



# Sobre as parábolas de Funk

## On Funk's parabolas

## Sobre las parábolas de Funk

Newton Mayer Solórzano Chávez<sup>1</sup>

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Foz do Iguaçu, PR, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0001-5492-2068>,  <http://lattes.cnpq.br/5434324704126162>

Junior Rodrigues Moyses<sup>2</sup>

Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, GO, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-6754-7145>,  <http://lattes.cnpq.br/2207888598903867>

Víctor Arturo Martínez León<sup>3</sup>

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Foz do Iguaçu, PR, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-2082-6665>,  <http://lattes.cnpq.br/9966158817422161>

**Resumo:** Este estudo visa analisar parábolas no disco unitário bidimensional equipado com uma métrica Funk. Com a análise são obtidas quatro tipos de parábolas, devido à não reversibilidade da métrica de Funk. Cada uma com aplicação à física no problema de navegação de Zermelo. Ademais, identificamos que duas das quatro parábolas obtidas são parte de cônicas Euclidianas bem conhecidas, e as duas restantes são caracterizadas por quárticas irredutíveis.

**Palavras-chave:** métrica de Finsler; métrica de Funk; problema de navegação; parábolas de Funk.

**Abstract:** This study aims to analyze parabolas in the two dimensional unit disk equipped with a Funk metric. The analysis leads to four types of parabolas are obtained, due to the non-reversibility of the Funk metric. Each one with applications to physics in the Zermelo navigation problem. In addition, we identify that two of the four parabolas obtained are in well known Euclidian conics, and the remaining two are characterized by irreducible quartics.

**Keywords:** Finsler metric; Funk metric; navigation problem; Funk's parabolas.

**Resumen:** Este estudio tiene como objetivo analizar parábolas en el disco unitario bidimensional equipado

---

<sup>1</sup>**Currículo sucinto:** Graduado em Matemática pela Universidad Nacional Santiago Antunez de Mayolo (UNASAM - PERU), mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG) e doutor em Matemática pela Universidade de Brasília (UNB). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA). **Contribuição de autoria:** Administração do projeto, Análise formal, Conceituação, Escrita — Primeira Redação, Escrita — Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** nmayer159@gmail.com.

<sup>2</sup>**Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA). Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Matemática na Universidade Federal de Goiás (UFG). **Contribuição de autoria:** Escrita — Primeira Redação, Escrita — Revisão e Edição, Investigação. **Contato:** junior.moyes@discente.ufg.br.

<sup>3</sup>**Currículo sucinto:** Graduado em Matemática pela Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), mestre, doutor e pós-doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Atualmente é professor adjunto na Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA). **Contribuição de autoria:** Escrita — Primeira Redação, Escrita — Revisão e Edição, Investigação.

**Contato:** victor.leon@unila.edu.br.



con una métrica Funk. Con este análisis son obtenidos cuatro tipos de parábolas, debido a la no reversibilidad de la métrica de Funk. Cada una con aplicación a la física en el problema de navegación de Zermelo. Además, identificamos que dos de las cuatro parábolas obtenidas son parte de conocidas cónicas Euclidianas, y las dos restantes se caracterizan por cuárticas irreducibles.

**Palabras clave:** métrica de Finsler; métrica de Funk; problema de navegación; parábolas de Funk.

**Data de submissão:** 14 de abril de 2023.

**Data de aprovação:** 10 de novembro de 2023.

## 1 Introdução

Algumas pesquisas preliminares relacionadas à métrica de Funk foram realizadas em Chávez *et al.* (2021), onde os autores consideraram um lago na forma do disco unitário  $\mathbb{B}^2$ , com uma corrente de vento concêntrica e simétrica dada pelo campo vetorial  $W(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$ ; a função de distância (ou tempo de deslocamento) nesse contexto, para  $P \neq Q$ , é dada por:

$$d_F(P, Q) = \ln \left( \frac{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \langle Q, Q - P \rangle} \right), \quad (1)$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\|\cdot\|$  são o produto interno usual e a norma euclidiana usual, respectivamente, e  $d_F(P, P) = 0$ . Em Chávez *et al.* (2021), também foram obtidas equações para o círculo e fórmulas para a distância de um ponto a uma reta e da reta a um ponto.

Algumas questões surgem naturalmente nesse modelo: imagine uma ilha e uma costa na forma de uma linha reta. Suponha um barco partindo da ilha para um ponto na praia (ou vice-versa), e ele precisa parar em algum ponto intermediário ao longo do caminho para abastecer seu tanque com combustível (observe as figuras 5, 6, 7 e 8).

Agora, imagine dois barcos querendo se encontrar em algum ponto no oceano, um vindo da praia (da costa em linha reta) e o outro de uma ilha, ambos viajando com a mesma velocidade e chegando ao mesmo tempo, então eles devem se encontrar em um ponto intermediário entre eles (observe as figuras 1 e 2). Finalmente, pode-se pensar em dois barcos partindo do mesmo ponto, um chegando a uma ilha e o outro à praia ao mesmo tempo (figuras 3 e 4).

Os problemas de física apresentados acima motivam o estudo de algo equivalente a parábolas no plano Euclidiano, que chamaremos de Parábolas de Funk (ver Definição 3.1). Note que, em cada problema, devemos considerar as duas direções, pois, devido ao vento, não há simetria ao ir de um ponto a outro. Uma vez que fixamos a força externa como sendo concêntrica e simétrica, os



problemas mencionados envolvem situações que podem ser resolvidas com a ajuda das Parábolas de Funk.

## 2 Preliminares

Nesta seção, algumas definições e resultados necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho são introduzidos. Adotamos as definições dadas em Chávez *et al.* (2021), que também podem ser encontradas em Carmo (2019), tais como produto interno, norma, curva regular, comprimento do arco (que será chamado de usual ou euclidiano) e campo vetorial.

**Definição 2.1.** Sejam  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . A função

$$F(x, y) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + 2a_{12}(x)y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2} + b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2,$$

em que  $b_1 = \frac{x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}$ ,  $b_2 = \frac{x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$  e

$$[a_{ij}] = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1 - x_1^2 \end{pmatrix},$$

é chamada *métrica de Funk sobre o disco unitário*  $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ .

Lembrando que a norma euclidiana usual do vetor  $y$  é definida por  $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ , temos que a função  $F$  da definição acima pode ser interpretada como uma generalização ou perturbação da norma euclidiana usual. Isto é,  $F(x, y)$  pode ser pensada como a “norma” do vetor  $y \in \mathbb{R}^2$  no ponto  $x \in \mathbb{B}^2$ . Na linguagem da geometria de Finsler, essa “norma” perturbada é chamada métrica de Funk sobre o disco unitário  $\mathbb{B}^2$ .

Essa métrica de Funk modela um barco navegando com velocidade unitária em  $\mathbb{B}^2$ , em que uma corrente de vento dada por  $W_x = (-x_1, -x_2)$  está presente com velocidade inferior a 1 (veja a Seção 3 em Chávez *et al.* (2021)). A métrica de Funk em  $\mathbb{B}^2$  é um caso especial das métricas de Randers. Algumas propriedades foram estudadas em Shen (2001) para casos mais gerais.

**Definição 2.2** (Comprimento de arco do tipo Funk). Seja  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{B}^2$  uma curva regular por partes. O *comprimento de arco (tipo Funk) de  $c$*  é definido por

$$\mathcal{L}_F(c) := \int_a^b F(c(t), c'(t))dt,$$



em que  $F$  é a função definida na Definição 2.1. Para quaisquer pontos  $p, q \in \mathbb{B}^2$ , definimos a *distância* de  $p$  até  $q$  induzida por  $F$ , como

$$d_F(p, q) := \inf_c \mathcal{L}_F(c),$$

em que o ínfimo é tomado sobre o conjunto de todas as curvas regulares por partes  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{B}^2$  tais que  $c(a) = p$  e  $c(b) = q$ . Esse comprimento de arco do tipo Funk nada mais é o tempo de viagem de um barco que navega sobre a curva  $c$ , desde  $c(a)$  até  $c(b)$ .

Sabe-se que os *caminhos mais curtos* nessa métrica são linhas retas (veja o Exemplo 9.2.1 em Shen (2001)), isto é, o caminho ótimo é sempre uma linha reta. Essa propriedade torna essa métrica gerenciável em relação ao cálculo de distâncias. Mais detalhes sobre geodésicas e sua relação com os caminhos mais curtos podem ser encontrados na Seção 3.2 de Chern e Shen (2005) e na Seção 2.3 de Cheng e Shen (2012).

Na Observação 4.2, em Chávez *et al.* (2021), foi provado que  $d_F$  dado por (1) não é reversível ( $d_F(P, Q) \neq d_F(Q, P)$ ) e não é invariante por translações, mas é invariante por rotações. Além disso, considerando  $O = (0, 0)$ , na Observação 5.3, em Chávez *et al.* (2021), foi mostrado que

$$\lim_{\|Q\| \rightarrow 1} d_F(O, Q) = +\infty \text{ e } \lim_{\|P\| \rightarrow 1} d_F(P, O) = \ln 2.$$

Em outras palavras, se um barco parte da origem do disco em direção à fronteira, ele levará um tempo infinito para chegar ao destino, ou seja, ele nunca chega à fronteira. E se um barco parte da fronteira de  $\mathbb{B}^2$  em direção à origem do disco, o tempo mínimo de viagem é igual a  $\ln 2$  unidades de tempo.

A equação (1) pode ser mais manejável, utilizando a versão a seguir do Teorema 5.1, dada em Chávez *et al.* (2021).

**Teorema 2.3.** Sejam  $P, Q$  pontos de  $\mathbb{B}^2$  e  $r \geq 1$  um número real, então

$$d_F(P, Q) = \ln r \iff \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{r},$$

em que  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana usual.

**Prova.** Se  $r = 1$ , temos claramente que

$$d_F(P, Q) = \ln 1 = 0 \iff P = Q \iff \frac{1-1}{1} = 0 = \|P - Q\| = \left\| \frac{P}{1} - Q \right\|.$$



Se  $r > 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{r} &\Leftrightarrow \| -P + rQ \| = r-1 \Leftrightarrow \left\| P + \left( \frac{r}{r-1} \right) (Q - P) \right\|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - \|P\|^2 = \left( \frac{r}{r-1} \right)^2 \|Q - P\|^2 + 2 \left( \frac{r}{r-1} \right) \langle P, Q - P \rangle. \end{aligned}$$

Note que  $P \neq Q$  pois  $r > 1$ , logo  $\|P - Q\| \neq 0$  e  $r - 1 \neq 0$ . Assim, multiplicando a igualdade acima por  $(r - 1)^2 \|Q - P\|^2$  obtemos

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (r - 1)^2 (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2 = r^2 \|Q - P\|^4 + 2r(r - 1) \langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 \\ &\Leftrightarrow (r - 1)^2 (\langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2 (1 - \|P\|^2)) = ((r - 1) \langle P, Q - P \rangle + r \|Q - P\|^2)^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Agora, como  $\langle Q, rQ - P \rangle < \|rQ - P\| = r - 1$  (pois  $Q \in \mathbb{B}^2$ ) e  $r - 1 > 0$ , tem-se que

$$\begin{aligned} (r - 1) \langle P, Q - P \rangle + r \|Q - P\|^2 &= \langle rQ - P, Q - P \rangle \\ &= \|rQ - P\|^2 - (r - 1) \langle Q, rQ - P \rangle > (r - 1)^2 - (r - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, sendo  $r - 1 > 0$ , (2) é equivalente a

$$\Leftrightarrow (r - 1) \sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2 (1 - \|P\|^2)} = (r - 1) \langle P, Q - P \rangle + r \|Q - P\|^2. \quad (3)$$

Como  $Q \in \mathbb{B}^2$  e  $P \neq Q$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle Q, Q - P \rangle^2 - \langle P, Q - P \rangle^2 &= [\|Q\|^2 - \|P\|^2] \|Q - P\|^2 \neq (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \langle Q, Q - P \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que (3) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \langle Q, Q - P \rangle} \\ &\Leftrightarrow \ln r = \ln \left( \frac{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \langle Q, Q - P \rangle} \right) = d_F(P, Q). \end{aligned}$$

Note que, na prova do teorema anterior, foram usadas as propriedades de norma euclidiana. Isto é, o teorema continua válido para pontos  $P$  e  $Q$  em  $\mathbb{B}^n$ , com  $n \geq 2$ .

Para dar continuidade aos resultados, se faz conveniente a introdução da seguinte função  $\rho : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(\epsilon, \eta) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(\epsilon - \eta)\epsilon}{1 + \operatorname{sgn}(\epsilon - \eta)\eta}, \quad (4)$$



na qual  $\text{sgn}$  é a função sinal:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Usando a definição de  $\rho$  em (4), podemos reescrever os resultados obtidos nas seções 5.2 e 5.3 de Chávez *et al.* (2021), resultado na proposição a seguir.

**Proposição 2.4** (Chávez *et al.* (2021)). Sejam  $P = (a, b)$  um ponto em  $\mathbb{B}^2$  e  $s : x_2 = c$  uma reta paralela ao eixo horizontal  $x_2 = 0$ . A distância de Funk  $d_F(P, s)$  do ponto  $P$  até a reta  $s$  e a distância de Funk  $d_F(s, P)$  da reta  $s$  até o ponto  $P$ , são dadas respectivamente por

$$d_F(P, s) = d_F \left( P, \left( \frac{a}{\rho(b, c)}, c \right) \right) = \ln(\rho(b, c)), \tag{5}$$

$$d_F(s, P) = d_F((a \cdot \rho(c, b), c), P) = \ln(\rho(c, b)), \tag{6}$$

em que  $\rho(\epsilon, \eta)$  é dada por (4).

Nos exemplos de Chávez *et al.* (2021), podemos notar que as distâncias de ponto a reta (e vice-versa) não são realizadas por uma linha perpendicular à reta.

### 3 Parábolas de Funk em $\mathbb{B}^2$

Vale a pena lembrar o fato que as curvas que minimizam o comprimento são segmentos de reta (ou seja, intersecções de retas de  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{B}^2$ ) e daqui para frente esses segmentos serão chamados de retas.

Como a distância de Funk é não simétrica, obtemos quatro tipos de parábolas de Funk.

**Definição 3.1.** Sejam  $s \subset \mathbb{B}^2$  uma reta, chamada *reta diretriz*, e  $\mathcal{F}$  um ponto em  $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , chamado *foco*. Definimos a *parábola de Funk*, com diretriz  $s$  e foco  $\mathcal{F}$ , como sendo o conjunto formado por todos os pontos  $P \in \mathbb{B}^2$ , tais que satisfazem uma das seguintes propriedades:

(P1)  $d_F(\mathcal{F}, P) = d_F(s, P)$ ;

(P3)  $d_F(\mathcal{F}, P) = d_F(P, s)$ ;

(P2)  $d_F(P, \mathcal{F}) = d_F(P, s)$ ;

(P4)  $d_F(s, P) = d_F(P, \mathcal{F})$ .

O conjunto dos pontos verificando a propriedade (Pk) é chamado **parábola de Funk tipo  $k$** , onde  $k = 1, 2, 3, 4$ .



**Observação 3.2.** Note que, na definição anterior, estamos também considerando o caso degenerado, ou seja, quando o foco  $\mathcal{F}$  pertence à diretriz  $s$ .

Devido à invariância da distância de Funk por rotações, podemos considerar **o caso em que a diretriz é paralela ao eixo  $x$** . Ao longo deste trabalho, usaremos as seguintes notações:

$$s : y = y_0, \quad \mathcal{F} = (f_0, g_0) \text{ e } P = (x, y).$$

### 3.1 Parábola de Funk do tipo 1

Pela equação (6) e pelo Teorema 2.3, temos

$$d_F(s, P) = d_F(Q, P) = \ln(\rho(y_0, y)) \iff \left\| \frac{Q}{\rho(y_0, y)} - P \right\| = \frac{\rho(y_0, y) - 1}{\rho(y_0, y)},$$

em que  $Q = (x\rho(y_0, y), y_0)$  e  $\rho$  é dado por (4). Por outro lado, pela definição da parábola tipo 1 (P1) e pelo Teorema 2.3, temos

$$d_F(\mathcal{F}, P) = \ln(\rho(y_0, y)) \iff \left\| \frac{\mathcal{F}}{\rho(y_0, y)} - P \right\| = \frac{\rho(y_0, y) - 1}{\rho(y_0, y)}.$$

Concluimos, assim, que  $P = (x, y)$  satisfaz (P1) se, e somente se,

$$\left\| \frac{\mathcal{F}}{\rho(y_0, y)} - P \right\|^2 = \left\| \frac{Q}{\rho(y_0, y)} - P \right\|^2, \tag{7}$$

em que  $Q = (x\rho(y_0, y), y_0)$  e  $\rho$  é dado por (4).

Primeiro, suponhamos o caso degenerado, quando o foco  $\mathcal{F} = (f_0, g_0)$  está na reta  $s = y_0$ , ou seja, quando  $y_0 = g_0$ . Nesse caso, a equação (7) é equivalente a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|^2 - 2\rho(y_0, y)\langle \mathcal{F}, P \rangle &= \|Q\|^2 - 2\rho(y_0, y)\langle Q, P \rangle \\ \iff f_0^2 + g_0^2 - 2\rho(y_0, y)[f_0x + g_0y] &= x^2(\rho(y_0, y))^2 + y_0^2 - 2\rho(y_0, y)[x^2\rho(y_0, y) + yy_0] \\ \iff f_0^2 + y_0^2 - 2\rho(y_0, y)[f_0x + y_0y] &= x^2(\rho(y_0, y))^2 + y_0^2 - 2\rho(y_0, y)[x^2\rho(y_0, y) + yy_0] \\ \iff x^2(\rho(y_0, y))^2 - 2f_0x\rho(y_0, y) + f_0^2 &= 0 \\ \iff (x\rho(y_0, y) - f_0)^2 &= 0 \\ \iff x - f_0(\rho(y_0, y))^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Isso implica que  $P = (x, y)$ , ou está na semi-reta  $(1 - y_0)x - f_0(1 - y) = 0, y \geq y_0$ , ou na semi-reta  $(1 + y_0)x - f_0(1 + y) = 0, y < y_0$ . Note que se  $f_0 = 0$ , então  $P$  está sobre a reta  $x = 0$ . Se



$f_0 \neq 0$  e  $x$  se aproxima de zero, então  $y$  se aproxima de 1 ou  $-1$  independentemente do valor de  $f_0$ . Geometricamente, as parábolas degeneradas são parte das semirretas que partem de  $\mathcal{F}$  em direção aos pontos  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ .

A seguir, caracterizamos a Parábola de Funk não degenerada do tipo 1.

**Proposição 3.3.** Sejam  $s : y = y_0 \subset \mathbb{B}^2$  a diretriz,  $\mathcal{F} = (f_0, g_0) \in \mathbb{B}^2$  o foco com  $g_0 \neq y_0$  e a elipse Euclidiana  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$  caracterizada pela equação

$$x^2 + Bx\bar{y} + C\bar{y}^2 + E\bar{y} = 0, \tag{8}$$

em que  $\bar{y} = 1 + \text{sgn}(y_0 - g_0)y$ ,  $B = -\frac{2f_0}{\sigma_1}$ ,  $C = \frac{f_0^2 + (y_0 - g_0)^2 + 2|y_0 - g_0|}{\sigma_1^2}$ ,  $E = -\frac{2|y_0 - g_0|}{\sigma_1}$  e  $\sigma_1 = 1 + \text{sgn}(y_0 - g_0)y_0$ . Então, o lugar geométrico da parábola de Funk tipo 1 é dado pelo conjunto  $\mathcal{E} - \{(0, -\text{sgn}(y_0 - g_0))\}$ .

**Prova.** A reta  $s$  divide  $\mathbb{B}^2$  em dois domínios. Suponha que  $\mathcal{F} \notin s$ . Mostraremos que a parábola de Funk tipo 1 e o foco  $\mathcal{F}$  estão no mesmo subespaço gerado por  $s$ . De fato, suponha que  $\mathcal{F}$  e  $P$  estão em subespaços distintos gerados por  $s$ . Sejam  $Q$  e  $Q_0$  em  $s$ , tal que  $d_F(s, P) = d_F(Q, P)$  e  $Q_0$  esteja no segmento de reta  $\overline{\mathcal{F}P}$ , então

$$d_F(s, P) = d_F(Q, P) \leq d_F(Q_0, P) < d_F(\mathcal{F}, Q_0) + d_F(Q_0, P) = d_F(\mathcal{F}, P).$$

Suponha que exista algum ponto  $P = (x, y)$  da parábola de Funk tipo 1 tal que esteja sobre a reta  $s$ , isto é, existe  $y$  tal que  $y = y_0$ , então, de (P1) temo que  $\mathcal{F} = P$ .

Assim, o sinal de  $y_0 - y$  é igual ao sinal de  $y_0 - g_0$ , portanto, temos que  $\rho(y_0, y)$  pode ser reescrito como

$$\rho(y_0, y) = \frac{1 + \text{sgn}(y_0 - g_0)y_0}{1 + \text{sgn}(y_0 - g_0)y}.$$

Utilizando as propriedades de módulo e produto interno, temos que a equação (7) pode ser reescrita como:

$$2\rho(y_0, y)\langle P, \mathcal{F} - Q \rangle + \|Q\|^2 - \|\mathcal{F}\|^2 = 0. \tag{9}$$

Tendo em vista que  $\text{sgn}(y_0 - g_0) \cdot (y_0 - g_0) = |y_0 - g_0|$ , e substituindo as coordenadas de  $\mathcal{F}, P$  e  $Q$ , temos que a equação (9) é equivalente a:

$$x^2 - 2f_0 \frac{x}{\rho(y_0, y)} + [f_0^2 + (y_0 - g_0)^2 + 2|y_0 - g_0|] \frac{1}{\rho^2(y_0, y)} - 2|y_0 - g_0| \frac{1}{\rho(y_0, y)} = 0,$$





que nada mais é que a equação (8).

A equação (8) é uma equação quadrática em  $x$  e  $1 + \text{sgn}(y_0 - g_0)y$ , conseqüentemente em  $x$  e  $y$  e cujo indicador  $I$  é dado por

$$I = B^2 - 4C = -\frac{4}{\sigma_1^2}[(y_0 - g_0)^2 + 2|y_0 - g_0|] < 0,$$

o que nos indica que a forma quadrática (8) é do tipo Elíptico na geometria euclidiana (vazio, elipse, circunferência ou ponto em  $\mathbb{R}^2$ ).

Note que o ponto  $(0, -\text{sgn}(y_0 - g_0))$  satisfaz a equação (8). Logo, o lugar geométrico que descreve (8) não pode descrever uma curva fechada. Veremos a seguir que efetivamente é uma elipse euclidiana sem o ponto  $(0, -\text{sgn}(y_0 - g_0))$ .

Técnicas para determinar a cônica e obter sua forma canônica a partir de uma dada equação geral de segundo grau podem ser encontradas no Capítulo 23 de Boulos e Camargo (2005).

**Caso 1:**  $f_0 = 0$  : Quando  $f_0 = 0$ , a equação (8) se reduz a

$$x^2 + C\bar{y}^2 + E\bar{y} = 0.$$

Logo, completando quadrados obtemos

$$x^2 + C\left(\bar{y} + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{E^2}{4C}.$$

Assim, a mudança de parâmetros

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}, \\ y &= \left(\tilde{y} - \frac{E}{2C} - 1\right) \text{sgn}(y_0 - g_0), \end{aligned} \tag{10}$$

em que  $\frac{E}{2C} = -\frac{\sigma_1}{2 + |y_0 - g_0|}$ , transforma a equação (8) na forma canônica:

$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{E^2}{4C}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{E^2}{4C^2}} = 1. \tag{11}$$

De (10) e (11), temos que a parábola de Funk tipo 1 é parte de uma elipse euclidiana de centro  $C = \left(0, \frac{g_0 - \text{sgn}(y_0 - g_0)}{2 + |y_0 - g_0|}\right)$  e vértices:  $\left(\pm \frac{E}{2\sqrt{C}}, -\left(1 + \frac{E}{2C}\right) \text{sgn}(y_0 - g_0)\right), \left(0, -\left(1 + \frac{E}{2C} \pm \frac{E}{2C}\right) \text{sgn}(y_0 - g_0)\right)$ .

**Caso 2:**  $f_0 \neq 0$ . Aqui se apresentam duas possibilidades:



Se  $C = 1$ , a equação (8) se reduz a

$$x^2 + Bx\bar{y} + \bar{y}^2 + E\bar{y} = 0.$$

Daí, a mudança de variáveis

$$x = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\sqrt{2}}, \quad \bar{y} = \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}}$$

transforma a equação (8) em

$$\left(1 + \frac{B}{2}\right)\tilde{x}^2 + \left(1 - \frac{B}{2}\right)\tilde{y}^2 + \frac{E}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{E}{\sqrt{2}}\tilde{y} = 0.$$

Agora, completando quadrados temos

$$\left(1 + \frac{B}{2}\right)\left(\tilde{x} + \frac{E}{\sqrt{2}(2+B)}\right)^2 + \left(1 - \frac{B}{2}\right)\left(\tilde{y} + \frac{E}{\sqrt{2}(2-B)}\right)^2 = \frac{E^2}{4-B^2}.$$

Assim, a mudança de variáveis

$$x = \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} + \frac{EB}{4-B^2}, \tag{12}$$

$$y = \left(\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} - \frac{2E}{4-B^2} - 1\right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0),$$

transforma a equação (8) na forma canônica:

$$\frac{\frac{\hat{x}^2}{2E^2}}{(2+B)^2(2-B)} + \frac{\frac{\hat{y}^2}{2E^2}}{(2-B)^2(2+B)} = 1. \tag{13}$$

De (12) e (13), temos que a parábola de Funk tipo 1 é parte de uma elipse euclidiana de centro  $C = \left(\frac{EB}{4-B^2}, -\left(\frac{2E}{4-B^2} + 1\right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0)\right)$  e vértices:  $\left(\pm \frac{E}{(2+B)\sqrt{2-B}} + \frac{EB}{4-B^2}, -\left(\frac{2E}{4-B^2} + 1 \pm \frac{E}{(2+B)\sqrt{2-B}}\right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0)\right), \left(\mp \frac{E}{(2-B)\sqrt{2+B}} + \frac{EB}{4-B^2}, \left(\pm \frac{E}{(2-B)\sqrt{2+B}} - \frac{2E}{4-B^2} - 1\right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0)\right)$ .

Se  $C \neq 1$ , fazendo agora a mudança de variáveis

$$x = \tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \operatorname{sen} \theta, \quad \bar{y} = \tilde{x} \operatorname{sen} \theta + \tilde{y} \cos \theta,$$

em que  $0 < \theta < \pi/2$ , tal que  $\tan 2\theta = \frac{B}{1-C}$ , em (8) obtemos

$$\bar{A}\tilde{x}^2 + \bar{C}\tilde{y}^2 + \bar{D}\tilde{x} + \bar{E}\tilde{y} = 0,$$

em que  $\bar{A} = \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta$ ,  $\bar{C} = \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$ ,  $\bar{D} = E \operatorname{sen} \theta$  e  $\bar{E} = E \cos \theta$ . Agora, completando quadrados temos

$$\bar{A}\left(\tilde{x} + \frac{\bar{D}}{2\bar{A}}\right)^2 + \bar{C}\left(\tilde{y} + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}}\right)^2 = \frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}} + \frac{\bar{E}^2}{4\bar{C}}.$$



Daí, a mudança de variáveis

$$x = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta - \left( \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} \cos \theta - \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} \sin \theta \right), \tag{14}$$

$$y = \left( \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta - \left( \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} \sin \theta + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} \cos \theta + 1 \right) \right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0),$$

transforma a equação (8) na forma canônica:

$$\frac{\hat{x}^2}{\frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}^2} + \frac{\bar{E}^2}{4\bar{A}\bar{C}}} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}\bar{C}} + \frac{\bar{E}^2}{4\bar{C}^2}} = 1. \tag{15}$$

De (14) e (15), temos que a parábola de Funk tipo 1 é parte de uma elipse euclidiana de centro  $C = \left( - \left( \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} \cos \theta - \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} \sin \theta \right), - \left( \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} \sin \theta + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} \cos \theta + 1 \right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0) \right)$  e vértices:  $C \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{D}^2}{\bar{A}^2} + \frac{\bar{E}^2}{\bar{A}\bar{C}}} (\cos \theta, \sin \theta \operatorname{sgn}(y_0 - g_0))$ ,  $C \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{D}^2}{\bar{A}\bar{C}} + \frac{\bar{E}^2}{\bar{C}^2}} (-\sin \theta, \cos \theta \operatorname{sgn}(y_0 - g_0))$ .

Podemos resumir as duas possibilidades anteriores, fazendo a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \hat{x} - \beta \hat{y} - \left( \alpha \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} - \beta \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} \right), \\ y &= \left( \beta \hat{x} + \alpha \hat{y} - \left( \beta \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} + \alpha \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} + 1 \right) \right) \operatorname{sgn}(y_0 - g_0), \end{aligned} \tag{16}$$

em que  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \operatorname{sgn}(f_0) \frac{(1 - C)}{\sqrt{B^2 + (1 - C)^2}}}$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sgn}(f_0) \frac{(1 - C)}{\sqrt{B^2 + (1 - C)^2}}}$  (aqui  $B$  e  $C$  são os coeficientes da equação (8)). Assim, temos que a equação (8) é reduzida à seguinte forma canônica:

$$\frac{\hat{x}^2}{\frac{1}{4} \left( \frac{\bar{D}^2}{\bar{A}^2} + \frac{\bar{E}^2}{\bar{A}\bar{C}} \right)} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{1}{4} \left( \frac{\bar{D}^2}{\bar{A}\bar{C}} + \frac{\bar{E}^2}{\bar{C}^2} \right)} = 1, \tag{17}$$

em que

$$\bar{A} = \alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2, \bar{C} = \beta^2 - B\alpha\beta + C\alpha^2, \bar{D} = E\beta \text{ e } \bar{E} = E\alpha. \tag{18}$$

Note que  $\bar{A} = \left( \alpha + \frac{\beta}{2} B \right)^2 + \frac{(y_0 - g_0)^2 + 2|y_0 - g_0|}{\sigma_1^2} > 0$ . De modo análogo, podemos mostrar que  $\bar{C} > 0$ . De (16)-(18), temos que a parábola de Funk tipo 1 é parte de uma elipse euclidiana de centro  $C = - \left( \alpha \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} - \beta \frac{\bar{E}}{2\bar{C}}, \operatorname{sgn}(y_0 - g_0) \left( 1 + \beta \frac{\bar{D}}{2\bar{A}} + \alpha \frac{\bar{E}}{2\bar{C}} \right) \right)$  e vértices  $C \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{D}^2}{\bar{A}^2} + \frac{\bar{E}^2}{\bar{A}\bar{C}}} (\alpha, \beta \operatorname{sgn}(y_0 - g_0))$ ,  $C \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{D}^2}{\bar{A}\bar{C}} + \frac{\bar{E}^2}{\bar{C}^2}} (-\beta, \alpha \operatorname{sgn}(y_0 - g_0))$ .



### 3.2 Parábola de Funk do tipo 2

Pelo Teorema 2.3 e pela equação (5), temos que o ponto  $P = (x, y)$  satisfaz  $P2$  se, e somente se,

$$\left\| \frac{\mathcal{F}}{\rho^{-1}(y, y_0)} - P \right\|^2 = \left\| \frac{1}{\rho^{-1}(y, y_0)} Q - P \right\|^2, \tag{19}$$

em que  $Q = (x\rho^{-1}(y, y_0), y_0)$  e  $\rho$  é dado por (4).

O desenvolvimento das equações (7) e (19) são análogas. Assim, temos, em primeiro lugar, que o caso degenerado da parábola de Funk tipo 2 ( $y_0 = g_0$ ) é caracterizado pela equação da reta  $x - f_0\rho(y, y_0) = 0$ , que nada mais é do que um espelhamento das parábolas de Funk (degeneradas) tipo 1 em relação à reta  $s$ . Em segundo lugar, as parábolas de Funk tipo 2 não degeneradas são caracterizadas na seguinte proposição:

**Proposição 3.4.** Sejam  $s : y = y_0 \subset \mathbb{B}^2$  a reta diretriz,  $\mathcal{F} = (f_0, g_0) \in \mathbb{B}^2$  o foco, com  $g_0 \neq y_0$ , e a hipérbole euclidiana  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$ , caracterizada pela equação

$$x^2 + Bx\bar{y} + C\bar{y}^2 + E\bar{y} = 0, \tag{20}$$

em que  $\bar{y} = 1 - \text{sgn}(y_0 - g_0)y$ ,  $B = -\frac{2f_0}{\sigma_2}$ ,  $C = \frac{f_0^2 + (y_0 - g_0)^2 - 2|y_0 - g_0|}{\sigma_2^2}$ ,  $E = \frac{2|y_0 - g_0|}{\sigma_2}$  e  $\sigma_2 = 1 - \text{sgn}(y_0 - g_0)y_0$ . Então, o lugar geométrico da parábola de Funk tipo 2 é dado pela curva conexa  $\mathcal{H} \cap \mathbb{B}^2$ .

**Prova.** Note que o indicador  $I = B^2 - 4C = 4|y_0 - g_0|(2 - |y_0 - g_0|) > 0$ ; isso nos indica que a forma quadrática (8) é do tipo hiperbólico na geometria euclidiana (duas retas concorrentes ou hipérbole em  $\mathbb{R}^2$ ). Sendo  $E \neq 0$ , a possibilidade de ser duas retas é descartada. Análogo ao feito na Proposição 3.4, é possível mostrar que o foco  $\mathcal{F}$  e os pontos  $P$  da parábola de Funk tipo 2 estão no mesmo subespaço aberto gerado pela reta diretriz  $s : y = y_0$ . Portanto, só uma das curvas da hipérbole euclidiana teria interseção com o domínio  $\mathbb{B}^2$ . Resta mostrar que o conjunto  $\mathcal{H} \cap \mathbb{B}^2$  é não vazio; de fato, seja  $Q^* \in s$  tal que  $d(\mathcal{F}, s) = d(\mathcal{F}, Q^*)$ , e considere a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = d(P_t, \mathcal{F}) - d(P_t, Q^*)$ , em que  $P_t = \mathcal{F} + t(Q^* - \mathcal{F}) \in \mathbb{B}^2$ . A função  $f$  é contínua e  $f(0) = -d(P, Q^*) < 0$ ,  $f(1) = d(Q^*, \mathcal{F}) > 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que  $f(t_0) = 0$ .

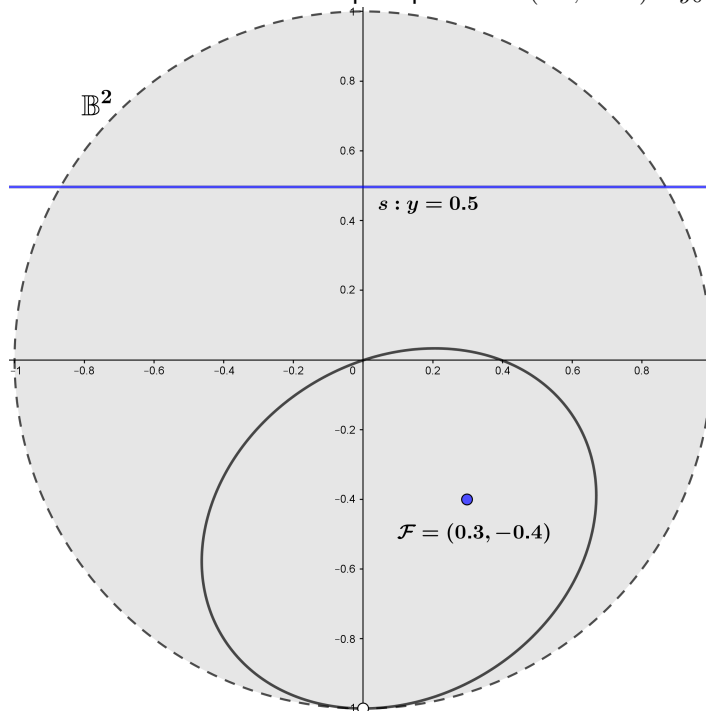


3.3 Exemplos – Parábolas de Funk dos tipos 1 e 2

**Exemplo 3.5. Parábolas de Funk do tipo 1 e 2 passando pela origem**

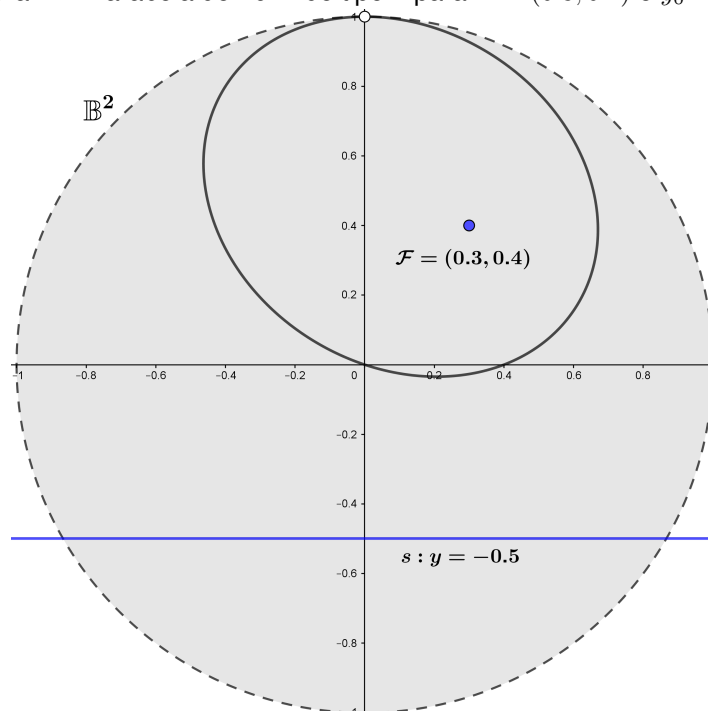
Sejam as parábolas dos tipos 1 e 2 passando em  $(0, 0)$ , cujas equações são dadas por (8) e (20). Substituindo  $x = y = 0$  em (8), ou (20), temos que  $C = -E$ . Nesse caso, temos que  $C = -E$  se, e somente se,  $\|F\|^2 = y_0^2$ . Essa equação nos diz que as parábolas de Funk dos tipos 1 e 2 passam pela origem se, e somente se, as distâncias euclidianas de  $F$  e  $s$  até a origem são iguais.

Figura 1 – Parábola de Funk do tipo 1 para  $F = (0.3, -0.4)$  e  $y_0 = 0.5$



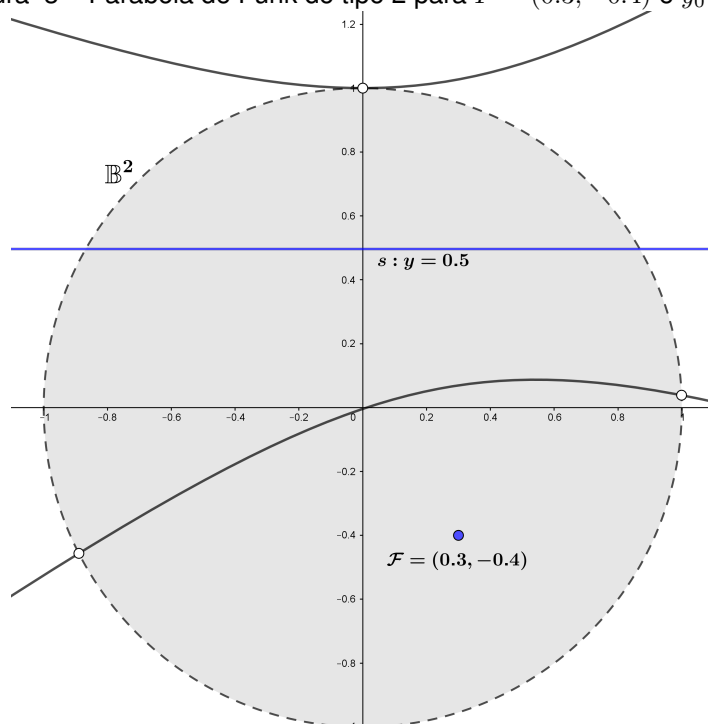
Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Figura 2 – Parábola de Funk do tipo 1 para  $F = (0.3, 0.4)$  e  $y_0 = -0.5$



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

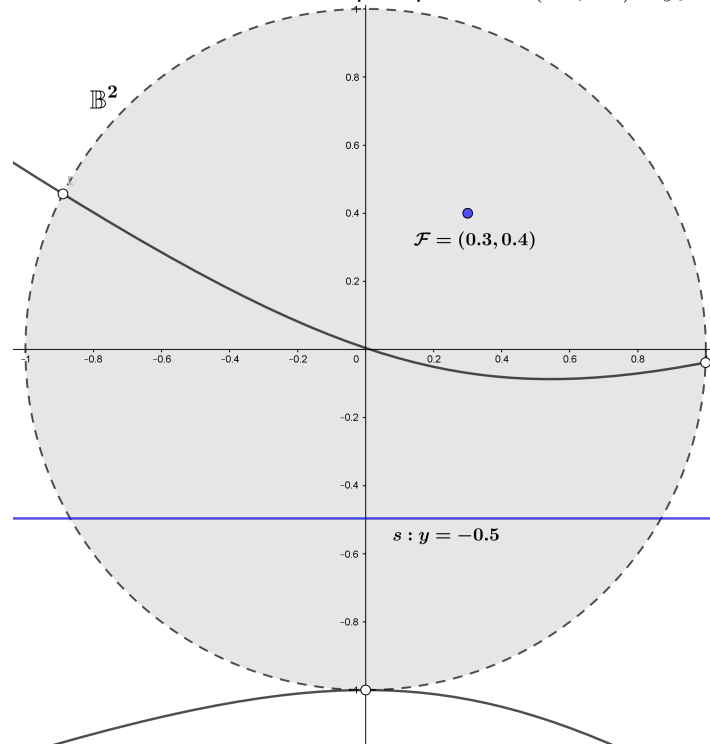
Figura 3 – Parábola de Funk do tipo 2 para  $F = (0.3, -0.4)$  e  $y_0 = 0.5$



Fonte: Elaboração dos autores (2021).



Figura 4 – Parábola de Funk do tipo 2 para  $F = (0.3, 0.4)$  e  $y_0 = -0.5$



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

### 3.4 Parábola de Funk do tipo 3

Pelo Teorema 2.3 e pela equação (5), temos que o ponto  $P$  satisfaz (P3) se, e somente se,

$$\left\| \frac{\mathcal{F}}{\rho(y, y_0)} - P \right\|^2 = \left\| \frac{P}{\rho(y, y_0)} - Q \right\|^2, \tag{21}$$

em que  $Q = \left( \frac{x}{\rho(y, y_0)}, y_0 \right) \in s$  e  $\rho$  é dada por (4). Utilizando as propriedades de módulo e produto interno, obtemos que a equação (21), nas coordenadas  $\mathcal{F} = (f_0, g_0)$ ,  $P = (x, y)$  e  $s : y = y_0$ , é dada por:

$$\bar{y}^4 + x^2 \bar{y}^2 - 2\bar{y}^3 + A\bar{y}^2 + Bx\bar{y} + C\bar{y} + D = 0, \tag{22}$$

em que  $\bar{y} = 1 - \text{sgn}(y_0 - y)y$ ,  $A = 2\sigma_3 g_0 \text{sgn}(y_0 - y)$ ,  $B = -2\sigma_3 f_0$ ,  $C = 2\sigma_3(1 - \text{sgn}(y_0 - y)g_0)$ ,  $D = \sigma_3^2(f_0^2 + g_0^2 - 1)$ , e  $\sigma_3 = 1 - \text{sgn}(y_0 - y)y_0$ .



### 3.5 Parábola de Funk do tipo 4

Pelo Teorema 2.3 e pela equação (5), temos que o ponto  $P$  satisfaz (P4) se, e somente se,

$$\left\| \frac{\mathcal{F}}{\rho^{-1}(y_0, y)} - P \right\|^2 = \left\| \frac{P}{\rho^{-1}(y_0, y)} - Q \right\|^2, \tag{23}$$

em que  $Q = \left( \frac{x}{\rho^{-1}(y_0, y)}, y_0 \right) \in s$  e  $\rho$  é dada por (4). Utilizando as propriedades de módulo e produto interno, obtemos que a equação (23), nas coordenadas  $\mathcal{F} = (f_0, g_0)$ ,  $P = (x, y)$  e  $s : y = y_0$ , é dada por  $\bar{y}^4 + x^2\bar{y}^2 - 2\bar{y}^3 + A\bar{y}^2 + Bx\bar{y} + C\bar{y} + D = 0$ , em que  $\bar{y} = 1 + \text{sgn}(y_0 - y)y$ ,  $A = -2\sigma_4g_0 \text{sgn}(y_0 - y)$ ,  $B = -2\sigma_4f_0$ ,  $C = 2\sigma_4(1 + \text{sgn}(y_0 - y) \cdot g_0)$ ,  $D = \sigma_4^2(f_0^2 + g_0^2 - 1)$  e  $\sigma_4 = 1 + \text{sgn}(y_0 - y) \cdot y_0$ .

**Observação 3.6.** Note que a equação das parábolas do tipo 3, quando  $y < y_0$  (respectivamente,  $y > y_0$ ), é igual à equação das parábolas do tipo 4, quando  $y > y_0$  (respectivamente,  $y < y_0$ ).

### 3.6 Uma análise das parábolas de Funk dos tipos 3 e 4

Devido à Observação 3.6, os gráficos das parábolas tipo 3 e 4 são a mesma; assim, estudaremos somente a equação (22). Como podemos notar, a equação (22) é uma equação de grau 4. Mostraremos a seguir que o lado esquerdo da equação (22) é irredutível. Para isso, vamos supor que a equação (22) pode ser escrita na forma

$$(\bar{y}^2 + Gx\bar{y} + Hx^2 + Ix + J\bar{y} + K) \cdot (\bar{y}^2 + Lx\bar{y} + Mx^2 + Nx + P\bar{y} + Q) = 0.$$

Realizando as multiplicações da equação acima e agrupando os termos de  $x$  e  $y$  temos

$$\begin{aligned} 0 = & \bar{y}^4 + (L + G)\bar{y}^3x + (M + H + GL)\bar{y}^2x^2 + (MG + HL)\bar{y}x^3 + HMx^4 + (N + I + GP + JL)\bar{y}^2x + \\ & + (P + J)\bar{y}^3 + (NG + JM + HP + IL)\bar{y}x^2 + (HN + IM)x^3 + (Q + K + JP)\bar{y}^2 + \\ & + (GQ + IP + LK + NJ)x\bar{y} + (QH + NI + MK)x^2 + (JQ + PK)\bar{y} + (KN + IQ)x + KQ. \end{aligned}$$

Comparando a equação acima com (22), obtemos 14 equações, das quais só nos interessam:

$$\begin{aligned} HM = 0, \quad L + G = 0 \quad M + H = 1, \quad MG + HL = 0, \quad HN + IM = 0, \\ NG + JM + HP + IL = 0, \quad QH + NI + MK = 0 \quad JQ + PK = C. \end{aligned} \tag{24}$$

De (24), temos que  $C = 2\sigma_3(1 - \text{sgn}(y_0 - y) \cdot g_0) = 0$ , o que é uma contradição.

Por outro lado, suponha que a equação (22) pode ser escrita na forma

$$(\bar{y}^3 + G\bar{y}^2x + H\bar{y}x^2 + Ix^3 + J\bar{y}^2 + K\bar{y}x + Lx^2 + My + Nx + P) (\bar{y} + Qx + R) = 0.$$





Desenvolvendo a multiplicação do lado esquerdo da última equação e comparando-a com (22), temos 14 equações:

$$IQ = 0, \quad Q + G = 0, \quad HQ + I = 0, \quad GR + JQ + K = 0, \quad QG + H = 1, \quad (25)$$

$$R + J = -2, \quad HR + KQ + L = 0 \quad LR + NQ = 0, \quad (26)$$

$$IR + LQ = 0, \quad JR + M = A, \quad KR + MQ + N = B, \quad MR + P = C, \quad NR + PQ = 0, \quad PR = D. \quad (27)$$

Podemos dividir em 3 casos: quando  $I = Q = 0$ , quando  $I = 0, Q \neq 0$  ou quando  $I \neq 0, Q = 0$ .

**Caso 1:**  $I = Q = 0$ . De (25) temos que  $G = 0, K = 0$  e  $H = 1$ ; logo, de (26) temos que  $R + L = RL = 0$ ; daí,  $R = L = 0$ ; assim, da última equação de (27), concluímos que  $D = 0$ , o que é um absurdo.

**Caso 2:**  $I = 0$  e  $Q \neq 0$ . De (25) temos que  $H = 0$  e  $Q + G = 0, QG = 1$ ; logo, não existem  $Q$  e  $G$  reais satisfazendo essas condições.

**Caso 3:**  $I \neq 0$  e  $Q = 0$ . Da terceira equação de (25) temos que  $I = 0$ , o que é um absurdo.

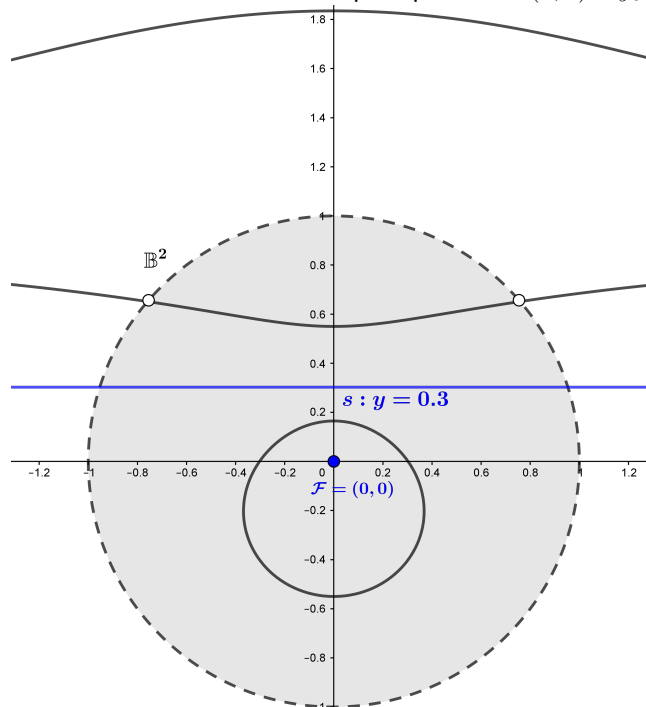
Concluímos que não é possível decompor o lado direito da equação (22) em multiplicação de polinômios de menor grau.

### 3.7 Exemplos - Parábolas de Funk dos tipos 3 e 4

**Exemplo 3.7.** *Nas figuras a seguir apresentam-se exemplos de parábolas de Funk dos tipos 3 e 4.*

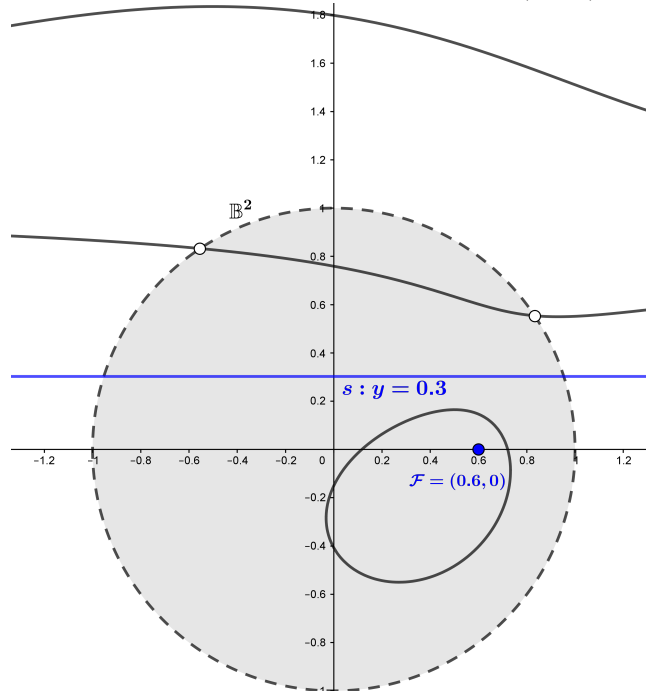


Figura 5 – Parábola de Funk do tipo 3 para  $F = (0, 0)$  e  $y_0 = 0.3$



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

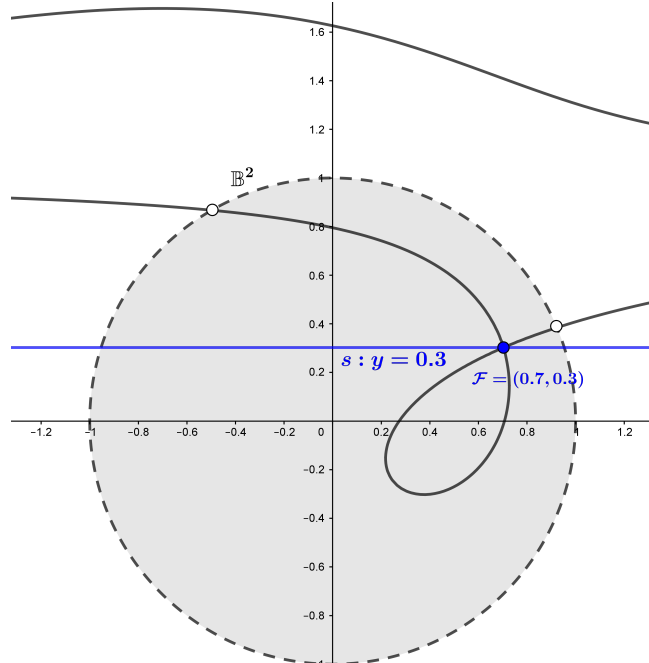
Figura 6 – Parábola de Funk do tipo 3 para  $F = (0.6, 0)$  e  $y_0 = 0.3$



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

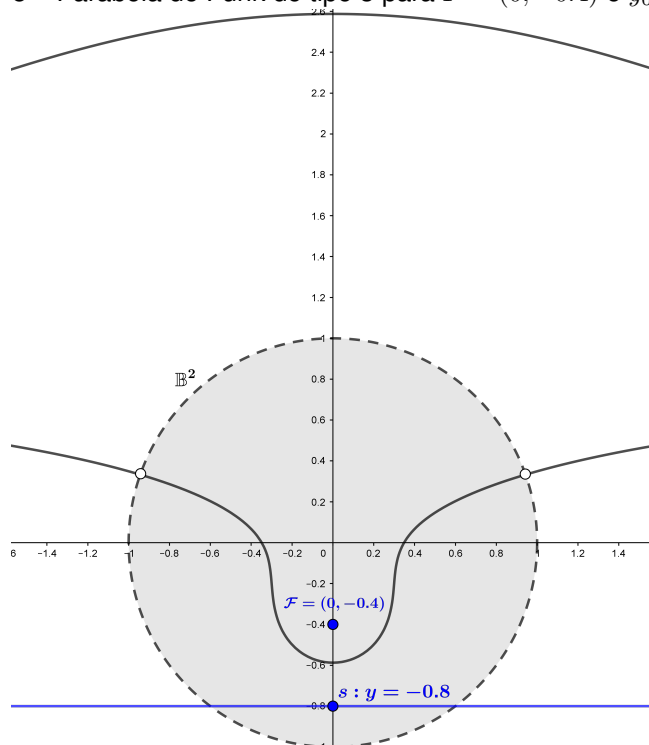


Figura 7 – Parábola de Funk do tipo 3 para  $F = (0.7, 0.3)$  e  $y_0 = 0.3$



Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Figura 8 – Parábola de Funk do tipo 3 para  $F = (0, -0.4)$  e  $y_0 = -0.8$



Fonte: Elaboração dos autores (2022).



## 4 Considerações finais

As métricas de Finsler, estudadas em Chávez *et al.* (2021), consistem no estudo de um barco navegando sobre um disco unitário a uma velocidade constante considerando correntes de vento em direção ao centro, o que equivale ao estudo da métrica Funk no disco unitário. Essa métrica é um caso particular das métricas de Randers, que, por sua vez, são um caso particular das métricas de Finsler. Em Chávez *et al.* (2021), os autores apresentam expressões para distância ponto a ponto, de um ponto a uma reta e de uma reta a um ponto; e, caracterizam os círculos nesse tipo de geometria. Seguindo o espírito desse trabalho, estudamos as parábolas no disco unitário bidimensional equipado com essa métrica Funk. Obtemos quatro tipos de parábolas como consequência da não simetria da métrica de Funk. Cada um deles tem aplicações físicas no problema de navegação de Zermelo. Mostramos que duas delas são parte de cônicas Euclidianas conhecidas: elipse e hipérbole. Os outros dois são caracterizados por quárticas irredutíveis.

## Referências

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

CHÁVEZ, N. M. S.; LEÓN, V. A. M.; SOSA, L. G. Q.; MOYSES, J. R. Um problema de navegação de Zermelo: Métrica de Funk. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 7, n. 1, p. e3010, 29 mar. 2021. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2021v7i1id4574>.

CHENG, X.; SHEN, Z. **Finsler Geometry**: An approach via Randers spaces. Beijing-Heidelberg: Science Press Beijing-Springer, 2012.

CHERN, S. S.; SHEN, Z. **Riemannian-Finsler geometry**. Singapore: World Scientific, 2005.

SHEN, Z. **Lectures on Finsler Geometry**. Singapore: World Scientific, 2001.

## 5 Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores pelas importantes sugestões e comentários que contribuíram para a melhoria do texto.

