UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

“TEORIA FUNTORIAL DE LA COHOMOLOGÍA EN LA DETERMINACIÓN DE LAS EQUIVALENCIAS, DE ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS Y LAS CLASES DE HOMOTOPÍA”

AUTOR: WILFREDO MENDOZA QUISPE

(PERIODO DE EJECUCIÓN: DEL 01.05.2020 AL 30.04.2021)

(RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN N° 276-2020-R)

Callao – 2021

PERU

DEDICATORIA

A mi núcleo familiar, en especial a mis hijas Valeria y Natalia, quienes son la motivación de mi cotidiana lucha.

AGRADECIMIENTO

A la UNAC que, a través de su VRI y el aporte del FEDU, vienen impulsando con mucho esmero y responsabilidad la realización de la noble tarea de Investigación.

A mi familia, por el estímulo recibido y la comprensión durante el lapso en que este trabajo absorbió gran parte del tiempo que debí haberles dedicado.

A todas las personas que, de alguna manera, estuvieron motivándome en todo momento para la ejecución y culminación del proyecto.

INDICE

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE GRAFICOS

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se encuentra inmerso en la Teoría de Cohomología, lo cual una dualización algebraica del objeto denominado Homología. Su desarrollo lo iniciamos dando los conceptos de categorías y functores, para luego interpretar a la Homología singular como un funtor covariante, seguidamente definimos los llamados CW – espacios y su descomposición que será de gran utilidad para establecer las operaciones cohomológicas. Estas operaciones nos permitirá estudiar los Axiomas de Eilemberg – Steenrod (E.S) que son aplicados a una sucesión Funtorial. Más específicamente se define una teoría de Homología.

Como una secuencia de functores satisfaciendo los Axiomas de "E-S".
Los resultados obtenidos son la construcción y relación de $\left[S^n, Y\right]$, con $H\left(S^n\right)$; donde S^n denota la esfera n – dimensional; la construcción y relación anterior se generaliza para un espacio topológico X arbitrario. Es decir que mostramos una construcción alternativa del conjunto de clases de equivalencia $\left[X, Y\right]$ y el espacio Hn(X) para un CW – Complejo X. Finalmente presentamos algunos modelos de aplicación como el isomorfismo entre H°(E) y $\prod_{p\in E} H^{\circ}(p)$ con H°(E) = 0, para q > 0.

Palabras claves: Cohomología, Funtor, Equivalencias, Topológicas, Homotopía, CW – Complejos.

ABSTRACT

The present research work is immersed in the Theory of Cohomology, which is an algebraic dualization of the object called Homology. We begin its development by giving the concepts of categories and functors, to then interpret the singular Homology, as a covariant functor, then we define the so-called CW - spaces and their decomposition that will be very useful to establish cohomological operations. These operations will allow us to study the Eilemberg - Steenrod (E.S) Axioms that are applied to a Funtorial sequence. More specifically a theory of Homology is defined.

As a sequence of functors satisfying the Axioms of "E-S".
The results obtained are the construction and relationship of, with; where denotes the n-dimensional sphere; the above construction and relation generalizes to an arbitrary topological space X. In other words, we show an alternative construction of the set of equivalence classes and the space Hn (X) for a CW - Complex X. Finally, we present some application models such as the isomorphism between H ° (E) and with H ° (E) = 0, for $q > 0$.

Keywords: Cohomology, Functor, Equivalences, Topological, Homotopy, CW - Complexes.

INTRODUCCIÓN

Suponiendo que $C = C_\tau$ representa la categoría cuyos objetos son espacios topológicos con punto base, y donde los morfismos son las aplicaciones continuas preservando punto base, y sea $S = \mathcal{C}_{conj}$ la categoría de conjuntos con elementos distinguidos y $H : \mathcal{C}_\tau \longrightarrow \mathcal{C}_{conj}$ un funtor. Es así que en este trabajo buscamos y proponemos que si H satisface ciertos axiomas, existe un espacio Y único salvo homotopias que tal H es naturalmente equivalente al funtor el cual asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}_\tau$ el conjunto de clases de homotopia de aplicaciones X en Y, y siendo uno de los resultados la representación para teorías de cohomología, los cuales satisfacen todos los axiomas de Eilemberg - Steenrod, salvo el axioma de dimensión. De esta forma presentamos una breve exposición del trabajo que se propone. Empecemos definiendo la llamada Categoría de espacios "$\mathcal{C}_E$"; donde los objetos son espacios topológicos conexos con punto base, los cuales admiten la estructura de CW – Complejo, y sus Morfismos son todas las aplicaciones continuas de *X* en *Y*, llevando punto base de *X* a punto base de *Y*, para cada par X, Y en $\mathcal{C}_E$. Además se asumirá que, si $X \in \mathcal{C}_E$ y $X' \subseteq X$ (subcomplejo) respecto a la misma estructura de CW – complejo de *X*, entonces $X' \in \mathcal{C}_E$. Denotaremos por $\mathcal{C}_E^1$ y $\mathcal{C}_E^0$ el espacio de las categorías los cuales tienen como objetos todos los espacios admitiendo una estructura CW- Complejo y todos los espacios admitiendo la estructura de un CW – Complejo finito, respectivamente. Ahora S denotará la categoría de conjuntos con elementos distinguidos y aplicaciones conjuntos preservando elementos distinguidos. La terna $(\mathrm{X}_1 \cup X_2, X_1, X_2)$ será llamada una triada propia de $\mathcal{C}_E$ si $X_1, X_2, X_1 \cup X_2$ y $\mathrm{X}_1 \cap X_2 \in \mathcal{C}_E$, todos con punto base; también $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1 \cap X_2)$, $(\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1 \cap X_2)$ poseen propiedad de extensión homotopica.

Si X , $Y \in C_E$, entonces el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de X en Y con respecto a homotopías que dejan fijo (invariante) los puntos base de X será denota por [X , Y]. Mientras que [•, Y] denotará el funtor de C_E en S, es decir [•, Y]: $C_E \longrightarrow S$, lo cual asigna a cada $X \in C_E$ el conjunto [X , Y] con la clase de aplicación constante como elemento distinguido, y asigna a cada aplicación $f : X \longrightarrow X'$ la aplicación $\tilde{f} : [X', Y] \longrightarrow [X, Y]$ definida como $f([g]) = [g \circ f]$, donde [g] denota la clase de homotopía de "g". La notación [•, Y] es muy brevemente ambigua, en que esto no indica el dominio de la categoría C_E pero si esta categoría será claramente interpretada por el contexto descrito.

CAPITULO I
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática:

A mediados del siglo pasado las operaciones cohomológicas fue el centro de mayor actividad en topología algebraica. Esta técnica fue suplementando y enriquiciendo la estructura algebraica del anillo de cohomología y ha conducido a progresos importantes, en la teoría de homotopía general y aplicaciones geométricas específicas. En la década de los 50 del siglo pasado los “cuadrados de steenrod” fue el centro de atención muy importante. Es el caso que Robert E. Mosher y Martín C. Tangora. *Cohomology Operations and Aplications in Homotopy Theory Copyright* (c). 1968 New York, construyen tales operaciones, demostrando muchas propiedades y dando numerosas aplicaciones. Tanto los resultados teóricos como algunas aplicaciones en este contexto tienen y ofrecen muchas dificultades para su comprensión. En Topología algebraica existen diferentes métodos que permiten solucionar tales dificultades. Uno de los métodos es: “La no existencia de una construcción Topológica”, la cual se justifica mostrando que su existencia implicaría la existencia de una construcción algebraica. Específicamente consideremos los siguientes problemas: Sea $\mathbb{R}P^n$ es n – espacio proyectivo real (n > 1); y se sabe que su grupo fundamental es $\mathbb{Z}_2$ (es decir $\pi_1\left(\mathbb{R}P^n\right)=\mathbb{Z}_2$). De este modo gesta la siguiente interrogante: Para $m,n\in\mathbb{N}$ con 1 < m < n, existirá una aplicación $\varphi:\mathbb{R}P^n\longrightarrow\mathbb{R}P^m$ tal que induzca un isomorfismo $\varphi:\pi_1(\mathbb{R}P^n)\longrightarrow\ \pi_2(\mathbb{R}P^m)$?. entonces la no existencia de tal aplicación puede ser demostrada al considerar una aplicación inducida algebraica. Ahora de otro lado consideremos el anillo de cohomología de $\mathbb{R}P^n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ llamado anillo de polinomios truncado en una clase ξ_n de cohomología un – dimensional, truncada por la relación $\left(\xi_n\right)^{n+1}=0.$ Si existiera una aplicación φ con la propiedad requerida, entonces la aplicación inducida en cohomología tendría que satisfacer $\varphi\left(a_m\right)=a_n;$ [resultado debido, al Teorema de Hurewicz y al teorema de Coeficientes universales para $H^1\left(\mathbb{R}P^n,\mathbb{Z}_2\right)$] puesto que φ debe ser un homomorfismo de anillos, esto es imposible, para tener $\left(\xi_n\right)^n \neq 0 = \varphi(0) = \varphi\left(\left(\xi_m\right)^n\right)$ para n > m. Hechos como estos ilustran la ventaja de cohomología sobre homología.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Problema General

¿De que forma un funtor contravariante H de la categoría $\mathcal{C}_\tau$ en la categoría S. sería naturalmente equivalente al funtor que asigna el conjunto de clases de homotopía?

Problema Específico

a) ¿De qué manera dos funtores H_1 y H_2 de la categoría $\mathcal{C}_\tau$ en S, determinan que los objetos $H_1(X)$ y $H_2(X)$ sean homotopicamente equivalentes en la categoría S?.

b) ¿De qué manera se podría determinar una representación para teorías de Cohomología?.

1.3. OBJETIVOS

Objetivo General

Uso funtorial de las teorías cohomológicas, para establecer equivalencias de estructuras topológicas y clases de Homotopía.

Objetivo Específico

1. Determinar específicamente transformaciones naturales $T:[\bullet,Y]\longrightarrow H$; para *H* funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos C_τ con punto base, en la categoría de conjuntos con elementos distinguidos S.

2. Determinar una representación para teorías de cohomología que satisfagan la mayoría de los axiomas de Eilemberg – Steenrod.

1.4 LIMITANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Teóricos: La investigación, la cual es naturalmente teórica, más aún abstracta, se encuentra o tiene como limitante teórico la denominada teoría de cohomología.

Temporales: No aplica

Espaciales: No aplica

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

2.1.1 Internacionales

La teoría de Cohomología no puede estudiarse sin no antes entender la teoría de homología, la cual se inicia tradicionalmente como una rama de la topología. H. Poincare, en su trabajo *Analysis situs*. 1895 fue el pionero en establecer y formalizar la definición del concepto de Teoría de Homología. Tal inquietud, tiene que ver con la siguiente situación. Al tener un espacio topológico abstracto y complicado; se pretende obtener y/o analizar en forma sencilla el conteo de agujeros de dimensión arbitraria, obteniendo algunos invariantes lineales. De este modo la homología puede ser visto o pensando como una construcción de invariantes lineales asociados a una situación no lineal. Siendo el caso que a fines del siglo XIX surge el concepto de homología, como producto del estudio de la geometría n – dimensional.

J.B. Linling (1808 – 1882) estudia la multiconexión de figuras en dimensión tres lo cual fue generalizado para el caso n – dimensional por E. Betti (1823 - 1892), y para esto utiliza hipersuperficies sin borde, análogas a las curvas cerradas de Riemann, encontrando de esta forma una caracterización igualdad entre dos superficies. Fue entonces Poincare quien desarrolla una teoría más general, y lo hace a partir del trabajo intuitivo de Betti. En este contexto la teoría de cohomología resulta como dual de la teoría de Homología.

2.1.2 Nacionales

La teoría de Homología y por ende la de cohomología en nuestro medio siempre fue de particular interés, en la universidad Nacional Mayor de San Marcos, primero por el Dr. Oscar Valdivia (✝) y luego por el Dr. Agripino García Armas (✝) (1945 – 2014).

Este último en su obra intitulada "Homología Singular" presenta tal teoría con algunas aplicaciones a resultados clásicos; como determinar modelos algebraicos de los espacios topológicos; tal resultado lo consigue introduciendo el lenguaje de categorías y funtores; y considerando a su vez los denominados espacios de Hopf.

2.2. MARCO

2.2.1 Teórico

La teoría de cohomología, como dual de la Teoría de homología es estudiada y/o tratada. Como sigue: En primer lugar se considera el complejo de cadenas $(C,\partial):\left(C:....\longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \longrightarrow ....\right)$ y un R – módulo M. De aquí se define otro complejo llamado "Complejo de Cocadenas" $\left[Hom_R\left(C,M\right),\delta\right]$; donde $\delta^n := (-1)\ \partial_{n+1}^k : Ham_R\left(C_n,M\right) \longrightarrow \qquad Hom_R\left(C_{n+1},M\right),$ para $n \in \mathbb{Z}$ y $\delta_{n+1}^k := Hom_R\left(C_n,M\right) \longrightarrow Hom_R\left(C_{n+1},M\right)$ es definido como $\delta_{n+1}^k\left(\varphi\right) = \varphi_0 \partial_{n+1},$ para φ en $Hom_R\left(C_{n+1},M\right)$ y en consecuencia el *n*- ésimo *R* – modulo de cocadenas de (C,∂) con valores en M se define por $Hom_R(C_n,M)$ y a su vez para $n \in \mathbb{Z}$ se denota y define el *n*- ésimo módulo de cohomología de (C,∂) con coeficientes en M como:

$$H^n(C,M) := H^n(Hom_R(C,M),\delta) = \frac{Nuc\left(\delta^n\right)}{\mathrm{Im}\left(\delta^{n+1}\right)}$$

A continuación presentamos parte del material bibliográfico utilizado en el marco teórico.

E. Spanier; *Algebraic Topology*, springer verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.

E. Steenrod, *Foundations of algebraic*, Topology press, Princeton, university – 1952.

J. F. Adams Stable *Homotopy Theory lecture Notes in Mathematics 3*, Springer – Verlag, Berlin 1964.

James W. Vick. *Homology Theory Copyright*. London 1973

N. BOURBAKI, *Elements of Mathematics. General Topology. Chapters 1-4. 2nd printing.* Springer – Verlag. New York (2012)

R. ARENS, J. DUGUNDJI, *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math. 1 (1951).

Robert E. Mosher – Martín C. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotopy* Theory Copyright New York, 1968.

Sze – Tsen Hu. *Homology Theory, Halden – Day*. San Francisco 1966.

W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverte, 1982.

2.2.2 Conceptual

Las teorías de Homología y cohomología ambas pueden interpretarse como funtores covariantes y contravariantes respectivamente y desde luego, funtores que por lo general van de la catego9ría $"C_\tau"$ de espacios topológicos a la categoría $C_{g.ab}$ de grupos abelianos. Este proceso conocido como “proceso de algebrización” fueron varios matemáticos que tuvieron interés sobre el particular resultado, creando un nuevo campo al definir el concepto de homología en un contexto puramente algebraico.

2.3. DEFINICIONES DE TÉRMINOS BÁSICOS

a) Categorías y Funtores

Definición (Categoría) (2.3.1) Una categoría “C” consiste de:

1. Una clase de objetos, descritos por Obj (C).
2. Para cualquier pareja de objetos *A*, *B* denotemos el conjunto de Morfismos de A en B por $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ si $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$, entonces *A* y *B* se llaman dominio y rango de f respectivamente, lo cual se escribe: $f : A \longrightarrow B$
3. Para cualquier tripleta ordenada de objetos *A, B, C*. hay una ley de composición $\varphi : Mor(A,B)\ x\ Mor(B,C) \longrightarrow Mor(A,C)$ dada como $\varphi\left(f, g\right) = g \circ f$ tal que verifica:

i) $h \circ \left(g \circ f\right) = \left(h \circ g\right) \circ f$, para $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \wedge h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$

ii) Para todo $A \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$ existe $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ (llamado morfismo identidad) tal que: $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$

Ejemplo (2.3.1): Categoría de Conjuntos $\mathcal{C}$ = Conj

Los objetos de esta categoría son los conjuntos propiamente dichos, mientras que los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos con la operación de composición usual.

Ejemplo (2.3.2): Categoría de un Monoide: $\mathcal{C}$ = Mon

Sea X un monoide. La categoría "$\mathcal{C}$ = Mon" tiene como único objeto a X, y los morfismos son los elementos de X, los productos de los morfismos se definen por la operación de multiplicación de X.

Ejemplo (2.3.3): Categoría de espacios topológicos: $\mathcal{C}$ = Top

Los objetos de la categoría "**$\mathcal{C}$ = Top**" son los espacios topológicos, y los morfismos las aplicaciones continuas con la operación composición usual.

Ejemplo (2.3.4): Categoría de Grupos Abelianos: "$\mathcal{C}$ = *Gab*"

Los objetos de la categoría "**$\mathcal{C}$ = *Gab***" son los grupos abelianos y los morfismos son los homomorfismos de grupos con la composición usual.

Ejemplo (2.3.5): Categoría de un grupo "G": $\mathcal{C} = \mathcal{G}$

Para un grupo "G" la categoría "**$\mathcal{C} = \mathcal{G}$**" tiene como único objeto a G, mientras que los morfismos son los endomorfismos de G.

Ejemplo (2.3.6) : Categoría Producto de dos categorías: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \ x\ \mathcal{C}_2$

Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ dos categorías arbitrarias. La categoría Producto $\mathcal{C}_1$ x $\mathcal{C}_2$ que tiene como objetos pares ordenados (A, B); donde $A \in Obj(\mathcal{C}_1)$, $B \in Obj(\mathcal{C}_2)$ y los morfismos

$Mor_{\mathcal{C}_1 \text{x} \mathcal{C}_2}\left(X_1 X_2\right),\left(Y_1, Y_2\right) = Mor_{\mathcal{C}_1}(X_1, X_2)\ x\ Mor_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2)$

Ejemplo (2.3.7) : Categoría opuesta o dual : $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{op}$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, una categoría opuesta o dual de $\mathcal{C}$ será denotada por $\mathcal{C}^{op}$, cuyos objetos son los mismos objetos de $\mathcal{C}$; mientras que los morfismos está dado como:

$Mor_{\mathcal{C}^{OP}}\left(A, B\right) = Mor_{\mathcal{C}}\left(B, A\right)$.

Definición functor (2.3.2) Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías

1. Un funtor covariante de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, denotado por $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ está definido por:

i) Una aplicación T que asocia a cada $X \in obj(\mathscr{C})$, un $T(X) \in$ Obj $(\mathscr{C}')$

ii) Una aplicación que también denotaremos por T, que asocia a cada elemento $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ un elemento $T(f) \in Mor_{\mathscr{C}}(T(A),T(B))$ tal que: $T(1_A) = 1_{T(A)}$, para todo $A \in Obj(\mathscr{C})$ y $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

2. Un funtor contravariante T de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}'$, escrito por $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ asocia a cada A $\in$ Obj $(\mathscr{C})$, un elemento $T(A) \in$ Obj $(\mathscr{C}')$, y a cada elemento $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ un elemento $T(f) \in Mor_{\mathscr{C}}(T(A),T(B))$, tal que $T(|_A) = 1_{T(A)}$ y $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$

Ejemplo (2.3.8): Funtor Identidad : $T = 1_{\mathscr{C}}$

Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria. El funtor identidad de $\mathscr{C}$ se denota y define como : $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que: $1_{\mathscr{C}}(A) = A$, para todo $A \in Obj(\mathscr{C})$ y $1_{\mathscr{C}}(f) = f$, para todo $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,A)$.

Ejemplo (2.3.9): Funtor Constante: T = Const.

Sea $\mathscr{C}$ una categoría, K $\in Obj(\mathscr{C})$ un elemento fijo. El funtor constante dado en $\mathscr{C}$, se denota y define como ***Const***: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que Const (X) = K para todo $X \in Obj(\mathscr{C})$ y const (f) = 1_K para todo $f \in Mor_{\mathscr{C}}(X,X)$.

Ejemplo (2.3.10): Funtor Composición: "$L \circ T$"

Sean $T : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_2$ y $L : \mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{C}_3$ dos funtores. El funtor composición $L \circ T : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_3$ esta dada como $(L \circ T)(X) = L(T(X))$, para todo $X \in Obj(\mathscr{C}_1)$ y $(L \circ T)(f) = L(T(f))$, para todo $f \in Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$

Ejemplo (2.3.11): Funtor Homomorfismos: Hom (., K)

Sea $\mathscr{C}$ la categoría de los K – espacios vectoriales. El funtor homomorfismo denotado por "Hom" está definido como $Hom : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que Hom (V, K) = V* (dual de V) y Hom (f, K) = f* (transpuesta de f); donde si $f : V \longrightarrow W$, entonces $f^* : Hom(W,K) \longrightarrow Hom(V,K)$ es decir $f^* : W^* \longrightarrow W^*$.

Ejemplo (2.3.12) : Funtor Potencia

Sea $\mathscr{C} = Conj$ y sea $n \in \mathbb{N}$. El funtor n – ésima potencia T : $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ está dado como: T(X) = X^n, para todo $X \in obj(\mathscr{C})$ y $T(f) = f^n$, para todo $f \in Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$.

Ejemplo (2.3.13): Funtor Suspensión: "$\sum$"

Sea la categoría "$\mathscr{C} = Top$". El funtor suspensión $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ está dado como: T(X) = $\sum$X = Suspensión de X. ($\sum$X espacio de identificación de X x I al identificar X x $\{0\}$ y X x $\{1\}$ a puntos, $X \in Obj(\mathscr{C})$, $T(f) = \sum f : \sum X \longrightarrow \sum Y$.

Ejemplo (2.3.14): Funtor Lazo

Sea la categoría "$\mathscr{C} = Top$", y sea $X \in Obj(\mathscr{C})$ y $x_0 \in X$. El funtor lazo $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ es denotado y definido como: $T(X) \triangleq \Omega(X, x_0) = \{\sigma : I \longrightarrow X \,/\, \sigma(0) = x_0 = \sigma(1)\}$ ($\Omega(X, x_0)$ es llamado espacio de lazos). Y T(f) = $\Omega(f) : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$

Ejemplo (2.3.15): Funtor olvido

Sean las categorías "$\mathscr{C} = G_{ab}$" y "$\mathscr{C}' = Conj$". Definamos $L : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ como : $T(G) \in Obj(Conj)$ para cada $G \in Obj(\mathscr{C})$ y para cada homomorfismo de grupos $f : G_1 \longrightarrow G_2$ sea $T(f) : T(G_1) \longrightarrow T(G_2)$ la aplicación entre conjuntos. Claramente T es un funtor Covariante llamado funtor olvido; debido a que T(G) es un simple conjunto, que a "Olvidado" la estructura de grupo, lo mismo ocurre con T(f) que es una simple aplicación olvidando la definición de homomorfismo.

Definición (Morfismos Inversos) (2.3.3) Sea $\mathscr{C}$ una categoría $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ y $g \in Mor_{\mathscr{C}}(B,A)$ tales que $g \circ f = 1_A$. Entonces g se llama inverso a izquierda de f, mientras que f inverso a derecha de f.

Observación (2.3.1).- Si g y h son morfismos inversos a izquierda y derecha respectivamente de un morfismo f, entonces $g = h.$ En efecto $g = g \circ 1 = g \circ (f \circ h) = (g \circ \rho) \circ h = 1 \circ h = h$. El morfismo "f" que verifica esta igualdad se llama isomorfismo o equivalencia.

Definición (Objetos equivalentes) (2.3.4) Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sean A, B $\in$ Obj ($\mathcal{C}$). Se dice que A y B son objetos equivalentes si existe un isomorfismo $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$. En este caso se denota $f : A \cong B$.

Ejemplo (2.3.16).- Un isomorfismo o equivalencia en las categorías Conj, Top y $\mathcal{G}_{ab}$ es una aplicación biyectiva, un homeomorfismo y un isomorfismo (entre grupos) respectivamente.

Ejemplo (2.3.17).- Un isomorfismo en la categoría de un Monoide $\mathcal{C}$ = Mon es todo elemento inversible de dicho monoide.

Teorema (2.3.1).- Sean $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ dos categorías, $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$ un funtor covariante. Si $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ es un isomorfismo entonces $T(f)\in Mor_{\mathcal{C}'}(T(A),T(B))$ es un isomorfismo.

Demostración.- Como $f : A\longrightarrow B$ es un isomorfismo entonces existe $g : B\longrightarrow A$ tal que $g\circ f = 1_A$ y $g\circ f = 1_B$ de donde $T(g\circ f) = T\left(1_A\right) = 1_{T(A)}$. Análogamente $T\left(f\circ g\right) = T\left(1_B\right) = 1_{T(B)}$. En este caso escribimos $g = f^{-1}$ y por ende $T\left(f^{-1}\right) = T(f)^{-1}$.

Definición (Transformación Natural) (2.3.5). Sean T, $L:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$ dos funtores covariantes. Una **Transformación Natural** φ de T a L, descrito como $\varphi : T\longrightarrow L$ es un sistema de morfismos $\varphi_A \in Mor_{\mathcal{C}}\left(T\left(A\right),L\left(A\right)\right)$ uno para cada $A\in Obj(\mathcal{C})$. Tal que para cualquier Morfismo $f \in Mor(A,B)$ el siguiente diagrama conmuta. Es decir: $L\left(f\right)\circ\varphi_A = \varphi_B\circ T(f)$

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & T(B) \arrow[d, "\varphi_B"] \\
L(A) \arrow[r, "L(f)"'] & L(B)
\end{tikzcd}$$

Figura N° 1 Rectángulo conmutativo de una transformación natural de dos funtores covariantes

Fuente : Elaboración propia

Nota.- En el caso que T y L sean funtores contravariantes la definición es similar, invirtiendo las "flechas" de *T(f)* y *L(f)*, es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
T(B) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & T(A) \arrow[d, "\varphi_A"] \\
L(B) \arrow[r, "L(f)"'] & L(A)
\end{tikzcd}
$$

Es decir: $L\left(f\right) \circ \varphi_B = \varphi_A \circ T(f)$

Figura N° 2 Rectángulo conmutativo de una transformación natural de dos funtores contravariantes.

Fuente : Elaboración propia

Definición: (Equivalencia Natural) (2.3.6).- Sean T y L como en la definición anterior. Una transformación natural $\varphi : T \longrightarrow L$ se denomina **equivalencia natural** si φ_A es una equivalencia en $\mathcal{C}'$ para cada objeto A de $\mathcal{C}$.

Ejemplo (2.3.18).- Dada una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ y sea $\mathcal{C}'$ **=** conj (Categoría de conjuntos). Para un objeto fijo A de $\mathcal{C}$ definamos al funtor $H_A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ como $H_A(X) = Mor_{\mathcal{C}}(A, X)$ para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$ y $H_A(f) = f \circ l$, para $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y para $l \in Mor_{\mathcal{C}}(A, X)$.

Observación (2.3.2)**.-** Sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un funtor arbitrario y sea $a \in T(A)$ un elemento fijo. Queremos definir una Transformación Natural φ^a entre los funtores H_A y T es decir $\varphi^a : H_A \longrightarrow T$ dado como: $\varphi^a_X : H_A(X) = Mor_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow T(X)$ tal que $l \mapsto \varphi^a_l = T(l)(a)$

Así obtenemos:

$$\left(\varphi^a_Y \circ H_A(f)\right)_{(l)} = \varphi^a_Y\left(H_A(f)(l)\right) = \varphi^a_Y\left(f \circ l\right) = T\left(f \circ l\right) = \left(T(f) \circ \varphi^a_X\right)(l)$$

Ejemplo (2.3.19).- Dada la categoría $\mathcal{C}$ formada por los K – espacios vectoriales y sea $V \in obj(\mathcal{C})$, asi V* dual de V y V** el bidual de V son objetos de $\mathcal{C}$, entonces existe una aplicación lineal $\rho_V(x) = \hat{x}$ donde $\hat{x}(v^*) = v^*(x),\ x \in V,\ v^* \in V^*,\ \rho$ es una transformación natural del funtor identidad $I_V : V \longrightarrow V$ al funtor $J : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ósea $\rho : I_v \longrightarrow J$. En efecto: sea $f \in Mor_{\mathcal{C}}(V, W)$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "I_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "I_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Figura N° 3 Rectángulo conmutativo en un espacio y su Bidual.

Fuente : Elaboración propia

Es decir:

$$\left(f_0^{**} I_V\right)(x)(\alpha) = \left(f_\alpha^{**}\right)(x) = f_0^{**}\hat{X}(\alpha) = \hat{X}\left(f_\alpha^{*}\right) = \left(f_{(\alpha)}^{*}\right)(x)$$
$$= \alpha(f(x)) = f(x)(\alpha) = (I_W \circ f)(x)(\alpha).$$

Teorema (2.3.2).- Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y $\mathcal{C}' = Conj$ la categoría de conjuntos. Si $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor covariante y $\varphi : H_A \longrightarrow T$ una transformación natural, entonces existe un único elemento $x \in T(A)$ tal que $\varphi = \varphi^x$, es decir: $x = \varphi_A(I_A)$.

Demostración.- Por hipótesis $\varphi : H_A \longrightarrow T$ es una trasformación natural, entonces el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
H_A(A) \arrow[r, "H_A(f)"] \arrow[d] & H_A(X) \arrow[d] \\
\mathrm{T(A)} \arrow[r, "\mathrm{T(f)}"'] & \mathrm{T(X)}
\end{tikzcd}$$

Figura N° 4 Rectángulo conmutativo de un funtor covariante y una transformación natural.

Fuente : Elaboración propia

Para cualquier $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, X)$. En particular $\varphi_X(H_A(f)(I_A)) = (T(f)\varphi_A)(I_A)$. Y como $H_A(f)(I_A) = f \circ I_A = f$, entonces obtenemos $\varphi_x(f) = T(f)(x) = \varphi_X^x(f)$, donde $x = \varphi_A(I_A)$. Ahora supongamos que existe otro $y \in T(A)$ tal que $\varphi = \varphi^y$ luego $x = \varphi_A(I_A) = \varphi_A^y(I_A) = T(I_A)(y) = I_{T(A)}(y) = y$.

Definición (Elemento Universal) (2.3.7) Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $\mathcal{C}' = Conj$ (categoría de conjuntos), y $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un funtor Covariante y $A \in obj(\mathcal{C})$, entonces $u \in T(A)$ es un elemento universal si φ^u es una equivalencia natural.

Observación (2.3.2).- No todo funtor covariante “T” de una categoría arbitraria “$\mathcal{C}$” en la categoría “$\mathcal{C}' = Conj$” posee un elemento universal, si lo posee diremos que T es representable y la pareja (A, u) representa al funtor “T” y está únicamente determinado, salvo equivalencia.

Teorema (2.3.3).- Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria $\mathcal{C}' = Conj$ y sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un funtor representable y sea $w \in T(A)$ un elemento universal. Si $z \in obj(\mathcal{C})$, $z \in T(C)$ entonces existe un único $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ tal que $t(f)(w) = z$. Si “z” es elemento universal, entonces f es una equivalencia.

Demostración.- Si "z" es un elemento universal entonces existe $g \in Mor_{\mathcal{C}}(C,A)$ tal que $T(g)(z)=\varphi_C^z(g)=w;$ de donde se tiene $T(g\circ f)(w)=T(g)\circ(T(f)(w))=T(g)(z)=w$ luego $g\circ f=I_A$ por la universalidad de "w" y así $T(f\circ g)(z)=T(f)\circ T(g)(z)$ $=T(f)(w)=z$ en consecuencia $f\circ g=I_C$ por la universalidad de "z".

b) Espacios Topológicos Con Punto Base

Definición (2.3.8).- Sea (X,τ) un espacio topológico, $x_0\in X$ un punto fijo arbitrariamente elegido es llamado punto base de X, y la pareja (X,x_0) se denomina Espacio con punto base.

Definición (2.3.9).- Sean (X,x_0), (Y,y_0) dos espacios con punto base y $f:X\longrightarrow Y$ una aplicación continua. Se dice que f preserva punto base si $f(x_0)=y_0$.

Ejemplo (2.3.20).- Dados los espacios topológicos $\mathbb{R}$ y S^1 de los números reales y el circulo unitario respectivamente ambos con las topologías usuales, *y* $f:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ una aplicación dada como $f(t)=(sen 2\pi t,\cos 2\pi t)$ y sean los puntos base $x_0=0$ e $y_0=(0,1)$ *de* $\mathbb{R}$ y S^1 respectivamente entonces *"f"* preserva punto base. Análogamente la aplicación $g:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ dada como $g(t)=(\cos 2\pi t, sen 2\pi t)$ preserva punto base, para los puntos $x_0=1$ en $\mathbb{R}$ *e* $y_0=(1,0)$ en S^1.

Observación (2.3.3).- La aplicación $g:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ dada como $g(t)=(\cos 2\pi t, sen 2\pi t)$ puede interpretarse o representarse como una aplicación que envuelve (enrrolla) la recta real con el círculo S^1, aplicando cada intervalo $[n,n+1]$ sobre S^1 durante el proceso.

Definición (2.3.10).– Sean *X, Y* dos espacios topológicos con puntos base x_0 *e* y_0 respectivamente.

Definición (2.3.11).- Sean $f,g:X\longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas *f* es Homotópico a *g,* si existe una aplicación continua $H:X\ x\ I\longrightarrow Y$ tal que $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ y $H(x_0,b)=y_0$ para todo $x\in X$ donde $I=[0,1]$.

Notación.- $H:f\simeq g$, se lee *"f"* es homotopica a *"g"*.

Ejemplo (2.3.21).- Sea X un espacio topológico $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacios y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas; tal que para cada $x \in X$, $f(x)$ y $g(x)$ pueden unirse por un segmento de recta entonces $f \sim g$.

Demostración.- Bastará definir la aplicación $H : X \ x \ I \longrightarrow Y$ como $H(x,t) = (1-t)$ $f(x) + t.g(x)$ para todo $x \in X$, para todo $t \in I$. Claramente H es continua (verificación fácil) más aún $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ por tanto $f \simeq g$.

Proposición (2.3.1).- La relación de homotopía "$\simeq$" es una relación de equivalencia.

En efecto.- Reflexiva.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entonces podemos definir $H : X \ x \ I \longrightarrow Y$ como $H(x,t) = f(x)$ para todo $x \in X$, para todo $t \in I$. Por tanto $f \simeq f$ puesto que $H(x,1) = f(x) = H(x,1)$ y en consecuencia "$\simeq$" es reflexiva.

Simétrica.- Si $f \simeq g$, existe $H : X \text{ x I} \longrightarrow Y$ aplicación continua $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ y $H(x_0,t) = y_0$. Veamos que $g \simeq f$. Para lo cual definamos $G : X \ x \ I \longrightarrow Y$ como $G(x,t) = H(x,1-t)$, para todo $x \in X$, para todo $t \in I$. Obsérvese que: $G(x,0) = H(x,1) = g(x)$, $G(x,1) = H(x,0) = f(x)$, y $G(x_0,t) = H(x_0,1-t) = y_0$. En consecuencia $g \simeq f$ y así "$\simeq$" es simétrica.

Transitiva.- Sean $f \simeq g,\ g \simeq h$ entonces existen aplicaciones continuas $H : X \text{ x I} \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, y $H(x_0,t) = y_0$, Además $G : X \text{ x I} \longrightarrow Y$ tal que $G(x,0) = g(x)$, $G(x,1) = h(x)$, y $G(x_0,t) = y_0$. Ahora definamos la aplicación $L : X \text{ x I} \longrightarrow Y$ como:

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1), 1/2 \le t \le 1 \end{cases}, \text{ entonces } L(x_0,t) = \begin{cases} H(x_0,2t) = y_0, 0 \le t \le 1/2 \\ G(x_0,2t-1) = y_0, 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Claramente $L(x,0) = F(x,0) = f(x), L(x,1) = G(x,1) = h(x)$ y más aún L es continua y por tanto $f \simeq h$.

Nota.- Las clases de equivalencia de una aplicación "f" bajo homotopía "$\simeq$" se denota $[f]$ y se llama Homotopía de *f*. Es decir $[f] = \{g : x \longrightarrow y / g \simeq f\}$.

Proposición (2.3.7).- Sean *X, Y, Z* tres espacios topológicos y sean $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas tal que $f_0 \simeq f_1$ y $g_0, g_1 : Y \longrightarrow Z$ también continuas tal que $g_0 \simeq g_1$ entonces $g_0, g_1 : Y \longrightarrow Z$ también continuas tal que $g_0 \simeq g_1$ entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$

Demostración.- Por hipótesis tenemos que $f_0 \simeq f_1$ entonces existe $H : X \text{ x I} \longrightarrow Y$ continua tal que $H(x,0) = f_0(x),\ H(x,1) = f_1(x).$ Y también como $g_0 \simeq g_1$ existe $G : Y \text{ x I} \longrightarrow Z$ tal que $G(x,0) = g_0(x)$ y $G(x,1) = g_1(x).$ Ahora tomemos la composición $L = g_0 \circ H : X \text{ x I} \longrightarrow Z,$ la cual claramente es continua pues g_0 y H lo son, más aún observamos que :

$L(x,0) = (g_0 \circ H)(x,0) = g_0(H(x,0)) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x)$

$L(x,1) = (g_0 \circ H)(x,1) = g_0(H(x,1)) = g_0(f_1(x)) = (g_0 \circ f_1)(x)$ *entonces*

$g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1.$

De otro lado consideremos las aplicaciones $X \text{ x I} \xrightarrow{f_1 \text{ x I}} Y \text{ x I} \xrightarrow{\text{G}} Z$ entonces :

$G_0(f_1, I)(x,0) = G(f_1(x),0) = g_0(f_1(x)) = (g_0 \circ f_1)(x)$ (i)

$G_0(f_1, I)(x,1) = G(f_1(x),1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$ (ii)

Luego de (i) y (ii) tenemos $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$ finalmente por transitividad $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Definición (2.3.12).- Sean $[f]$, $[g]$ dos clases de equivalencia bajo homotopía $"\simeq"$. Si define $[f] \cdot [g] = [f \circ g]$.

Observación (2.3.4).- Consideremos y escribamos la categoría de Homotopía como: $\mathcal{H}tp$ = Categoría de Homotopía. Los objetos de $\mathcal{H}tp$ son espacios topológicos y los morfismos son las clases de equivalencia $[f]$ donde $f \in Mor_{TOP}(X,Y)$.

(2) Definamos el funtor $\pi : Top \longrightarrow \mathcal{H}tp$ como $\pi(X) = X, X \in obj(top)$ y $\pi(f) = [f],\ f \in Mor_{Top}(X,Y).$

Definición (2.3.13).- Sean *X, Y* dos espacios topológicos. Diremos que *X* es el mismo tipo de homotopía de Y si existen aplicaciones continuas: $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X \wedge f \circ g = 1_Y.$

Nota.- Muchas veces la definición anterior se dice que *X e Y* son homotopicamente equivalentes, y *f* es una equivalencia homotopica.

Ejemplo (2.3.22).- Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo entonces *f* es una equivalencia homotópica.

En efecto.- Como $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces existe $g : Y \longrightarrow X$ continua tal que $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ pero $g \circ f \simeq g \circ f = 1_X \wedge f \circ g \simeq f \circ g = 1_Y$ en consecuencia f es una equivalencia homotópica.

Observación (2.3.5).- El recíproco no es válido en general, pues consideremos $X = S^1$, $Y = S^1 \biguplus J$ donde $J = [(1,0),(2,0)] \subset \mathbb{R}^2$ (segmento de recta) y sea $f : X \longrightarrow Y$ dado como f(x) = x para todo $x \in X$ y $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g(y) = \begin{cases} y, y \in S^1 \\ (1,0), y \in J \end{cases}$. Ahora $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x = 1_X$, $f \circ g \neq 1_Y$ pero $f \circ g \simeq 1_Y$.

Notación.- Sean *X, Y* dos espacios topológicos escribamos

$[X,Y] =$ {Conjunto de todas las clases de equivalencia bajo la relación de homotopía $" \simeq "$ } es decir $[X,Y] = \{[f] / f : X \longrightarrow Y\}$.

Pregunta: ¿Cuándo $[X,Y]$ es un grupo?.

Para dar respuesta a la interrogante, previamente daremos la siguiente definición.

Definición (2.3.14).- Un espacio topológico Y con punto base “y_0” es llamado **H-espacio** si existe una aplicación continua $\mathcal{M} : Y \ x \ Y \longrightarrow Y$ tal que $\mathcal{M} \circ i_1 \simeq i_2 \circ m \simeq 1_y$, donde $i_1, i_2 : Y \longrightarrow Y \ x$ Y son aplicaciones continuas definidas por $e \ i_2(y) = (y_0, y)$ $i_1(y) = (y, y_0)$.

Afirmación (1).- Un *H- espacio “Y”* es asociativo si $m(m \ x \ 1) \simeq \ m(1 \ x \ m)$: $Y \ x \ Y \ x \ Y \longrightarrow Y$ en términos diagrámales:

$$\begin{tikzcd}
Y \, x \, Y \arrow[r, "m"] & Y \\
Y \, x \, Y \, x \, Y \arrow[u, "1_Y \text{ x } m"] \arrow[r, "m \text{ x } 1_Y"'] & Y \, x \, Y \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Figura N° 5 Rectángulo conmutativo en un H-espacio asociativo.

Fuente : Elaboración propia

Afirmación (2).- Un *H- espacio admite inverso.*

Un inverso es una aplicación continua $\mu : Y \longrightarrow Y$ tal que $m(\mu \text{ x } 1)\Delta y \simeq m(1 \text{ x } \mu)\Delta y \simeq ey_0$ donde $ey_0 : Y \longrightarrow \{Y_0\}, \Delta y : Y \longrightarrow Y \text{ x } Y$ aplicación diagonal.

Diagramalmente esto es:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\Delta_Y"] \arrow[dr, "\Delta_Y"'] & Y \, x \, Y \arrow[r, "\mu \text{ x } 1"] & Y \, x \, Y \arrow[r, "\mathrm{m}"] & Y \\
& Y \, x \, Y \arrow[r, "1 \text{ x } \mu"] & Y \, x \, Y \arrow[ur, "\mathrm{m}"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura N° 6 Trapecio Conmutativo, en un H-espacio admitiendo elemento inverso.

Fuente : Elaboración propia

Observación (2.3.6).- Si *Y* es un *H – espacio* Asociativo con inverso, escribiremos *Y es HAI*.

Proposición (2.3.3).- Si *Y es HAI, y X* un espacio Topológico. Entonces $[X,Y]$ es un grupo.

Demostración.- (1°) Sean $[f],[g] \in [X,Y]$. Definamos $[f].[g] \triangleq [m[f \; x \; g]\Delta x] \ldots (\xi_0)$

Afirmación.- La aplicación dada en (ξ_0) está bien definido.

En efecto.- Dados otras aplicaciones $f', g' : X \longrightarrow Y$ tal que $f' \simeq f,\ g' \simeq g$ entonces existen aplicaciones continuas *H*, *G* tal que $H : f' \simeq f$ y $G : g' \simeq g$. Ahora definamos una homología $M : (X\ x\ X)\, x\ I \longrightarrow Y\ x\ Y$ como sigue :

$M((x_1, x_2), t) = (H(x_1, t), G(x_2, t))$. Ahora veamos que:

- $M((x_1, x_2), 0) = (H(x_1, 0), G(x_2, 0)) = (f'\ (x_1), g'\ (x_1)) = (f'\ \mathrm{x}\ \mathrm{g}')(x_1, x_2)$
- $M((x_1, x_2), 0) = (H(x_1, 1), G(x_2, 1)) = (f(x_1), g(x_1)) = (f\ \mathrm{x}\ \mathrm{g})(x_1, x_2)$
- $M((x_0, x_0), t) = (H(x_0, t), G(x_0, 1)) = (Y_0, Y_0)$. Por tanto :

$M : f'\ x\ g' \simeq f\ x\ g$. De aquí resulta que $M : (f\ x\ g)\Delta_X \simeq m(f'\ x\ g')\Delta_X$. Luego $[f].[g] = [m(f' x\ g')\Delta_X]$.

Notación: $f.g := m(f\ x\ g)\Delta_X$

2° Ahora veamos los axiomas de grupo para $[X, Y]$

$g_1)$ Dada una tercera aplicación $h : X \longrightarrow Y$, así tenemos:

$$(f.g).h = m[(f.g)\ x\ h]\Delta_X = m[m(f.g)\ x\ h]\Delta_X \qquad (\alpha)$$

Ahora evaluando en (x_1, x_2) se tiene:

$$[m(f\ \mathrm{x}\ g)\ \Delta_X\ x\ h](x_1, x_2) = [m(f\ \mathrm{x}\ g)\ \Delta_X(x_1),\ h(x_2)]$$

$$= [m(f\ \mathrm{x}\ g)(x_1, x_1),\ h(x_2)] = [m(f(x_1), g(x_1),\ h(x_2))]$$

$$= [(m\ x\ 1)(f(x_1), g(x_1),\ h(x_2))] = [(m\ x\ 1)(f\ \mathrm{x}\ g)(x_1, x_1),\ h(x_2)]$$

$$= [(m\ x\ 1)((f\ \mathrm{x}\ g)\mathrm{x}\ \mathrm{h})(x_1, x_2), (x_3)] = [(m\ x\ 1)(f\ \mathrm{x}\ g\ \mathrm{x}\ \mathrm{h})(\Delta_x\ \mathrm{x}\ 1)]\ (x_1, x_2)$$

Es decir: $m(f\ x\ \mathrm{g})\Delta_X\ \mathrm{x}\ h = (m\ \mathrm{x}\ 1)(f\ \mathrm{x}\ g\ \mathrm{x}\ \mathrm{h})(\Delta_X\ \mathrm{x}\ 1)$ ………………… (θ)

Luego:

$$(f.g).h \overset{(\alpha)}{=} m(m(f\ x\ g)\ \Delta_X\ x\ h)\Delta_X$$

$$= m\big((m\ x\ 1)(f\ x\ g\ x\ h)\ (\Delta_X\ x\ 1)\big)\Delta_X$$

$$\simeq m\big((1\ x\ m)(f\ x\ g\ x\ h)\big)$$

$$\simeq m\big((f\ x\ (g\ x\ h)\ \Delta_X)\Delta_X$$

$$= m(f\ x\ (g\ x\ h))\Delta_X$$

$$= f\,(\text{g}\ x\ \text{h})$$

Por tanto: $([f].[g]).[h]=[f].([g].[h])$

(g_2): Considerando la aplicación constante $e: X \longrightarrow Y$ dada como $e(x)=y_0$. Ahora $f.e=m(f\ x\ e)\Delta_X\ = m.i_1.f\ \simeq 1_Y \circ f\ =\ f$.

Nótese que:

$X \xrightarrow{\Delta_X} X\ x\ X \xrightarrow{f\ x\ e} Y\ x\ \text{Y} \xrightarrow{m} Y,$ de donde :

$f.e=m(f\ x\ e)\Delta_X\ = m(f\ x\ e)_{(X,X)} = m\left(f_{(X)},e_{(X)}\right) = m\left(f_{(X)},y_0\right).$

(g_3): Ahora veamos el inverso de $[f]$ como sigue: $[f]^{-1}=[uf]$, donde $\mu: Y \longrightarrow Y$.

Ahora $uf.f\ = m(uf\ \ x\ f\,)\Delta = m(u\ \text{x}\ 1)\Delta f$. Es decir:

$m(uf\ \ x\ f\,)\Delta(x) = m(uf\ \ x\ f\,)_{(X,X)} = m\left(uf_{(X)},\ f_{(X)}\right) = m\ x\ (U\ x\ I)_{(f(x),f(x))} \simeq$

$m(U\ x\ I)_{(f(x),f(x))}$

$= m(U\ x\ I)\Delta(f(x)).\quad \therefore [X,Y]$ es un grupo.

Proposición (2.3.4).- Sea $g: X_0 \longrightarrow X_1$ una aplicación continua y se *"Y" un HAI* entonces $g^*: [X_1,Y] \longrightarrow [X_0,Y]$ es un homomorfismo de grupos. Más aún si *"g"* es una equivalencia homotópica, entonces g^* es un isomorfismo.

Demostración.- Definamos $g^*([f])=[f\circ g]$ donde $[f]\in[X_1,Y]$. Ahora sean $[f_1],[f_2]\in[X_1,Y]$. Así $f_1.f_2 = m(f_1\ x\ f_2)\Delta$ entonces $f_1.f_2 g = m(f_1\ x\ f_2)\Delta g =$ $m(f_1\ x\ f_2)(g\ x\ \text{g})\Delta = m(f_1 g\ \ \text{x}\ f_2 g)\Delta = f_1 g.f_2 g$, de donde se tiene:

$g*([f_1][f_2]) = g*[f_{1*}f_2] = [f_1.f_2 \circ g] = [f_1 \circ g_0.f_2 \circ g] = [f_1 g].[f_2 g] = g*([f_1]).g*([f_2])$

Por tanto $g*$ es un homomorfismo.

c) Aplicación Homotópica De Pares

Definición (2.3.15).- Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ subespacio. $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una aplicación de pares si $f: X \longrightarrow Y \ y \ f(A) \subset B$.

Definición (2.3.16).- Sean $f,g:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ dos aplicaciones de pares continuas. Diremos que f es homotópica a $g\,(f \simeq g)$ si existe una aplicación continua $H:(X \ x \ I, \ A \ x \ I) \longrightarrow (Y,B)$ tal que $H(x,0) = f(x)$, $\mathrm{H}(x,1) = g(x), x \in X$

Definición (2.3.17).- Si $f_{|A} = g_{|A}$ y existe una homotopía $H: f \simeq g$ tal que $H(a,t)) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, para todo $t \in I$. En este caso se dice que $f \simeq g$, relativo a *A*.

Observación: (2.3.7) $f \simeq g$, relativo a *A*, escribiremos como: $f \simeq g$ *rel (A)*.

(2). Si $A = \Phi \ y \ f \ \simeq g$ *rel(A)* entonces $f \simeq g: X \longrightarrow Y$, y recíprocamente.

(3). La homotopía relativo a *A* es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones *de X en Y*, las clases de equivalencia establecidas se denominan clases de Homotopía relativo a A, lo cual denotaremos como $[X,Y]_A$

(4). Dado $f: X \longrightarrow Y$ escribiremos por $[f]_A$ como elemento de $[X,Y]_A$ determinado por $"f"$

(5). $[X,Y] = [X,Y]_\Phi$.

Definición (2.3.18).- Sea *A* un subespacio de *X*. Diremos que *A* es un retracto si existe una aplicación continua $r: X \longrightarrow A$ tal que $r \circ i \simeq 1_A$, donde $r(a) = a$, para todo $a \in A$ y $i: A \longrightarrow X$ la aplicación inclusión.

Proposición (2.3.5) $(\#_0)\,S^{n-1}$ no es retracto de D^n.

Demostración**.-** Usando Homología.

Proposición (2.3.6).- La relación de que dos espacios son homotopicamente es una relación de equivalencia.

Demostración.- Es inmediato por definición de homotopía.

(i) $X \simeq X$

(ii) Si $X \simeq X$ entonces $Y \simeq X$

(iii) Si $X \simeq Y \wedge Y \simeq Z$ entonces $X \simeq Z$

Teorema (Teorema del Punto fijo) (2.3.4)

Toda aplicación $f : D^n \longrightarrow D^n$ tiene un punto fijo. Es decir existe $x \in D^n$ tal que $f(x) = x.$

Prueba: Supongamos que $f(x) \neq x,$ para todo $x \in D^n$. Consideremos $r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ una aplicación continua, donde D^n es el disco y S^{n-1} la esfera, claramente $S^{n-1} \subset D^n,$ entonces r así definido es una retracción.

Por consiguiente S^{n-1} es un retracto de D^n pero esto es una contradicción a la proposición (2.3.8) en consecuencia el resultado.

Nota.- Sea X un espacio topológico escribamos $X \vee X = \{X \ x \ \{x_0\} \cup \{x_0\} \ x \ X\}.$

Definición (Co – H espacio) (2.3.19). Un espacio topológico X es llamado un CO – H espacio (o simplemente H' - espacio) si existe una aplicación continua.

$\mu : X \longrightarrow X \vee X$ tal que $P_1 \circ \mu \simeq P_2 \mu \simeq 1_X$ donde p_1, p_2 son las restricciones a $X \vee X$ de las aplicaciones proyección : $p_1 : X \vee X \longrightarrow X$ tal que $P_1(x,z) = x$ y $p_2 : X \ x \ X \longrightarrow X$ tal que $P_2(x,y) = y.$

Afirmación.- Un *Co – H* espacio es asociativo si

$(\mu \vee |1)\mu \simeq (1 \vee \mu)\mu : X \longrightarrow X \vee X \vee X$

Diagramando

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r] & X \vee X \vee X \\ X \arrow[u, "\mu"] \arrow[r] & X \vee X \arrow[u, "1 \vee \mu"'] \end{tikzcd}$$

Figura N° 7 Rectángulo conmutativo en un CO-H espacio asociativo.

Fuente : Elaboración propia

Afirmación.- Elemento inverso en un CO – H espacio

El inverso en H' es una aplicación continua.

$\upsilon : X \longrightarrow X$ tal que $\nabla x(\upsilon \text{ x } 1)\mu \simeq \nabla x(1 \text{ x } \upsilon) \simeq e_X$ donde

$\nabla X(x, x_0) = x = \nabla X(x_0, x)$ ……………………….(Aplicación Folding) y

$e_X : X \longrightarrow X$ tal que $e_X(x) = x_0$ (Aplicación continua con punto base)

Notación.- $H'AI$ = [CO – H espacio asociativo con inverso].

Proposición (2.3.7).- Si X es un $H'AI$ espacio e Y un espacio, entonces $[X, Y]$ tiene una estructura de grupo. Más aún

- Si $g : Y_0 \longrightarrow Y_1$ es una aplicación continua entonces $g_X : [X, Y_0] \longrightarrow [X, Y_1]$ es un homomorfismo de grupos.
- Si $g : Y_0 \longrightarrow Y_1$ es una equivalencia homotópica, entonces $g_* : [X, Y_0] \longrightarrow [X, Y_1]$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración.- Sea $[\varphi] \in [X, Y_0]$ entonces $X \xrightarrow{\varphi} Y_0 \xrightarrow{g} Y_1$ tal que $g_*([\varphi]) = [g \circ \varphi]$

- Ahora consideremos $[\varphi_1], [\varphi_2]$ en $[X, Y_0]$ y definamos $[\varphi_1] \bullet [\varphi_2] = [\varphi_1 . \varphi_2]$, (ξ_1) donde $\varphi_1 . \varphi_2 = \nabla(f_1 \vee f_2)$.
- En la operación dada en (ξ_1) está dada bien definida;

En efecto.- Sean $\varphi_i^{'} \in [\varphi_i]$ respectivamente (i = 1, 2) entonces $\varphi_1^{'} \simeq \varphi_1$ y $\varphi_2^{'} \simeq \varphi_2$. Veremos que $[\varphi_1 \bullet \varphi_2] = \left[\nabla\left(\varphi_1^{'} \vee \varphi_2^{'}\right)\mu\right]$. Para lo cual observamos que $\varphi_1^{'} \vee \varphi_2^{'} \simeq \varphi_1 \vee \varphi_2$ ¡verificación inmediata! luego $\nabla\left(\varphi_1^{'} \vee \varphi_2^{'}\right)\mu \simeq \nabla\left(\varphi_1 \vee \varphi_2\right)\mu,$ de donde $[\varphi_1 \bullet \varphi_2] = \left[\nabla\left(\varphi_1 \vee \varphi_2\right)\mu\right] = \left[\nabla\left(\varphi_1^{'} \vee \varphi_2^{'}\right)\mu\right]$. De aquí se verifican:

(i) $[\varphi_1]([\varphi_2][\varphi_3]) = ([\varphi_1][\varphi_2])[\varphi_3]$

(ii) $[\varphi].[e] = [e][\varphi] = [\varphi]$

(iii) $[\varphi][\varphi]^{-1} = [\varphi]^{-1}[\varphi] = [e]$, donde $[f]^{-1} = [f_v]$

También se verifica: $g_*\left([\varphi_1][\varphi_2]\right) = g_*\left([\varphi_1]\right).g_*\left([\varphi_2]\right)$, cuya demostración es idéntico al caso anterior (Para H – espacio).

Ejemplo (2.3.23).- La esfera unitaria S^1 es $H'AI$

En efecto**:** Definamos $\mu : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ y consideremos $I = [0,1]$, $J = [-1,1]$ $= \{t \in \mathbb{R} : |t| \leq 1\} = E^1$, y sea $I \xrightarrow{\ell} J = E' \xrightarrow{\theta} S^1,$ donde $\ell(t) = 2t - 1,$ para todo $t \in I, \theta(x) = (\cos \pi x, sen \pi x)$, esta aplicación induce un homeomorfismo entre $I/_{\sim} \simeq S^1$.

Ahora definamos $\gamma : I \longrightarrow S^1 \vee S^1$ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\theta\ell(2t),*) & ,0 \leq t \leq 1/2 \\ (*,\theta\ell(2t-1)) & ,1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Necesitamos ver que γ sea continua es decir en $t = 1/2$ coinciden. Esto es

$(\theta\ell(1),*) : \theta\ell(1) = \theta(1) = (\cos \pi, sen \pi) = (-1,0)$

$(*,\theta\ell(0)) : \theta\ell(0) = \theta(-1) = (\cos(-\pi), sen(-\pi)) = (-1,0)$

De donde γ es continua. Con $\gamma(0) = (\theta\ell(0),*)$ y $\gamma(1) = (*,\theta\ell(1))$ entonces $\gamma(0) = \gamma(1)$. Así $\gamma -$ induce $\mu : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$

Afirmación.- (S^1, μ) es un $H'AI$

En efecto.- Consideremos la composición $I \xrightarrow{\mu} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{p_1} S^1$ tal que

$$p_1 \circ \mu(t) = \begin{cases} \theta\ell(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ * \quad , & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Claramente $\theta\ell : I \longrightarrow S^1$ es un camino, $C : I \longrightarrow S^1$ es un camino constante es decir $C(t) = *$, Para todo $t \in I$

$$(\theta\ell * C)(t) = \begin{cases} \theta\ell(2t) & ,0 \le t \le 1/2 \\ C(2t-1)\frac{1}{2} \le t \le 1 & \end{cases} \quad \text{, } entonces \text{ p}_1\ \gamma_{(H)} = (\theta\ell * C) \text{ y } C_*\theta\ell \simeq \theta\ell * C \text{ rel}\{0,1\}$$

luego $p_1\gamma \simeq \theta\ell$ rel $\{0,1\}$, pasando a cociente $p_1\mu \simeq 1_{S^1}$ y $p_2\mu \simeq 1_{S^1}$

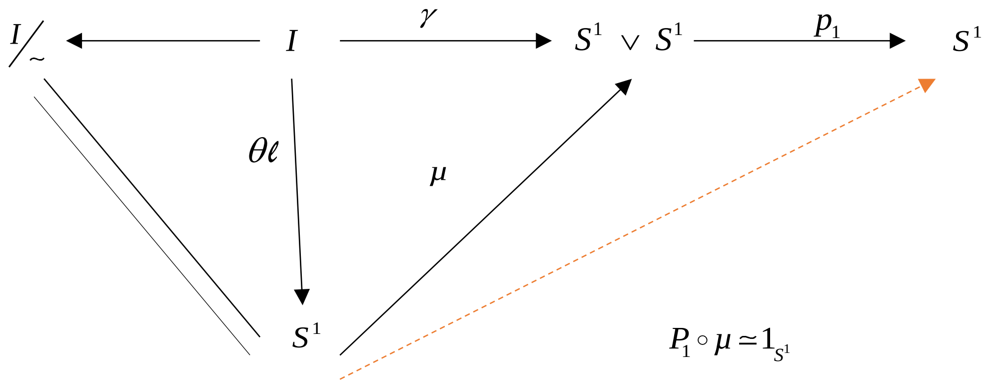

Figura N° 8 Triángulos conmutativos Asociativos de las aplicaciones proyección y multiplicación.

Fuente : Elaboración propia

Sabemos que $f \simeq g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ entonces $\tilde{f} \simeq \tilde{g} : \frac{X}{A} \longrightarrow \frac{X}{B}$. Se cumplen también

(i) $(\mu \vee 1)\mu \simeq (1 \vee \mu)\mu$

(ii) $\nabla x(\upsilon \vee 1)\mu \simeq \nabla x(1\ x\ \upsilon)\mu \simeq e_X$, donde $v : S^1 \longrightarrow S^1$ está dado como $\upsilon(t) = (1-t)$.

Proposición (2.3.8).- Sean $(X, \tau), (Y, \tau')$ dos espacios topológicos.

(I) Si X ó Y es $H'AI$ entonces $X \wedge Y$ es $H'AI$

(II) Si X *es* T_2 *- Espacio* $H'AI$ ó Y es *HAI* entonces Y^X es *HAI*.

Demostración (I)

(i) Supongamos que X es $H'AI$ espacio por demostrar que $X \wedge Y$ lo es:

En efecto: Tenemos $X \xrightarrow{\mu} X$ x X $\overset{P_1}{\underset{P_2}{\rightrightarrows}} X$, $v : X \longrightarrow X$ inverso, de esta manera

se tiene $X \wedge Y \xrightarrow{\mu \wedge 1} (X \vee X) \wedge Y \overset{g}{\simeq} (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y)$ llamando $\bar{u} = g(\mu \wedge 1)$

también $\bar{v} = v \wedge 1 : X \wedge Y \longrightarrow X \wedge Y$

- Veamos que verifiquen las condiciones para que $X \wedge Y$ sea un $H'AI$.

(1) $\bar{P}_1 \bar{u} = \bar{P}_2 \bar{u} \simeq 1_{X \wedge Y}$

(2) $(\bar{\mu} \wedge 1) \bar{\mu} \simeq (1 \wedge \bar{\mu}) \bar{\mu}$

(3) $\nabla(\bar{v} \wedge 1) \bar{u} = \nabla(1 \wedge \bar{v}) \bar{u} = e_{X \wedge Y}, e_{X \wedge Y}$ aplicación constante. Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(X \vee X) \wedge Y \arrow[rr, "g \simeq"] \arrow[dr, "P_1 \wedge 1_Y"'] & & (X \wedge X) \vee (X \wedge Y) \arrow[dl, "\bar{p}_1"] \\
& X \wedge Y &
\end{tikzcd}$$

Figura N° 9 Triángulo conmutativo en los espacios cocientes $X \wedge Y, X \vee Y$.

Fuente : Elaboración propia

Es decir $\bar{p}_1 g = p_1 \wedge 1_y$, donde $(f \wedge g)(m \wedge n) = f(m) \wedge g(n)$.

Ahora $\bar{P}_1 \bar{u} = \bar{P}_1 g(u \wedge 1_Y) = (P_1 \wedge 1_Y)(u \wedge 1_Y) = p_1 u \wedge 1_Y \simeq 1_X \wedge 1_Y \simeq 1_{X \wedge Y}$

Por tanto $\bar{P}_1 \bar{u} \simeq 1_{X \wedge Y}$. Análogamente $\bar{P}_2 \bar{u} \simeq 1_{X \wedge Y}$

- Con similar argumento se demuestra (2°) y (3°)

(ii) Ahora supongamos que Y es $H'AI$ por demostrar que $X \wedge Y$ es $H'AI$ se usa el mismo argumento de la parte (A).

Demostración (II)

1. Supongamos que *X es de Hausdorff* y $H'AI$ con $\mu : X \longrightarrow X \vee X$ y

$v : X \longrightarrow X$ veamos que $Y^X = \{ f : X \longrightarrow X \,/\, f - \textit{función} \}$ es *HAI.*

En efecto: Tenemos la siguiente composición:

Y^X x $Y^X \overset{\psi}{\approx} Y^{X \vee X} \xrightarrow{1^u} Y^X$ donde $1^u(f) = 1 \circ f \circ u$ con $\bar{m} = 1^u \circ \psi$, Ahora definamos para el inverso.

$\bar{v} = 1^v : Y^X \longrightarrow Y^X$, con esto veremos que $\left[Y^X ; \bar{m}, \bar{v} \right]$ es HAI. Esto es :

(i) $\bar{m}\tilde{i}_1 \simeq \bar{m}\tilde{i}_2 \simeq 1y^X$

(ii) $\bar{m}(\bar{m}x1) \simeq \bar{m}(1x\bar{m})$

(iii) $\bar{m}(\bar{v}\ x\ 1)\Delta \simeq \bar{m}(1\ x\ \bar{v})\Delta = ey^x$ *donde* ey^x *- aplicación constante.*

(2°) Veamos ahora cuando Y es *HAI* entonces Y^X es *HAI*. Es decir *si X* es de Hausdorff, Y es HAI con $m : YxY \longrightarrow Y$ (Multiplicación), $\sigma : Y \longrightarrow Y$ (inverso) veremos que Y^X es HAI.

Tenemos: $Y^X x Y^X \xrightarrow{\psi} (Y\ x\ Y)^X \xrightarrow{m_1} Y^X$ llamando $\bar{m} = m^1 \circ \psi;$ entonces $m^1 \circ \psi = mg_1$, con $\bar{\sigma} = \sigma^1 : Y^X \longrightarrow Y^X$ inverso entonces $\left(Y^X, \bar{m}, \bar{\sigma} \right)$ es HAI.

Definición (2.3.20).- Sea (X, τ) un espacio topológico,

- El espacio de caminos *LX* es definido por *LX* = X^I
- El espacio de lazos, ΩX, está definido como $\Omega X = X^{S^1}$
- $\sum X = X \wedge S^1$ = suspensión reducida.

Observación (2.3.8).- S^1 es un $H'AI$ (CO- H espacio) entonces $\Omega X = X^{S^1}$ es un HAI es decir ΩX, es H – espacio asociativo con inversa.

Ejemplo (2.3.24): $\left[\sum X, Y \right], \left[X, \sum Y \right], \left[S^n, Y \right]$ son grupos, para todo espacio topológico *X e Y.*

Definición (2.3.21).- Para cualquier espacio topológico *X*, con punto base $y_0, n \geq 1$ el grupo $\left[S^n, (Y, Y_0) \right] = \left[S^n, Y \right]$ se denomina el n- ésimo grupo de Homotopía de *Y, y* usualmente se denota como: $\pi_n(Y) = \left[S^n, Y \right]$.

Observación (2.3.9).- Si $Y = S^n$. Entonces se tiene:

$$\pi_r\left(S^n\right) = \begin{cases} 0, r < n \\ \mathbb{Z}, r = n \\ ?, r > n \text{ (problema abierto)} \end{cases}$$

Definición (2.3.22).- Un H' espacio X es conmutativo si $\mu \simeq \tau \circ u,$ donde

$\tau : X \vee X \longrightarrow X \vee X$ tal que $\tau\left(x_1, x_2\right) = \left(x_2, x_1\right),$ donde $X \xrightarrow{u} X \vee X \xrightarrow{\tau} X \vee X$

Proposición (2.3.9): Si *X* es un $H'AI$ conmutativo, *Y* es cualquier espacio entonces $\left[X, Y\right]$ es un grupo abeliano.

Demostración**.-** Para todo $[f],[g] \in [X,Y]$. Veamos que $[f][g] = [g][f],$ pues

$f.g = \overline{\gamma}(f \vee g)\mu \simeq \overline{\gamma}(f \vee g)\tau\mu = \nabla(g \vee f)\mu = g.f$. Por tanto: $[f][g] = [g][f]$

Corolario (2.3.14).- Para cualquier espacio *X e Y*; $\left[\sum\left(\sum X\right), Y\right]$ es un grupo abeliano, en particular $\pi_n(Y)$ es un grupo abeliano para $n \geq 2.$

d) Homología Singular

Definición (2.3.23).- Un complejo de cadenas "K" es una sucesión de parejas $\left(k_n, \partial_n\right)_{n \in \mathbb{Z}} = K$ descrito como:

$$K : \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1} \longrightarrow ....$$

Donde: $\left\{k_n\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\left\{\partial_n\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ son dos sucesiones de grupos abelianos y homomorfismos (operadores borde) respectivamente satisfaciendo $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

Nota (i) Los elementos de K_n se llaman n – cadenas

(i) Los elementos de ZnK = Ker $\left(\partial_n\right)$ se llaman n – ciclos.

(ii) Los elementos de BnK = Im $\left(\partial_n\right)$ se llaman n – bordes.

Observación (2.3.11).- Como $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ entonces BnK $\subset ZnK$

De la observación inmediata anterior definimos el grupo cociente denotado y definido como

$$H_n(K) = \frac{Z_n K}{B_n K}$$

Nota (1).- Hn(K) se denomina el Grupo de Homología n – dimensional, este grupo también se puede definir cuando los Kn – son anillos, y así los operadores ∂_n son homomorfismos entre anillos.

(2) Los elementos de Hn(K) son los llamados clases de Homología y así un elemento de Hn(K) lo escribiremos como $[z] = z + Bn = \{z + \partial(x) : x \in K_{n+1}\}$

(3) Sean $z_n, z_n^{'} \in z_n K.$ Se dice que z_n y $z_n^{'}$ son ciclos homólogos sii $z_n - z_n^{'} \in B_n K$ es decir $Z_n + B_n K = Z_n^{'} + B_n K$.

Definición (2.3.24).- Sean K, K' dos complejos de cadenas. Una aplicación de cadenas $f : K \longrightarrow K'$ es una sucesión de homomorfismos $f_n : K_n \longrightarrow K_n^{'}$ tal que el siguiente diagrama conmuta. Es decir $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n^{'} \circ f_{n-1}$, para todo n $\in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & K_n^{'} \arrow[d, "\partial_n^{'}"] \\
K_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & K_{n-1}^{'}
\end{tikzcd}$$

Figura N° 10 Cuadrado conmutativo, de una aplicación de Cadenas

Fuente : Elaboración propia

Proposición (2.3.10) (δ_0) Sean $f : K \longrightarrow K'$ y $g : K' \longrightarrow K''$ dos aplicaciones de cadenas entonces $g \circ f : K \longrightarrow K''$ es una aplicación de cadenas.

Demostración.- Bastará definir $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ se prueba de modo rutinario que: $\partial_n^{''} \circ (g \circ f)_n = (g \circ f)_{n-1} \circ \partial_n$ y en consecuencia se tiene que $g \circ f$ es una aplicación de cadenas.

Observación (2.3.11).- (1) Los complejos de cadenas y aplicaciones de cadenas forman una categoría que lo denotaremos como $"\partial gA"$.

(2) Si $f : K' \longrightarrow K$ es una aplicación de codenas entonces se tiene :

(i) $f_n(Z_n K') \subseteq Z_n K$ (ii) $f_n(B_n K') \subseteq B_n K.$ (Verificación – inmediata).

(3) Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z_nK' \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "{[\bullet]}"'] & Z_nK \arrow[d, "{[\bullet]}"] \\
\dfrac{Z_nK'}{B_nK'} \arrow[r, "H_n(f_n)=(f_n)_*"] & \dfrac{Z_nK}{B_nK}
\end{tikzcd}$$

$$(f_n)_*([z']) = H_n(f_n)([z']) = [f_n(z')]$$

Figura N° 11 Cuadrado conmutativo de aplicaciones inducidas al cociente de ciclos y bordes.

Fuente : Elaboración propia

Notación.- $H_n(f) = f_*$, si $H_n(f_n) = (f_n)_*$

Proposición (2.3.11): Si $K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} K''$ son aplicaciones de cadenas. Se tiene:

- $(g \circ f)_* = Hn(g \circ f) = Hn(g) \circ Hn(f) = g_* \circ f_*$
- $(1_k)_* = Hn(1_K) = 1_{Hn(k)} = 1_{H_*(k)}$ Verificación : inmediata.

Proposición (2.3.12).- Isomorfismo en la categoría "∂gA" implica isomorfismo en $(gA)_{n\in\mathbb{Z}}$, y recíprocamente.

En efecto.- Isomorfismo en "∂gA" significa isomorfismo entre Complejos de Codenas es decir si $f : K' \longrightarrow K$ es isomorfismo, entonces existe $g : K \longrightarrow K'$ aplicación de codenas tales que $g \circ f = 1_{K'} \wedge f \circ g = 1_K$ obteniéndose $g_n \circ f_n = (g \circ f)_n = (1_{K'})_n = 1_{K_n'}$ y $f_n \circ g_n = (f \circ g)_n = (1_K)_n = 1_{K_n}$. Por tanto f_n es un isomorfismo en $(gA)_{n\in\mathbb{Z}}$ y recíprocamente.

Definición (2.3.25).- Se dice que un Complejo $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$K : \ldots\ldots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots$

Es un complejo exacto si $\operatorname{Im}(\partial_{n+1}) = Ker(\partial_n)$ con $n \in \mathbb{Z}$, $H_nK = 0$ (Complejo acíclico).

Ejemplo (2.3.25).- $K : \ldots\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow Z_1 \xrightarrow{\partial_1} Z \xrightarrow{\partial_2} Z_2 \longrightarrow \ldots\ldots$

Tal que $\partial(n) = 2n$ es un complejo de cadenas. Pues $\partial_2 \circ \partial_1 = 0$.

Ejemplo (2.3.26) (Aplicación Cono)

Sea $f : K \longrightarrow L$ una aplicación de cadenas definamos un **complejo cf** como $\left(cf\right)_n = L_n \oplus K_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}.$ Pues $\partial_n^{cf} : \left(Cf\right)_n \longrightarrow \left(Cf\right)_{n-1}.$ Nótese que $\partial_n^{cf} : \left(Cf\right)_n \longrightarrow \left(Cf\right)_{n-1}$ y $L_{n+1} \oplus L_n \longrightarrow L_n \oplus K_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus K_{n-2}$.

Observación (2.3.12).- El siguiente diagrama es obtenido de modo natural a partir de las definiciones respectivas.

$$
\begin{tikzcd}
K_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}^K"'] & L_{n+1} \arrow[d, "\partial_{n+1}^L"] \\
K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n^K"'] & L_n \arrow[d, "\partial_n^L"] \\
K_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\partial_{n-1}^K"'] & L_{n-1} \arrow[d, "\partial_{n-1}^L"] \\
K_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & L_{n-2}
\end{tikzcd}
$$

Figura N° 12 Cuadrados conmutativos de la aplicación cono, con sus respectivos operadores borde.

Fuente : Elaboración propia

Ahora para $y \in Ln \ \wedge \ \ x \in K_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$ definamos $\partial_n^{cf}\left(y, x\right) = \left(\partial_n^L(y) + f_{n-1}(x), -\partial_{n-1}^k(x)\right).$

Además $\partial_n^{cf} \circ \partial_{n+1}^{cf} = 0.$ En efecto para (x, y) $\in$ $\left(Cf\right)_{n+1}$

$\partial_n^{cf}\partial_{n+1}^{cf}(y, x) = \partial_n^{cf} \ \left(\partial_n^L(y) + f_{n-1}(x), -\partial_{n-1}^k(x)\right)$

$$=\left(\partial_n^L(\partial_{n+1}^L(y)+f_n(x))+f_{n-1}\left(-\partial_n(x)\right),-\partial_{n-1}^k\left(\partial_{n-1}^k(x)\right)\right)$$

$$=\left(\partial_n^L\partial_{n+1}^L(y)+\partial_n^L f_n(x)-f_{n-1}\partial_n(x),-\partial_{n-1}^k\partial_n(x)\right)$$

$$=\left(\partial_n^L f_n(x)-\partial_n^L\circ f_n(x),0\right)=(0,0)$$

Observación (2.3.13).- (1).- Si L = 0, entonces f = 0, en consecuencia

$K^+:(cf)_n=K_{n-1}$ y $\partial_n^{cf}=\partial_{n-1}^k$.

$K^+:$ Suspensión del complejo K. Asi $H_nK^+=H_{n-1}K.$

(2) Si $1_k:K\longrightarrow K$ entonces $C\left(1_K\right)$ $\equiv$ Cono del Complejo K.

(3) Sea f : $K\longrightarrow L$ una aplicación de cadenas.

Así tenemos : $0\longrightarrow L\xrightarrow{i}cf\xrightarrow{p}K^*\longrightarrow 0$ $\left(\xi_*\right)$ es exacta con i(y) = (y, 0) , p(y, x) = x con (y, x) $\in$ Cf, existe $g:Cf\longrightarrow L$ tal que g(y, x) = x y así $g\circ i(y)=g(y,0)=y,$ en consecuencia la sucesión $\left(\xi_*\right)$ escinde.

Definición (2.3.26).- Sea K un complejo de cadenas, $K_n^{'}\subset K_n$ subgrupos tal que $\partial_n\left(K_n^{'}\right)\subset K_{n-1}^{'}$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ se tiene:

$.............\longrightarrow K_{n+1}^{'}\xrightarrow{\partial_{n+1}^{'}}K_n^{'}\xrightarrow{\partial_n^{'}}K_{n+1}^{'}\longrightarrow......$. Además $\partial_n^{'}\circ\partial_{n+1}^{'}=0$ y así se tiene el complejo de cadenas $i:K'\longrightarrow K$ de este modo K' se denomina **Subcomplejo de K.**

Ejemplo (2.3.27): Si K' es un subcomplejo de K, $\dfrac{K}{K'},K_n^{'}\subset K_n,\ \partial_n\left(K_n^{'}\right)\subset K_{n-1}^{'}$ así definimos $\left(\dfrac{K}{K'}\right)_n=\dfrac{K_n}{K_n^{'}},$ para n $\in\mathbb{Z}$. $\overline{\partial_n}:\left(\dfrac{K}{K'}\right)_n\longrightarrow\left(\dfrac{K}{K'}\right)_{n-1}$. Así: $\overline{\partial_n}\left(\left[z\right]\right)=\left[\partial_n\left(z\right)\right],$ $\overline{\partial_n}\circ\overline{\partial}_{n+1}=0.$ En términos diagramales se tiene:

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "{[\ ]}"'] & K_{n-1} \arrow[d, "{[\ ]}"] \\
\dfrac{K_n}{K_n^{'}} \arrow[r, "\overline{\partial}_n"] & \dfrac{K_{n-1}}{K_{n-1}^{'}}
\end{tikzcd}$$

Figura N° 13 Cuadrados conmutativos en el cociente de los Complejos de cadenas.

Fuente : Elaboración propia

Ejemplo (2.3.28): Si $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos de cadenas, entonces la sucesión $HK' \xrightarrow{i_*} HK \xrightarrow{P_*} HK''$ es una sucesión exacta en Homología. La verificación es rutinaria aplicando la definición.

Proposición (2.3.13).- La sucesión exacta corta de aplicaciones de cadenas:

$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ **.** Induce en Homología una sucesión exacta larga

$$.....\longrightarrow H_n K' \xrightarrow{i_*} H_n K \xrightarrow{P_*} H_n K'' \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1} K' \xrightarrow{i_*} H_{n-1} K \xrightarrow{P_*} H_n K''$$

Demostración.- (Agripino García Armas, Homología Singular Página 56).

Definición de Homología Singular (2.3.27)

En esta sección construiremos un funtor covariante de la categoría de parejas de espacios topológicos a la categoría algebraica de grupos abelianos que soportarán los llamados Axiomas de Eilemberg Steenrood (Tópico que veremos más adelante).

En el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^{p+1}$ consideremos el conjunto

$$\Delta_p = \left\{ \left(x_0, x_1, ..., x_p \right) \in \mathbb{R}^{p+1} : \sum_{j=0}^{p} x_j = 1,\ x_j \geq 0, \forall j = 0,1,...., p \right\}$$

Observación (2.3.14) (i).- Claramente Δ_P es un subconjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^{p+1}$. Llamando P – simplejo estándar. Más aún es un $\mathbb{R}$ subespacio vectorial cuya base es $\left\{ e^0, e^1, ..., e^p \right\} \subset \Delta_P$.

(ii) Considerando las aplicaciones $\varepsilon_p^J : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$, dadas como $\varepsilon_p^j \left(x_0, x_1, ..., x_{p-1} \right)$ $= \left(x_0, x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_j, ..., x_{p-1} \right)$ es inmediato verificar que $\varepsilon_p^j \circ \varepsilon_{p-1}^k = \varepsilon_p^k \circ \varepsilon_{p-1}^{j-1}$ siempre que $0 \leq k \leq j \leq p$.

(iii) $\operatorname{Im}\left(\varepsilon_p^j \right) = \varepsilon_p^k \left(\Delta_{p-1} \right) = \left\{ \left(x_0, ..., x_k, ..., x_p \right) \in \Delta p : x_k = 0 \right\}$

Definición (2.3.28).- Sea X un espacio topológico. Para $p \geq 0$, un P – simplejo singular en X es una aplicación continua $\sigma_P : \Delta_P \longrightarrow X$

Observación (2.3.15).- (i) Para p > 0, 0 $\leq k \leq p$. La k–cara de $\sigma_p, \partial_k \sigma_p$ es el (P-1) – simplejo singular $\sigma_p \circ \varepsilon_p^k$ es decir $\underset{k}{\partial} . \sigma_p = \sigma_p \circ \varepsilon_p^k$.

(ii) Escribamos el conjunto $Sp(x) = gen\left(\left\{ \sigma_p : \Delta_p \longrightarrow X \,/\, \sigma_p \text{ es un p - simplejo} \right\} \right)$

(iii) Si $\alpha \in S_p(X)$ entonces $\alpha = \sum_{finito} C_\sigma \sigma_p$ está representado de manera única como una Combinación lineal de p – simplejos σ_p.

(iv) Para p < 0 Escribamos $\Delta_p(X) = 0$, definamos $\partial_p : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_{p-1}(X)$ como $\partial_p\left(\sigma_p\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_p \circ \varepsilon_p^k.$

Proposición (2.3.14).- $\partial_{p-1} \circ \partial_p$ **= 0**

En efecto.- Para la verificación bastaría evaluar en los generadores

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p\left(\sigma_p\right) = \partial_{p-1}\left[\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \partial_p\right] \circ \varepsilon_p^k = \sum_{k,j}^{p} (-1)^{k+j}\left(\sigma_p \circ \varepsilon_p^k \circ \varepsilon_{p-1}^j\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j<k} (-1)^{j+k} \sigma_p \circ \varepsilon_p^J \circ \varepsilon_{p-1}^{K-1}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k<j} (-1)^{j+k} \partial_p \circ \varepsilon_p^k \circ \varepsilon_{p-1}^j}_{S_2}$$

En el sumando "S_1" reemplazamos (k-1) por j mientras que en el sumando S_2, j por k. de donde

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p\left(\sigma_p\right) = \sum_{k \leq j} (-1)^{j+k+1} \sigma \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^j + \sum_{k \leq j} (-1)^{k+1} \sigma \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^j = 0$$

Corolario (2.3.21).- $\Delta\left(X\right) = \left(\Delta_p(X), \partial_p\right)$ es un Complejo de Cadenas, llamado Complejo singular de X.

Demostración**.-** Es inmediato de la proposición anterior.

Definición (2.3.29).- Al grupo de Homología del Complejo de Cadenas $\Delta(X)$ descrito como $H_p(X) = H_p(\Delta(X)$ se llama el p-ésimo grupo de Homología Singular de X.

Ejemplo (2.3.29).- Dado el complejo: $\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ entonces:

$$H_p(\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, \ p \neq 0 \\ \mathbb{Z}, \ p = 0 \end{cases}$$

Ejemplo (2.3.30).- Sea $X = \{X_0\}$ un espacio topológico unitario, entonces

$$H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ p = 0 \\ 0, \ p \neq 0 \end{cases}$$

En efecto.- Para $p \geq 0$ hay un único simplejo singular en X; esto es $\sigma_p : \Delta_P \longrightarrow X$, para p > 0 $\wedge$ 0 $\leq$ k $\leq$ p, así tenemos $\varepsilon_p^k : \Delta_{P-1} \longrightarrow \Delta_p X$ y $\sigma_p \circ \varepsilon_p^j = \sigma_{p-1}$. De este modo consideremos el complejo de cadenas siguiente:

$\Delta(X) = \Delta(\{X_0\}) : \ldots\ldots \longrightarrow \Delta_2(\{X_0\}) \longrightarrow \Delta_1(\{X_0\}) \longrightarrow \Delta_0(\{X_0\}) \longrightarrow 0$ donde cada $\Delta_p(\{X_0\})$ es un grupo cíclico no finito generado por σ_p . Mientras que el operador borde está dada por

$\partial(\sigma_P) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\sigma_p \circ \varepsilon_p^k\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_{p-1}$ es decir para p = 2t – 1 y p = 2t, t $\in$ $\mathbb{Z}$ tenemos:

- $\partial(\sigma_{2t-1}) = \sigma_{t-1} - \sigma_{t-1} + \sigma_{t-1} - \sigma_{t-1} + \ldots\ldots + \sigma_{t-1} - \sigma_{t-1} = 0$
- $\partial(\sigma_{2t}) = \sigma_{t-1} - \sigma_{t-1} + \sigma_{t-1} - \sigma_{t-1} + \ldots\ldots + \sigma_{t-1} - \sigma_{t-1} = \sigma_{t-1}$

De esta manera tenemos : en consecuencia $Z_p(\{x_0\}) = \begin{cases} 0, & p \ par \\ \sigma_p \cong \mathbb{Z}, & p \ impar \end{cases}$

$$H_p(\{x_0\}) = \frac{Z_p(\{x_0\})}{B_p(\{x_0\})} = \begin{cases} 0, \ si & p \geq 1 \\ \mathbb{Z}, \ si & p = 0 \end{cases}$$

Observación (2.3.16).- Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces f – induce un homomorfismo $\Delta_P(f) : \Delta_P(X) \longrightarrow \Delta_P(Y)$ dado como $\Delta_p(f)(\sigma_p) = f \circ \sigma_p$, donde $\sigma_p : \Delta_p \longrightarrow X$ es un simplejo singular de X y el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \Delta_p(X) \arrow[r, "\Delta_p(f)"] \arrow[d, "\partial_p"'] & \Delta_p(Y) \arrow[d, "\partial'_p"] \\ \Delta_{p-1}(X) \arrow[r, "\Delta_{p-1}(f)"] & \Delta_{p-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Figura N° 14 Rectángulo conmutativo, de un homomorfismo inducido por una aplicación continua.

Fuente : Elaboración propia

Veamos.- Para el simplejo arbitrario $\sigma_p : \Delta_p \longrightarrow X$

$$\Delta_{p-1}(f)\left(\partial_p\left(\sigma_p\right)\right)=\Delta_{p-1}(f)\left[\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\sigma_p\circ\varepsilon^k\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\Delta_{p-1}(f)\left(\sigma_p\circ\varepsilon^k\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k f\circ\sigma_p\circ\varepsilon^k$$

$$=\partial_p^{'}\circ\Delta_p(f)\left(\sigma_p\right)$$

$\therefore$ El resultado.

Consecuencia (δ_2) De la observación anterior tenemos:

(1) $\Delta(f):\Delta(X)\longrightarrow\Delta(Y)$ es una aplicación de cadenas que lo denotaremos como $f_*=\Delta(f)$.

(2) Como $\Delta(f):\Delta(X)\longrightarrow\Delta(Y)$ es una aplicación de cadenas entonces de la observación (2.3.13) parte (3) se tiene que $\Delta(f)$ induce un homomorfismo en homología $H_p\left(\Delta(f)\right):H_p(X)\longrightarrow H_p(Y)$ el cual es denotado por $f_*=H_p\left(\Delta(f)\right)$.

(3) También se tiene que: Si $f:X\longrightarrow Y,\quad g:Y\longrightarrow Z$ son aplicaciones continuas y $1_X:X\longrightarrow X$ la aplicación identidad, entonces:

(a) $H_p(g\circ f)=H_p(g)\circ H_p(f)$, para todo p $\in\mathbb{Z}$

(b) $H_p(1_X)=I_{\Delta p}(X)$, para todo p $\in\mathbb{Z}$

(4) El Complejo Singular $\Delta(X)=\left(\Delta_p(X),\partial_p\right)$ es un funtor que simplemente lo denotaremos como "Δ" que va de la categoría de espacios topológicos en la categoría de complejos de cadenas esto es: $\Delta:\mathcal{C}_{top}\longrightarrow\partial g\mathcal{A}$

(5) Es fácil observar que se tiene el funtor

$T:\partial g\mathcal{A}\longrightarrow g\mathcal{A}$, que asocia a cada complejo de cadenas su correspondiente grupo de homología.

(6) Tenemos la composición de funtores

$\mathcal{C}_{top}\xrightarrow{\Delta}\partial g\mathcal{A}\xrightarrow{T}g\mathcal{A}$; así $T\circ\Delta:\mathcal{C}_{top}\longrightarrow g\mathcal{A}$, que fácilmente se puede extender a $T\circ\Delta:\mathcal{C}_{top}^2\longrightarrow g\mathcal{A}$

Nota.- La extensión obtenida en (6) verificará los denominados Axiomas de Eilemberg – Steenrod.

Ejemplo (2.3.31) : Sea (X,τ) un espacio topológico A < X (Subespacio) e $i: A \longrightarrow X$ la aplicación inclusión entonces $i_{\#q}: \Delta_p(A) \longrightarrow \Delta_p(X)$ es inyectivo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

En efecto.- Sea $\sigma \in Nuc(i_{\#q})$ de donde 0 = $i_{\#q}(\sigma) = i\sigma$ es decir $i\sigma = 0$, pero como "i" es monomorfismo entonces σ =0 y por tanto $Nuc(i_{\#q}) = \{0\}$ y así $i_{\#q}$ es inyectiva.

Ejemplo (2.3.32): Sean X y A como en el ejemplo anterior.

Si $\partial_p: \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_{p-1}(X)$ entonces $\partial_p(\Delta_p(A)) \subset \Delta_{p-1}(A)$. La verificación es inmediata.

Observación (2.3.17).- De los ejemplos inmediatos anteriores tenemos $\Delta(A) = \left(\Delta(A), \partial_p \big|_{\Delta(A)}\right)_{p \in \mathbb{Z}}$ es un subcomplejo de $\Delta(X)$. De aquí denotaremos por $\Delta(X,A)$ al complejo cociente $\dfrac{\Delta(X)}{\Delta(A)}$ es decir $\Delta_p(X,A) = \left(\Delta_p(X,A), \overline{\partial}_p\right)$. El homomorfismo inyectivo $\partial_p(\Delta_p(A)) \subset \Delta_{p-1}(A)$ induce en el cociente el homomorfismo.

$\overline{\partial}_p: \Delta_p(X,A) \longrightarrow \Delta_p(X,A)$ tal que $\overline{\partial}_{p-1} \circ \overline{\partial}_p = 0$. De este modo al complejo de cadenas $\dfrac{\Delta(X)}{\Delta(A)}$ se llama **Complejo Singular** de la pareja (X, A).

Definición (2.3.30).- Al grupo de homología del complejo de cadenas (X, A), $H_p(\Delta(X,A))$, se llama el **p-ésimo grupo de homología relativa** de X módulo A, el cual denotaremos como $H_p(X,A) = H_p(\Delta(X,A))$.

Observación (2.3.18).- Si A ≠ ϕ, $\Delta(X,A) = \Delta(X)$.

Definición (2.3.31).- Una Teoría de Homología "H_n" es una familia de funtores covariantes de la categoría de parejas de espacios topológicos a la categoría de grupos abelianos. Esto es para n $\in \mathbb{Z}$. $H_n: \mathcal{C}^2_{top} \longrightarrow g\mathcal{A}$ Conjuntamente con las transformaciones naturales

$\partial: H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ (Homomorfismo conexión)

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y cualquier pareja de espacios (X, A) satisfaciendo los axiomas siguientes:

Axioma (1) (Naturalidad).- Sea $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ una aplicación de pares de espacios topológicos entonces se tiene el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
H_p(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_* = H_p(f)"'] & H_{p-1}(A) \arrow[d, "H_{p-1}(f|_A) = f_*"] \\
H_p(Y,B) \arrow[r, "\partial"'] & H_{p-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Es decir: $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$

Figura N° 15 Rectángulo conmutativo del axioma de naturalidad, para una aplicación de pares topológicos.

Fuente : Elaboración propia

Axioma (2) Exactitud Para todo par de espacios (X, A) hay una secuencia exacta larga

$$\ldots\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A)$$

Donde $i:(A,\phi) \longrightarrow (X,\phi) \wedge J:(X,\phi) \longrightarrow (X,A)$ son las aplicaciones inclusión.

Axioma (3) Homotopía.- Sean f, g : (X, A) $\longrightarrow (Y,B)$ dos aplicaciones homotópicas $(f \simeq g)$, entonces $f_* = H_p(f) = H_p(g) = g_* : H_p(X,A) \longrightarrow H_p(Y,B)$.

Axioma (4) Escisión.- Sea (X,τ) un espacio topológico A < X y U∈ τ tal que $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A} = \operatorname{int}(A)$ entonces la inclusión J : (X - U, A - U) $\longrightarrow (X,A)$ induce un isomorfismo $H_p(j) = J$ esto es: $J: H_n(X-U, A-U) \longrightarrow H_n(X,A)$ para cada entero n ∈ $\mathbb{Z}$.

Axioma (5) (Normalización o Dimensión).- Sea $X \equiv \{x_0\}$ un espacio topológico unitario entonces $H_n(X) = 0$ para n ≠ 0.

Nota.- Los axiomas descritos líneas arriba se llaman Axiomas de Eilemberg Stenrod.

Teorema (2.3.4).- El funtor composición de la Consecuencia (δ_2) parte (6),

$T \circ \Delta : \mathscr{C}^2_{top} \longrightarrow g\mathscr{A}$ es una teoría de Homología.

Demostración: [Ver: Agripino García: Homología Singular pag. 77]

Definición (2.3.32).- La teoría de Homología establecida u obtenida en el Teorema inmediato anterior se llama: **Homología Singular.**

Observación (2.3.19).- Una **Teoría de Homología Generalizada** es una teoría de Homología H_n que satisface los cuatro primeros axiomas de Eilemberg – Steenrod (i.e. excepto el axioma de dimensión).

(2) Una Teoría de Homología Ordinaria es una teoría de Homología H_n que verifica todos los axiomas de Eilemberg – Steenrod.

Definición (2.3.33): Sea (X,τ) un espacio topología y $Y=\{y_0\}$ un espacio unitario, y sea $\mu : X \longrightarrow Y$ una aplicación constante. El homomorfismo inducido $\mu_* : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$ se llama **Aumentación.**

Proposición (2.3.15).- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu^X"'] & Y \arrow[d, "\mu^Y"] \\
\{Y_0\} \arrow[r, "I"] & \{Y_0\}
\end{tikzcd}$$

Figura N° 16 Rectángulo conmutativo de una aplicación continua

Fuente : Elaboración propia

Entonces el diagrama inducido también conmuta.

$$\begin{tikzcd} H_p(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mu_*^X"'] & H_p(Y) \arrow[d, "\mu_*^Y"] \\ H_p(\{y_0\}) \arrow[r, "I_*"] & H_p(\{y_0\}) \end{tikzcd}$$

Figura N° 17 Rectángulo conmutativo, inducido en homología, por una aplicación continua.

Fuente : Elaboración propia

Es decir: $I_* \circ \mu_*^X = \mu_*^Y \circ f_*$. Además : $f_*(Nuc(\mu_*^X)) \subset Nuc(\mu_*^Y)$.

En efecto: Sea $z \in f_*\left(Nuc\left(u_*^X\right)\right)$ de donde $z = f_*(x)$ para algún $x \in Nuc\left(u_*^X\right)$ y así $u_*^x(x) = 0$ luego $u_*^Y(z) = u_*^Y(f_*(x)) = u_*^X(x) = 0$ y en consecuencia $z \in Nuc\left(u_*^Y\right)$

Definición (2.3.34).- $\tilde{H}_p(X) = Nuc\left(U_*^X\right)$ se llama **Homología Reducida** de X.

Ejemplo (2.3.33).- Para un espacio topológico “X” se tiene la siguiente relación

$$H_p(X) = \begin{cases} \tilde{H}_p(X) \oplus \mathbb{Z}, \ si\ p = 0 \\ \tilde{H}_p(X), \ si\ p \neq 0 \end{cases}$$

En efecto: • Si $p \neq 0$ se tiene $U_*^X : H_p(X) \longrightarrow H_p(x_0) = 0$ luego $\tilde{H}_p(X)$ $= Nuc\left(U_*^X\right) = H_p(X)$ con $x_0 \in X$.

• Si p = 0, la aplicación $i : \{x_0\} \longrightarrow X$ es un inverso derecho de u_*^X es decir $u^X \circ i = I_{\{x_0\}}$ de aquí $u_*^X \circ i_* = I$, y así tenemos $H_p(X) = \mathrm{Im}(i_*) \oplus \quad Nuc\left(U_*^X\right) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_p(X)$.

Ejemplo (2.3.33).- Sea x_0 un punto base del espacio X entonces $\tilde{H}_0(X) = H_0(X, x_0)$.

En efecto basta considerar la sucesión de Homología de la pareja (X, x_0) .

$$\begin{tikzcd} H_1(X, x_0) \arrow[r] & H_0(x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H_0(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & H_0(X, x_0) \arrow[r] & 0 \\ & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(X) & & \end{tikzcd}$$

Gráfico N° 1 Sucesión de Homología en un espacio con punto base.

Fuente: Elaboración propia

Por teorema del Isomorfismo se tiene:

$$\begin{tikzcd} H_0(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & H_0(X,x_0) \arrow[r] & 0 \\ \tilde{H}_0(X) \cong \dfrac{\mathbb{Z}\oplus\tilde{H}_0(X)}{\mathbb{Z}} = \dfrac{H_0(X)}{Nuc\left(j_*\right)} \arrow[ur, dashed, "\cong"] & & \end{tikzcd}$$

Figura N° 18 Triángulo conmutativo en la Homología de espacios celulares.

Fuente: Elaboración Propia

Corolario (2.3.22).- Sea (X,τ) un espacio topológico, entonces $\Delta(X)$ es un complejo de cadenas aumentada.

Nota.- Para un espacio topológico X definimos $n^X:\Delta_0(x)\longrightarrow\mathbb{Z}$ como $\eta^X(\sigma_0)=1$. Fácilmente se verifica $\eta^X\circ\partial_1=0$, con $\partial_1:\Delta_1(x)\longrightarrow\Delta_0(x)$.

Proposición (2.3.16).- Con las definiciones y notaciones anteriores se cumple:

(1) $\eta_*^{\{Pto\}}\circ U_*^X=n_*^X$

(2) $\eta_*^{\{Pto\}}$ es isomorfismo

(3) $Nuc\left(u_*^X\right)=Nuc\left(n_*^X\right)$

Demostración.- Es rutinario usando definición de núcleo para cada homomorfismo.

Ejemplo (2.3.35).- Sea X $\subset\mathbb{R}^n$ un subespacio convexo no vacío entonces la aumentación $n^X:\Delta(X)\longrightarrow\mathbb{Z}$ es una equivalencia homotópica. Particularmente $\tilde{H}_p(X)=0$.

En efecto.- Bastará definir una aplicación de cadenas $\hat{p}:\mathbb{Z}\longrightarrow\Delta(X)$ tal que $n^X\circ\hat{p}=1,\hat{p}\circ n^x\simeq 1$.

Ejemplo (2.3.36): Sea $X\subset\mathbb{R}^n$ un subespacio convexo no vacío entonces $\tilde{H}_P(x)=0$, para todo $p\in\mathbb{Z}$.

e) Los CW – Espacios y su Descomposición

Definición (2.3.35).- Sea X un espacio topológico. **Una filtración de X** es una secuencia de subespacios $X^n \subset X, n \in \mathbb{Z}$ tal que $X^{n-1} \subset X^n, n \in \mathbb{Z}.$

Definición (2.3.36).- Una filtración de X se denomina **Una filtración Celular** si:

(i) $H_j\left(x^n, x^{n-1}\right) = 0$ para $j \neq n$

(ii) $\Delta(x) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Delta\left(x^n\right)$

Definición (2.3.37).- Un **Espacio Celular** es un espacio Topológico X con una filtración celular

Ejemplo (2.3.37) Sea $X = S^k, x_0 \in X, k > 0$

$$X^n = \begin{cases} x_0, \text{ si } \mathrm{n} < k \\ \mathrm{s}^k, \text{ si n} \geq \mathrm{k} \end{cases}$$

(ii) Sea $X = S^k,\ x_0 \in X,\ \mathrm{k} > 0$

$$X^n = \begin{cases} \phi & si\ \ n\ <\ 0 \\ S^k - \{x_0\} & si\ 0\ <\ n\ <\ k \\ S^k & si\ n\ \geq\ k \end{cases}$$

Nota.- Los ejemplos dados en (i) y (ii) son filtraciones de $X = S^k$, k > 0.

Observación (2.3.20).- Para un espacio cualesquiera X con una filtración X^n se verifica que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} X^n$; puesto que $\Delta_0(X) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_0\left(x^n\right)$.

Definición (2.3.38).- Sean X, Y dos espacios topológicos celulares. Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ se denomina **Aplicación Celular** si $f\left(X^n\right) \subset Y^n$, para todo n ∈ $\mathbb{Z}$.

Definición (2.3.39).- Para un espacio topológico X pongamos $W_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$, y definamos $\partial_n : W_n(X) \longrightarrow W_{n-1}(X)$. Como la composición $i_* \circ \Delta = \partial_n, \forall n$

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right)$$

Ejemplo (2.3.38).- W(X) = $\left(W_n(X), \partial_n\right)$ es un Complejo de Cadenas.

En efecto**:** Mostremos que: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$ Esto es $\partial_{n-1} \circ \partial_n = \left(i_* \circ \Delta\right) \circ \left(i_* \circ \Delta\right) =$ $i_*\left(\Delta \circ i_*\right) \circ \Delta = 0$, para lo cual nótese el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[d, "\Delta'"'] \arrow[drr, "i_*"] & & & & H_{n-2}\left(X^{n-2}\right) \arrow[d, "j_*"] \\
H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[rr] & & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[urr, "\Delta''"] \arrow[rr] & & H_{n-2}\left(X^{n-2}, X^{n-1}\right)
\end{tikzcd}
$$

Figura N° 19 Triángulos de los homomorfismos conexión en los espacios celulares.

Fuente: Elaboración Propia

Donde Δ', Δ'' son los homomorfismos de conexión, mientras que i, j son las inclusiones de Pares y como, $\Delta'' i_* = 0$ se tiene el resultado.

Nótese que: $\Delta' = \Delta = \Delta''$.

Definición (2.3.40).- El complejo W(x) = $\left(W_n(x), \partial_n\right)$ obtenido en el ejemplo anterior se denomina **Complejo Celular.**

Lema (2.3.1) $H_n(X^p, X^q) = 0,$ donde $p \geq q \geq n$ ó n > p $\geq$ q.

En efecto.- (Por inducción sobre (p – q))

(1°) Para p – q = 0 (p = q) Veamos que $H_n(X^p, X^p) = 0$. Consideremos la terna $\left(X^{p+1}, X^p, X^q\right)$ y así la sucesión de homología de esta terna.

$$
\begin{tikzcd}
\ldots\ldots \arrow[r] & H_n\left(X^p, X^q\right) \arrow[r] & H_n\left(X^{p+1}, X^q\right) \arrow[r] & \underbrace{H_n\left(X^{p+1}, X^q\right)}_{0} \arrow[r] & H_{n-1}\left(X^p, X^p\right) \arrow[d] \\
 & & & & \underbrace{H_{n-1}\left(X^{p+1}, X^q\right)}_{0}
\end{tikzcd}
$$

Gráfico N° 2 Sucesión de Homología de la terna ordenada: $\left(x^{ph}, x^p, x^q\right)$

Fuente: Elaboración propia

Entonces $H_n(X^p, X^p) = 0$

(2°) Supongamos que el resultado vale para p – q < k, k < 0 con 0 < p < k + q. Veamos para k, p – q = k. Para lo cual nuevamente consideremos la terna $\left(X^P, X^{q+1}, X^q\right),$ y así la sucesión de homología.

$$\longrightarrow \underbrace{H_n\left(X^{q+1}, X^q\right)}_{0} \longrightarrow H_n\left(X^p, X^q\right) \longrightarrow \underbrace{H_n\left(X^p, X^{q+1}\right)}_{0} \longrightarrow H_{n-1}\left(X^{q+1}, X^q\right)$$

luego $H_n(X^p, X^q) = 0,\ p \geq q \geq n,\ n > p \geq q$

Lema (2.3.2).- $H_n\left(X, X^q\right) = 0$ para todo q ≥ n.

Demostración.- Sea $[z] \in H_n\left(X, X^q\right)$; pues $z \in \Delta n(x)$ es un ciclo representante de la clase $[z]$, y como $\Delta n(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_n\left(X^p\right)$ existe p $\geq q$ tal que $z \in \Delta n\left(X^p\right)$ de donde

$[z] \in \operatorname{Im}\left[\underbrace{\left(H_n\left(X^p, X^q\right)\right)}_{0} \longrightarrow H_n(X, X^q)\right]$ Por tanto $[z] = 0$ y asi $H_n\left(X, X^q\right) = 0.$

Corolario (2.3.25).- (ρ_2) $H_n\left(X^q, X^r\right) \cong H_n(X, X^r)$ para q > n y q ≥ r.

Demostración.- Considerar la terna $\left(X, X^q, X^r\right)$ y aplicar el lema inmediato anterior.

Proposición (2.3.17).- Para cualquier espacio celular X existe un isomorfismo entre H(W(X)) y H(X, X^{-1}).

Demostración.- Para n – 2 ≥ k, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^k\right) \arrow[d, "\partial_*"'] \arrow[dr, "\partial_{n+1}"] & & H_{n-1}\left(X^{n+2}, X^k\right) = 0 \arrow[d] \\
\underbrace{H_n\left(X^{n-1}, X^k\right)}_{0} \arrow[r] & H_n\left(X^n, X^k\right) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha"'] & H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_n"] & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^k\right) \arrow[d, "j_*"] \\
 & H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^k\right) \arrow[d] & & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \\
 & \underbrace{H_n\left(X^{n-1}, X^n\right)}_{0} & &
\end{tikzcd}$$

Gráfico N° 3 Triángulos conmutativos, para un espacio celular con homologías nulas.

Fuente: Elaboración propia

Nótese que los homologías nulas que aparecen en el diagrama se deben al lema (2.3.1). De otro lado y del gráfico mismo se tiene: $\partial_{n+1} = i_* \circ \partial_*$ y $\partial_n = j_* \circ \partial_*$ donde i_*, j_* son monomorfismos y α un epimorfismo. Ahora tenemos la siguiente secuencia de identificaciones.

$$H_n(X, X^k) \cong H_n\left(X^{n+1}, X^k\right) \qquad \text{(Por } (\rho_2)\text{)}$$

$$\cong \frac{H_n\left(X^n, X^k\right)}{Nuc(\alpha)} \qquad \text{(Por Teorema de isomorfía)}$$

$$\cong \frac{H_n\left(X^n, X^k\right)}{\mathrm{Im}(\partial_*)} \qquad \text{(Por exactitud)}$$

$$\cong \frac{H_n\left(X^n, X^k\right)}{\mathrm{Im}(i_* \circ \partial_*)} \qquad (i_* \text{ es monomorfismo})$$

$$\cong \frac{\mathrm{Im}(i_*)}{\mathrm{Im}(i_* \circ \partial_*)} \qquad \left(\mathrm{Im}(i_*) \cong H_n(X^n, X^k)\right)$$

$$\cong \frac{Nuc(\partial_*)}{\mathrm{Im}(i_* \circ \partial_*)} \qquad \left(Nuc(\partial_*) = \mathrm{Im}(i_*)\right)$$

$$\cong \frac{Nuc(j_* \circ \partial_*)}{\mathrm{Im}(i_* \circ \partial_*)} \qquad (j_* \text{ es monomorfismo})$$

$$\cong \frac{Nuc(\partial_n)}{\mathrm{Im}(\partial_{n+1})} \qquad \left(\partial_n = j_* \circ \partial_*, \partial_{n+1} = i_* \partial_*\right)$$

$$= H_n(W(X)) \qquad \text{(Por definición)}$$

En consecuencia $H_n(W(X)) \cong H_n(X^{n+1}, X^{-1})$ si n > 0, y asi $H_0(W(X))$ $\cong H_0(X, X^{-2}) \cong H_0(X, X^{-1})$. ……………………….. (θ_0)

Veamos (θ_0). Para lo cual consideremos la terna $\left(X, X^{-1}, X^{-2}\right)$ y por ende la sucesión de homología esto es:

$$H_1\left(X, X^{-1}\right) \longrightarrow H_0\left(X^{-1}, X^{-2}\right) \longrightarrow H_0\left(X, X^{-2}\right) \longrightarrow H_0\left(X, X^{-1}\right) \longrightarrow H_{-1}\left(X^{-1}, X\right)$$

Si queremos probar que $H_0\left(X, X^{-1}\right) \cong H_1\left(X^{-1}, X^{-2}\right)$ entonces debemos mostrar que $H_0\left(X, X^{-2}\right) = 0$ en efecto por lemas: (2.3.1) y (2.3.2) tenemos:

0 > - 1 > -2 (n > p > q) y así $H_0(X, X^{-2}) \cong H_0(X, X^{-1})$ Por tanto :

$H_n(X, X^{-1}) \cong H_n(W(X))$.

Definición (Aplicación de Pegue) (2.3.41).- Sean X, Y dos espacios de Hausdorff, $A \subseteq X$ cerrado, $f : A \longrightarrow X$ una aplicación continua y sea $U \subset X \cup Y$ un abierto [Es decir $U \subset X \cup Y$ es abierto $\Leftrightarrow U \cap X$ es abierto en X $\wedge$ $U \cap Y$ es abierto en Y].

En $X \cup Y$ defínase una relación R como : $a \sim f(a), \forall a \in A.$

Y escribamos $\dfrac{X \cup Y}{R} = X \underset{f}{\cup} Y$ [Espacio obtenido de U, pegando X por medio de f] a la aplicación "f" se denomina Aplicación Pegue.

Definición (CW – Descomposición) (2.3.42).- Sea X un espacio Topológico de Hausdorff. Una CW – Descomposici{on de X es una colección $"\varepsilon" = \{e : e \subseteq x\} = P(X)$ tal que

(i) $X = \underset{e \in \varepsilon}{U} e$

(ii) Cualquier elemento $e \in \varepsilon$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{|e|}$ donde $|e|$ será el número bien determinado ($|e|$ se denomina dimensión de e).

"Los elementos $(e \in \varepsilon)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ son llamadas n – celdas".

(iii) Para cualquier elemento $e \in \varepsilon$ existe una aplicación

$\phi_e : \left(B^n, S^{n-1}\right) \longrightarrow \left(X^{n-1} \cup e, X^{n-1}\right)$ tal que $\phi_e : B^n - S^{n-1} \approx e.$

Sobre S^{n-1}, ϕ_e no necesariamente es un homeomorfismo pero si, $\phi_e(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$.

$\phi_e : \phi_e\big|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ aplicación de Pegue.

(iv) La clausura de e está contenido en una unión finita de celdas (es decir: $e \subset \overline{e} \subset e_1 \cup e_2 \cup e_2 \cup .... \cup e_n$).

(v) $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A \cap \overline{e}$ es cerrado en $\overline{e}$ para cualquier $e \in \varepsilon.$

Definición (2.3.43).- Un espacio topológico de Hausdoff X, junto con CW – Descomposición $"\varepsilon"$ se denomina un CW – Espacio (CW – Complejo).

Observación (2.3.21).-Sea X un CW – espacio.

- La Dimensión de X es el menor entero "n" tal que $X^n = X (X^n \equiv$ esqueleto).
- Si no existe tal "n", diremos que la dimensión de X es infinito.

- Sea X un CW – Espacio, ε un CW – Descomposición $\varepsilon' \subset \varepsilon,\ X' = \underset{e'\in\varepsilon}{U} e'.$ Es decir si (X', ε') es un CW – Espacio. Diremos que X' es un CW – Subespacio de X.

e) Operaciones Cohomologicas

Previamente introduciremos nuevamente y muy brevemente lo relacionado a cohomología. Si bien la homología es un funtor covariante la cohomología a groso modo se puede ver como un funtor contravariante. Más aún en homología se utiliza los términos como ciclos, bordes y cadenas, en cohomología serán: cociclos, cobordes y cocadenas; de este modo la cohomología es dual de la homología en los sentidos siguientes:

(i) Existe una aplicación bilineal entre cadenas y cocadenas.

(ii) La cohomología es un funtor contravariante.

De esta forma empezamos dando la definición de complejo de cocadenas, de módulos.

Definición (2.3.44).- Un complejo de cocadenas es una sucesión denotada como $K = \left(K^n, \delta^n\right), n \in \mathbb{Z}_0^+,$ de A – módulos K^n y homomorfismo $\delta^n : K^n \longrightarrow K^{n+1}$ tales que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Observación (2.3.22).- 1) Frecuentemente se escribe δ en lugar de δ^n para cualquier "n"; y más aún

$K : K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \xrightarrow{\delta^1} K^2 \longrightarrow .... \longrightarrow K^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n \xrightarrow{\delta^n} K^{n+1} \longrightarrow ....$

2) Cada elemento $u \in K^n$ se denomina cocadena de dimensión "n", o simplemente una n-cadena.

3) Escribimos $Z^n K =$ núcleo de δ^n, el cual es un submódulo de K^n . Los elementos de $Z^n K$ se llaman n – cociclos.

4) Pongamos $B^n K =$ imagen de δ^{n-1}, también es un submódulo de K^n , los elementos de $B^n K$ se llaman n – cobordes.

Observación (2.3.23).- Si K = $\left(K^n, \delta^n\right), n \in \mathbb{Z}_0^+$ es un complejo de cocadenas entonces $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ de donde $B^n K \subseteq Z^n K,$ y en consecuencia se tiene el módulo cociente $\dfrac{Z^n K}{B^n K}$ que lo denotaremos como $H^n(K)$.

Es decir $H^n(K)=\dfrac{Z^nK}{B^nK}$, llamado n-grupo de cohomología de K. Sus elementos de $H^n(K)$ son las clases de cohomología $[u]=u+B^nK=\{u+\delta(v):v\in K^{n-1}\}$

Definición (Cociclos cohomológos) (2.3.45).- Sean $u,u'\in Z^nK$. Se dice que u y u' son cohomologos si y solamente si : u - $u'=\delta(v)$ para algún $v\in Z^{n-1}$. Y así las cocadenas correspondientes son iguales esto es : $[u]=[u']$.

Ejemplo (2.3.39).- Sea $K=(Kn,\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo de cadenas y sea G un grupo abeliano. Escribamos $K^n=Hom(K_n,G), n\in\mathbb{Z}$, y asi tenemos la aplicación $\partial_n^{\#}:Hom(K_{n-1},G)\longrightarrow Hom(K_{n_1},G)$ dada como $\partial_n^{\#}(g)=g\circ\partial_n$ es claramente un homomorfismo. Ahora llamando $\delta^n=\partial_{n+1}^{\#}$, se tiene que (K^n,δ^n) es un complejo de cocadenas.

En efecto.- Bastará mostrar que $\delta^n\circ\delta^{n-1}=0$, esto es para cualquier elemento $g\in K^{n-1}$, se tiene $\delta^n\circ\delta^{n-1}(g)=\delta^n\left(\delta^{n-1}(g)\right)=\delta^n\left(g\circ\partial_{n-1}\right)=g\circ\left(\partial_{n-1}\circ\partial_n\right)=0$. Por tanto $\delta^n\circ\delta^{n-1}$ =0 y en consecuencia (K^n,δ^n) es un complejo de cocadenas para cualquier δ^n escribiremos como δ que llamaremos operador coborde.

Definición (Aplicación de cadenas) (2.3.46)

Sean $K=(K^n,\delta^n)=(K^n,\delta)$ y $D=(D^n,\delta_*^n)=(D^n,\delta_*)$ dos complejos de cocadenas. Una aplicación de cocadenas $f:K\longrightarrow D$ de grado "r" es una colección de homomorfismo $f_n:K^n\longrightarrow D^{n+r}$ tal que $\delta_* f_n = f_{n+1}\delta$.

Es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_n"'] & K^{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
D^{n+r} \arrow[r, "\delta_*"] & D^{(n+1)+r}
\end{tikzcd}$$

Figura N° 20 Rectángulo conmutativo de Complejos de Cocadenas.

Fuente: Elaboración Propia

Proposición (2.3.18): Sean $K=(K_n,\partial_n), K'=(K'_n,\partial'_n)$ dos complejos de cadenas y sean $f,g:K\longrightarrow K'$ dos aplicaciones de cadenas. Si $f\simeq g$ y G un grupo abeliano Entonces las aplicaciones de cocadenas $f^{\#},g^{\#}:\{Hom(K'_n,G),\partial'^{\#}_n\}\longrightarrow\{Hom(K_n,G),\partial^{\#}_n\}$ son homatopicas es decir $f^{\#}\simeq g^{\#}$.

Demostración.- Como $f\simeq g$, existe una sucesión de homomorfismos $T_n:K_n\longrightarrow K'_{n+1}$ tal que $\partial'_{n+1}\circ T_n+T_{n-1}\circ\partial_n=f_n-g_n,\forall n\in\mathbb{Z}$ observamos el siguiente diagrama, obtenida de la definición de aplicaciones de cadena.

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & K_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "T_n"'] \arrow[d, "f_n\ g_n"] & K_{n-1} \arrow[dl, "T_{n-1}"] \\
K'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & K'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Figura N° 21 Triángulos conmutativos de aplicaciones de cadenas homotópicos.
Fuente: Elaboración Propia

Ahora tomando el “Hom” en el diagrama anterior se tiene otro diagrama, del cual se deduce el resultado esto es:

$$\begin{tikzcd}
Hom(K_{n+1},G) \arrow[r, "\partial^{\#}_n"] & Hom(K_n,G) \arrow[d, "f^{\#}_n\ g^{\#}_n"] & \\
Hom(K'_{n-1},G) \arrow[r, "\partial'^{\#}_n"] & Hom(K'_n,G) \arrow[r, "\partial'^{\#}_{n+1}"] \arrow[ul, "T^{\#}_{n-1}"] & Hom(K'_{n+1},G) \arrow[ul, "T^{\#}_n"']
\end{tikzcd}$$

Figura N° 22 Triángulos conmutativos de aplicaciones inducidos, por cadenas homotópicas.
Fuente: Elaboración Propia

$$T_n^{\#}\partial_{n+1}^{r\#}+\partial_n^{\#}.T_{n-1}^{\#}=\left(\partial_{n+1}^{'}\circ T_n\right)^{\#}+\left(T_{n-1}\circ\partial_n\right)^{\#}$$
$$=\left[\partial_{n+1}^{'}\circ T_n+T_{n-1}\circ\partial_n\right]$$
$$=\left[f_n-g_n\right]^{\#}$$
$$=f_n^{\#}-g_n^{\#}$$

Esto muestra que $f^{\#}\simeq g^{\#}$

Observación (2.3.24).- Dada una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas $0\longrightarrow K'\longrightarrow K\longrightarrow K"\longrightarrow 0$ entonces se tiene una sucesión exacta larga en cohomología. Esto es:

$$......H^n(K")\longrightarrow H^n(K)\longrightarrow H^n(K')\xrightarrow{\Delta} H^{n+1}(K")\longrightarrow H^{n+1}(K)\longrightarrow H^{n+1}(K')\longrightarrow....$$

Donde "Δ" es el homomorfismo conexión definido en forma análoga al homomorfismo conexión en homología.

Definición Cohomología Singular (2.3.47)

Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos, y sea G un grupo abeliano y consideremos el grupo generado por los simplejos $S_n(X,A)$. Ahora escribamos $S^n(X,A;G)=Hom(S_n(X,A),G),$ el cual es un grupo abeliano. Así tenemos el siguiente homomorfismo de grupos $\delta^n:S^n(X,A;G)\longrightarrow S^{n+1}(X,A;G), n\in\mathbb{Z}$ y por ende un complejo de cocademas $\left(S^n(X,A;G),\delta^n\right)=S\left(X,A;G\right)$ y de este modo se tiene $H^n\left(S\left(X,A;G\right)\right)=H^n\left(X,A;G\right)$ n – grupo de Cohomología Singular (X, A) con coeficiente en G.

Definición (2.3.48).- Una operación cohomologica del tipo $\left(\pi,n,G,m\right)$ es una familia de funciones $\theta_x:H^n(X,\pi)\longrightarrow H^m(X,G)$ para cada X-espacio topológico, satisfaciendo la condición de naturalidad, esto es para cualquier aplicación $f:X\longrightarrow Y$ el siguiente diagrama conmuta. Es decir: $\theta_x\circ f^*=f_0^*\theta_Y$

$$\begin{tikzcd} H^n(X,\pi) \arrow[d, "\theta_X"'] & H^n(Y,\pi) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\theta_Y"] \\ H^m(X,G) & H^m(Y,G) \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Figura N° 23 Cuadrado conmutativo de una operación cohomológica

Fuente: Elaboración Propia

Notación.-

$\phi(\pi,n;G,m)=$ {Conjunto de todas las operaciones cohomológicas del tipo $(\pi,n;G,m)$}

Definición (Espacios de Eilemberg – Maclane) (2.3.49)

Los espacios denotados por $K(\pi,n)$ tales que $\pi_n(K(\pi,n))\cong\pi$ se denominan espacios de Eilemberg – Maclane.

El Homomorfismo de Hurewicz

Sea X un espacio topológico, $x_0\in X$ un punto base. El n – ésimo grupo de homotopía de X se denota y define como

$$\pi_n(x)=\left[S^n,X\right] \text{ para } n\geq 0$$

Donde S^n denota la esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\left[S^n,X\right]=\left[S^n,X\right]_\phi$ el conjunto de clases de homotopía.

Observación (2.3.25).- (i) Para n =0, $\pi_n(X)$ no es en general un grupo; mientras que para n=1 $\pi_n(X)$ se denomina Grupo Fundamental de X.

(ii) Sea $f:Y_1\longrightarrow Y_2$ una aplicación que preserva punto base entonces “f” induce para cualquier espacio X con punto base una aplicación $f_*:[X,Y_1]\longrightarrow[X,Y_2]$ dado como $f_*([\psi])=[f\circ\psi]$; claramente f_* está bien definida, pues $[\varphi],[\psi]$ en $[X,Y_1]$ tal que $[\varphi]=[\psi]$ si y solo si $\varphi\simeq\psi$ de donde $f\circ\varphi\simeq f\circ\psi$ y así $[f\circ\varphi]=[f\circ\psi]$ luego $f_*([\varphi])=[f\circ\varphi]=[f\circ\psi]=f_*([\psi])$.

Proposición (2.3.19).- Sea X un espacio topológico con punto base x_0. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definamos $h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ como $h_n([f]) = f_*(u)$, donde u es el generador de $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Entonces la aplicación es un homomorfismo de grupos.

Demostración: (Ver : Agripino García Armas, Homología singular; pag. 111).

Nota.- El Homomorfismo h_n establecido en la proposición anterior se denomina la aplicación de Hurewicz.

Proposición (Teorema de Hurewicz) (2.3.20).- Sea X un espacio CW – Complejo conectable trayectoriamente y supóngase que $\pi_K(X) = 0$, para $0 \leq K <$ n con $n \geq 2$ entonces $h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo.

Demostración: (Ver : Agripino García Armas, Homología singular; pag. 112).

Ejemplo (2.3.40): $H^n(X, \pi_n(X)) \cong HOM(H_n(X), \pi_n(X))$

En efecto.- Del teorema de coeficientes universales, para cohomología y para cualquier espacio topológico X, se tiene la sucesión exacta siguiente:

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X);\pi) \longrightarrow H^n(X;\pi) \longrightarrow Hom(H_n(X);\pi) \longrightarrow 0 \quad (\rho_1)$$

Ahora si X es un espacio (n-1) conexo, $0 = \pi_{n-1}(X) \cong H_{n-1}(X)$ por tanto Ext $(0,\pi)$=0.

De la sucesión (ρ_1): $H^n(X,\pi) \cong Hom(H_n(X),\pi)$ ……………….. (ρ_2)

Considerando $\pi = \pi_n(X)$ (n-ésimo grupo de X) entonces de (ρ_2) se tiene:

$$H^n(X, \pi_n(X)) \cong Hom(H_n(X), \pi_n(X))$$

Definición (2.3.50).- Si X es (n-1) conexo. La clase fundamental de X, es la clase de cohomología $i_n \in H^n(X, \pi_n(X))$ que corresponde a h_n^{-1} bajo el isomorfismo del ejemplo anterior, y donde $h_n : \pi_n(x) \longrightarrow H_n(X)$ es el isomorfismo de Hurewicz.

Observación (2.3.26).- • Tomemos $x = K(\pi, n), (n-1) - conexo,$ así tenemos:

$$i_n \in H^n(K(\pi,n), \pi_n(x)) = H^n(K(\pi,n), \pi_n(K(\pi,n)))$$

• i_n es la clase fundamental en $H^n[K(\pi,n), \pi_n(K(\pi,n))]$

$[X, K(\pi,n)]$={Conjunto de clases de equivalencias homotopicas para los $k(\pi,n)$}

Proposición (2.3.21).- $[X, K(\pi,n)] \approx H^n(X,\pi)$

En efecto: Considerando $\gamma : \left[X, K(\pi,n) \right] \longrightarrow H^n(X,\pi)$ dado como $\gamma([f]) = f^*(i_n)$.

donde $f : X \longrightarrow k(\pi,n)$, asi f* : H*(X)$\longrightarrow$ H*(K(π,n));

$f^* : H^n(K(\pi,n),\pi) \longrightarrow H^n(X,\pi)$, de este modo $f^*(i_n) \in H^n(X,\pi)$ para $i_n \in H^n(K(\pi,n),\pi)$. De aquí y de manera rutinaria γ - es un isomorfismo.

Corolario (2.3.31): $\left[K(\pi,n), K(\pi',n) \right] \approx Hom(\pi,\pi')$

En efecto**.-** Usando la proposición anterior se tiene

$\left[K(\pi,n), K(\pi',n) \right] \cong H^n(K(\pi,n),\pi')$.........$(i_1)$

De $(\rho_2) : H^n(K(\pi,n),\pi') \cong Hom(H_n(K(\pi,n)),\pi')$........$(i_2)$

Por teorema de Hurewicz "$\pi_n(X) \cong \pi_n(X)$" obtenemos.

$$Hom\left[H_n(k(\pi,n)),\pi' \right] \cong Hom\left[H_n(k(\pi,n)),\pi' \right] \cong Hom(\pi,\pi')$$

En consecuencia se tiene el resultado. Es decir:

$$\left[K(\pi,n), K(\pi',n) \right] \cong Hom(\pi,\pi')$$

Notación. $H^m(\pi,n,G)$ para $H^m(K(\pi,n);G)$

Proposición (2.3.32).- Existe una correspondencia uno a uno entre $\varphi(\pi,n;G,m)$ y $H^m(\pi,n;G)$.

En efecto**.-** Sea $\rho : \Phi(\pi,n;G,m) \longrightarrow H^m(\pi,n;G)$

Tomando $\theta \in \Phi(\pi,n;G,m)$; entonces $\rho(\theta) = \theta(i_n)$, donde $i_n \in H^n(\pi,n,\pi)$ clase fundamental. Nótese que:

$\theta : H^n(-,\pi) \longrightarrow H^m(-,G)$
$\theta : H^n(K(\pi,n);\pi) \longrightarrow H^n(K(\pi,n);G)$, *es decir*
$\theta : H^n(\pi,n,\pi) \longrightarrow H^m(\pi,n;G)$

Ahora considerando la aplicación $\delta : H^m(\pi,n;G) \longrightarrow \varphi(\pi,n;G,m)$, y para un elemento $\varphi \in H^m(\pi,n;G)$ definamos

$\delta(\varphi)(i_n) = f^*(\varphi)$, donde $f : K(\pi,n) \longrightarrow K(\pi,n)$

$\delta(\varphi) : H^n(X,\pi) \longrightarrow H^m(X,G)$, de este modo

$\delta(\varphi): H^n\left(K(X,\pi),\pi\right) \longrightarrow H^m\left(K(X,\pi),G\right)$. Nótese también si $f: X \longrightarrow K(\pi,n)$, entonces $f^*: H^m\left(K(\pi,n)\right) \longrightarrow H^m(X,G)$. Es rutinario mostrar que $\rho \circ \delta = I$ y $\delta \circ \rho = I$.

Ejemplo (2.3.41).- Hay una correspondencia uno a uno entre $\Phi(\pi,n;G,m)$ y $\left(K(X,\pi),K(G,m)\right)$

En efecto: Tenemos: $\left[X,K(\pi,n)\right] \approx H^n(X,\pi)$, entonces

$\left[K(\pi,n),K(G,n)\right] \approx H^n\left(K(\pi,n),G\right) \approx H^n(\pi,n,G) \approx \Phi(\pi,n,G,m)$

Nótese que el último isomorfismo es por la proposición inmediata anterior.

CAPITULO III
HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 HIPÓTESIS

3.1.1. Hipótesis General

Establecer equivalencias de estructuras topológicas y las clases de homotopía, usando teorías de cohomología.

3.1.2. Hipótesis específicas

1. Determinar transformaciones naturales entre el funtor $[\bullet, Y]$ y el functor contravariante H de la categoría de espacios topológicos con punto base, en la categoría de conjuntos con elementos distinguidos.
2. Determinar una representación para teorías de cohomología, que satisfagan la mayoría de los axiomas de Eilemberg – Steenrod.

3.2. Definición Conceptual de Variables

Las variables identificadas en la hipótesis general, se pueden definir conceptualmente como a continuación se indica.

3.2.1 Variable Dependiente

El funtor $[\bullet, Y]$ y el funtor H, entre categoría de espacios topológicos con punto base; y la categoría de conjuntos con elementos distinguidos; así como también las clases de homotopía.

3.2.2 Variable Independiente

Espacios topológicos con punto base y la categoría de conjuntos con elementos distinguidos.

3.3. Operacionalización de la variable

Variable Independiente	Definición	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Estructuras en categorías topológicas.	Un espacio con punto base es un espacio topológico con un elemento fijado.	La teoría de espacios topológicos.	Categoría de espacios topológicos y categoría de conjuntos con elementos distinguidos.	Cohomología y Homología singular.	Demostrativo Deductivo e Inductivo.	Constructiva
Variable Dependiente	**Definición**	**Dimensiones**	**Indicadores**	**Índices**	**Método**	**Técnica**
Equivalencias homotopicas.	Para una transformación natural $T:[\bullet,Y]\longrightarrow H$ se define $T(u)([f])=H(f)u,$ y para un elemento dado u $\in$ H(Y), con T(u) : $[\bullet,Y]\longrightarrow H$, y para $[f]\in[X,Y]$, se establece $[X,Y]\approx H(X)$, para X un CW – espacio finito.	La teoría cohomológica de los axiomas de Steenrod.	La cohomología de espacios topológicos con punto base.	Homotopía	Demostrativo Deductivo e Inductivo.	Constructiva

CAPITULO IV
DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo y diseño de la investigación

El tipo de investigación es básica, según Alva Lucía Marin Villada (2008), “También, llamada investigación Pura, teórica o dogmática. Se caracteriza porque parte de un marco teórico y permanece en él; la finalidad radica en formular nuevas teorías o modificar las existentes, incrementando los conocimientos científicos o filosóficos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico”.

Es un estudio básico porque mediante el cual, se buscará aportar conocimientos que permitan mejorar algunos detalles del marco teórico (Equivalencia Homotópica). El diseño es no experimental y tiene un enfoque cualitativo.

4.2 Método de investigación

Teniendo en consideración la planteado y/o descrito en el proyecto, el método utilizado en el desarrollo es demostrativo e Inductivo - deductivo.

4.3. Población y muestra

Por ser un trabajo netamente teórico y más aún abstracto no requiere establecer población y muestra.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Por ser un trabajo netamente “matemático” (Teórico – abstracto); no se requiere procedimientos especiales para la recolección de la información. Lo que se realiza es una búsqueda y revisión bibliográfica: (libros de especialidad, páginas web, papers, revistas especializadas, etc.)

4.5. Análisis y Procesamiento de Datos

En el presente trabajo no hay un procesamiento de datos mucho menos estadísticos, en tanto que es un trabajo analítico. En tal aspecto analítico la teoría de cohomología es una herramienta muy potente en estudiar objetos topológicos desde el punto de vista algebraico, para nuestro objetivo hemos supuesto y/o considerado una categoría de espacios topológicos $\mathcal{C}_*$ con punto base y aplicaciones continuas manteniendo dicho punto; y de otro lado consideramos la categoría de conjuntos **Conj(s)** con elementos distinguidos y aplicaciones preservando dichos elementos; de este modo si $H:\mathcal{C}_* \longrightarrow Conj(s)$ es un funtor contravariante; entonces buscamos que si H satisface ciertos axiomas, entonces existe un espacio "Y" único salvo homotopía, tal que H es naturalmente el funtor, el cual asigna a cada $X \in \mathcal{C}_*$ el conjunto $[X,Y]$.

Nota.- A continuación presentamos, algunas definiciones conceptos, proposiciones entre otros que nos permitirá establecer y obtener nuestro resultado.

De este modo iniciamos enunciando los llamados:

Los Axiomas de Eilemberg – Steenrod:

Tales axiomas que son un total de cinco, han sido dados en una sección anterior, siendo estos: el axioma de: Naturalidad, Exactitud, homotopía, escisión y dimensión. A continuación presentamos resultados equivalentes al Axioma de Homotopía y al Axioma de Escisión.

Teorema(4.5.1).- El axioma de Homotopía (axioma "3" de Steenrod) es equivalente a la afirmación siguiente: Sean $q_0, q_1 : (X,A) \longrightarrow (X,A)xI$ dos aplicaciones dados como $q_0(x) = (x,0)$ y $q_1(x) = (x,1)$ entonces los inducidos $(q_0)_*$ y $(q_1)_*$ son iguales.

Demostración**.-** Supongamos que el axioma de Homotopía (axioma "3" de Steenrod) se cumple. Veamos que $(q_0)_* = (q_1)_*$. En efecto definamos una aplicación continua $H:(X,A)x\, I \longrightarrow (X,A)x\, I$ como H(x, t) = (x, t); de donde H(x, 0) = (x, 0) = $q_0(x)$ y H(x, 1) = (x, 1) = $q_1(x)$. Además claramente H (A x I) $\subseteq$ A x I luego $H: q_0 \simeq q_1$ y asi por el axioma 3" de Steenrod se tiene $(q_0)_* = (q_1)_*$

Recíprocamente**.-** Supongamos que las aplicaciones $f,g:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ son homotópicas i.e. $f \simeq g$ y se verifica la afirmación, mostraremos $f_* = g_*$, veamos como

$f \simeq g$ entonces existe una aplicación continua $H:(X,A)\ x\ I \longrightarrow (Y,B)$ tal que H(x,0) = f(x), H(x, 1) = g(x) y H (A x I)$\subset$ B de donde $H \circ q_0(x) = H(x,0) = f(x)$ y $H \circ g_1(x) = H(x,1) = g(x)$ y como $\left(q_0\right)_* = \left(q_1\right)_*$, entonces se tiene

$f_* = \left(H \circ q_0\right)_* = H_* \circ \left(q_0\right)_* = H_* \circ \left(q_1\right)_* = \left(H \circ q_1\right)_* = g_*$

Teorema (4.5.2).- El axioma de escisión (axioma 4 de Steenrod) es equivalente a la afirmación siguiente: Sean A, B subespacios de X tales que A es cerrado y $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, entonces la aplicación inclusión $i:(A; A \cap B) \longrightarrow \left(X, B\right)$ induce un isomorfismo

$$i_*: h_n\left(A; A \cap B\right) \cong h_n(X,B)$$

Demostración**.-** Por hipótesis supongamos que cumple el "axioma de Escisión" y que A, B son subespacios de X, donde A es cerrado y $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Veamos que $i_*: h_n\left(A; A \cap B\right) \longrightarrow h_n(A,B)$ es un isomorfismo. Para lo cual escribamos V = A y U = X – A, luego siendo A cerrado en X se tiene que U es abierto y así la cerradura de U, verifica:

$\bar{U} \subseteq \bar{A}^c \subseteq \left(A^{\circ}\right)^c = \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$ y como X – U = X – (X – A)= A entonces A – U = B – (X – A) = A$\cap$B. Ahora la inclusión i : (X – U, V – U) = (A, A$\cap$ B) $\longrightarrow$ (X – V)=(X,B) luego por el axioma de escisión induce un isomorfismo $i: h_n\left(X; A \cap B\right) \longrightarrow h_n\left(X; B\right)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Análogamente se muestra el recíproco.

Definición (4.5.1).- Una Teoría de Cohomología H* es una familia de funtores contravariantes de la categoría de Parejas de espacios topológicos a la categoría de grupos abelianos

$$H^n: \mathscr{C}^2_{TOP} \longrightarrow \mathscr{C}_{gab}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z},$ junto con transformaciones naturales

$$\partial: H^n(X,A) \longrightarrow H^{n-1}(A).$$

Para cualquier $n \in \mathbb{Z},$ y cualquier pareja de espacios (X,A) llamado homomorfismo conexión, satisfaciendo los axiomas de Eilemberg – Steenrod. Es decir

1. Axioma uno [naturalidad]: Para $f:(X,A) \longrightarrow \left(Y,B\right)$ una aplicación cualquiera, el siguiente diagrama conmuta. Es decir $\delta \circ f_n = \left(f_{|A}\right)_{n-1} \circ \delta$

$$\begin{array}{ccc} H^n(X,A) & \xrightarrow{f_n} & H^n(Y,B) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ H^{n-1}(A) & \xrightarrow{\left(f_{|A}\right)_{n-1}} & H^{n-1}(B) \end{array}$$

Figura N° 24 Rectángulo conmutativo del axioma de naturalidad de una aplicación de Pares.

Fuente: Elaboración Propia

2) Axioma dos (Exactitud): Para cualquier pareja de espacios topológicos (X, A) hay una sucesión exacta larga.

$$\ldots\ldots\longrightarrow H^{n+1}(X,A)\xrightarrow{\delta^{n+1}}H^n(A)\xrightarrow{i_n}H^n(X)\xrightarrow{j_n}H^n(X,A)\xrightarrow{\delta^n}\ldots\ldots$$

Donde $i:(A,\phi)\longrightarrow(X,\phi)$ y $j:(X,\phi)\longrightarrow(X,A)$ son las aplicaciones inclusión.

3) Axioma tres (Homotopía). Sean $f,g:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ dos aplicaciones homotópicas $(f\simeq g)$ entonces $f^*=g^*:H^*(X,A)\longrightarrow H^*(Y,B)$.

4) Axioma Cuatro (Escisión).- Sea X un espacio topológico $U\subseteq X$ un conjunto abierto tal que $\bar{U}\subset\mathring{A}$ es decir existe un abierto V tal que $\bar{U}\subseteq V\subseteq A$. Entonces la inclusión j: (X $\setminus$U, A $\setminus$U) $\longrightarrow(X,A)$ induce un isomorfismo $j^*:H^n(X-U,A-U)\longrightarrow H^n(X,A)$ para cada $n\in\mathbb{Z}$.

5)Axioma cinco (dimensión): Sea $X=(x_0)$ un espacio topológico unitario entonces $H^n(X)=0$ para $n\neq 0$.

Observación (4.5.1):

- Una teoría de cohomología Generalizada es una teoría de Cohomologia H* que verifica los cuatro primeros axiomas excepto el axioma cinco (axioma de dimensión).
- Una teoría de Cohomología ordinaria es una teoría de Cohomología H* que satisface los cinco axiomas.

En dicho caso, H*(X,A) se denomina la Cohomología de la pareja (X, A) con coeficientes en $G = H^{o}(\{x_0\})$ que denotaremos como H*(X, A; G). Ahora cuando $G = \mathbb{Z}$ escribiremos H*(X,A) para la cohomología entera $H^*(X, A, \mathbb{Z})$.

A. CONSTRUCION DE $\left[S^n, Y\right]$

La construcción de $\left[S^n, Y\right]$ consiste en que previamente consideremos la categoría $\mathcal{C}_{TOP(x_0)} = \mathcal{C}_{(x_0)}$ de espacios topológicos con punto base y aplicaciones continuas preservando puntos base, y sea la categoría $\mathcal{C}_{conj(*)} = \mathcal{C}_{(*)}$, de conjuntos con un elemento distinguido "*" y conjunto de aplicaciones preservando elementos distinguidos. Ahora supongamos que $H : \mathcal{C}_{(x_0)} \to \mathcal{C}_{(*)}$ es un funtor covariante. Un resultado tan importante en este trabajo es que. Si H satisface ciertos axiomas, existe un único espacio "Y", salvo tipo de homotopía, tal que H es naturalmente equivalente al funtor, lo cual asigna a cada $X \in obj\left(\mathcal{C}_{(x_0)}\right)$ el conjunto de clases de homotopía de X a Y. Esto es

$$\begin{aligned} H : \mathcal{C}_{(x_0)} &\longrightarrow \mathcal{C}_{(*)} \\ X \quad &\mapsto \quad [X, Y] \end{aligned}$$

Tal que H es naturalmente equivalente a $[\bullet, Y]$ para algún Y en $\mathcal{C}_{(x_0)}$.

Observación (4.5.2): Una categoría $\mathcal{C}$ será llamado : Categoría de espacios si sus objetos son espacios topológicos conexos por caminos con punto base los cuales admiten la estructura de un CW – Complejo y sus morfismos son aplicaciones continuas de X en Y, llevando punto base de X en punto base de Y para cada X, Y $\in$ Obj ($\mathcal{C}$).

Ahora asumiremos que, si X $\in$ Obj ($\mathcal{C}$) y $X' \subseteq X$ (subcomplejo) respecto a la estructura del CW – Complejo, entonces $X' \in Obj(\mathcal{C})$.

Notación: $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_0$ denotarán la categoría de espacios los cuales tienen como objetos todos los espacios admitiendo una estructura de CW – Complejo y todos los espacios admitiendo la estructura de CW – Complejo finito respectivamente.

Definición (4.5.2).- La terna $\left(X_1 \cup X_2, X_1, X_2\right)$ será llamada una Triada Propia de $\mathcal{C}$ si $X_1, X_2, X_1 \cup X_2$ y $X_1 \cap X_2 \in Obj(\mathcal{C})$, todos poseen el mismo punto base, y cada pareja $\left(X_1, X_1 \cap X_2\right)$ y $\left(X_2, X_1 \cap X_2\right)$ tienen la propiedad de extensión de homotopía.

Observación (4.5.3).- Si $X, Y \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$. Entonces $\left[X, Y\right]$ denotará el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de X a Y, con respecto a las homotopías los cuales dejan el punto base de X fijo.

2). $\left[\bullet, Y\right]$ denotará el funtor de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_{(*)}$ (i.e. $\left[\bullet, Y\right] : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{(*)}$, lo cual asigna a cada $X \in \mathcal{C}$ el conjunto $\left[X, Y\right]$ con la clase de aplicación constante como elemento distinguido, y asigna a cada aplicación $f : X \longrightarrow X'$ la aplicación $f^* : \left[X', Y\right] \longrightarrow \left[X, Y\right]$ definida como: $f^*\left(\left[\varphi\right]\right) = \left[\varphi \circ f\right]$

Donde $\left[\varphi\right] \in \left[X', Y\right]$ denota la clase de homotopía de "φ".

3). La notación $\left[\bullet, Y\right]$ es ligeramente ambigua en que esto no indica el dominio de la categoría $\mathcal{C}$.

4) Sea $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{(*)}$ un funtor contravariante. A continuación damos un conjunto de axiomas, de lo cual una combinación será usada en relación con H cuando $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, y otra combinación será usada cuando $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$.

i) Axioma de homotopía (h): Si $f \simeq g$ entonces H(f) = H(g).

(ii) Axioma de Escinción (e)

$\left(e_1\right)$ Si $X = \left\{x_0\right\}$ entonces H(X) contiene un solo elemento.

$\left(e_2\right)$ Supóngase que $\left(X, X_1, X_2\right)$ es una triada propia, $A = X_1 \cap X_2$; y $j_i : A \longrightarrow X_i$ y $K_i : X_i \longrightarrow X$ son las aplicaciones inclusión. Si $u_1 \in H\left(X_1\right)$ y $u_2 \in H\left(X_2\right)$ tal que $H\left(j_1\right)u_1 = H\left(j_2\right)u_2$, entonces existe un elemento $v \in H\left(X\right)$ tal que $H\left(k_1\right)v = u_1$ y $H\left(k_2\right)v = u_2$. Además, si A es un punto, entonces v es único.

(iii) Axioma de Numerabilidad (C).- Si S^n es la n – esfera, entonces $H\left(S^n\right)$ es contable para todo n > 0.

(iv) Axioma de colección (W).- Supóngase que $\{S_\alpha^n\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ es una colección de n-esferas cuyo producto cuña: VS_α^n está en $\mathcal{C}$. Si $i_ß : S_ß^n \longrightarrow VS_\alpha^n$ es la aplicación inclusión entonces.

$\pi H(i_ß) : H(VS_ß^n) \longrightarrow \pi H(S_ß^n)$ es un isomorfismo.

(v) Axioma de Subcolección (ℓ) supóngase que $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$ es una colección de subcomplejos de $X = \cup X_n \in \mathcal{C}$ con respecto a la estructura de algún CW – Complejo en X tal que $X_n^n = X^n$, sea $i_n : X_n \longrightarrow X$ la aplicación inclusión.

Sea $\varprojlim H(X_n)$, el límite inverso de $H(X_n)$ con respecto a las aplicaciones inducidas por las inclusiones de X_n en X_m. Entonces $\varprojlim H(i_n) : H(X) \longrightarrow \varprojlim H(X_n)$ es un isomorfismo.

Observación (4.5.4): i) Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ entonces el axioma de la subcolección (ℓ) se cumple claramente.

(ii) El axioma de escisión (e) también implica que $H(X \; x \; Y) \approx H(X) \; x \; H(Y)$

Nota.- A continuación vamos a presentar ciertos lemas enumerados y/o codificados correlativamente como B_i i = 1, 2, …., 7

Lema (B_1) : Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ y H satisface el axioma de numerabilidad (C), entonces H satisface el axioma de colección (w) y el axioma de subcolección (ℓ).

Demostración**.-** Se obtiene directamente de la observación inmediata anterior parte.

Afirmación**.-** El funtor $[\bullet, Y]$ satisface los axiomas: (h), (e), (w) y (ℓ). La verificación es rutinaria y directa.

El teorema (I) que enunciamos a continuación se mostrará luego de algunos resultados (lemas) que presentamos, previamente.

Teorema (I) : [Teorema de existencia del espacio "Y"] (4.5.3)

Si $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{(*)}$ es un funtor contravariante $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ y H satisface los axiomas: (h), (e), (w) y (ℓ), entonces existe un único espacio $Y \in \mathcal{C}_1$ salvo tipo de homotopía, tal que $[\bullet, Y]$ en $\mathcal{C}$ y H son naturalmente equivalentes.

Nota.- A continuación iniciaremos la construcción de $[\bullet, Y]$ y lo haremos partiendo de casos particulares.

Observación (4.5.5).- (1) Supóngase que $H:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}_{(*)}$ es un funtor contravariante satisfaciendo el "axioma de homotopía (h)". Dado $Y\in obj(\mathscr{C})$ y $u\in H(Y)$, nosotros construímos una transformación natural $T(u):[\bullet, Y]\longrightarrow H$ como sigue: Si $[g]\in[X,Y]$, sea $T(u)([g])=H(g)u$. Como H satisface el axioma de homotopía (h), entonces $T(u)[(g)]$ es independiente de la elección de "g". De este modo si $f:X'\longrightarrow X$, entonces H(f) T(u) $[(g)]=H(f)H(g)u=H(fg)u=T(u)f*[(g)]$. Por lo tanto T(u) es natural.

(2) Cuando $\mathscr{C}=\mathscr{C}_1$, usamos esta construcción para dar una equivalencia entre $[\bullet, Y]$ y H para una elección apropiada Y; pero si $\mathscr{C}=\mathscr{C}_0$, esta construcción no será suficiente porque en general la elección apropiada no necesariamente se encuentra en $\mathscr{C}_0$. Para evitar esta dificultad extendemos H a una categoría más grande.

Definición (4.5.3).- Sean A, X_0, X_1 tres espacios topológicos y $f_i:A\longrightarrow X_i$ en $Mor(\mathscr{C})$. Z_{f_0,f_1} denotará el espacio la identificación formado por $X_0\cup X_1\cup(A\,x\,I)$por las siguientes identificaciones.

$(a,i)\sim f_i(a)$, $(*,t)\sim *$; para i = 0, 1; a$\in A$ y t $\in$ I, donde * denota el punto base.

Observación (4.5.6).- Sea λ un número cardinal infinito mayor o igual que el cardinal de $H(S^n)$ para todo n > 0. Si $f:A\longrightarrow X$ es una aplicación entonces Z_f denota el espacio identificación formado atrayendo el cono sobre A en X por la aplicación.

A continuación enunciamos un axioma, la cual describe la extensión de las propiedades establecidos en la observación (1).

Axioma Auxiliar de escisión (e') :

Considérese la categoría $\mathscr{C}$ con todas los espacios los cuales admiten una estructura de CW – Complejo con cardinal "λ". Si $A=VS^n$, X y Z_f, donde $f:A\longrightarrow X$, se encuentran en $\mathscr{C}$; entonces la siguiente sucesión es exacta.

$$H\left(Z_f\right)\xrightarrow{H(i)}H(X)\xrightarrow{H(f)}H(A) \qquad \left(\xi_{e'}\right)$$

donde i es la aplicación inclusión.

En efecto.- Para el caso $\mathscr{C}=\mathscr{C}_1$, con $A\in obj(\mathscr{C})$ mostraremos que la exactitud $\left(\xi_{e'}\right)$ se sigue del axioma de exactitud (e). Lo cual lo veremos más adelante. De este modo seguimos presentando los siguientes:

Lema $\left(B_2\right)$: Si $H:\mathscr{C}_1\longrightarrow C_{(*)}$ es un funtor que satisface "el axioma de escisión (e)", entonces H satisface el axioma auxiliar $\left(e'\right)$.

Demostración.- Es rutinario utilizando la respectiva hipótesis.

• Escribamos "$\mathscr{C}$W" como la categoría de espacios los cuales admiten estructura CW – compleja contable (numerable).

Lema $\left(B_3\right)$: Si $H:\mathscr{C}_0\longrightarrow\mathscr{C}_{(*)}$ es un funtor que satisface los axiomas: (h), (e) y (c); entonces H puede ser extendido al funtor $\tilde{H}:\mathscr{C}_W\longrightarrow\mathscr{C}_{(*)}$ satisfaciendo los axiomas: (h), (w), (ℓ) y $\left(e'\right)$.

Demostración.- Supóngase que el funtor $H:\mathscr{C}_0\longrightarrow\mathscr{C}_{(*)}$ satisface los axiomas siguientes:

(i) Axioma de homotopía (h) : Si $f\simeq g$ entonces $H\left(f\right)=H(g)$

(ii) Axioma de Escisión (e) : $\left(e_1\right)$ Si $X=\left\{x_0\right\}$ entonces H(X) = {punto}

$\left(e_2\right)$ Si $\left(X,X_1,X_2\right)$ es una triada propia $A=X_1\cap X_2$ y $j_i:A\longrightarrow X_i$, $K_i:X_i\longrightarrow X$ las inclusiones. Si $u_i\in H\left(X_i\right)$ (i=1,2). Entonces existe $v\in H(X)$ tal que $H\left(K_1\right)v=u_1\wedge H\left(K_2\right)v=u_2$. Además si A es un punto "v" es único.

(iii) $H\left(S^n\right)$ es contable, para todo n > 0, donde S^n es la n – esfera.

Sea $\tilde{H}:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}_{(*)}$ el funtor extensión de H, restringido a $\mathscr{C}_W$. Donde

$\tilde{H}(X)=$ {Conjunto de transformaciones naturales de $\left[\bullet,X\right]$ sobre H con la transformación trivial como elemento distinguido}.

- Nosotros deseamos mostrar que $\bar{H}$ satisface los axiomas : (h), (w), (ℓ) y $\left(e'\right)$ el axioma (h) se sigue del resultado "R" siguiente:

“R_1: el funtor $\bar{H}:\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_{(*)}$ es contravariante satisfaciendo el axioma (h)”. (Resultado que mostraremos más adelante). Mientras que el axioma (w) y el axioma (ℓ) se sigue del isomorfismo.

$$\lambda:\bar{H}(X)\approx \underleftarrow{Lim} H(X_\alpha)$$

(Resultado que también mostraremos mas adelante)

- Ahora mostraremos que $\bar{H}$- satisface el “axioma (e')". Para lo cual sea $S_i^n, i=1,2,...,$ una colección finita o contable de n – esferas y sean $A=VS_i^n, x\in\mathcal{C}$ y $f:A\longrightarrow X$. Nosotros mostremos que $\bar{H}\left(Z_f\right)\xrightarrow{\bar{H}(i)}H(X)\xrightarrow{\bar{H}(f)}\bar{H}\left(A\right)$ es exacta, donde $i:X\longrightarrow Z_f$ es la aplicación inclusión.

(♦) Primero Probemos cuando A = S^n : Supóngase que X tiene dada una estructura CW – compleja. Existe un subcomplejo finito $X_0\subset X$ y una aplicación $f_0:S^n\longrightarrow X_0$ tal que f es f_0 seguido por la inclusión $\left[i.e.\ S^n\xrightarrow{f_0}X_0\xrightarrow{i}X,\ f=i\circ f_0\right]$. Como X es un CW – Complejo contable, existe entonces una sucesión de subcomplejos finitos: $X_0\subset X_1\subset X_2\subset........$ tal que $X=UX_i$. Sea $f_i=f_0$ seguido por la inclusión de X_0 en X_i , $Z_i=Z_{f_i}$ y $j_i:X_i\longrightarrow Z_i$ y $K_i:Z_i\longrightarrow Z_{i+1}$ las aplicaciones inclusión.

$\bar{H}\left(f\right)\bar{H}\left(j\right)=\bar{H}\left(Ij\right)$ es trivial porque jf $\simeq C$ (C $\equiv$ Constante) y $\bar{H}\left(Pto\right)=\left\{\xi_*\right\}$. Por consiguiente $\operatorname{Im}\left(\bar{H}(j)\right)\subseteq Nuc\left(\bar{H}(f)\right)$ $\qquad\left(I_1\right)$.

De otro lado supóngase que $v\in Nuc\left(\bar{H}(f)\right)$. Sea v_i la proyección de “v” sobre $H\left(X_i\right)$ Por el isomorfismo “$\lambda:\bar{H}(X)\approx \underleftarrow{Lim} H(X_\alpha)$” es suficiente encontrar $u_i\in H(Z_i)$ tal que $H\left(j_i\right)u_i=v_i$ y $H\left(k_i\right)u_{i+1}=u_i$. Como $H\left(f\right)v=0,H\left(f_i\right)v_i=0.$

Por consiguiente, usando el resultado "R_2"

“R_2: si $i:X\longrightarrow Z_f$ es la aplicación inclusión, entonces H(i) induce un isomorfismo de las orbitas de $H\left(Z_f\right)$ sobre el núcleo de H(f)” (El resultado "R_2" será mostrado más adelante).

Existen elementos $\bar{u}_i \in H(Z_i)$ tal que $H(j_i)\bar{u}_i = v_i$. Sea la aplicación inclusión $m_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$. Entonces $k_i j_i = j_{i+1} m_i$ y $H(m_i)v_{i+1} = v_i$ puesto que los v_i llegan de un $v \in H(X)$. Por lo tanto $H(j_i)H(k_i)\bar{u}_{i+1} = H(j_i)u_i$. De aquí existen $w_i \in H(S^{n+1})$ tal que $w_i\bar{u}_i = H(k_i)\bar{u}_{i+1}$. Sea $y_i = (w_0 w_1 w_2 .....w_{i-1})^{-1}$ y $u_i = y_i\bar{u}_i$, de este modo. $H(j_i)u_i = v_i, H(k_i)u_{i+1} = y_{i+1}H(k_i)\bar{u}_{i+1} = y_{i+1}w_i\bar{u}_i = y_i\bar{u}_i = u_i$.

(♦) En segundo lugar probemos cuando $A = VS_J^n$: Sea $A_i = S_1^n \vee S_2^n \vee ..... \vee S_i^n$, y $f_i = f_{|A_i}$. También , como $jf \simeq 0,$, entonces $H(j) \subseteq Nuc(H(f))$ supóngase que $v \in Nuc(H(f))$. Por inducción, y por resultado mostrado líneas arriba, podemos encontrar $u_i \in H(Z_{f_i})$ tal que u_i restringido a X es "v", mientras que la restricción a $Z_{f_{i-1}}$ es u_{i-1}. Nuevamente por el isomorfismo $\lambda : \bar{H}(X) \approx \underleftarrow{\lim} H(X_\alpha)$ se tiene que hay un elemento $u \in H(Z_f)$ lo cual restringe a "v".

Observación (4.5.7).- Combinando y/o considerando los lemas: $(B_1),(B_2)$ y (B_3) vemos que si H satisface las hipótesis del Teorema (I) esto puede ser extendido de manera que se satisfaga las hipótesis del lema siguiente.

Lema (B_4):Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos categorías de espacios tal que $\mathscr{C}$ es una subcategoría de $\mathscr{C}'$ y sea $H : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}_{(*)}$ un funtor contravariante tal que:

(i) H satisface los axiomas: (h), (e') , (w) y (ℓ).

(ii) $H|_{\mathscr{C}}$ satisface (h), (e), (w) y (ℓ)

Entonces existe un elemento $Y \in Obj(\mathscr{C}')$ tal que $[\ ,Y]$ y $H|_{\mathscr{C}}$ son equivalentes.

B. RELACIÓN ENTRE $[S^n, Y]$ y H $[S^n]$

Iniciamos la relación entre $[S^n, Y]$ y H $[S^n]$ reduciendo el lema (B_4) a otros lemas más "fuertes", y de mejor comprensión.

Lema (B_5): Sean $H_1, H_2 : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_{(*)}$ dos functores, ambos satisfaciendo los axiomas: (h), (e) y (w), y sea $T : H_1 \longrightarrow H_2$ una transformación natural tal que

$T: H_1(S^n) \approx H_2(S^n)$ para todo n > 0, entonces $T: H_1(S^n) \approx H_2(S^n)$ para todo $X \in Obj(\mathscr{C})$ tal que dim (X) < ∞.

Demostración.- Para lo cual recordemos la definición de espacios de identificación: Sean A, X_0, X_1 tres espacios y $f_i : A \longrightarrow X_i$ en la categoría $\mathscr{C}$. El espacio Z_{f_0,f_1} denotará el espacio identificación formado como $X_0 \biguplus X_1 \biguplus (AxI)$ por las siguientes identificaciones $(a,i) \sim f_i(a), (*,t) \sim *$, para i = 0, 1, $t \in I$ y $a \in A$.

Ahora sean $C_i : * \longrightarrow X_i$ y $C : A \longrightarrow *$ dos aplicaciones, de este modo optemos por las siguientes notaciones convencionales.

$X_0 \vee X_1 = Z_{c_0,c_1}, Z_f = Z_{c,f}, SA = Z_{c,c}, S^n = SS^{n-1}, S^0 = \{p_1, p_2\}$ $(p_1, p_2 \ dos \ puntos)$

Nosotros asumamos que H es un funtor contravariante satisfaciendo los axiomas (h) y (e). Sea $f_i : A \longrightarrow X_i$ i = 0, 1 y sea $j_i : X_i \longrightarrow Z_{f_0,f_1}$, las aplicaciones inclusión. Nótese que por hipótesis H satisface el axioma (w) y siendo además $T : H_1 \longrightarrow H_2$ una transformación natural tal que: $T: H_1(S^n) \approx H_2(S^n)$ para todo n > 0.

Ahora si $X \in Obj(\mathscr{C})$ y dim (X) < ∞, para el mismo tipo de homotopía, X puede dotarse de una estructura de CW – Complejo en la siguiente forma: $X_n \in Obj(\mathscr{C})$ una sucesión de espacios, para n = 1, 2, …, dim X, y $f_n : \{VS_\alpha^n / \alpha \in \Lambda_n\} \longrightarrow X_n$ tal que $X_{n+1} = Z_{f_n}$ y $X_1 = VS_\alpha^1$. Entonces podemos asumir $X = \cup X_n$.

Primero mostramos que $T: H_1(X) \longrightarrow H_2(X)$ es sobre para todo $X_n \in Obj(\mathscr{C})$ tal que dim X < ∞. Sea X el espacio con la estructura descrita líneas arriba. Sea $A_n = VS_\alpha^n$.

Nosotros mostramos por inducción sobre “n” tal que

$T: H_1(X_n) \longrightarrow H_2(X_n)$ $T: H_1(X_n) \longrightarrow H_2(X_n)$ es sobre.

Notemos primero que: $H_i(A_n) = H_i(VS_\alpha^n) \approx \pi H_i(S_\alpha^n)$

Por el axioma (w): De aquí $T: H_1(X_n) \approx H_2(X_n)$. Ahora el paso inductivo se seguirá por el resultado (lema C_5) que mostraremos más adelante.

Nosotros a continuación mostraremos que T es un isomorfismo. También aplicamos inducción a $T: H_1(X_n) \longrightarrow H_2(X_n)$. Nosotros tendremos que hacer notar que este “T” es un isomorfismo para n =1. Supóngase que este es un isomorfismo para (n – 1). Para

$v_i \in H_i(X_{n-1})$ sea $\varphi_i(v_i) \in H_i(SA_{n-1}), i = 1,2,$ los grupos de isotropía que también serán descritos en el “Lema B_6". El hecho que T es sobre, y nuevamente del lema B_6 que veremos más adelante se produce que $T(\varphi_1)(v) = \varphi_2(T)(v)$ para cada $v \in Nuc(H_1(f_{n-1}))$. El paso inductivo entonces se sigue moviendo elementos y así se tiene el resultado.

Lema (B_6 **)** Supóngase que $H : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_{(*)}$ es un funtor que satisface los axioma: (h), (e) (w) y (ℓ); y sea $T : [\bullet, Y] \longrightarrow H$ una transformación natural tal que $T : [X,Y] \approx H(X)$ para todo X $\in \mathscr{C}$ con la condición dim (X) < ∞. Entonces $T : [X,Y] \approx H(X)$ para todo X $\in \mathscr{C}_1$.

En efecto**.-** Supóngase que X $\in \mathscr{C}_1$, X^n es el n – esqueleto de X con respecto a alguna descomposición CW – Complejo, y $i_n : X^n \longrightarrow X$ es la aplicación inclusión y así el resultado.

Observación (4.5.8): • La demostración del lema (B_5) es realizado (motivado) por el usual argumento del “lema de los cinco”, solamente: para X ∈ Obj$(\mathscr{C})$ con dim (X) = n +1. Entonces X = Z, donde $f : VS_\alpha^n \longrightarrow X'$ y dim $(X') \leq n$

• El “axioma (e)” produce de la sucesión exacta siguiente:

$H(\sum X') \longrightarrow H(\sum A) \longrightarrow H(Z_f) \longrightarrow H(X') \longrightarrow H(A)$, donde $\sum$ es la suspensión. Así si H toma sus valores en la categoría de grupos abelianos, entonces la inducción y el “lema de los cinco” da el resultado requerido.

Observación [Construcción (Y)] (4.5.8).- Supongamos que $H : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_{(*)}$ es un functor que satisface las hipótesis del lema (B_4) . Enseguida mostraremos como se construye un espacio Y y un elemento $u \in H(Y)$ tal que $T(u) : [S^n, Y] \approx H(S^n)$ para todo n>0.

Nosotros construimos espacios Superior Yn ∈ Obj$(\mathscr{C}')$ y elementos $u_n \in H(Y_n)$ de manera inductiva sobre “n” tal que:

(i) $Y_{n-1} \subset Y_n$

(ii) $H(i_n)u_n = u_{n-1}$ donde $i_n : Y_{n-1} \longrightarrow Y_n$ es la aplicación inclusión

(iii) $T(U_n):[S^m, Y_n] \longrightarrow H(S^m)$ es sobre para todo m > 0, y es uno a uno para $m \leq n$.

(iv) La cardinalidad de los números de celdas en $Y_n \leq \lambda$.

En efecto.- • Elijamos generadores g_α^n para $\mathrm{H}(S^n)$. Sea S_α^n una copia de S^n para cada $g_\alpha^n, Y_0 = VS_\alpha^n$ sobre todo α y n > 0, y sea $h_\alpha^n : S^n \longrightarrow Y_0$ un homeomorfismo de S^n sobre S_α^n seguido por la aplicación inclusión. Por "axioma (w)".

$H(Y_0) \approx \pi H(S_\alpha^n)$. Por tanto existe un elemento $u_0 \in H(Y_0)$ tal que $H(h_\alpha^n)u_0 = g_\alpha^n$. Por consiguiente $T(u_0)[h_\alpha^n] = g_\alpha^n$.

• Supóngase Y_{n-1} y u_{n-1} están bien definidos satisfaciendo las condiciones: (i), (ii), (iii), y (iv) (Hipótesis Inductiva). Sea $[f_ß]$ el generador del núcleo de $T(U_{n-1}):[\mathrm{S}^n, Y_{n-1}] \longrightarrow H(S^n)$. Sean $S_ß^n$ una copia de S^n para cada ß, $A = VS_ß^n$ y $f = Vf_ß$. Fácilmente se puede ver que la cardinalidad del $\{f_\beta\}$ es menor que λ. i.e. $Card(\{f_\beta\}) < \lambda$. Así por (e'); A y $Z_f \in \mathscr{C}'$ Nuevamente por el "axioma (w)" , $H(A) \approx \pi H(S_\beta^n)$. Sea $k_\beta : S_f^n \longrightarrow A$ la aplicación inclusión entonces $H(K_\beta)H(f)u_{n-1} = H(f_B)U_{n-1} = T(u_{n-1})(f_\beta) = 0$.

Por consiguiente $H(f)u_{n-1} = 0$. Sea $Y_n = Z_f$ el "axioma (e')" produce $u_n \in H(Y_n)$ tal que $H(i_n)u_n = u_{n-1}$. Consideremos el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
{[S^m, Y_{n-1}]} \arrow[rr, "(i_n)_*"'] \arrow[dr, "T(u_{n-1})"'] & & {[S^m, Y_n]} \arrow[dl, "T(u_n)"] \\
& H(S^m) &
\end{tikzcd}$$

Figura N° 25 Triángulo conmutativo, para los functores $[\bullet, Y]$ y H

Fuente: Elaboración Propio

$T\left(u_{n-1}\right)$es sobre para todo "m" por lo tanto $T\left(u_n\right)$lo es Y_n fue formado de Y_{n-1} adicionando (n+1) células. Por consiguiente $\left(i_n\right)_*$ es sobre para m < n. $T\left(u_{n-1}\right)$ es uno a uno, para m < n, y por lo tanto $T\left(u_n\right)$ lo es.

Para m = n, el núcleo de $T\left(u_{n-1}\right)$ está contenido en el núcleo de $\left(i_n\right)_*$ y así $T\left(u_n\right)$es uno a uno.

• Sea Y = $\cup Y_n$. Por el "axioma (ℓ)" existe $u \in H\left(Y\right)$ lo cual restringe a U_n para cada "n". Por tanto: $T\left(u\right):\left[S^n,Y\right] \approx H\left(S^n\right)$, para todo n > 0.

Observación (4.5.9).- De lo anterior se tiene, que si H satisface las hipótesis del "Teorema (I)", existe Y ∈ Obj$\left(\mathscr{C}\right)$ tal que $\left[\bullet,Y\right]$ y H son equivalentes, y así nos remitimos a mostrar que el tipo de homotopía de "Y" es único. Cuando $\mathscr{C}=\mathscr{C}'$, se sigue obviamente del hecho que si $T:\left[X,Y\right]\longrightarrow\left[X,Y'\right]$ es una transformación natural definida para todo $X\in\mathscr{C}_1$ entonces existe una unica aplicación $f:Y\longrightarrow Y'$ salvo homotopía, tal que $T=f_*$. Esto es $f\in T\left(id\right)$ donde $id:Y\longrightarrow Y$ es la aplicación identidad.

Lema (B.7).- Sean Y,Y' dos objetos de $\mathscr{C}_w$ y $T:\left[X,Y\right]\longrightarrow\left[X,Y'\right]$ una transformación natural definida para todo X ∈ $\mathscr{C}_0$, entonces existe una aplicación $f:Y\longrightarrow Y'$ tal que $T=f_*$

Demostración.- Denotemos la restricción de $\left[\bullet,Y\right]$ en $\mathscr{C}_0$ como $\left[\bullet,Y\right]_0=\left[\bullet,Y\right]_{\mathscr{C}_0}$ y sea el funtor $\left[\overline{\,,Y}\right]:\mathscr{C}_1\longrightarrow\mathscr{C}_{(*)}$ la extensión de $\left[\bullet,Y\right]$ descrito como:

$\left[\overline{Y',Y}\right]=$ {Transformaciones naturales de $\left[Y,Y'\right]_0$ sobre $\left[\bullet,Y\right]_0$ }

Sea $\mu:\left[Y',Y\right]\longrightarrow\left[Y',Y\right]$ la aplicación dado por: $\mu\left(\left[f\right]\right)=f_*$. Se muestra que "μ" es suryectiva si $Y',Y\in\mathscr{C}_w$. En efecto por un resultado que veremos más adelante (Lema $\left(E_3\right)$) tenemos $\lambda:\left[Y',Y\right]\approx\underline{\lim}\left[Y'_\alpha,Y\right]$ $\qquad\left(\rho_0\right)$

Donde Y'_α son subcomplejos finitos de Y' con respecto a alguna descomposición CW – Complejo. También $\lambda\mu\left[f\right]=\left[fi_\alpha\right]$ donde $i_\alpha:Y'_\alpha\longrightarrow Y'$ es la aplicación inclusión. Por cuando $Y'\in\mathscr{C}_w$ por el teorema de Extensión de homotopía, y del hecho que λ_μ es suryectiva, se sigue que μ es sobre, y por lo tanto el resultado.

CAPITULO V
RESULTADOS

5.1. RESULTADOS DESCRIPTIVOS

En el presente trabajo mostramos en principio una construcción alternativa del conjunto de clases de equivalencia $[X,Y]$, y seguido de ello el espacio Hn(X) para un CW – Complejo X. De otro lado definimos una transformación natural entre functores, lo cual nos permitirá investigar y caracterizar un functor covariante “H” con el funtor $[\bullet,Y]$; y finalmente presentaremos la Teoría de Cohomología; definida en una categoría de pares de espacios topológicos con valores en la categoría de grupos abelianos; a su vez damos algunos modelos de aplicación.

(A) CONSTRUCCIÓN Y ESTUDIO ALTERNATIVO DE $[X,Y]$

Para una construcción alternativa de $[X,Y]$**.** Previamente daremos algunos resultados, que presentaremos en los siguientes lemas enumeraos correlativamente.

Lema (1) Si $u_i \in H(X_i)$ son tales que $H(f_0)u_0 = H(f_1)u_1$, entonces existe un elemento $v \in H\left(Z_{f_0,f_1}\right)$ tal que H $(j_0)v = u_0$ y H $(j_1)v = u_1$. Además si A es un punto entonces “v” es único.

Demostración.- Sean $\bar{X}_0, \bar{X}_1\ y\ \bar{A}$ la imagen Z_{f_0,f_1} de $X_0 \cup \left(Ax\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$, $X_1 \cup \left(Ax\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$ y $Ax\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Entonces $\left(Z_{f_0,f_1},\bar{X}_0,\bar{X}_1\right)$es una triada propia $\bar{A} = \bar{X}_0 \cap \bar{X}_1, y\ \ \bar{X}_0\ y\ \bar{X}_1$ son retractos de deformación de X_0 y X_1 entonces el resultado se sigue del axioma de escisión aplicado a la terna $\left(Z_{f_0 f_1},\overline{X}_0,\overline{X}_1\right)$, y h aplicado a las diversas aplicaciones involucradas.

Lema (2) **:** Sean $j_i : X_i \longrightarrow X_0 \vee X_1$ las aplicaciones inclusión i = 0, 1. Entonces $H(j_0)xH(j_1) : H(X_0 \vee X_1) \approx H(X_0)xH(X_1)$.

Demostración: Nuevamente por el “axioma de excisión” se tiene; $H(c_0)u_0 = H(c_1)u_1$ para cualquier par de elementos $u_i \in H(X_i)$. Luego el resultado se sigue del lema (1) cuando A es un punto.

Lema (3): Sea $t:\sum X \longrightarrow \sum X \vee \sum X$ la aplicación, la cual aplica: $A\ x\ \frac{1}{2}$ a un punto, entonces el inducido t* define una estructura de grupo natural en $H\left(\sum X\right)$ y $H\left(\sum\left(\sum X\right)\right)$ es abeliano.

En efecto.- Por “Lema (2)” la aplicación “t” dada define una aplicación $t^*: H(SX)\ x\ H(SC) \longrightarrow H(SX)$ y por argumentos estándar se tiene el resultado.

Lema (4): Sea $r: Z_f \longrightarrow \sum A \vee Z_f$ la función la cual aplica $A\ x\ \frac{1}{2}$ a un punto entonces el inducido r* define una acción del grupo $H\left(\sum A\right)$ sobre el conjunto $H(Z_f)$

Demostración.- Aplicando el lema (2) obtenemos una aplicación $r^*: H\left(\sum A\right) x H(Z_f) \longrightarrow H(Z_f)$ y nuevamente por argumentos estándar se tiene el resultado.

Lema (5): sea $i: X \longrightarrow Z_f$ la aplicación inclusión entonces H(i) induce un isomorfismo de las orbitas de $H(Z_f)$ sobre el núcleo de H(f).

En efecto**:** Por el axioma de escisión y el “lema (1)” se tiene Im(H(i))= Nuc(H(f)). Ahora sean j_1 y j_2 las aplicaciones inclusión de SA y Z_f sobre $\sum A \vee Z_f$. Entonces $ri = j_2 i$.

Consideremos los elementos w∈H(SA) y u∈H (Z_f) , así

H(i) (wu) =H(i) H(r) $\left(H(j_1) x H(j_2)\right)^{-1}$ (w,u)

=H(i) $H(j_2)\left(H(j_1) x H(j_2)\right)^{-1}$(w,u)

= H(i) u.

De aquí H(i) induce una aplicación de orbitas de H(Z_f)sobre el núcleo de H(f).

Supóngase $u_0, u_1 \in H(Z_f)$ y H(i)$u_0 = H(i)u_1$. Y sean $k_0, k_1 : Z_f \longrightarrow Z_{i,i}$ las dos aplicaciones inclusión. Por "lema (1)", existe un elemento $w' \in H\left(Z_{i,i}\right)$ tal que $u_1 = H(k_i)u^1$. Sea $h: SA \longrightarrow Z_{i,i}$ una aplicación definida como:

$$h(a,t) = K_0(a,3t) \ \ , \ t \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle, a \in A$$

$$= \text{(f(a), 3t – 1)}, \ t \in \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

$$= \ k_1\left(a, 1-(3t-2)\right), \ t \in \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle$$

Sea w = H(h) w^1, fácilmente se puede mostrar que $\left(h \vee k_0\right) r \simeq k_1$, y así $u_1 = H(k_1)u^1 =$ $H(r)H(h \vee k_0)w^1 = \left(H(h)w^1\right)\left(H(k_0)w^1\right) = wu_0$ de aquí: u_0 y u_1 están en la misma orbita y por consiguiente H(i) es uno a uno (inyectivo) sobre orbitas, y en consecuencia se tiene el resultado.

Observación (5.1.1): • Supóngase que $A = \sum B$; $H\left(\sum A\right)$ es un grupo abeliano.

• Sea v∈H(X) en el núcleo de $H(f)\left(f: Y \longrightarrow Y'\right)$ por el lema (5) existe $u \in H(Z_f)$ tal que H(i) u = v. Sea φ (v) el grupo de isotropía de "u" bajo la acción de $H\left(\sum A\right)$. Puesto que $H\left(\sum A\right)$es abeliano, $\varphi\left(v\right)$ es independiente de "u".

Lema (6) Existe un espacio W_f; aplicaciones $h: X \longrightarrow W_f$ y $K: \sum A \longrightarrow W_f$ lo cual depende solamente de f tal que $\varphi(v) \ = H(K)H(h)^{-1}v$, para todo $v \in Nuc(H(f))$.

En efecto.- Supóngase que $v \in Nuc(H(f))$, $u \in H\left(Z_f\right)$, $w \in H\left(\sum A\right), H(i)u = v$ y wu=u, existe un elemento $z_1 \in H\left(\sum A \vee Z_f\right)$ tal que $H\left(j_1\right)\left(z_1\right) = w$ y $H\left(j_2\right)\left(z_2\right) = u$, donde j_1 *y* j_2 son las aplicaciones de $\sum A$ y Z_f en $\sum A \vee Z_f$ respectivamente.

$$H(r)Z_1 = wu = u = H(j)u$$

Donde $j : Z_f \longrightarrow Z_f$ es la aplicación identidad. Por consiguiente existe un elemento $z_2 \in H\left(Z_{r,j}\right)$ tal que $H\left(i_1\right)z_2 = z_1$ y $H\left(i_2\right)z_2 = u,$ donde i_1 y i_2 son las aplicaciones inclusión de $\sum A \vee Z_f \; y \; Z_f$ en $Z_{r,j}$. Aproximadamente hablando cada elemento de $H\left(Z_{r,f}\right)$ da elementos $u, u' \in H\left(Z_f\right),$ y $w \in H(SA)$ tal que $u = u'$. Ahora nosotros añadimos una homotopía a $Z_{r,j}$ para hacer $u = u'$ de este modo se tiene que:

$H\left(i_1 j_2\right)z_2 = H\left(j_2\right)H\left(i_1\right)z_2 = H\left(j_2\right)z_1 = u.$ Por lo tanto $H\left(i_2 \vee i_1 j_2\right)z_2 \in H\left(Z_f \vee Z_f\right)$ corresponde al elemento $\left(u,u\right) \in H\left(Z_f\right).x \;\; H\left(Z_f\right).$

Sea $m_1 = i_2 \vee i_1 j_2$ y sea m_2 la aplicación pegamento de $Z_f \vee Z_f$ sobre Z_f. Bajo $\mathrm{H}\left(m_2\right)$ el elemento “u” también corresponde a (u, u). Para $W_f = Z_{m_1, m_2}$. Existe un elemento $z_3 \in H\left(W_f\right)$ tal que $H\left(s_1\right)z_3 = z_2$ y $H\left(s_2\right)z_3 = u$ donde $s_1 \; y \; s_2$ son las aplicaciones inclusión de $Z_{r,j}$ y Z_f sobre W_f .

Sea $h = s_2 i$ y $k = s_1 i_1 j_1$ recordar $i : X \longrightarrow Z_f$ $H(k)z_3 = H(j_1)H(i_1)H(s_1)z_3 = w$ y $H(h)z_3 = H(i)H(s_2)z_3 = v$ por consiguiente $w \in H\left(k\right)H(h)^{-1}v.$ Ahora supóngase que $z \in H(W_f)$ y H(h)z = v. Sea u = $\mathrm{H}\left(s_2\right)z.$

$H(i)u = H(i)H(s_2)z = H(s_2 i)z = H(h)z = v$

Nótese: $s_2 m_2 = s_1 m_1$ de donde $H(m_2)u = H(m_2)H(s_2)z = H(m_1)H(s_1)z$.

Pero $m_1 = i_2 \vee i_1 j_2$. Por consiguiente como m_2 es la aplicación pegamento

$H(i_2)H(s_1)z = u \; y \; H(j_2)H(i_1)H(s_1)z = u.$ De este modo

$$u = H(i_2)H(s_1)z = H(j)H(i_2)H(s_1)z = H(r)H(i_1)H(s_1)z$$
$$= \left[H(j_i)H(i_1)H(s_1)z\right] = \left[H(j_2)H(i_1)H(s_1)z\right]$$
$$= \left(H(k)z\right)u.$$

Por consiguiente H(k) $z \in \varphi\left(v\right)$ y así se completa la prueba del lema (6).

(B) EL ESPACIO $H_n(X)$ PARA UN CW – COMPLEJO X

Recordando el teorema de Hurewicz: "Para un X CW – Complejo conexo por trayectorias y suponiendo que $\pi_i(x)=0$ para $0 \leq i$ < n con n ≥ 2 se tiene que $\pi_n(X)$ y $H_n(X)$ son isomorfos".

Nota.- Otro resultado relacionado a los CW – Complejo esta dado en el teorema siguiente:

Teorema (Teorema de Whitehead) (5.1.1): (I) Sean X,Y dos CW – Complejos simplemente conexos y sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación tal que el inducido $f_*: Hn(X) \cong Hn(Y)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces f es una equivalencia homotópica.

Demostración**.-** [Ver: Agripino García, Homología singular pág. 112]

Definición (5.1.1).- (i) Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es una Equivalencia Homotópica Débil si $f_*: \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo para cada n ≥ 0.

(ii) Una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ es una Equivalencia Homotopica si $f: Hn(X) \longrightarrow Hn(Y)$ es un isomorfismo para todo "n".

Observación (5.1.2).- De las definiciones anteriores inmediatas (i) y (ii): y del teorema de Whitehead se establece que una equivalencia homológica entre CW – Espacios simplemente conexos es una equivalencia homotópica.

A continuación presentamos el resultado descriptivo propuesto, y lo establecemos mediante dos lemas relacionados a la existencia de elementos en $[X,Y]$; así como también a la existencia de equivalencia homotópica, para X $\in$ Obj $(\mathscr{C}_1)$ con X^n el n – esqueleto de X con respecto a la descomposición de algún CW – Complejo.

Lema (7).- Si $u \in H(X)$, existe un elemento $[f] \in [X,Y]$ tal que $T([fi_n]) = H(i_n)u$

Demostración.- Para cada "n" existe un único elemento $[f_n] \in [X^n, Y]$ tal que $T([f_n]) = H(i_n)u.$ Es claro, ver que $f_n\big|_{X^{n-1}}$ y f_{n-1} son homotópicos, y de aquí existe una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f\big|_{X^n}$ y f_* son homotópicos.

Lema (8).- Sean $[f],[g]$ dos elementos en $[X,Y]$ y $T([f]) = T([g])$ entonces existe una equivalencia homotópica $k : Y \longrightarrow Y$ tal que $f \simeq kg.$

En efecto.- "Recordando : Suponiendo que $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{(*)}$ es un funtor contravariante que satisface el "axioma de homotópia (h)". Dado Y $\in$ Obj $(\mathcal{C})$ y u $\in$ H (Y); nosotros construimos una transformación natural $T(u) : [\,,Y] \longrightarrow H$ como sigue:

Si $[g] \in [X,Y]$, *sea* $T(u)([g]) = H(g)u.$ $T(u)[(g)]$ es independiente de la elección de "g" (pues H – satisface el axioma (h)). Esto es si $f : X' \longrightarrow X, H(f)T(u)([g]) =$ $H(f)H(g)u = H(fg)u = T(u)f^*([g])$ de aquí T(u) es natural".

Ahora demostremos : el lema $([8])$. Para lo cual tenemos $u = T(\xi), \xi \in [Y,Y]$ donde $\xi = [I_y]$ es la clase de la aplicación identidad. De este modo $H(f)u = T([f]) =$ $T([g]) = H(g)u.$ Por consiguiente existe un elemento $w \in H(Z_{f,g})$ tal que $u = H(j_1)w = H(j_2)w$ donde $j_1 : Y \longrightarrow Z_{f,g}$ son las aplicaciones, inclusión. Ahora sea $t : Z_{f,g} \longrightarrow Y$ la aplicación correspondiente al elemento w descrito en el lema $[7]$. Sea $i_n : Y^n \longrightarrow Y$ la aplicación inclusión donde Y^n es n – esqueleto. Así $T(tj_1, i_n) = H(j, i_n)w = H(i_n)H(j_1)u = T([i_n])$ Pero en $[Y^n, Y]T$ es un isomorfismo. Por consiguiente $tj_1 i_n \simeq i_n.$ Esto implica que $(tj_i)_* : [S^n, Y] \approx [S^n, Y]$ para todo n, y de aquí tj_1 es una equivalencia homotópica. Análogamente tj_2 es una equivalencia homotópica. Sea h una inversa de homotopía de tj_1, y sea k = tj_2. Sea $\eta : X \ x \ I \longrightarrow Z_{f,g}$ dado por $\eta(z,t) = \{z,t\}$ y sea $\overline{h} = h\eta$, entonces $\overline{h}$ así definido es una homotopía entre f y $kg(i.e)\overline{h} : f = kg.$

Afirmación (i).- T es uno a uno. En efecto supongamos que $T([f]) = T([g])$, entonces $T([f \vee f]) = T([f \vee g]) \in T([X \vee X])$. Por consiguiente existe una aplicación $K : Y \longrightarrow Y$ tal que $[f \vee g] = ([f \vee f]k) = ([fk \vee fk])$ de aquí $[g] = [fk] = [f]$.

Afirmación (ii).- T es suryectiva. En efecto para mostrar la suryectividad de "T" observemos el resultado $\Re_0$ siguiente "$\Re_0$: la transformación natural $T(u) : [\ ,Y] \longrightarrow H$ definida como $T(u) : ([f]) = H(f)u$, para $[f] \in [X,Y]$ es uno a uno, más aún $T \mapsto u(T)$ es su inversa" Utilizando el resultado $\Re_0$ se tiene que existe un elemento $u \in H(Y)$ tal que $T = T(u)$. Ahora sea $v \in H(X)$. Sea $w \in H(X \vee Y)$ el elemento correspondiente a (v,u) y sea $j : Y \longrightarrow X \vee Y$ la aplicación inclusión, consideremos el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
{[S^n, Y]} \arrow[rr, "j_*"] \arrow[dr, "T(u)"'] & & {[S^n, X \vee Y]} \arrow[dl, "T(w)"] \\
& H(S^n) &
\end{tikzcd}$$

Figura N° 26 Triángulo conmutativo en la existencia de una equivalencia homotópica.

Fuente : Elaboración propia

Como T(u) es un isomorfismo, T(w) es sobre. Ahora como en la construcción de "Y" (Ver observación const (Y)), podemos adjuntar células a $X \vee Y$ para obtener un espacio Z y un elemento z $\in$ H (Z) tal que $T(z) : [S^n, Z] \approx H(S^n)$, y tal que "z" restricto a X $\vee$ Y es exactamente "w". (En este caso nótese que X $\vee$ Y y el elemento "w" juega la regla de $Y_0\ y\ u_0)$. Si $k : X \vee Y \longrightarrow Z$. Por consiguiente kj tiene como inversa homotópica a $h : Z \longrightarrow Y$ si $i : X \longrightarrow Z$ es la aplicación inclusión.

$$T(hi) = T(u)\left[hi\right] = H(i)H(h)u = H(i)H(kj)^{-1}u = H(i)w = v$$

(C) TRANSFORMACIÓN NATURAL ENTRE FUNCTORES

Una transformación natural "φ" definido de un funtor R a un funtor $S\left(R, S : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_2\right)$ es un sistema de morfismo $\{\varphi_x\}_{x \in Obj(\mathscr{C}_1)} \subseteq Mor_{\mathscr{C}_2}(R(x), S(x))$ tal que para todo morfismo $f \in Mor_{\mathscr{C}_1}(X, Y)$ se tiene:

$S(f) \circ \varphi_x = \varphi_y \circ R(f)$; Si R y S covariantes............................$\left(\mathscr{T}_n\right)$

Ahora si R, S son contravariantes la definición es similar, pero en lugar de $\left(\mathscr{T}_n\right)$ se cumple $\left(\mathscr{T}_n^{'}\right)$ esto es:

$S(f) \circ \varphi_Y = \varphi_X \circ R(f)$.................................... $\left(\mathscr{T}_n^{'}\right)$

Para nuestro estudio consideremos un funtor contravariante $H : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_{(*)}$ satisfaciendo el "axioma de homotopía (h)" e investigaremos la transformación natural $T : [\ ,\mathrm{Y}] \longrightarrow H$. Suponiendo que $Y \in Obj(\mathscr{C})$, sea $\ell \in [Y, Y]$ la clase de homotopía de la aplicación identidad $\left(i.e.\ \ell = [I_Y]\right)$ y sea $u(T) = T(\ell) \in H(Y)$. Dado un elemento $u \in H(Y)$, podemos definir una transformación natural $T(u) : [\ ,\mathrm{Y}] \longrightarrow H$ del modo siguiente: Si $[f] \in [X, Y]$, sea $T(u)[f] = H(f)u$.

Afirmación.- T(u) así definida es una transformación natural.

En efecto**.-** Para lo cual bastará observar el siguiente diagrama para $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$, $f \in Mor_{\mathscr{C}_1}(X, Y)$. El cual conmuta.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\left[Y,Y\right] \arrow[r, "{[\bullet,Y](f)=[f]}"] \arrow[d, "T(u)_Y"'] & \left[X,Y\right] \arrow[d, "T(u)_X"] \\
H(Y) \arrow[r, "H(f)"] & H(X)
\end{tikzcd}$$

Figura N° 27 Rectángulo conmutativo de una transformación natural, para los funtores $[\bullet, Y]$ y H.

Fuente : Elaboración propia

Lema (9).- La función $\theta : H(Y) \longrightarrow [\ \ ,\mathrm{Y}]$ dado como $\theta(u) = T(u)$ para $u \in H(Y)$ es uno a uno dentro de H; además $\gamma : [\bullet, Y] \longrightarrow H(Y)$ dada como $\gamma(T) = u(T)$ es su inversa.

En efecto**.-** Supongamos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ nosotros deseamos extender H a $\mathcal{C}_1$ para cada $X \in \mathcal{C}_1$ consideremos el conjunto.

$\bar{H}(X) =$ {Conjunto de transformaciones naturales de $[\bullet, X]$ en H, con la transformación trivial como elemento distinguido}.

Para $f : X \longrightarrow X'$ sea $\bar{H}(f)T = Tf_*$, donde $T \in \bar{H}(X')$ y $f_* : [\bullet, X] \longrightarrow [\bullet, X']$ la aplicación inducida por "f". Nótese que si f y f' son homotópicos entonces $\bar{H}(f) = \bar{H}(f')$

Tenemos $H(Y) \xrightarrow{\theta} [\bullet, Y] \xrightarrow{\gamma} H(Y)$ para un elemento arbitrario $u \in H(Y)$ y un elemento $T \in [\bullet, Y]$ se tiene:

- $\left(\gamma \circ \theta\right)_{(U)} = \gamma\left(\theta(u)\right) = \gamma\left(T(u)\right) = (\gamma T)(u) = (u(T))(u)$

$$= \left(T(l)(u)\right) = \left(T\left(l_Y\right)(u)\right) = \left[I_{T(Y)}\right](u) = u \qquad \text{(i)}$$

- $\left(\theta \circ \gamma\right)(T) = \theta\left(\gamma(T)\right) = \theta\left(\mu(T)\right) = \theta\left(T(\ell)\right) = \theta\left(T\left[I_Y\right]\right) = \theta\left(\left[I_{T(Y)}\right]\right) = T\left(\left[I_{T(Y)}\right]\right)$ (ii)

Luego de (i) y (ii) $\gamma \circ \theta = 1_{H(Y)} \wedge \theta \circ \gamma = 1_{[\ ,\mathrm{Y}]}$ por tanto el resultado.

Lema (10).- $\bar{H} : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_*$ es un funtor contravariante satisfaciendo el "axioma de homotopía (h)" de acuerdo con H en $\mathcal{C}_0$

Demostración.- Como puede observarse, es inmediato de la parte primera del lema anterior.

Observación (5.1.2).- Hay otra forma de caracterizar el funtor "$\bar{H}$".

Para esto consideremos $X \in Obj(\mathcal{C})$ y sea $\{X_\alpha\}$ sus subcomplejos finitos con respecto a alguna descomposición CW – Complejo. Si $X_\alpha \subset X_\beta$, sea $i_{\alpha ß}$, la aplicación inclusión sea $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ también la aplicación inclusión. Entonces $\{H(X_\alpha), H(i_{\alpha ß})\}$ forma un sistema inverso y de este modo la aplicación $\bar{H}(i_\alpha) : \bar{H}(X) \longrightarrow \bar{H}(X_\alpha) = H(X_\alpha)$ induce y/o define una aplicación.

$\underleftarrow{\lim}\left(\bar{H}(i_\alpha)\right) = \lambda : \bar{H}(X) \longrightarrow \underleftarrow{\lim} H(X_\alpha)$

Lema (11).- [Caracterización de $\bar{H}$]. La aplicación $\underleftarrow{\lim}\left(\bar{H}(i_\alpha)\right) = \lambda$ es un isomorfismo.

Demostración.- a) Sean T_1, T_2 dos elementos en $\bar{H}(X)$ tal que $\lambda(T_1) = \lambda(T_2)$. Ahora sea $Y \in Obj(\mathcal{C}_0)$ y $[f] \in [Y, X]$ existe un X_α y $f_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha$ tal que $i_\alpha \circ f_\alpha = f$. Por consiguiente se tiene $T_1([f]) = \bar{H}(i_\alpha)T_1([f_\alpha]) = \bar{H}(i_\alpha)T_2([f_\alpha]) = T_2([f])$ y asi $T_1 = T_2$. Por tanto λ es inyectivo.

b) Ahora tomemos $u \in \underleftarrow{\lim}\, \bar{H}(X_\alpha)$. Sea Tu∈H(X) definida como sigue: Sean Y, f, f_α y i_α cuatro elementos como líneas arriba. Sea $Tu[f] = H(f_\alpha)u_\alpha$, donde u_α es la proyección de u en $H(X_\alpha)$ fácilmente se verifica que $Tu \in \bar{H}(X)$ y $\bar{H}(i_\alpha)Tu = u$. Por tanto λ es suryectivo. En consecuencia de (a) y (b) se tiene que "λ" es un isomorfismo.

5.2. RESULTADOS INFERENCIALES

El resultado descriptivo que no es otra cosa el estudio de $[X, Y]$, nos permite inferir un estudio en la categoría de pares, es decir la teoría de Cohomología, definida en una categoría de pares de espacios topológicos con valores en la categoría de grupos abelianos, para lo cual consideramos $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{TOP}$ una categoría de pares de Espacios Topológicos los cuales admiten la estructura de un CW – Complejo y subcomplejos y todas las aplicaciones continuas de pares en pares. La pareja (X, ϕ) donde ϕ es el conjunto vacío, será simplemente denotado por X y sea $\mathcal{G} = \mathcal{C}_{gab}$ la categoría de grupos abelianos y homomorfismos.

Definición (5.2.1).- Una teoría de cohomología en $\mathcal{A}$ con valores en $\mathcal{G}$ es definido por una colección de funtores contravariantes $H^q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}, -\infty < q < \infty$, y una colección de homomorfismo naturales $\delta^q : H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X, A)$ definido para cada pareja $(X, A) \in \mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{TOP}$ lo cual satisface los siguientes axiomas:

(t_1) Si f, g : (X, A) $\longrightarrow$ (Y, B) son homotopicos $(f \simeq g)$ entonces $H^q(f) = H^q(g)$, para todo "q".

(t_2) Si i : $(X, \phi) \longrightarrow (X, A)$ y $j : A \longrightarrow X$ son las aplicaciones inclusión. Entonces la siguiente sucesión es exacta.

$$\cdots\cdots\cdots \longrightarrow H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(X, A) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(X) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(A) \longrightarrow \cdots\cdots\cdots$$

(t_3) Si $(X_1, X_1 \cap X_2), (X_2, X_1 \cap X_2) \in Obj(\mathcal{C}^2_{TOP})$ la aplicación $H^q(X_1 \cup X_2, X_2)$ $\longrightarrow H^q(X_1, X_1 \cap X_2)$ inducido por la aplicación inclusión es un isomorfismo para todo "q".

Observación (5.2.1): (ε_0) **(1)** Para cada par $(X, A) \in \mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{TOP}$, sea Z(X,A) el espacio con punto base "b" formado de $X \cup (AxI) \cup \{b\}$, donde $b \notin X$, identificando: $a \sim (a,1)$ para cada $a \in A$ y $Ax\{0\} \sim b$. Notándose que Z(X) = $Z(X, \phi) = X \cup \{b\}$.

(2) Sea X un espacio topológico. La suspensión de X se denota por $\sum X$ y se define como el espacio de identificación de X x I al identificar $Xx\{0\}$ y $Xx\{1\}$ a puntos.

(3) Sea $\sum Z(A)$ la suspensión de Z(A) y sea $S : Z(X, A) \longrightarrow \sum Z(A)$ la aplicación la cual identifica X $a"b"$.

(4) Sea $Y = \{Y_q, h_q\}$ un $\Omega-$ espectrum; esto es, una sucesión de espacios Y_q con punto base y equivalencias homotopicas, $h_q : Y_q \longrightarrow \Omega Y_{q+1}$ donde ΩY_q es el espacio de lazos basados en el punto base y h_q toma el punto sobre el lazo constante.

Lema (12).- La colección $\{\{Z(\ ), Y_q\}, \bar{\delta}^q\}$ es una teoría de cohomología.

En efecto.- De la observación anterior parte (3) y parte (4) se tiene que $\left[Z(X,A),Y_q\right]$, con la estructura de grupo inducido por $h_q : Y_q \longrightarrow \Omega Y_{q+1}$ es un funtor de $\mathcal{C}^2_{TOP}$ en $\mathcal{C}_{gob}$

Sea $\eta : \left[Z(A), \Omega Y_{q+1}\right] \longrightarrow \left[\sum Z(A), Y_{q+1}\right]$ el isomorfismo usual, y sea también $\bar{\delta}^q : \left[Z(A),Y_q\right] \longrightarrow \left[Z(X,A),Y_{q+1}\right]$ el homomorfismo definido por la composición siguiente: $\bar{\delta}^q : \left[Z(A),Y_q\right] \longrightarrow \left[Z(X,A),Y_{q+1}\right]$ el homomorfismo definido por la composición siguiente: $\bar{\delta}^q = \sum {}^*\eta\left(h_q\right)_*\left(\left[f\right]\right)$. De esta manera se tiene el axioma (12).

Observación (5.2.2).- (ε_1) los axiomas de colección y de subcolección son formulados en términos de teorías de cohomología. Para lo cual previamente denotemos y/o consideremos las categorías siguientes: Sean estas $\mathcal{A}_0 = \mathcal{C}^2_{TOP_0}$ y $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}^2_{TOP_1}$ las categorías de pares de espacios topológicos la cual admiten, respectivamente, la estructura de un CW – Complejo finito y subcomplejo y la estructura de un CW – Complejo y Subcomplejo.

(t_*) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ y si “b” es un punto $H^q(b)$ es contable para todo q.

(t_{**}) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Si U es un espacio topológico con la topología discreta $\pi H^q(i_x) : H^q(U) \approx \pi H^q(x)$, donde $i_x : \{x\} \longrightarrow U$ es la aplicación inclusión.

Observación (5.2.3) (ε_2) Si $X_1 \subset X_2 \subset$..................... Es una sucesión de subcomplejos de $X = \cup X_n$ con respecto a alguna estructura CW – Compleja sobre X, entonces las aplicaciones inclusión $i_n : X_n \longrightarrow X$ induce un epimorfismo.

$$ß : H^q(X) \longrightarrow \varprojlim H^q(X_n)$$

Teorema (5.2.1).- Si $\left\{H^q, \delta^q\right\}$ es una teoría de cohomología satisfaciendo cualquiera de las condiciones (t_*) o (t_{**})de la observación (ε_1) entonces existe un Ω-espectrum $Y = \left\{Y_q, h_q\right\}$ tal que $Y_q \in \mathcal{C}$ y equivalencias naturales $T^q : \left[Z(\ \ ),Y_q\right] \longrightarrow H^q$ tal que $\delta^q T^q = T^{q+1}\delta^q$.

Demostración.- Solo probaremos para el caso (t_*). El caso (t_{**}) es análogo. Veamos: consideremos el funtor contravariante $J^q : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}_{(*)}$ definido como sigue: $X \in Obj(\mathcal{C}_0)$ y $x_0 \in X$ su punto base, $J^q(X)$ el conjunto subyacente de $mH^q(X,x_0)$

con el elemento identidad de su grupo como elemento distinguido. Si $f:X \longrightarrow Y$ es una aplicación de la categoría $\mathscr{C}_0$ entonces $J^q(f)=H^q(f')$ donde $f':(X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ es la aplicación en $\mathscr{C}^2_{TOP}$ definida por "f".

- Nosotros primero mostramos que J^q satisface los axiomas: de Homotopia (h), Escisión (e) y numerabilidad (c). El axioma (h), se sigue inmediatamente de (t_1). Si b es un punto, $J^q(b)=H^q(b,b)=0$ por la sucesión exacta para el par (b, b). Sea $x_0 \in X$ el punto base de X, $k:\{x_0\} \longrightarrow x$ la aplicación inclusión, y $C:X \longrightarrow x_0$ la aplicación constante entonces $H^q(k)H^q(c)=H^q(kc)$ es la aplicación identidad en $H^q(x_0)$ i.e. $H^q(kc)=1_{H^q(X_0)}$ y de aquí se tiene que H(k): $H^q(X) \longrightarrow X^q(X_0)$ es sobre (S_1) y por la sucesión exacta de la pareja (X,x_0) también tenemos: $J^q(X)=H^q(X,x_0) \approx Nuc(H(k))$ (S_2).

Ahora sea (X,X_1,X_2) una terna propia, $A=X_1 \cap X_2$, y sea $j_i:X_i \longrightarrow X$ y $k_i:A \longrightarrow X_i$, i =1, 2 las aplicaciones inclusión. Considerando la sucesión de "Mayer – Vietoris" $H^{q-1}(A) \xrightarrow{\Delta} H^q(X) \xrightarrow{\alpha} \bar{H}^q(X_1)+\bar{H}^q(X_2) \xrightarrow{ß} H^q(A)$ la cual es exacta, sin usar el axioma de dimensión; donde $\alpha=H^q(j_1)+H^q(j_2)$ y $ß=H^q(k_1)+H^q(k_2)$. De aquí es exacta en el presente contexto. Luego usando las relaciones (S_1) y (S_2), fácilmente se puede ver que J^q satisface el axioma de escisión(e).

Observación (5.2.4).- Descripción de la extensión para lo cual el espectro "Y" en el teorema anterior es único. Sean $Y\ e\ Y'$ espectros, una aplicación $\xi:Y \longrightarrow Y'$ entre espectros, es una sucesión de aplicaciones $q:Y_q \longrightarrow Y_q^{'}$ tal que $h_q^{'} f_q \simeq \Omega f_{q+1} h_q$. ξ es una equivalencia homotópica si existe una aplicación $G:Y' \longrightarrow Y$ tal que $g_q f_q \simeq 1_{Y_q}$ y $f_q g_q \simeq 1_{Y'_q}$ para cada "q". En consecuencia podemos dar el siguiente teorema.

Teorema (5.2.2): (a) Si $\{H^q,\delta^q\}$ satisface:

"$\pi H^q(i_x):H^q(U) \approx \pi H^q(x)$, si U es un espacio topológico con la topología discreta y donde $i_x:\{x\} \longrightarrow U$ es la aplicación inclusión en $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1$. "Entonces, el espectro dado por el teorema (5.2.1) es único, salvo tipo de homotopía.

(b) Si Si $\{H^q,\delta^q\}$ satisface: la relación (t_*) de la observación (5.2.2) y si, Y e Y' son dos espectros dando teorías de cohomología equivalente $\{H^q,\delta^q\}$, entonces existe una colección de equivalencias homotopicas $f_q:Y_q \longrightarrow Y'_q$ tal que $h'_q f_q$ y $\Omega f_{q+1}h_q$ son homotopicos en cada subcomplejo finito de Y_q.

Demostración.- La parte (a) es inmediata mientras que la parte (b) se sigue el lema (B_7)

Observación (5.2.5): La forma complicada del Teorema (5.2.2) para la condición (t_*) surge por el siguiente hecho. Supóngase que X es un CW – complejo, y X_α son sus subcomplejos finitos. En general la aplicación $\rho:[X,Y]\longrightarrow \underline{\lim}[X_\alpha,Y]$ es uno a uno. Así nosotros obtenemos dos aplicaciones $f,f':Y\longrightarrow Y$ las cuales inducen la transformación identidad sobre $[\ \ ,\mathrm{Y}]$ restringido a $\mathcal{C}_0$ pero no son homotópicas.

Lema (13).- Existe un isomorfismo natural $F:H^q(X,x_0)\longrightarrow H^q\left(\sum X,x_0\right)$

Demostración.- Recordemos que la sucesión exacta de una terna, se sigue de la sucesión exacta de una pareja. Sean X^+ y X^- los conos superior e inferior (respectivamente) de $\sum X$, $H^q(X,x_0)\approx H^{q+1}(X^+,X)$ por la sucesión exacta de la terna (X^+,X,x_0) y el hecho que X^+ es contractible. Por el "axioma de escisión (e)". $H^{q+1}(X^+,X)$ $\approx H^{q+1}\left(\sum X,X^-\right)$y, por la sucesión exacta de la terna $\left(\sum X,X^-,x\right)$, $H^{q+1}\left(\sum X,X^-\right)$ $\approx H^{q+1}\left(\sum X,x_0\right)$, es claro ver que todos estos isomorfismos son naturales.

Observación (5.2.6).- Sea "b" el punto base de S^n. Por el axioma de escisión (e)" $H^q(b)\approx H^q(S^0,b)$ y por el "lema (13)" $H^q(S^n,b)\approx H^{q-n}(S^o,b)$, de aquí por (t_*), $J^q(S^n)=H^{q-n}(b)$ es contable y de este modo J^q satisface el "axioma de numerabilidad.

Observación (5.2.7).- Aplicando el teorema (I) a J^q, se obtiene un CW – Complejo $\bar{Y}_q$ y una equivalencia natural $T:[\ \ ,\bar{Y}_q]\longrightarrow J_q$. Además $\bar{Y}_q$ puede ser elegido para ser un CW – complejo contable. El lema (13) produce una equivalencia natural $V:[X,\bar{Y}_q]\longrightarrow\left[\sum X,\bar{Y}_{q+1}\right]=[X,\Omega\bar{Y}_{q+1}]$ lo cual por el lema (7) es inducido por una aplicación $h_q:Y_q\longrightarrow\Omega\bar{Y}_{q+1}$.

Proposición (5.2.3).- El espacio de lazos sobre un CW – Complejo posee el mismo tipo de homotopía como un CW – Complejo.

Demostración.- (Ver J. Milnor: On-spaces having the same homotopy type como un CW – Complejo).

Corolario (5.2.4).- $\bar{h}_q$ define una equivalencia homotópica entre $\bar{Y}_q$ y los componentes de caminos de la aplicación constante de $\Omega\bar{Y}_{q+1}$.

Demostración.- Se obtiene directamente del teorema de Whitehead y de la proposición anterior. Para lo cual elijamos un lazo "σ" de cada componente de camino de $\Omega\bar{Y}_{q+1}$ y sea $Y_q = \bar{Y}_q x \{\sigma\}$. Sea $h_q : Y_q \longrightarrow \Omega Y_{q+1} = \Omega\bar{Y}_{q+1}$ dado por $h_q(y,\sigma) = \bar{h}_q(y).\sigma$ donde $y \in \bar{Y}_q$ y la operación "•" denota la multiplicación de caminos. Entonces h_q es una equivalencia homotópica y de aquí $\{Y_q, h_q\}$ es un Ω - espectro. También Y_q admite una estructura de CW – Complejo, la razón para pasar de $\bar{Y}_q$ a Y_q, además el hecho que esto es necesario para obtener un Ω - espectro, es que el espacio en $\mathscr{C}^2_{TOP}$ no son requeridos por ser conexos por piezas.

Observación (5.2.8).- Por argumentos usuales la aplicación $\psi : H^q\left(\sum X, x_0\right) x H^q\left(\sum X, x_0\right) \longrightarrow H^q\left(\sum X, x_0\right)$ inducida por la aplicación pegamento es dada por $\psi(u,v) = u + v.$ De aquí la estructura de grupo en $H^q\left(\sum X, x_0\right)$ es determinado por la aplicación pegamento- Por consiguiente se tiene los siguientes isomorfismos.

$$H^q\left(X, x_0\right) \approx H^{q+1}\left[\sum X, x_0\right] \approx \left[\sum X, Y_{q+1}\right] \approx \left[X, \Omega Y_{q+1}\right] \approx \left[X, Y_q\right]$$

Además, estos isomorfismos son todos naturales.

Proposición (5.2.4).- $T^q : \left[Z\left(X, A\right), Y^q\right] \approx H^q(X, A)$

En efecto.- Consideremos $\hat{A} = Z(A, A).$ Por el "axioma de escisión (e)", $H^q(X, A) \approx H^q\left(Z\left(X, A\right), \hat{A}\right)$ y por la sucesión exacta de la terna $\left(Z(X, A), \hat{A}, P\right)$ se tiene $H^q(Z(X, A), A) \approx H^q(Z(X, A), P).$ Combinando estos isomorfismos con los isomorfismos obtenidos en la observación (5.2.8), obtenemos la equivalencia natural requerida.

5.3 OTRO TIPO DE RESULTADOS

Por la naturaleza del trabajo; los otros resultados que presentaremos, esta basado en aplicaciones como son: clasificación de Haces, cohomología ordinaria, en CW complejos y existencia de equivalencias naturales de este modo presentamos algunas hechos previos.

Definiciones (Previas) (5.3.1)

1. Un “Grupo de Lie” es un conjunto G; el cual es un grupo y una variedad diferenciable; y tal que las aplicaciones siguientes son diferenciales.

(L_1) La aplicación multiplicación $\mu : GxG \longrightarrow G$ dado como $\mu(x, y) = xy$

(L_2) La aplicación inversión $\nu : G \longrightarrow G$ dado como $\nu(x) = x^{-1}$. El elemento unidad de un grupo Lie es denotado por “e”.

2. Un Homomorfismo de grupos de Lie: $\varphi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo diferenciable de grupos. Un isomorfismo de grupos de Lie es una aplicación es que sea: homomorfismo y difeomorfismo.

3. Una aplicación continua $p : E \longrightarrow B$ es una fibración si tiene la siguiente propiedad, para todo espacio topológico X, dada una aplicación continua $f : X \longrightarrow E$ y una homotopía $F : X \ x\ I \longrightarrow B$ tal que $F\sigma_0 = f$. Entonces existe una homotopía $H : X \ x\ I \longrightarrow E$ tal que $H\sigma_0 = f$ y pH = F.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \text{ x } I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Figura N° 28 Cuadrado conmutativo de una fibración definida en espacios topológicos.

Fuente : Elaboración propia

A esta propiedad se denomina “propiedad de levantamiento de Homotopía” (P.L.H).

Nota.- 1. Para b $\in$ B, el subespacio $p^{-1}_{(b)}$ se llama fibra de p sobre “b”, B es el espacio base y E es el espacio total de la fibración.

2. Si $X = I^n$ son los cubos a la fibración $p : E \longrightarrow B$ se llama Fibración de Serre

Definición (5.3.2).- Sea $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B'$ aplicaciones continuas. Una aplicación $\tilde{f} : E \longrightarrow E'$ se llama aplicación fibrada se aplica fibras en fibras, esto es si existe una aplicación continua $f : B \longrightarrow B'$ que hace conmutar al siguiente diagrama. Es decir: $f \circ p' = p \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Figura N° 29 Cuadrado conmutativo de una aplicación fibrada.

Fuente : Elaboración propia

Definición _(Haz fibrado) (5.3.3). Un Haz es una terna $\xi = (E, p, B)$ donde $p : E \longrightarrow B$ es una aplicación continua, el espacio B se llama espacio Base, el espacio E se llama espacio total y la aplicación “p” se denomina proyección del Haz.

Nota.- Para cada elemento “b” de B; el conjunto P^{-1}(b) se llama fibra del Haz, sobre $b \in B$.

Definición (Morfismo de Haces) (5.3.4).- Sean ξ y ξ' dos haces. Un morfismo de haces de ξ a ξ' es un par $(f, \bar{f}) : \xi \longrightarrow \xi'$ de aplicaciones continuas donde $f : E(\xi) \longrightarrow E(\xi')$ y $\bar{f} : B(\xi) \longrightarrow B(\xi')$ tal que el siguiente diagrama conmuta. Es decir: $\tilde{f} \circ p(\xi) = p(\xi') \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p(\xi)"'] & E(\xi') \arrow[d, "p(\xi')"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\tilde{f}"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{B}(\xi) \longrightarrow \mathrm{B}(\xi')$$

Figura N° 30 Cuadrado conmutativo inducido por un morfismo de Haces.

Fuente : Elaboración propia

Definición (Haz principal) (5.3.5).- Sea G un grupo de Lie. Un Haz principal (diferenciable) con estructura de grupo G es un par ($\mathcal{P}$, T) donde:

(i) $\mathcal{P}$ = (P, π, B, G) es un haz fibrado diferenciable.

(ii) $T : P\ x\ G \longrightarrow P$ es una acción a derecha de G en P.

(iii) $\mathcal{P}$ admite una representación coordenada $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ tal qu

$\psi_\alpha(x, ab) = \psi_\alpha(x, a)b,\ \ x \in U_\alpha,\ a, b \in G.$ (Nótese que escribamos T(z, a) = za).

(I) Primera Aplicación (Clasificación De Haces Principales)

- Sea G un grupo topológico. Nosotros definimos un G-Haz Principal con puntos base al haz principal (B, X, p, G) juntamente con puntos base $b_0 \in B$ y $x_0 \in X$ tal que $p(b_0) = x_0$.
- Dos haces serán llamados equivalentes si existe una equivalencia de haces aplicando uno sobre el otro, y el cual lleva puntos base sobre punto base.
- Para cada $X \in obj(\mathcal{C}_1)$, sea $B(X;G) \in \mathcal{C}_{(*)}$ el conjunto de clases de equivalencia de haces principales G con puntos base, con la clase del haz trivial como elemento distinguido.

Si $f : X' \longrightarrow X$, sea $B(f) : B(X,G) \longrightarrow B(X',G)$ la aplicación la cual es inducida asignando a cada haz sobre X′ el haz sobre X inducida por "f". Entonces por argumentos elementales de haces se muestra que B satisface los axiomas : (h), (e), (w) y (ℓ), Haces con punto base son necesarios para mostrar que: B (X ∨ Y, G)≈ B(X, G) x B (Y, G).

Resultado.- Existen un único elemento $y_G \in \mathcal{C}_1$ salvo tipo de homotopía; y un elemento $\alpha \in B(Y_G;G)$ tal que $T(\alpha):[X, Y_0] \longrightarrow B(X;G)$ es isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$.

Demostración.- Es rutinario usando las definiciones respectivas.

Observación (5.3.1) Nótese que α es la clase de un haz universal para G, y T(α) es la transformación usual de aplicaciones, de clases de homotopía en el espacio clasificante sobre las clases de equivalencias de haces. Ahora escribamos: $\{X, Y_0\}$ las clases de aplicaciones de homotopía sin puntos base y $\overline{B}(X;G)$, las clases de equivalencias de haces sin puntos base. Luego de la proposición inmediata anterior y con argumentos muy simples se muestra que $T(\alpha)$ induce un isomorfismo.

$$\{X, Y_G\} \approx \overline{B}(X, G)$$

II. Segunda Aplicación (Teoría De Cohomología Ordinaria En Cw – Complejos).

Supóngase que $\{H^q, \delta^q\}$ es una teoría de Cohomología en $\mathscr{A}_1$ satisfaciendo las condiciones (t_1), (t_2), (t_3), así como también la siguiente condición: Si E es un espacio topológico con la topología discreta entonces se cumple:

$H^o(E) \approx \prod_{p\in E} H^o(p)$ y $H^q(E) = 0,$ para q > 0……………..(δ_*)

Ahora sea $G = H^o(p),$ donde “p” es un punto, y sea K (G) = $\{K(G,q), h_q\}$ el Ω-espectro obtenido de Espacio de Eilemberg – Meclane K(G,q).

III. Tercera Aplicación : (Existencia De Equivalencias Naturales)

Existen equivalencias naturales $T^q : [Z(X, A), K(G,q)] \approx H^q(X, A)$. Definida para toda (X, A) $\in \mathscr{A}_1$ tal que $\delta^q T^q = T^{q+1}\overline{\delta}^q$.

Demostración.- Nótese que $\{H^q, \delta^q\}$ satisface la relación (t_{**}) de la observación(5.2.2). Por que de (δ_*) y el hecho que $H^q(X) \approx H^q(X^n)$ para q < n y X^n el n – esqueleto de X. De aquí por el teorema (5.2.2), existe un Ω - espectro $\{Y_q, h_q\}$ tal que $[Z(\ ), Y_q]$ y H^q son equivalentes. $[S^n, Y_q] \approx H^q(S^n) \approx H^{q-n}(p),$ y de aquí Y_q es un espacio de Eilenberg – Maclane de tipo (G, q).

CAPITULO VI
DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON RESULTADOS.

En el proyecto de Investigación se formuló la hipótesis general que establecía las equivalencias homotópicas de estructuras topológicas, lo que permitió formular las siguientes hipótesis específicas.

1. Las transformaciones naturales entre el funtor $[\cdot, Y]: \mathscr{C}_{\in} \longrightarrow S$ satisfaciendo la condición de homotopía.
2. Representación para teorías de Cohomología satisfaciendo casi la totalidad de los axiomas de Eilemberg – Steenrad.

Se pudo observar que haciendo uso de las Teorías Funtoriales Cohomológicas se establecen las equivalencias de estructuras topológicas y clases de homotopía. Así como también se logra determinar específicamente transformaciones naturales "T" que van de $[\bullet, Y] \longrightarrow H$ para un espacio topológico "Y" fijo y para H – funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos con punto base, en la categoría de conjuntos con elementos distinguidos.

Asimismo, se obtuvo dos aplicaciones, siendo estas:

1. La clasificación de Haces principales, lo cual se realiza vía equivalencia de haces.
2. La teoría de Cohomología ordinaria en CW – Complejos o específicamente $H^\circ(E) \approx \prod_{P \in E}{}^\circ(P)$
3. La existencia de equivalencias naturales de $[Z(X, A), K(G, q)]$ con $H^q(X, A)$

6.2. CONTRASTACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON ESTUDIOS SIMILARES

Son algunos autores entre ellos Robert, E. Mosher y Martín C. Tangora en su obra "Cohomology operations and aplications in Homotopy Theory" establecen resultados muy similares, basados en las operaciones cohomológicas y los espacios $K(\pi, n)$; como por ejemplo muestra la correspondencia biyectiva entre: $Hom(\pi, \pi')$ y $\left[K(\pi, n), K(\pi', n)\right]$; también establece la doble identificación siguiente: $H^n(\pi, n; G) \approx \odot(\pi, n; G, m) \approx \left[K(\pi, n); K(G, m)\right]$; a diferencia o a contraste de estos autores y otros; nosotros estudiamos tales identificaciones basados en teorías de cohomología.

6.3. RESPONSABILIDAD ÉTICA

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se verificó su cumplimiento con la normativa institucional que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para su validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

Es decir, que para la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad en lo establecido en el Reglamento General de Investigación, el Reglamento de Propiedad Intelectual y el Reglamento de participación de los docentes en proyectos de investigación aprobaos por la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se han plagiado datos, resultados, tablas, cuadros de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos, resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de autoría y de propiedad intelectual.

CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados analíticos obtenidos o en la determinación de las equivalencias, de estructuras topológicas y las clases de Homotopía se han podido establecer las siguientes conclusiones:

1. La teoría Funtorial de la Cohomología desarrollada ha permitido definir una Teoría de Cohomología en la Categoría de pares de espacios topológicos $\mathcal{A}$ con valores en la categoría de grupos abelianos $\mathcal{G}$ como la colección de funtores contravariantes y una colección de homomorfismos naturales.

2. Los haces principales son clasificados vía teoría de cohomología ordinaria en los denominados CW – Complejos garantizando, la existencia de equivalencias naturales.

3. Se ha establecido que los objetos topológicos pueden ser analizados desde el punto de vista algebraico y recíprocamente.

4. Las equivalencias de estructuras topológicas y las clase s de homotopía han sido determinados mediante teoría funtorial de la cohomología.

RECOMENDACIONES

- Los resultados obtenidos, sobre la determinación de las equivalencias, de estructuras topológicas y las clases de homotopía, se han realizado bajo las teorías de cohomología, se recomienda estudiar dichos resultados bajo la teoría homológica, con ciertas condiciones adicionales.

- Buscar e investigar el funtor $H : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_{conj}$, para casos particulares, como el funtor Ext y el funtor Tor.

- Impulsar la investigación de la matemática en el área de la topología algebraica.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Alexandroff, P. and Hopf, H. : 1935 *Topologie.* Vol. I Springer – Verlag, Berlin.
- Alexandroff, P.S.:(1956) *Combinatorial Topology.* Vols. I – III. Graylock Press, Rochester, N. Y., 60
- Artin, E. and Braun, H.: (1964) *Vorlesungen über Algebraische Topologie.* Hamburg.
- Bourgin, D. G.: (1963) *Modern Algebraic Topology*. The Macmilla Co, New York, 1963.
- Cairns, S.S.: (1961) *Introductory Topology.* Ronald Press, New York.
- Eilenberg, S. and Steenred, N.E.: (1961). *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton Univ. Press, Princeton.
- James W. Vick; (1973) *Homology theory, © Copy right, by Academic press, Inc., University of Texas*, New York and London.
- N. Bourbaki, (2012), *Elements of Mathematics. General Topology*. Chapters 1-4. 2nd printing. Springer – Verlag. New York
- R. Arens, J. Dugundji, (1951) *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math. 1.
- Sze – Tsen Hu, (1966) *Homology Theory, © copyright by Holden day, Universidad of California*, Los Angeles.
- W.S. Massey,(1982) *Introduccion a la topología algebraica*, Reverte, 1982.

ANEXOS

ANEXO 1. Matriz de Consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Operacionalización de Variables			Diseño metodológico
			Variable	**Dimensión**	**Indicador**	
GENERAL ¿Será posible que un funtor contravariante H: $C_E \longrightarrow S$ sea naturalmente equivalente al funtor que asigna el conjunto de clases de homotopía	**GENERAL** Mostrar funtorialmente mediante teorías cohomológicas equivalencias homotópicas.	**GENERAL** Equivalencias homotopicas de estructuras topológicas.	**INDEPENDIENTE** Estructuras en categoría topológica.	La teoría de espacios topológicos.	Categoría de espacios topológicos con punto base y la categoría de conjuntos con elementos distinguidos.	El tipo de investigación es básica, y el método utilizado es demostrativo deductivo e inductivo. El trabajo es Teórico, por ende no hay población que estudiar, el lugar de estudio es la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao. No es un trabajo experimental por tanto no se requiere procedimientos especiales para la recolección de información.
ESPECIFICOS • Para los funtores H_1 y H_2 C_E en S y para $X \in C_E$, serán $H_1(X) \approx H_2(X)$?. • Será posible determinar una representación para teorías de Cohomología?.	**ESPECIFICOS** • Determinar de manera específica transformaciones naturales $T:[\bullet,Y]\longrightarrow H;$ para H funtor contravariante de C_E en S. • Determinar una representación para teorías de cohomología que satisfagan la mayoría de los axiomas de Eilemberg – Steenrod.	**ESPECIFICAS** • La transformaciones naturales entre el funtor $[\bullet,Y]:C_E\longrightarrow S$ y el funtor $H:C_E\longrightarrow S$ satisfaciendo la condición de homotopía • Representación para teorías de cohomología satisfaciendo quasi la totalidad de los axiomas de Eilemberg – Steenrod.	**DEPENDIENTE** Equivalencias Homotópicas.	La teoría Cohomológica de los Axiomas Desteenrad.	La Cohomología de espacios topológicos con punto fijado.	

ANEXO 2. Anexos necesarios de acuerdo a la naturaleza del problema.

La maquinaria desarrollada y/o empleada en este trabajo puede ser dualizada, tratando con el funtor $\left[X,\bullet\right]$, pero desafortunadamente el dual de las demostraciones de algunos teoremas ofrece ciertas dificultades básicamente en el funtor corchete. La primera dificultad se presenta para recuperar el grupo $\pi_1(X)$ de $\left[X,\bullet\right]$; y segundo anulando clases de cohomología es más dificultoso que anulando clases de homotopía. En este anexo, muy brevemente describimos algunos hechos que pueden ser dualizados, y presentamos algunos teoremas y/o proposiciones análogas, a los demostrados con hipótesis muy rigurosas y suficientes.

Ahora supóngase que $B, Y_i,\ i=0{,}1$ son espacios topológicos, con $f_i : Y_i \longrightarrow B$ una aplicación; y sea P(B) el espacio de caminos de B con la topología compacta abierta, y sean $Ef_0, f_1 \subset Y_D x P(B) x Y_1$, el espacio definido y/o establecido como sigue:

$Ef_0 f_1 = \left\{\left(y_0, \alpha, y_1\right) : \alpha(0) = f_0(y_0), \alpha(1) = f_1(y_1)\right\}$.

Sea Kn el espacio de Eilemberg Maclane de tipo (Z, n). Sea P_1 la categoría de todos los espacios de caminos conexos con punto base, los cuales tienen la misma homotopía como CW – Complejo y todas las aplicaciones continuas. Sea P_0 la subcategoría de P_1 de todos los espacios con solamente un número finito de grupos de homotopía y para lo cual π_1 opera trivialmente sobre π_n para todo n > 0.

E_{f_0, f_1}, Kn, P_0 y P_1 juegan y/o hacen el papel el rol de $Zf_1, f_2, S^n, C_0\ y\ C_1$.

Ahora supóngase que $\pi : P_0 \longrightarrow S^1$ es un funtor covariante, entonces podemos formular los siguientes axiomas de dualización.

Axioma (h*) (Homotopía): Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son homotópicos, entonces $\pi(f) = \pi(g)$.

Axioma (e*) (Excisión): Sea $fi : Y_i \longrightarrow B$, y sean $P_i : E_{f_0, f_1} \longrightarrow Y_i$, i = 0,1 las proyecciones. Si $\alpha_i \in \pi\left(Y_i\right)$ y $\pi\left(f_0\right)\alpha_0 = \pi\left(f_1\right)\alpha_1$, existe un elemento $\beta \in \pi\left(E_{f_0, f_1}\right)$ tal que $\pi(P_0)\,ß=\alpha_0$ y $\pi(P_1)\,ß=\alpha_1$. Además, si B es un punto, ß es único. Si P es un punto $\pi(p)$ contiene solamente un elemento.

Axioma (c*) (Numerabilidad).- Los grupos $\pi(K_1)=0$, y $\pi(Kn)$ es finitamente generado para todo n.

Teorema.- Si π satisface las axiomas: h*, e* y c*, entonces existe un elemento $x\in P$, único bajo cierto tipo de homotopía, y una equivalencia natural $T:[x,\bullet]\approx\pi$

BIBLIOGRAFIA

1. S. EILENBERG and N.E. STEENROD, 1952. *Foundations of Algebraic Topology,* Princeton University Press,
2. J. MILNOR, (1959) *On spaces having the same homotopy type as a CW- Complex, Trans.* Amer. Math. Soc., 90 272-280.
3. N. E. STEENROD, (1951) *The Topology of Fibre Bundles,* Princeton University Press.
4. G.W. WHITEHEAD, (1960) *Homology theories and duality, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 46 , 554-556.*
5. Robert E. Mosher y Martín C. Tangora, (1968) *Cohomology operations and aplications in Homotopy theory. Copyright – USA.*
6. Atiyah, M.F.R., Bott, And A. Shapiro, (1953) *Relations on iterated reduced Powers, Proc. Natl Acad. Sci. 39. 636 – 638.*