), el sistema es de equilibrio inestable. Por último, cuando un brazo esta hacia arriba y el otro hacia abajo ( $\theta_1 = 180^\circ$  y  $\theta_2 = 0^\circ$ ), el sistema es de equilibrio inestable. En general si el péndulo está dando vueltas se vuelven a repetir estos cuatros estados de equilibrio en forma cíclica.

Si seguimos analizando su movimiento cíclico, resulta caótico, propiedad de los sistemas no lineales.

## RECOMENDACIONES

Se recomienda continuar con el trabajo de investigación a nivel de posgrado, para diseñar un controlador por realimentación de estados por ubicación de polos. Esto debido a que ya se cuenta con el modelo matemático de la planta, que resulta ser de tipo no lineal. Se ha probado que el sistema es controlable y observable cuando el modelo matemático se ha linealizado alrededor de un punto de operación. También se puede continuar con el trabajo diseñando un controlador difuso para la planta. Por ultimo se puede trabajar con el modelo no lineal de la planta y diseñar controladores no lineales. En general se puede aplicar técnicas de control avanzado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aplevich, J. *The Essentials of Linear State-Space Systems*. New York, USA: John Wiley & Sons, 2000

Balachandran, B. y Magrab, E. *Vibraciones*. Ciudad de México, México: Thomson Learning, 2006

Chapra, S. y Canale, R. *Metodos numericos para ingenieros*. Ciudad de Mexico, Mexico: Mc Graw Hill, 2003

Craig, J. *Robotica*. Ciudad de Mexico, Mexico: Pearson Educacion, 2006

Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. New York, USA: Oxford University Press, 1999

DeCarlo, R. *Linear Systems, A State Variable Approach With Numerical Implementation*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1989

Domínguez, S. *Control en el Espacio de Estado*. Madrid, España: Prentice Hall, 2002

Dorf, R. y Bishop, R. *Sistemas de control moderno*. Madrid, España: Pearson Educativa, 2005

Fernández, A. *Dinámica Clásica*. Ciudad de México, México: Fondo de Cultura Económica, 2005

Huang, T. *Mecánica para Ingenieros, Dinámica*. Ciudad de México, México: Fondo Educativo Interamericano, 1968

Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*. Berlin, Alemania: Springer Verlag, 1989

Khalil, H. *Nonlinear Systems*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2002

Kuo, B. *Sistemas de control automático*. Ciudad de México, México: Prentice Hall, 1996

Leithold, L. *El Cálculo*. Ciudad de México, México: Oxford University Press, 1998

Mathews, J. y Fink, K. *Métodos numéricos con Matlab*. Madrid, España: Prentice Hall, 2001

Miranda, R. *Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores*. Ciudad de México, México: Alfaomega, 2016

Navarro, R. *Ingeniería de control*. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill, 2004

Nieves, A y Domínguez, F. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Ciudad de México, México: Patria, 2012

Nijmeijer, H. y Van Der Schaft, A. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York, USA: Springer Verlag, 1990

Ogata, K. *Ingeniería de control moderna*. Madrid, España: Pearson Educación, 2010

Ollero, A. *Robótica, manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: Alfaomega, 2007

Salt, J., Cuenca, A., Casanova, V. y Correcher, A. *Control Automático Tiempo Continuo y Tiempo Discreto*. Barcelona, España: Reverté, 2015

Seto, W. *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. New York, USA: Schaum Publishing Co., 1984

Slotine, J. y Li, W. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1991

Starzhinski, V. *Mecánica Teórica*. Moscú, Rusia: Mir, 1985

Stewart, J. *Calculo de varias variables*. Ciudad de México: México: Cengage Learning, 2008

Timoshenko, S. y Young. D. *Superior*. Bilbao, España: Ediciones Urmo, 1971

Timoshenko, S., Young. D. y Weaver, W. *Vibrations Problems in Engineerig*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1974

Thomson, W. *Teoría de Vibraciones*. Ciudad de México, México: Prentice Hall, 1982

Umez-Eronini, E. *Dinámica de sistemas y control*. Ciudad de México, México: Thomson, 2001

Zill, D. y Wright, W. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill, 2012

Zill, D. y Wright, W. *Cálculo de varias variables*. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill, 2011

ANEXOS

Tabla Nº 2: Matriz de consistencia

<p style="text-align: center;"><b>TITULO:</b>  <b>“CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD NO LINEAL DE UN ROBOT  MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD”</b></p>				
PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES	METODOLOGIA
<p><b>Problema general</b></p> <p>¿Es controlable y observable el robot manipulador de dos grados de libertad?</p>	<p><b>Objetivo general</b></p> <p>Determinar la controlabilidad y observabilidad del manipulador de dos grados de libertad.</p>	<p><b>Hipótesis general</b></p> <p>El modelamiento del sistema permitirá encontrar la controlabilidad y la observabilidad del robot manipulador de dos grados de libertad.</p>	<p><b>Variable independiente:</b></p> <p>Posición angular del enlace 1.  Posición angular del enlace 2.  Fuerza externa del motor</p> <p><b>Variable dependiente:</b></p> <p>respuesta posicional en el tiempo del manipulador robótico</p>	<p><b>Tipo de investigación</b></p> <p>Investigación cuantitativa.</p> <p><b>Diseño de la investigación</b></p> <p>Modelamiento matemático de la planta.</p> <p>Linealización del modelo matemático.</p> <p>Controlabilidad y Observabilidad de la planta linealizada.</p> <p>Controlabilidad y Observabilidad de la planta no lineal</p>
<p><b>Problemas específicos</b></p> <p>¿Es controlable y observable el robot manipulador rígido con dos articulaciones de rotación que se mueven en un plano vertical con dos grados de libertad?</p>	<p><b>Objetivos específicos</b></p> <p>Determinar la controlabilidad y observabilidad del manipulador rígido con dos articulaciones que se mueven en un plano vertical con dos grados de libertad.</p>	<p><b>Hipótesis específicas</b></p> <p>El modelamiento del robot manipulador rígido con dos grados de libertad permitirá encontrar la controlabilidad y la observabilidad.</p>		