

Dč 185

Ing. Vlatko Brčić

PRILOG REŠENJU RAVNOG PROBLEMA TEORIJE ELASTIČNOSTI

/ Doktorska disertacija /

ПОКЛОН
ГРАЂЕВИНСКОМ ФАКУЛТЕТУ

од Миленика проф. Ђорђа
Лазаревића

БИБЛИОТЕКА
ГРАЂЕВИНСКОГ ФАКУЛТЕТА
Инвентар бр. 2970

Београд

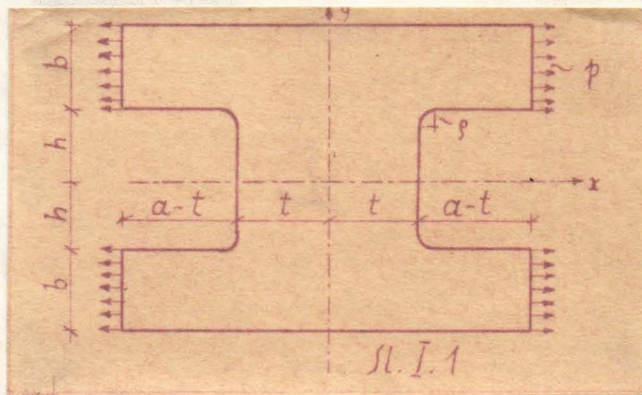
jula, 1956

I. U V O D

I. 1. FORMULISANJE PROBLEMA

Zadatak postavljen ovim radom je rešavanje ravnog problema za slučaj ravne simetrične izotropne ploče prikazane na sl. I. 1, opterećene simetrično na zatezanje u svojoj srednjoj ravni.

Neposredni potstrek radu dao je jedan problem brodogradnje: pri savijanju broda na talasima njegova gornja paluba ima ulogu gornjeg pojasa tog nosača, te je opterećena naizmenično na zatezanje i pritisak. Veliki otvori koji se prave na palubi znatno utiču na raspored napona, i cilj ovog rada upravo i jeste u tome da se dađe kvalitativna i kvantitativna slika naponskog stanja, naročito na mestima kod uglova gde dolazi do izvesne jače koncentracije napona. Ovim radom obuhvaćena je analiza napona u fazi kada je ploča spoljašnjim silama zategnuta.



Problem se svodi na prvi fundamentalni granični problem ravnog stanja napona: naći stanje elastične ravnoteže uz poznati raspored napona na konturi posmatranog područja.

I. 2. OSNOVNE OZNAKE UPOTREBLJENE U OVOM RADU

x, y

- pravoliniske Dekartove koordinate,

ρ, ϑ

- polarne koordinate u jediničnom krugu, istovremeno i krivoliniske koordinate u originalnom području,

(z)

- kompleksna ravan originalnog područja,

ξ, η

- pravoliniske koordinate u jediničnom krugu,

(ζ)

- kompleksna ravan jediničnog kruga,

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

- komponente tenzora napona u Dekartovim koordinatama,

- $\hat{\rho}_p, \hat{\rho}_\theta, \hat{\rho}_\varphi$ - isto u krivoliniskim koordinatama,
- ρ, ϱ - glavni naponi,
- $\Sigma = \rho + \varrho$ - zbir glavnih napona,
- G_n, G_t - komponente normalnog napona u smeru tangente i normale,
- \bar{x}, \bar{y} - komponente površinskih sila za jedinicu dužine luka,
- w, v - komponente pomeranja,
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ - komponentalne deformacije,
- l, m - kosinusi smera normale,
- $\bar{z} = x - iy$ - konjugovana kompleksna vrednost za $z = x + iy$
- ν - Poisson-ov odnos,
- ϕ - Airy-eva funkcija napona,
- $F(\xi), G(\xi)$ - kompleksni potencijal,
- F, f - optičke konstante modela i materijala,
- R_t - relativna retardacija talasa svetlosti,
- r - poluprečnik krivine,
- R_c - residual u tački i .

Značenje oznaka koje ovde nisu navedene biće data na mestu na kojem se prvi put upotrebe.

I. 3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PROBLEMA

U problemu formulisanom u I.1 pretpostavlja se da opterećenje dejstvuje paralelno srednjoj ravni ploče i da je jednoliko raspoređeno po debljini, tj. imamo slučaj generalisanog ravnog stanja naprezanja. Tada u tenzoru napona otpadaju komponente $G_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ na oba lica ploče, te se može pretpostaviti da su jednake nuli i kroz celu debljinu ploče. Stanje naprezanja je, dakle, ravno, i određeno je komponentalnim naponima G_x, G_y, τ_{xy} . Te veličine smatramo nezavisnim od koordinate z . Stanje deformacije u posmatranoj ploči takodje je ravno, tj. određeno je komponentalnim deformacijama

ϵ_x , ϵ_y i γ_{xy} , odnosno pomeranjima u i v . Sve te veličine su funkcije koordinata x i y .

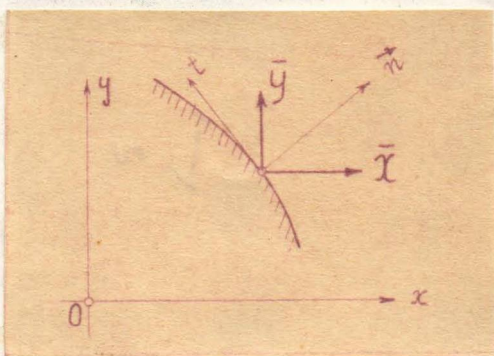
Postavljenim problemom isključuju se iz razmatranja zapreminske sile. Jednačine ravnoteže sada glase:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad /I.1/$$

Te jednačine ispunjene su u svakoj tački posmatranog tela. Specijalno na konturi vrede Cauchy-ove jednačine:

$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} \quad \bar{Y} = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y \quad /I.2/$$

gde su l i m kosinusi smera normale na konturu, a \bar{X} i \bar{Y} komponente površinskih sila uzetih za jedinicu dužine luka.



Sl. I.2

Pored toga mora biti ispunjen i uslov kompatibiliteta

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad /I.3a/$$

ili - u funkciji komponentalnih napona

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad /I.3b/$$

gde je Δ poznati Laplace-ov operator.

Sistem diferencijalnih jednačina /I.1/, /I.2/ i /I.3/ potpuno određuje problem naponskog stanja za dati slučaj izotropne ravne ploče.

Uvedemo li u račun Airy-ovu funkciju napona ϕ , tj. funkciju definisanu tako da su komponentalni naponi dati kao drugi izvodi te funkcije, onda se jednačine /I.1/ i /I.3/ svode na biharmonisku jednačinu

$$\Delta \Delta \phi = 0 \quad /I.4/$$

Komponentalni naponi dati su tada obrascima

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad /I.5/$$

a konturni uslov /I.2/ prelazi u oblik

$$\begin{aligned}
 l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \bar{X} \\
 m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \bar{Y}
 \end{aligned}
 \tag{I.2a/}$$

Kako je prema sl. I.2

$$l = \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad m = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

iz /I.2a/ sledi

$$\bar{X} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad \bar{Y} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)
 \tag{I.6/}$$

Odatle integriranjem dobivamo

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \int \bar{Y} ds \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \int \bar{X} ds
 \tag{I.7/}$$

Iz tih jednačina vidi se da su izvodi $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ i $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ konstantni duž kontura slobodnih od spoljašnih sila.

Parcijalnim integriranjem dobiva se konačno

$$\phi = x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \left(x \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial x} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial y} \right) ds
 \tag{I.9/}$$

Ako je posmatrano područje jednevezno, možemo konstante integracije ovde uzeti da su jednake nuli, zato što su komponente napona date kao drugi izvodi funkcije ϕ , i linearni izraz $Ax+By+C$ koji bi došao u izrazu /I.9/ preko konstanta integracije nema uticaja na stanje napona [1].

Iz parcijalnih izvoda /I.7/ može se naći i izvod funkcije po normalni:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s} \int \bar{Y} ds - \frac{\partial x}{\partial s} \int \bar{X} ds
 \tag{I.10/}$$

Može se lako pokazati da izraz /I.9/ za ϕ znači momenat spoljašnih sila na posmatranom delu luka u odnosu na tačku $s=0$,

a izraz /I.10/ za $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ znači projekciju rezultante spoljašnjih sila na luk s mereno u negativnom smislu. Kako na konturi te veličine imaju propisane vrednosti, konturni uslov može se, sem izrazima $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ i $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, izraziti i pomoću funkcije ϕ i njenog izvoda $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ po normali.

Ako su ϕ i $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ po konturi dati, onda je takva funkcija ϕ koja još zadovoljava i biharmonisku jednačinu /I.4/ jednoznačno određena [4].

U našem slučaju ploča je pravougaona, opterećena silama upravnim na njenu konturu, te je po celoj periferiji tangencijalni napon

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad /I.11a/$$

Odatle sledi da je za

$$\begin{aligned} x = \text{const} &\longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{const} \\ a \approx a \quad y = \text{const} &\longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \text{const} \end{aligned} \quad /I.11b/$$

Na taj način lako je formirati Airy-ovu funkciju ϕ i njen izvod po normali u svim tačkama konture posmatrane ploče.

I. 4. KRATAK ISTORISKI PREGLED REŠAVANJA RAVNOG PROBLEMA

Ravni problem Teorije elastičnosti formulisan je sredinom XIX stoleća, i otada pa sve do danas dat je veliki broj rešenja, čiji su autori na vrlo različite načine prilazili rešavanju tog zadatka. Ravni problem javlja se u dva vida: kao problem ravnog stanja napona i ravnog stanja deformacije.

A. Clebsch (prvi je) sistematski obradio problem ravnog stanja napona i on je dao /1861/ rešenje za kružnu ploču. Istu materiju nastavio je da proučava H. Golovin /1880/, i on je rešio problem naponskog stanja kod kružnog luka konstantne debljine koji se nalazi pod dejstvom čistog savijanja.

Paralelno sa ovim radovima razvija se i metod eksperimentalnog odredjivanja stanja napona. J.C. Maxwell dao je /1850/ naučne temelje novoj disciplini - Fotoelastičnosti. Još su Brewster /1814/ i Seebeck uočili pojavu dvojnog loma kod prolaza svetlosti kroz providnu napregnutu ploču i oni su pokušavali ^{data} iskoristiti to za odredjivanja naponskog stanja u ploči. Ta ispitivanja sa staklom vršio je i Fresnel /1826/ koji je konstatovao da se za ovakav providni napregnuti materijal vlada optički slično kristalu. Maxwell je razradio sve osnovne pojmove iz Fotoelastičnosti: snimao je izohrome i izokline i predložio neke metode za odredjivanje vrednosti glavnih napona na bazi podataka dobivenih tim snimanjima. Poznate jednačine ravnoteže na krivoliniskom elementu površine u ravni nose ime Lamé - Maxwell-ove jednačine. Maxwell je pored toga uočio da su u slučaju kada nema zapreminskih sila diferencijalne jednačine iste za oba vida ravnog problema, kao i to da je pri jedneveznim područjima stanje napona nezavisno od elastičnih konstanata materijala, što je od osnovne važnosti za tretiranje rezultata dobivenih fotoelastičnim ispitivanjima.

Još pre Maxwell-a, F. Neumann (dao je) teoriju dvojnog loma polarizovane svetlosti, dao je objašnjenje za slike izohroma, a predložio je i metod za optičko baždarenje materijala.

Ovakav eksperimentalni način odredjivanja naponskog stanja zasnovan na radovima Neumann-a i Maxwell-a nije odmah naišao na zasluženi odziv u krugovima inženjera, i tek početkom XX veka počinje Fotoelastičnost da se sistematski razvija i uvodi u svakodnevnu praksu.

Veliki napredak za rešavanje ravnog problema značilo je uvođenje Airy-eve funkcije napona /1862/. Airy je zahtevao da funkcija ϕ zadovolji konturne uslove, međjutim, zaboravio je na uslove kompatibiliteta. To je popravio Maxwell koji je dao biharmonisku jednačinu za funkciju napona ϕ .

Vrlo značajan prilog teoriji ravnog problema dao je J.H. Michell /1863-1940/. On je našao da i za slučaj višestruko vezanih područja rešenje ravnog problema ne zavisi od konstanta elastičnosti ako samo na konturama otvora ne dejstvuju nikakve spoljašne sile. Michell je pored toga rešio problem beskonačne ploče unutar koje dejstvuje koncentrisana sila.

Krajem XIX veka nastavljaju se radovi na Fotoelastičnosti. Tu treba spomenuti C.Wilson-a /1891/ koji je fotoelastičnim putem ispitivao stanje napona u gredi opterećenoj koncentrisanom silom. Mesnager /1900/ je predložio da se suma glavnih napona određuje pomoću poprečne deformacije. Tu ideju sproveo je u život E.G.Cooker /1931/ koji je razradio metod pomoću lateralnog ekstenzometra.

Dalji napredak Fotoelastičnosti dali su L.N.G.Filon, Z. Tuzi /1927/, H.Favre, M.Frocht i dr. U poslednje vreme razvijaju se naročito fotoelastična ispitivanja za prostorno stanje napona korišćenjem smrznutih slika napona. Ideju o tome dao je još Maxwell.

Airy-ovu funkciju napona pretpostavljenu u obliku polinoma uveo je u Teoriju elastičnosti Mesnager, dok primena trigonometrijskih redova za rešavanje ravnog problema pripada C.Ribiere-u /1889/.

Aproksimativno rešavanje ravnog problema pokazalo se kao neophodno s razloga što je praksa zahtevala hitna rešenja mnogih problema koji se eksaktnim putem nisu mogli rešiti.

Metod analogije: membransku analogiju za određivanje sume glavnih napona $p+2$ uveo je den Hartog /1931/. To je uspešno dalje razvio E.Weibel /1934/ pri studiju koncentracije napona u uglovima. K.Weighardt je iskoristio analogiju da se diferencijalna jednačina Airy-ove funkcije napona podudara sa jednačinom za poprečnu deformaciju ploče savijene silama i spregovima duž ivica.

Diferencni postupak je uveo C.Runge /1908/ aproksimirajući diferencijalnu jednačinu problema diferencnom jednačinom. Taj metod

razvili su kasnije L.F.Richardson /1910/, R.V.Southwell /1936/, L.Fox, D.N.Allen, D.G.Christopherson, F.S. Shaw i dr. Oni su uveli nov način iteracije - relaksacioni postupak.

Rešavanje ravnog problema primenom teorije kompleksnih funkcija: ideju da se biharmoniska funkcija može izraziti pomoću dveju kompleksnih funkcija dao je E.Goursat, no tek su Kolosov i Mushelišvili sistematski razvili primenu teorije kompleksnih funkcija u Teoriji elastičnosti. U SSSR-u obrazovala se vrlo jaka škola naučnika koji su obradjivali tu oblast: M.A.Lavrentjev, S.G.Lehnicki, S.G. Mihlin, G.N.Savin, D.I. Šerman i mnogi drugi. Od autora van SSSR-a na tom području treba spomenuti imena V.Volterra, H.Poritsky, L.Föppl, A.E.H. Love, A.C.Stevenson, A.E.Green, M.Kikukawa i dr.

Problem koncentracija napona pri ravnom problemu u okolini otvora rešavali su mnogi: J.Kirsch /1898 /, R.C.Howland /1930/, W.G. Bickley /1928/, a još ranije Kolosov, Mushelišvili i S.P.Timošenko. Problem zamora materijala pri naizmeničnom opterećivanju kod otvora razradio je H.L.Cox /1953/ [32].

I. 5. IZBOR METODA ZA REŠAVANJA PROBLEMA I RASPORED GRADIVA

Pri pokušajima da se postavljeni problem reši suponiranjem Airy-eve funkcije napona u obliku polinoma ili beskonačnog reda brzo se pokazalo da zadovoljavanje svim konturnim uslovima vodi veoma nepreglednim i sa inženjerskog stanovišta sasvim neupotrebljivim izrazima. To je bio razlog da se rešenju problema prišlo nekim aproksimativnim metodama. Kao najprimamljiviji tu se javio postupak pomoću diferencnog računa, a paralelno s time i eksperimentalni put primenom metode Fotoelastičnosti. Veliki domet i efikasnost koji je pokazala primena teorije kompleksnih funkcija uz pomoć konformnog preslikavanja, naročito za područja višestruko vezana i beskonačno velika, naveo nas je na pokušaj da dati problem rešimo i tim putem. Sve tri

navedene metode imaju svojih dobrih i loših strana, ali se međusobno dobro upotpunjuju. Iscrpnija analiza o tome biće data na kraju ovog rada u zaključku.

Gradivo je podeljeno u 5 poglavlja:

U I poglavlju formulisani je problem, date su osnovne diferencijalne jednačine i kratak istoriski pregled rešavanja ravnog problema.

U II poglavlju prikazano je aproksimativno rešenje problema diferencnim postupkom uz primenu metoda relaksacije. U odeljcima 2, 5.1 i 6.1 ovog poglavlja prikazani su ukratko osnovni pojmovi i obrasci vezani za tu oblast, a koji su bili primenjeni pri rešavanju postavljenog problema. U odeljcima 5.2 i 6.2 date su u radu izvesne dopune i popravke postojećoj tehnici relaksacionih metoda u primeni određenih oblika grupnih relaksacija za rešenje biharmoniskog problema.

U III poglavlju prikazano je rešenje problema primenom metode fotoelastičnosti. U odeljku 2. dati su neki osnovni pojmovi iz Fotoelastičnosti, a u odeljku 5. ovog poglavlja dat je iscrpniji kritički prikaz postojećih metoda za određivanje vrednosti glavnih napona u pojedinim tačkama. U odeljku 6. dato je rešenje tog problema za razmatrani slučaj primenom Laplace-ove jednačine i relaksacionog postupka primenjenog za harmoniski problem. U ovom poglavlju pokazane su i originalne fotografije modela i dobivenih slika izohroma i izoklina.

U IV poglavlju dato je približno rešenje proširenog problema primenom Teorije kompleksnih funkcija i konformnog preslikavanja.

Upotrebljeni su transformisani obrasci Mushelišvilija u obliku kako je to predložio M. Kikukawa./1954/. Funkcija preslikavanja usvojena je tako da daje preslikavanje područja, koje se dovoljno tačno približava originalnom području, na unutrašnjost jediničnog kruga. U

odeljku 1. date su poznate osnovne jednačine ravnog problema u kompleksnom obliku.

Na kraju su upoređeni numerički rezultati dobiveni na sva tri načina, a u zaključku je dat osvrt na praktičnu stranu dobivenih rezultata, kao i na vrednost i domet metoda kojima je problem rešen. Rešavanje ovog problema i iskustva stečena kod toga upravo su nas potstakla na ovakvu analizu o efikasnosti primenjenih metoda, te smatramo da će rad moći poslužiti inženjerima u praksi kao vrlo koristan putokaz za prilaženje brojnim problemima za koje se zahteva da budu rešeni brzo i racionalno.

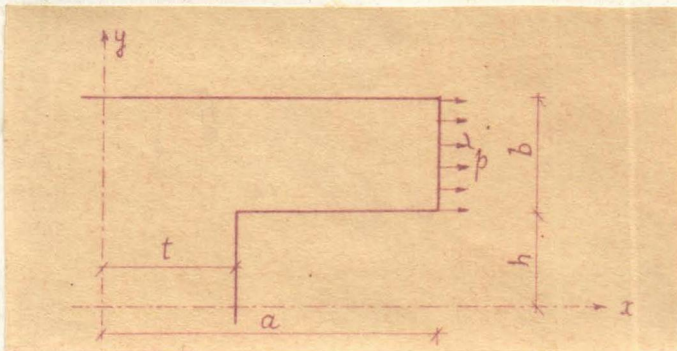
Na kraju rada dat je pregled upotrebljene literature sa oznakom radova u kojima postoji mnogo obimnija bibliografija iz navedenih oblasti.

II. REŠENJE PROBLEMA PRIMENOM DIFERENCNOG RAČUNA

II.1. UVOD

Sušтина ove metode sastoji se u tome da se diferencijalna jednačina /I.4/ problema zameni aproksimativnim diferencnim izrazom. Posmatrano područje deli se zgodnim načinom u mrežu, pa se za čvorne tačke te mreže, kao za skup diskretno raspodeljenih tačaka, zahteva da bude zadovoljen diferencni ekvivalent jednačine /I.4/. Aproksimacija postignuta tom metodom utoliko je bolja ukoliko je raspon mreže manji.

U prvoj fazi računa usvojili smo područje sa oštrim unutrašnjim uglom, u kasnijem smo prešli na opštiji slučaj sa kružnim zaobljenjem u uglu. Smisao tog uprošćenja je u tome što bi se u prethodnom grubom računu na prost način došlo do nekih grubih rezultata sa što manjim brojem jednačina, koji rezultati treba kasnije da posluže kao baza za tačniji račun.



Zbog dvostruke simetrije dovoljno je posmatrati jedan kvadrant ploče, te je prema tome za grubi račun razmatrano područje oblika prikazanog na sl. II.1.

Sl. II.1

II.2. NEKI OSNOVNI POJMOVI I OBRASCI IZ DIFERENCNOG RAČUNA I METODE RELAKSACIJE

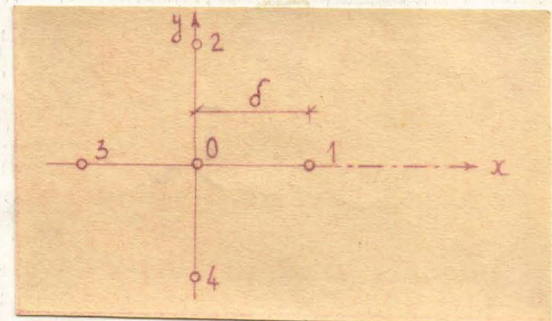
Diskontinuirane metode numeričke matematike izvanredno su praktične i efikasne za izvesne klase problema, specijalno onih gde bi direktno rešavanje diferencijalne jednačine sa datim konturnim uslovima vodilo do suviše glomaznih i nepreglednih postupaka i re-

zultata. Osnova tog računa je aproksimiranje diferencijalnih izraza odgovarajućim diferencnim obrascima.

II.2.a. Zamena diferencijalnih izraza diferencnim aproksimacijama.- Pokazaćemo na dva najprostija primera izvodjenje tih izraza kao i stepen tačnosti koji se tu postiže.

Uzmimo jednodimenzionalni problem i nadjimo aproksimacije za $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Posmatrajmo tačku 0 i neku funkciju $\phi = \phi(x)$. Tu funkciju možemo u okolini tačke 0 razviti u Taylor-ov red:



Sl. II.2

$$\phi = \phi_0 + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_0 (x-x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_0 (x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_0 (x-x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)_0 (x-x_0)^4 + \dots$$

Stavimo li ovde jedanput da je $x = x_0 + \delta$, a drugi put da je $x = x_0 - \delta$, dobivamo

$$\phi_1 = \phi_0 + \delta \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_0 + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_0 + \frac{\delta^3}{6} \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_0 + \frac{\delta^4}{24} \left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)_0 + \dots$$

$$\phi_3 = \phi_0 - \delta \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_0 + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_0 - \frac{\delta^3}{6} \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_0 + \frac{\delta^4}{24} \left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)_0 - \dots$$

/II.1/

Sabiranjem ovih jednačina dobivamo

$$\phi_1 + \phi_3 = 2\phi_0 + \delta^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_0 + O(\delta^4)$$

/II.2/

gde su u članu $O(\delta^4)$ uključeni svi članovi stepena ≥ 4 . Zanemarimo li član $O(\delta^4)$, što je utoliko opravdanije ukoliko je δ manje,

dobivamo diferencnu aproksimaciju za $\frac{d^2\phi}{dx^2}$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0) \quad /II.3/$$

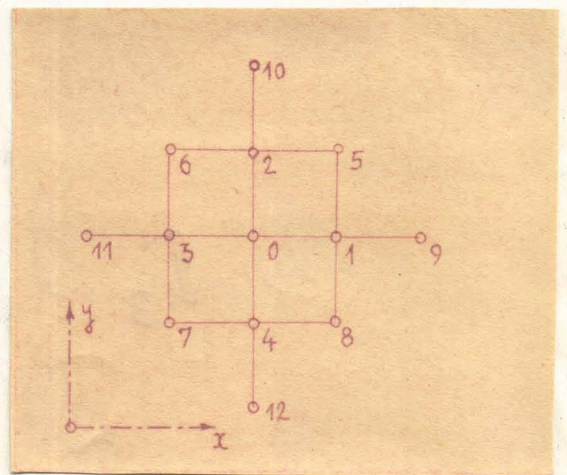
Znači greška ovde ima red δ^4 .

Analogno, ako saberemo izraze /II.2/ i zanemarimo član $O(\delta^3)$, dobivamo

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_0 \approx \frac{1}{2\delta} (\phi_1 - \phi_3) \quad /II.4/$$

Slično bi mogli izvesti izraze i za više izvode po x i po y kao i mešovite izvode.

Pri dvodimenzionalnim problemima moguće je upotrebiti kvadratnu, trouglastu ili heksagonalnu mrežu, i za svaku od njih formirati diferencne izraze oblika prema potrebnom stepenu tačnosti. Ovde se ograničujemo na kvadratnu mrežu i daćemo pregledno vrednosti do četvrtog izvoda.



Sl. II.3

Prvi izvodi /v. sl.II.3/

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{1}{2\delta} (\phi_1 - \phi_3) \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{1}{2\delta} (\phi_2 - \phi_4) \quad /II.5/$$

Drugi izvodi:

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0) \quad \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_2 + \phi_4 - 2\phi_0) \quad /II.6/$$

$$(\Delta\phi)_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0) \equiv \frac{1}{\delta^2} (\sum \phi_i - 4\phi_0)$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}\right)_0 \approx \frac{1}{4\delta^2} (\phi_5 - \phi_6 + \phi_7 - \phi_8)$$

Treći izvodi:

$$\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_0 \approx \frac{1}{2\delta^3} (\phi_9 - 2\phi_1 + 2\phi_3 - \phi_{11})$$

/II.7/

$$\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}\right)_0 \approx \frac{1}{2\delta^3} (\phi_{10} - 2\phi_2 + 2\phi_4 - \phi_{12})$$

Četvrti izvodi:

$$\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right)_0 \approx \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_1 - 4\phi_3 + \phi_9 + \phi_{11})$$

$$\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 \approx \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_{10} + \phi_{12})$$

/II.8/

$$\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 \approx \frac{1}{\delta^4} [4\phi_0 - 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8]$$

Biharmoniski operator:

$$\begin{aligned} (\Delta \Delta \phi)_0 \approx \frac{1}{\delta^4} [20\phi_0 - 8(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8) + \\ + \phi_9 + \phi_{10} + \phi_{11} + \phi_{12}] \quad \text{ili:} \end{aligned}$$

$$(\Delta \Delta \phi)_0 \approx \frac{1}{\delta^4} [20\phi_0 - 8\sum \phi_1 + 2\sum \phi_5 + \sum \phi_9]$$

/II.8a/

Može se pokazati da je u ovom poslednjem izrazu greška reda δ^6 .
[10].

II.2.b. Metoda relaksacije

Metoda relaksacije je ustvari jedan način iterativnog rešavanja sistema linearnih jednačina. Tim načinom može se, dakle, rešiti svaki problem koji se daje svesti na takav sistem jednačina. Naziv relaksacija uveo je R.V.Southwell [8], a neposredni povod za razvijanje te metode dalo je rešavanje statički neodredjenih ramovskih nosača.

Posmatrano područje deli se prikladnim načinom u mrežu, te se za čvorove mreže, kao za diskretan skup tačaka u ravni, ispisuju diferencni izrazi kao zamena za postojeću diferencijalnu jed-

načinu problema. Time je problem rešavanja diferencijalne jednačine sveden na rešavanje sistema linearnih jednačina kojih ima toliko koliko i čvorova mreže unutar konture. Vrednost tražene funkcije na konturi je poznata. Vrednosti funkcije u čvorovima unutar konture moraju se na neki način oceniti, bilo grafičkom bilo numeričkom interpolacijom, a kod biharmoniskih problema treba još i ekstrapolacijom naći približne vrednosti funkcije u tačkama van konture.

Ako sada ove približno dobivene vrednosti funkcije unesemo u diferencne jednačine napisane za pojedine čvorove, neće, naravno, te jednačine biti odmah identički zadovoljene. Na desnoj strani umesto nule dobivamo neke brojeve. To su greške koje se prema Southwell-u nazivaju residuali. Relaksacioni postupak sastoji se upravo u postupnom i jednovremenom likvidiranju residuala u svim čvorovima mreže.

Ako je dat problem u vidu Laplace-ove jednačine $\Delta\phi = 0$ tada, saglasno sa /II.6/ dobivamo u nekoj tački 0

$$\sum \phi_i - 4\phi_0 = R_0 \quad \text{/II.9/}$$

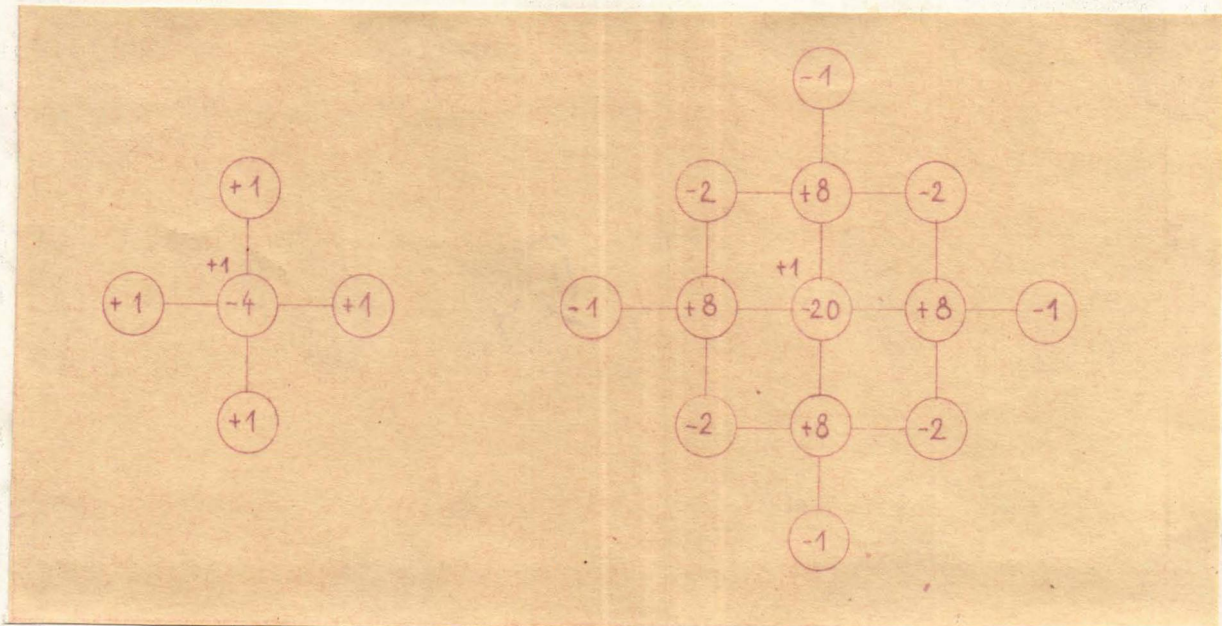
gde je R_0 ta greška - residual.

Analogno za biharmonisku jednačinu $\Delta\Delta\phi = 0$ izlazi prema /II.8.a/

$$20\phi_0 - 8\sum\phi_1 + 2\sum\phi_2 + \sum\phi_9 = R_0 \quad \text{/II.10/}$$

Likvidaciju residuala počinjemo u onoj tački gde je on najveći. Funkciji ϕ dade se korekcija tako da se u toj tački residual svede na nulu. Medjutim, to povlači automatski za sobom promenu residuala u okolnim tačkama. Srazmera u kojoj se menjaju residuali u tačkama oko posmatrane tačke 0, kad u njoj dademo funkciji priraštaj $\Delta\phi = 1$, može se zgodno prikazati t.zv. zvezdama relaksacije. Oblik tih zvezda je različit, zavisi od načina kojim je

izvršena diferencna aproksimacija. Za aproksimacije date izrazima /II.6/ i /II.8/ dobivamo kod harmoniske i biharmoniske jednačine sledeće zvezde relaksacije:



Sl. II.4

Vrlo iscrpan prikaz tih zvezda za različite oblike mreže i razne stepene aproksimacije dao je L. Collatz [15].

Za likvidaciju residuala potrebna je velika rutina kao i intuicija, naročito za biharmoniske probleme gde je konvergencija procesa nekada veoma spora. Naročito je opasan slučaj kad su residuali relativno maleni, a sporo se likvidiraju. Tu vrlo velike promene u funkciji izazivaju male promene u residualima. /Southwell je takve jednačine nazvao ill-conditioned/. Ako su još i svi residuali u nekoj okolini istog predznaka, onda se kao uspešno moraju primeniti grupne i blokove relaksacije [10], [12], tj. cela jedna grupa tačaka dobiva određenu promenu $\Delta\phi$ ili čak i različite promene $\Delta\phi$, pa se na taj način dobivaju šeme u kojima se pokazuje promena residuala u celoj grupi tačaka. Cilj je pri tome da se tako odrede priraštaji funkcije ϕ u pojedinim tačkama, da se algebarska suma residuala što bolje približi nuli. Tada je i definitivna pojedinačna likvidacija relativno brza.

Sporost konvergencije kod biharmoniske jednačine rezultira iz činjenice što iz sistema linearnih jednačina ovde vidimo da diagonalni članovi nisu izrazito dominantni prema ostalima.

Greške koje nastupaju pri relaksaciji nastaju iz 3 razloga:

a/ zbog zanemarivanja diferencne korekcije $O(\delta^4)$;

b/ zbog primene postupka na zakrivljenim konturama ;

c/ zbog potrebe za ekstrapolacijom u fiktivnim tačkama

van konture. Pri radu treba zbog toga obratiti pažnju na te momente i postupak podesiti na onu tačnost koja je za problem zadovoljavajuća.

II.3 ODREĐJIVANJE AIRY-EVE FUNKCIJE NAPONA PO KONTURI

Da bi diferencni postupak mogli započeti potrebno je znati neke polazne vrednosti za funkciju ϕ . Vrednost funkcije na konturi dobivamo iz konturnih uslova, a vrednosti unutar konture u čvorovima mreže preko izraza /II.10/ napisanog za sve unutrašnje čvorove.

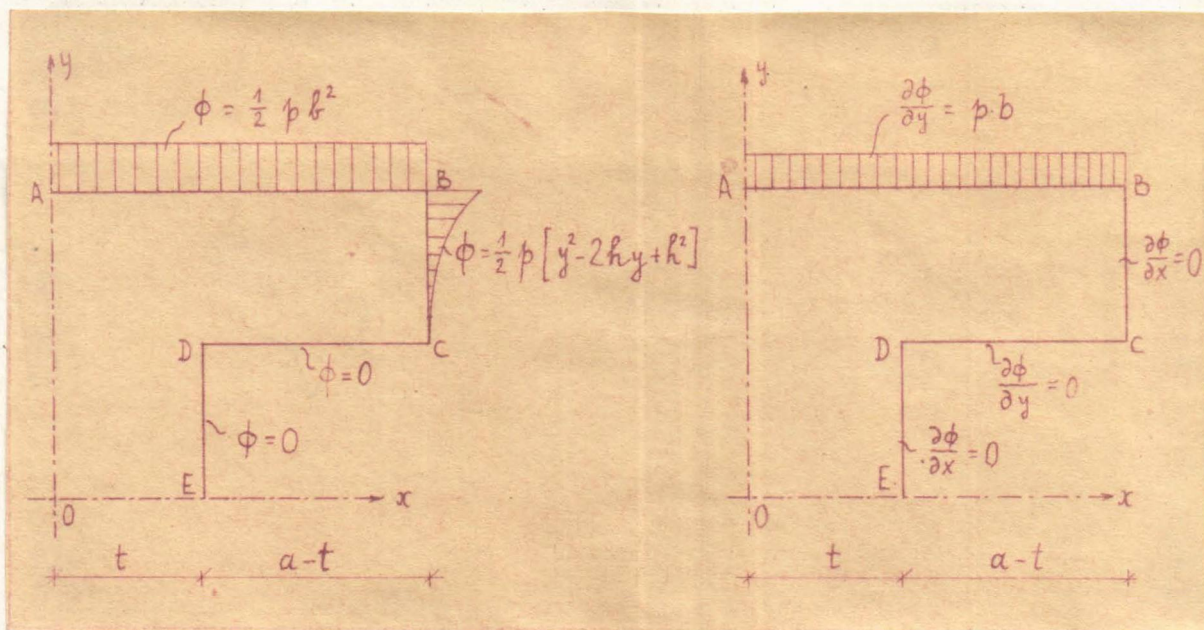
Iz sl. II.1 vidi se da je cela kontura, sem dela BC, slobodna od spoljašnjih sila. Znači na tim delovima je tangencijalni napon kao i normalni napon upravno na konturu jednak nuli. Konturni uslovi glase, dakle:

$$\begin{array}{ll}
 \text{AB} \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \\
 \text{BC} \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = p & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \\
 \text{CD} \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \\
 \text{DE} \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0
 \end{array} \quad /II.11/$$

Konturni uslovi mogu se izraziti i pomoću funkcije ϕ i njenog izvoda po normalni. Tada, prema relacijama /I.7/ i /I.9/ dobivamo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{AB} \dots & \phi = \frac{1}{2} p b^2 & \frac{\partial \phi}{\partial y} = p \cdot b \\
 \text{BC} \dots & \phi = \frac{1}{2} p y^2 - p h \cdot y + \frac{1}{2} p h^2 & \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\
 \text{CD} \dots & \phi = 0 & \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\
 \text{DE} \dots & \phi = 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0
 \end{array} \quad /II.12/$$

Grafik funkcije ϕ i njenog izvoda po normali prikazan je na sl. II.5

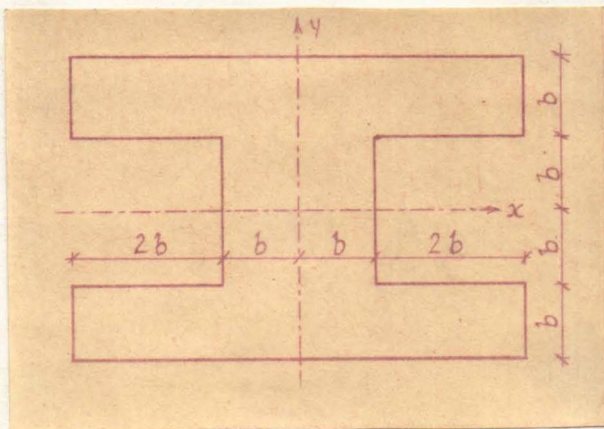


Sl. II.5

Na taj način poznata je vrednost funkcije ϕ po celoj konturi i sad je moguće pisati diferencne jednačine za pojedine čvorne tačke na odabranoj mreži.

II.4. RAČUN ZA GRUBU MREŽU

Diferencni postupak moguće je sprovesti za opšte vrednosti veličina b i h , ako samo diferencne jednačine svedemo na bezdimenzionalni oblik [11]. Zbog olakšica u radu usvajamo oblik ploče sastavljen od samih kvadratnih delova, te tako omogućujemo efikasnu primenu kvadratne mreže. Račun je sproveden prvobitno za ploču prikazanu na sl.

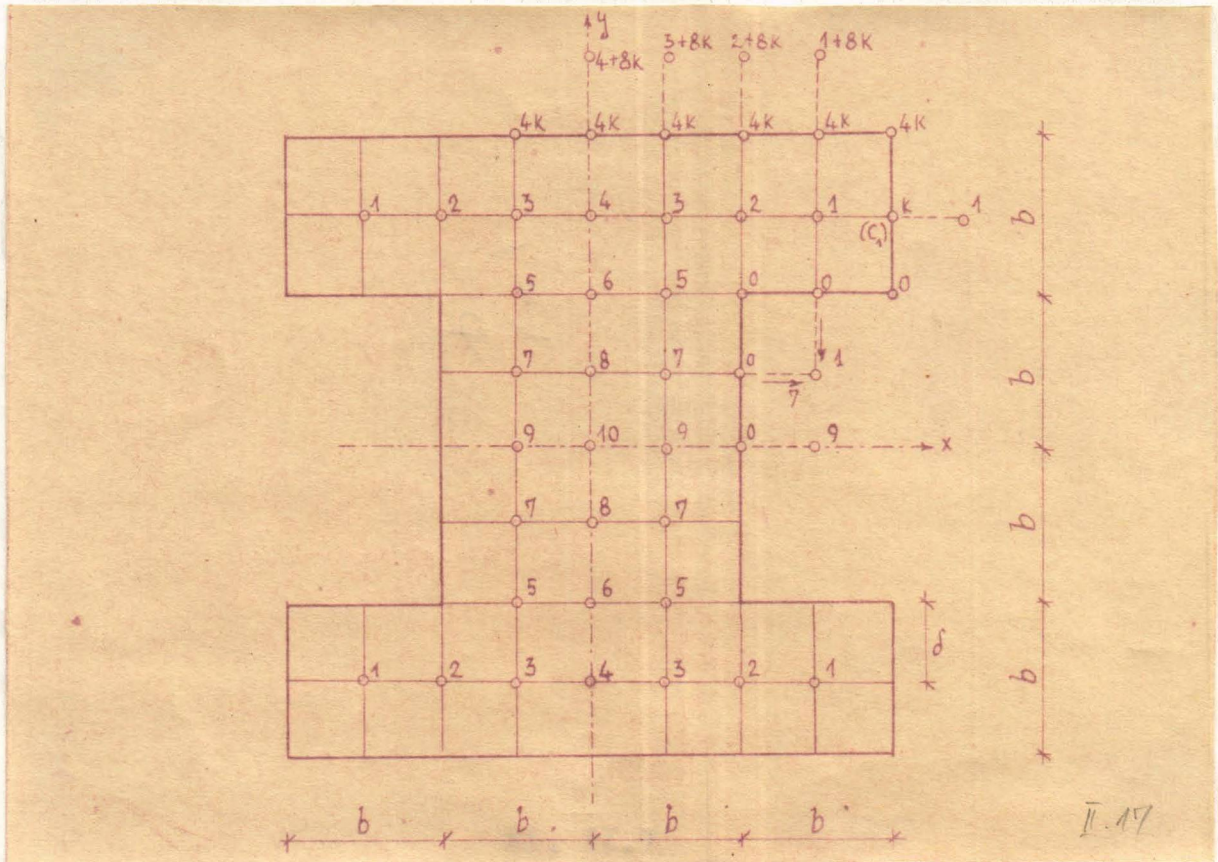


Sl. II.6

II.6. Pokazalo se međjutim da se naponsko stanje u krajnjim užim poljima relativno brzo smiruje udaljujući se od unutrašnjih uglova paralelno sa osom prema periferiji, tj. postaje homogeno

linearno, te je definitivni račun sproveden za ploču sa dva puta kraćim krajnjim polima. Na taj način znatno je smanjen broj čvorova, tj. i broj linearnih jednačina.

Posmatrana je, dakle, ploča sledećeg oblika



Za prvu grubu fazu računa usvojena je ploča sa podelom prikazanom na sl. II.7. U jednom kvadrantu postoji 10 unutrašnjih čvorova /zbog simetrije posmatranje ograničujemo na jedan kvadrant/. Raspon mreže $\delta = \frac{1}{2} b$. Odredjujemo najpre vrednost funkcije ϕ i njenog izvoda po normali u svim čvorovima na konturi. Prema vrednostima ranije dobivenim za ϕ /v. sl. II.5/ izlazi:

ED	$\phi = 0$	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
DC	$\phi = 0$	$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$
CB... Tačka C_1	$\phi = 0.125 p b^2 = K$	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
" $C_1 B$	$\phi = 0.500 p b^2 = 4K$,	$\frac{\partial \phi}{\partial y} = p b$, $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
" $B C$	$\phi = 0$	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$.
AB	$\phi = 0.500 p b^2 = 4K$,	$\frac{\partial \phi}{\partial y} = p b$.

Ovde je uvedena skraćenica

$$K = 0,125 \rho b^2$$

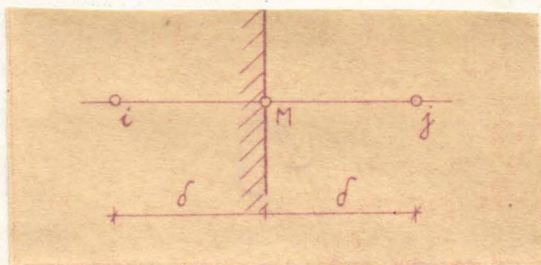
/II.14/

Iz zvezde za biharmoniski operator prikazane na sl. II.4 vidi se da je za svaki čvor u unutrašnjosti konture potrebno znati vrednosti funkcije ϕ u svim tačkama okoline udaljenim do dva polja mreže. Odatle sledi da će za one tačke mreže koje leže uz spoljnu konturu biti potrebno uzeti u račun i fiktivne vrednosti funkcije ϕ u dodatnim tačkama van konture. Vrednosti funkcije ϕ u tim tačkama nalazimo ekstrapolacijom vodeći računa o konturnim uslovima.

Izvod funkcije po normali u odgovarajućim tačkama konture merodavan je za određivanje ekstrapolisanih vrednosti funkcije ϕ van konture. Ako je u tački M izvod $\frac{\partial \phi}{\partial n} = k$, onda je ekstrapolisana vrednost u tački j data izrazom:

$$\phi_j = \phi_i + k \cdot 2\delta$$

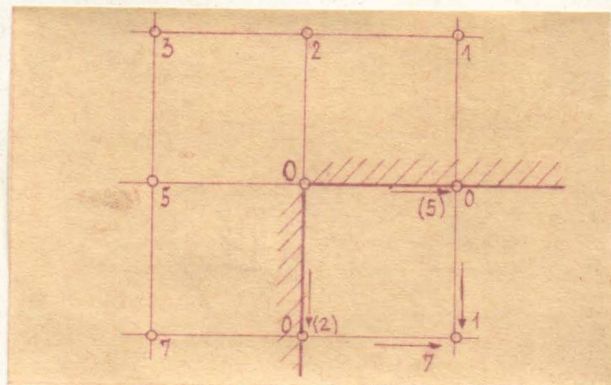
/II.15/



Sl. II.8

Izvođnje ovog obrasca biće dato kasnije.

Na delu ED je $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, pa su vrednosti u tačkama van konture iste kao i u simetričnim tačkama unutar konture /v. sl. II.7/.



Sl. II.9

Na delu DC je $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, pa je stanje slično kao i na ED. Za tačke u uglu dobivamo ekstrapolacijom dvoznačne vrednosti [15]. Naime, da bi se pri ekstrapolaciji što bolje prilagodili rešenju funkcije ϕ , moramo tački van konture kod ugla dati jedanput ekstrapolacionu vrednost ϕ_1 , a drugi put ϕ_7

tj. kad pišemo diferencne jednačine za čvorove 1 i 7, onda za tu tačku moramo uzeti dve različite ekstrapolacione vrednosti. Tačke na

konturi desno i niže od D imaju vrednosti $\phi = 0$, no pri ovoj gruboj mreži uzete su iz istih razloga i za njih dvoznačne vrednosti /v. sl. II.9/.

Na delu CB je $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, pa ekstrapolacijom dobivamo vam konture vrednosti iste kao na simetričnim tačkama unutar konture.

Na delu AB je $\frac{\partial \phi}{\partial y} = p \cdot b$, pa se vrednosti u fiktivnim tačkama dobivaju tako da vrednostima za simetrične tačke unutar kontura dodamo $pb \cdot 2\delta = pb \cdot b = pb^2 = 8K$

Rezultati dobiveni na osnovu ove analize prikazani su na sl. II.7.

Sad je moguće pisati izraz /II.8.a/ za sve unutrašnje tačke mreže, te je tako dobiven sistem od 10 linearnih jednačina sa 10 nepoznatih:

Tačka 1:

$$20\phi_1 - 8(K + 4K + \phi_2 + 0) + 2(4K + 4K + 0 + 0) + \phi_1 + \phi_1 + 8K + \phi_3 + \phi_1 = 0$$

.....

itd. Posle sredjivanja sistem glasi:

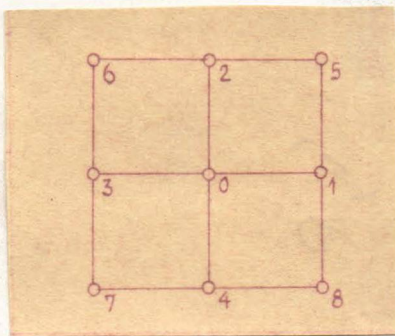
$+23\phi_1 - 8\phi_2 + \phi_3$		$-16K = 0$
$-8\phi_1 + 22\phi_2 - 8\phi_3 + \phi_4 + 2\phi_5$	(II.16)	$-7K = 0$
$+ \phi_1 - 8\phi_2 + 22\phi_3 - 8\phi_4 - 8\phi_5 + 2\phi_6 + \phi_7$		$-8K = 0$
$+ 2\phi_2 - 16\phi_3 + 21\phi_4 + 4\phi_5 - 8\phi_6$	$+ \phi_8$	$-8K = 0$
$+ 2\phi_2 - 8\phi_3 + 2\phi_4 + 22\phi_5 - 8\phi_6 - 8\phi_7 + 2\phi_8 + \phi_9$		$+ 4K = 0$
$+ 4\phi_3 - 8\phi_4 - 16\phi_5 + 20\phi_6 + 4\phi_7 - 8\phi_8$	$+ \phi_{10} + 4K$	$= 0$
$+ \phi_3$	$- 8\phi_5 + 2\phi_6 + 23\phi_7 - 8\phi_8 - 8\phi_9 + 2\phi_{10}$	$= 0$
	$+ \phi_4 + 4\phi_5 - 8\phi_6 - 16\phi_7 + 21\phi_8 + 4\phi_9 - 8\phi_{10}$	$= 0$
	$+ 2\phi_5$	$- 16\phi_7 + 4\phi_8 + 22\phi_9 - 8\phi_{10} = 0$
	$+ 2\phi_6 + 8\phi_7 - 16\phi_8 - 16\phi_9 + 20\phi_{10}$	$= 0$

Sistem je rešen egzaktno eliminacijom i dobiveni su sledeći rezultati:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= + 1,0093 K = + 0,1262 p b^2 \\ \phi_2 &= + 1,0393 K = + 0,1299 p b^2 \\ \phi_3 &= + 1,1008 K = + 0,1376 p b^2 \\ \phi_4 &= + 1,1131 K = + 0,1391 p b^2 \\ \phi_5 &= - 0,0482 K = - 0,0060 p b^2 \\ \phi_6 &= - 0,0861 K = - 0,0108 p b^2 \\ \phi_7 &= - 0,2208 K = - 0,0276 p b^2 \\ \phi_8 &= - 0,3356 K = - 0,0419 p b^2 \\ \phi_9 &= - 0,2222 K = - 0,0278 p b^2 \\ \phi_{10} &= - 0,3493 K = - 0,0437 p b^2\end{aligned}$$

/II.17/

Odatle je izveden i račun za komponentalne napone u lo posmatranih tačaka. Primenjeni su diferencni izrazi za druge izvode funkcije ϕ :



$$[\sigma_x]_0 = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_2 + \phi_4 - 2\phi_0)$$

/II.18/

$$[\sigma_y]_0 = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_0 \approx \frac{1}{\delta^2} (\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0)$$

$$[\tau_{xy}]_0 = - \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right]_0 \approx \frac{-1}{4\delta^2} (\phi_5 + \phi_7 - \phi_6 - \phi_8)$$

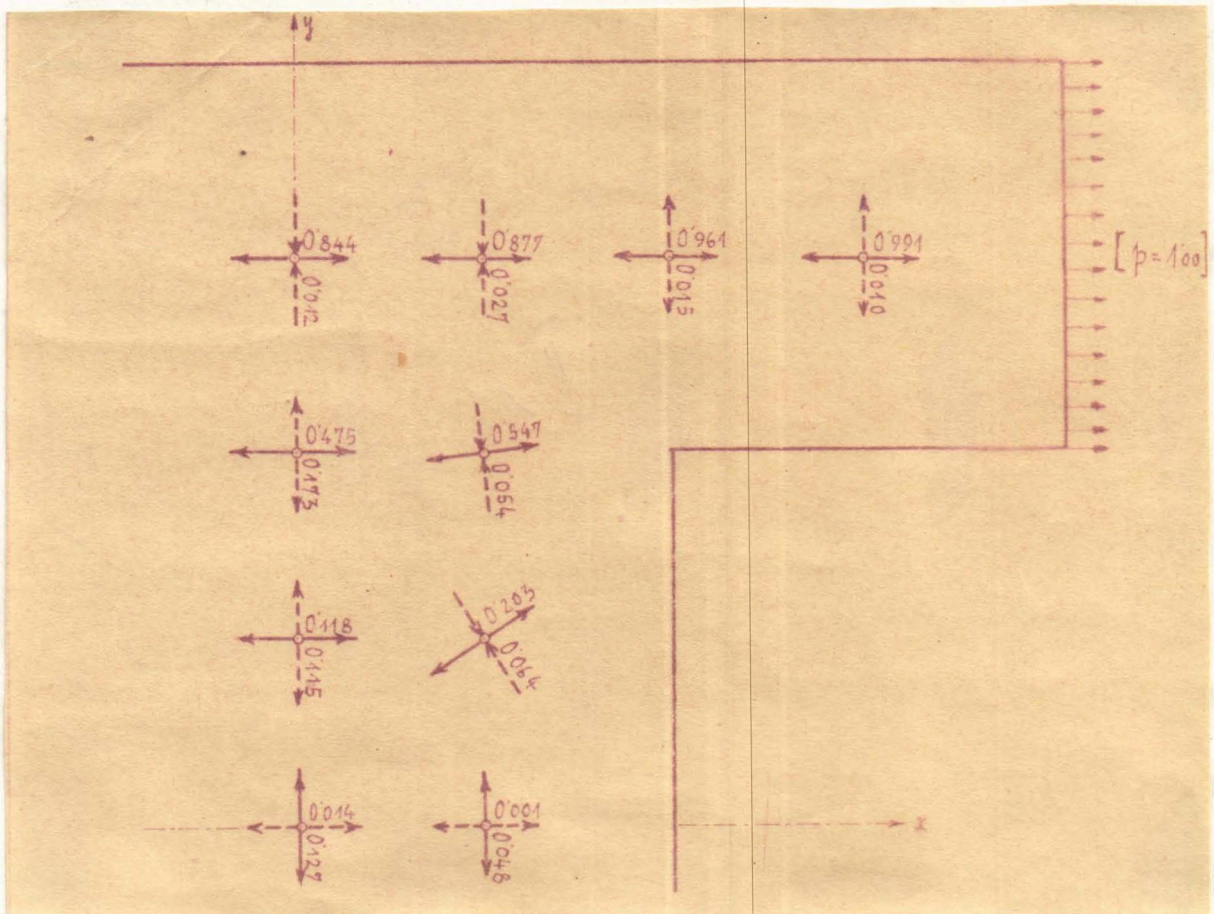
Sl. II.10

Na osnovu tih šema sračunate su vrednosti komponentalnih napona u tačkama 1 - 10, a odatle i veličine i smerovi glavnih napona. Rezultati su prikazani na sledećoj tabeli /v. str. 23/.

Naravno da su dobivene vrednosti sasvim grube, ali one ipak već daju približne indicije o rasporedu napona. Da bi dobili tačnije vrednosti prelazimo na gušću mrežu.

i	ϕ [pb^2]	G_1 [p]	G_2 [p]	α_1
1	0,1262	0,9907	0,0104	0
2	0,1299	0,9613	0,0152	0° 28'
3	0,1376	0,8773	0,0268	0° 18'
4	0,1391	0,8438	0,0123	0
5	0,0060	0,5472	0,0538	5° 56'
6	0,0108	0,4749	0,1726	0
7	0,0276	0,2030	0,0644	31° 54'
8	0,0419	0,1178	0,1148	0
9	0,0278	0,0014	0,0475	0
10	0,0437	0,0137	0,1271	0

Graficki:



Sl. II.11

II. 5. RAČUN ZA FINIJU MREŽU

Pri ovom računu usvajamo oblik ploče sa kružnim zaobljenjem u uglu. Poluprečnik zaobljenja uzet je $\rho = \frac{1}{6} b$, tj. iste veličine kao i kod modela za fotoelastična ispitivanja. Raspon mreže sada je raspolovljen, a posmatramo opet samo jedan kvadrant.

Polazeći od vrednosti dobivenih za grubu mrežu dobivene su grafičkom interpolacijom vrednosti funkcije ϕ na novim čvorovima finije mreže. Napominjemo da je tačnost ove interpolacije od velikog praktičnog značaja, zato što se dalji račun može pri relaksacionom procesu izvanredno skratiti ili produžiti, već prema tome da li su interpolirane vrednosti ocenjene sa manjom ili većom greškom.

Ekstrapolacija tačaka vršena je na isti način kao i kod grube mreže. Kao novo ovde dolazi rešenje oko ugla gde je kontura zakrivljena.

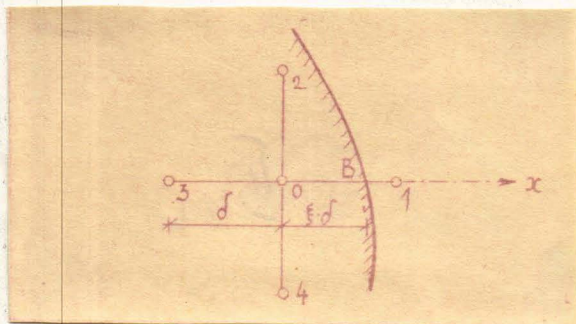
II.5. 1. Postupak na zakrivljenoj konturi

Kod pravolinisne konture podešava se raspon mreže redovno tako da tačke, najbliže konturi, budu udaljene od nje tačno za raspon δ mreže. Diferencne jednačine za harmoniski kao i za biharmoniski operator, i ekstrapolacija tačaka vrši se u svemu prema jednačini /II.15/, /II.10/ i /II.9/.

Ako je kontura zakrivljena, dolazimo do slučajeva gde nijedna tačka ne pada na konturu. Takve tačke uz konturu zovu se iregularne tačke, i diferencne jednačine ovde dobivaju posebni oblik.

a/ Harmoniska jednačina

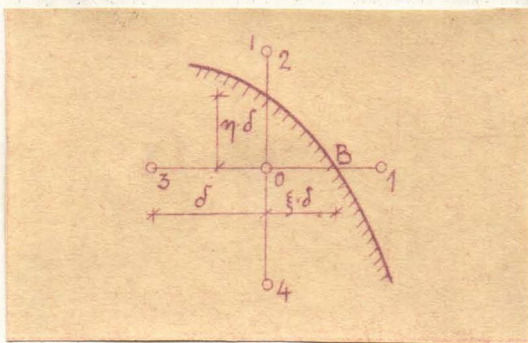
Uzmimo da je tačka O iregularna tačka uz konturu. Raspon mreže je δ , a proizvod $\xi \cdot \delta$ daje otstojanje OB.



Vrednost funkcije na konturi u tački B je poznata. Primenujući i Taylor-ovom razvoju za x vrednosti $x_0 + \xi \cdot \delta$ i $x_0 - \delta$ /sl. II, 12/ dobivamo transformacijama, slično kao i ranije, zanemarujući član $O(\delta^3)$ izraz za residual u obliku: [10]

$$R_0 = \frac{2\phi_B}{\xi(1+\xi)} + \frac{2\phi_B}{1+\xi} + \phi_2 + \phi_4 - \left(2 + \frac{2}{\xi}\right) \phi_0 \quad /II.19/$$

Važno je ovde naglasiti da je zanemaren član $O(\delta^3)$, a kod obrasca /II.9/ član $O(\delta^4)$, tj. pri zakrivljenoj konturi unosi se u rešenje relaksacionim postupkom veća greška nego kod ravne konture. Ta činjenica odmah izaziva potrebu da se kod zakrivljenih kontura po mogućnosti predje na finiju mrežu.



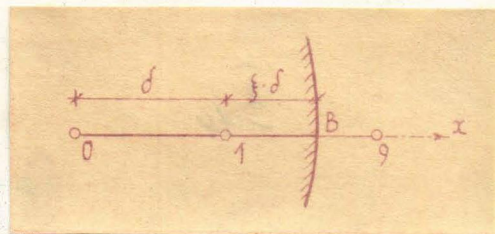
Sl. II.13

Za slučaj da su dve strane mreže kraće dobiva se slični izraz za residual u tački 0.

$$R_0 = \frac{2\phi_B}{\xi(1+\xi)} + \frac{2\phi_C}{\eta(1+\eta)} + \frac{2\phi_B}{1+\xi} + \frac{2\phi_C}{1+\eta} - \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2}{\eta}\right) \phi_0 \quad /II.20/$$

b/ Biharmoniska jednačina

Uzmimo da je kontura presečena linijom mreže paralelno sa osom x . Konturni uslovi daju u tački B vrednost funkcije ϕ i njenog izvoda $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ po normalni. Označimo te vrednosti sa K



Sl. II.14

i k . Razvijajući funkciju ϕ u okolini tačke B u Taylor-ov red duž date linije, i zanemarujući članove $(x-x_B)^i$ za $i > 2$, dolazimo posle kraćih transformacija do vrednosti funkcije ϕ u fiktivnoj tački 9 i tački 1 uz konturu.

$$\phi_9 = \frac{4\xi K}{(1+\xi)^2} + \frac{2(1-\xi)\delta k}{1+\xi} + \frac{(1-\xi)^2 \cdot \phi_0}{(1+\xi)^2} \quad /II.21/$$

$$\phi_1 = \frac{(1+2\xi)K}{(1+\xi)^2} - \frac{\xi\delta k}{1+\xi} + \frac{\xi^2 \cdot \phi_0}{(1+\xi)^2}$$

Kad su vrednosti funkcije ϕ u pojasu duž konture poznate, možemo na normalni način pisati residualnu formulu /II.10/ u svim unutrašnjim tačkama.

Ako je kontura konkavna, dolazimo u situaciju da se fiktivnim tačkama van konture moraju pripisati dve /ili čak i tri/ različite vrednosti, već prema tome u kojem smeru vršimo ekstrapolaciju.

Za slučaj da je u /II.21/ veličina $\xi = 0$, tj. da je tačka 1 pala baš na konturu, izlazi

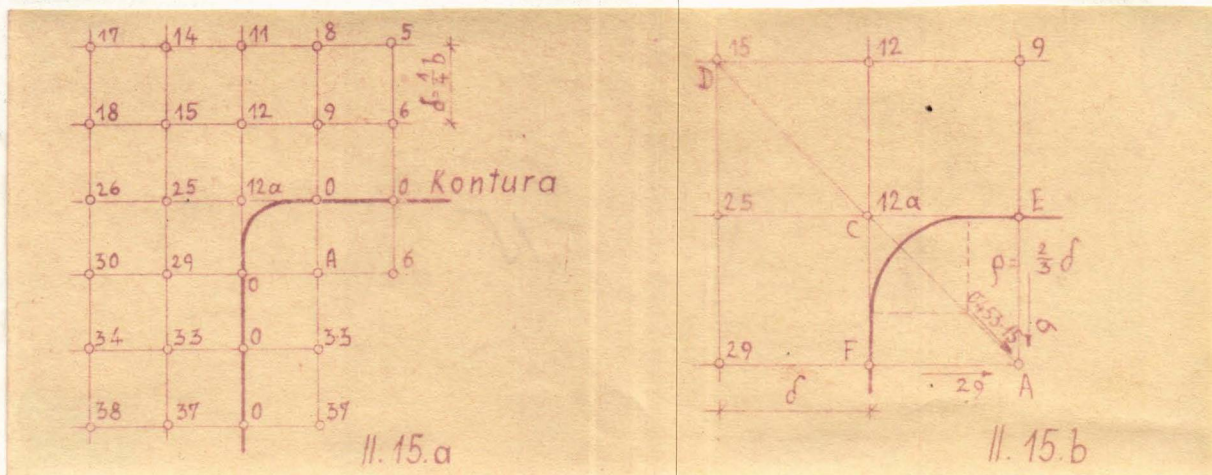
$$\phi_9 = 2\delta k + \phi_0 \quad \phi_1 = K \quad /II.22/$$

a to je obrazac za ekstrapolaciju van konture primenjen ranije prilikom kompletiranja vrednosti funkcije u tačkama van konture. U slučaju da je izvod po normali jednak nuli, izlazi da je $\phi_9 = \phi_0$, tj. vrednosti u simetričnim tačkama unutar i van konture su jednake.

III. 5. 2. Primena na posmatrani problem

Detalj ploče u okolini zakrivljenja prikazan je na sl.

II.15.



Sl. II.15

Fiktivnoj tački A potrebno je pripisati tri različite vrednosti već prema tome da li se ekstrapolacija vrši smerom $9 \rightarrow E \rightarrow A$, $29 \rightarrow F \rightarrow A$ ili $15 \rightarrow 12a \rightarrow B \rightarrow A$. U prvom slučaju $\phi_A = \phi_9$, u drugom $\phi_A = \phi_{29}$, a u trećem slučaju treba tu vrednost izvesti prema obrascima koji važe za iregularne tačke /tačka 12a je iregularna/. Iz sl. II.15b sledi

$$\overline{DC} = \sqrt{2}, \quad \overline{CB} = \frac{2}{3} \delta (\sqrt{2} - 1) = 0,1953 \cdot \overline{DC}$$

Prema obrascu za iregularnu tačku dobivamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, \quad \phi = 0, \quad \xi = 0,1953$$

pa je

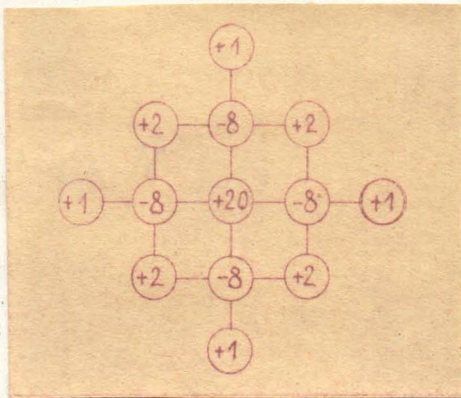
$$\phi_A = \frac{(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2} \phi_{15} = 0,453 \phi_{15}$$

$$\phi_{12a} = \frac{\xi^2}{(1+\xi)^2} \phi_{15} = 0,0267 \phi_{15}$$

/II.23/

N_2 taj način stvorena je mogućnost za formiranje diferencnih jednačina /II.8a/ za svih 45 unutrašnjih čvorova nove mreže. N_2 sl. II.16 prikazan je jedan kvadrant posmatrane ploče kao i sistem od 45 linearnih jednačina /II.24/. N_2 istoj slici ispisana je matrica koeficijenata ovog sistema.

Ovaj sistem jednačina teoriski je moguće rešiti bilo egzaktno bilo nekim od iterativnih postupaka. U ovom radu rešenje je sprovedeno metodom relaksacije. U svakom unutrašnjem čvoru pretpostavlja se neka približna vrednost za funkciju ϕ . Za tačke koje su postojale i u gruboj mreži uzete su vrednosti dobivene tamo, a medjuvrednosti ocenjene su grafičkom interpolacijom. N_2 desnoj strani jednačina pojavljuju se sada određeni residuali. Te residualne upisujemo na slici u gornjem desnom kvadrantu, a vrednosti funkcije u gornjem levom kvadrantu. Likvidaciju residuala počinjemo tamo gde su oni najveći. Promene residuala u okolnim tačkama računamo prema zvezdi relaksacije za biharmoniski operator /v. sl. II.17/.



Sl. II.17

Iz slike se vidi da promena funkcije u jednoj tački izaziva promenu residuala u 13 okolnih tačaka. Cilj relaksacije je smanjivanje residuala na nulu u svim tačkama mreže. Teoriski dokaz konvergencije ovog postupka za biharmonisku jednačinu ne postoji [14]. Međutim, za

rešenje pojedinih problema važna je praktična konvergencija. Za razliku od harmoniske jednačine ovde je konvergencija veoma spora. Likvidacija residuala pojedinačno po tačkama tu se pokazala sasvim neefikasna. Zbog toga stalno su primenjivane blokovske i grupne relaksacije, te se postupak donekle ubrzao. Izvršeno je ukupno 27 relaksacionih procesa po celom području, dok residuali nisu svedeni na dovoljno malu meru. Naročito je opasna situacija kada se u okolini neke unutarnje tačke javljaju samo residuali istog predznaka. Ma koliko da se promeni vrednost residuala u nekoj unutrašnjoj tački /udaljenoj od konture za više od 2 raspona mreže/, ukupna suma residuala ostaje ista. Tendencija pri postupku je ta da se zbir svih residuala svede na nulu. U tu svrhu bilo je potrebno u radu podešavati grupne relaksacije tako da se residuali "guraju" prema periferiji, gde se onda gube /konturne vrednosti naime su fiksne, i pri promeni funkcije u tačkama uz konturu ostaju vrednosti na samoj konturi nepromenjene/. Kao efikasno pokazala se je grupna relaksacija po vertikali, tj. svim tačkama u jednoj vertikalnoj koloni data je ista korekcija podešena tako po kolonama da residuali u sredini uglavnom iščezavaju. Likvidacijom residuala u tačkama uz konturu smanjuje se onda njihova srednja vrednost i konačna likvidacija time se znatno ubrzava. Vrednosti dobivene posle 27 kompletnih relaksacija prikazane su na sledećoj tabeli:

i	ϕ [K]	Residual ($\times 10^4$)	i	ϕ [K]	Residual ($\times 10^4$)
1	+ 2,2512	- 1	23	+ 1,1233	- 1
2	+ 1,0030	0	24	+ 0,3740	0
3	+ 0,2522	+ 1	25	+ 0,0179	0
4	+ 2,2656	- 1	26	- 0,0039	0
5	+ 1,0130	+ 1	27	- 0,0295	0
6	+ 0,2606	0	28	- 0,0402	+ 1
7	+ 2,2650	+ 1	29	- 0,0635	0
8	+ 1,0351	+ 1	30	- 0,1430	0
9	+ 0,2832	0	31	- 0,2022	- 1
10	+ 2,2794	0	32	- 0,2239	- 1
11	+ 1,0717	0	33	- 0,0708	+ 1
12	+ 0,3324	+ 1	34	- 0,1728	- 2
12a	+ 0,0113	+ 1	35	- 0,2516	- 1
13	+ 2,2921	- 1	36	- 0,2801	0
14	+ 1,1023	+ 1	37	- 0,0641	+ 1
15	+ 0,3687	+ 1	38	- 0,1688	- 1
16	+ 2,2993	+ 1	39	- 0,2534	- 1
17	+ 1,1179	- 1	40	- 0,2851	0
18	+ 0,3792	+ 1	41	- 0,0607	+ 1
19	+ 2,3021	- 1	42	- 0,1644	0
20	+ 1,1226	+ 1	43	- 0,2500	- 1
21	+ 0,3766	+ 1	44	- 0,2822	- 1
22	+ 2,3027	+ 1			

Srednji residual je $+ 2,0 \times 10^{-4}$, tj. zanemarljiv.

II.6 SMANJIVANJE RASPONA MREŽE U OKOLINI UGLA PLOČE

Rezultati dobiveni dosadašnjim rasponom mreže zadovoljavaju kao generalna slika naponskog stanja u celoj ploči sem u okolini ugla, gde iz ovih rezultata ne dobivamo dovoljno jasnu sliku o koncentraciji napona u uglu. Tu je potrebna gušća mreža. Da bi izbegli suviše veliki broj čvorova uvodjenjem gušće mreže po celom području, primenjujemo parcijalno smanjivanje raspona mreže u okolini ugla. Gušću mrežu treba uključiti u postojeću grubu mrežu. Takva interpolacija kod harmoniskih problema ne pretstavlja teškoću, no kod biharmoniske jednačine stvar se prilično komplikuje. Taj problem prvi su rešili Allen i Dennis 1951 g. [13].

II.6. 1. Problem interpolacije gušće mreže.

U ovom odeljku biće ukratno iznešen problem parcijalnog prelaženja na finiju mrežu. Po pravilu prelazi se od grube na finiju mrežu po celoj oblasti. Time se bolje približujemo tačnim rešenjima, ali ujedno i povećavamo broj čvorova, odnosno linearnih jednačina. Ako nas posebno interesuje samo jedan detalj, na pr., koncentracija napona u uglu ili u blizini napadne tačke koncentrisane sile, možemo izvršiti samo parcijalno smanjivanje raspona mreže u okolini takve tačke. Problem je sada nadovezivanje gušće mreže na postojeću grubu.

U slučaju da je problem dat harmoniskom jednačinom smanjivanje raspona mreže u okolini tačke rešili su Allen, Southwell i Vaisey /Proc. Roy. Soc., A. 183, 1945/, a za slučaj biharmoniske jednačine Allen i Dennis [13].

Ako je zadata grupa tačaka u položaju prikazanom na sl. II.3, onda za Poisson-ovu jednačinu

$$\Delta \phi + Z(x,y) = 0 \quad /a/$$

vredi residualna formula

$$R_0 \equiv \sum \phi_1 - 4\phi_0 + \delta^2 Z_0 \quad /b/$$

/II.25/

Za biharmonisku jednačinu

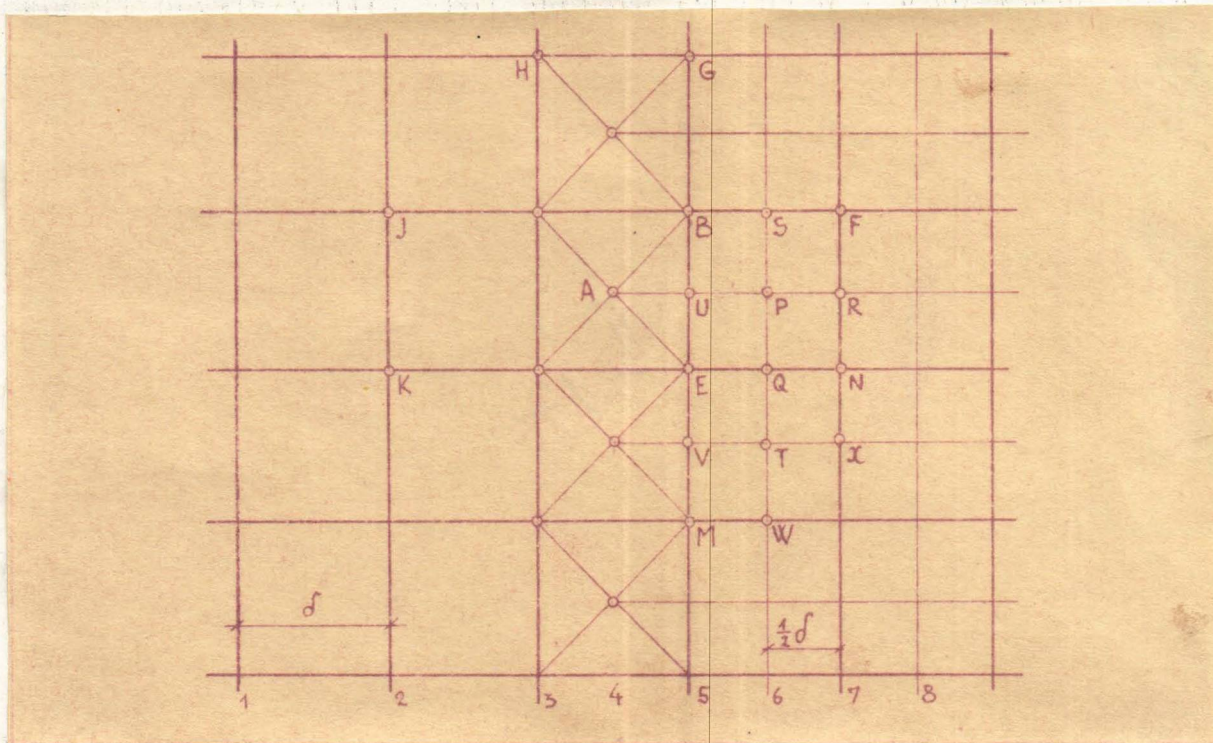
$$\Delta \Delta \phi = \Sigma(x, y) \quad /a/$$

ista formula glasi

/II.26/

$$R_0 \equiv 8 \Sigma \phi_1 - 20 \phi_0 - 2 \Sigma \phi_5 - \Sigma \phi_9 + \delta^4 \Sigma_0 \quad /b/$$

Uzmimo sada prelaz od grube na finiju mrežu



Sl. II.17 a

Za Poisson-ovu jednačinu /II.25.a/ sve tačke na vertikalama 1, 2, 3 pripadaju gruboj mreži, i residuali su im dati sa /II.25.b/. Sve tačke na linijama 6, 7 i 8 mogu se posmatrati da pripadaju finoj mreži, te su im residuali dati obrascem

$$R_0 \equiv \Sigma \phi_1 - 4 \phi_0 + \left(\frac{1}{2}\delta\right)^2 \Sigma_0$$

/II.27/

Na liniji 5 postoje dve grupe tačaka: tačke B, E, M, itd. pripadaju gruboj mreži, te su im residuali određeni formulom /II.25.b/, tačke U, V, itd. pripadaju finoj mreži, te se računaju prema /II.27/. Konačno preostaju tačke na liniji 4 /kao, na pr., A/. S obzirom na činjenicu da je Laplace-ov operator Δ invarijantan u odnosu na rotaciju koordinatnog sistema, možemo uzeti da tačke poput A pri-

padaju umetnutoj dijagonalnoj mreži raspona $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, pa su im residuali određeni prema obrascu

$$R_A \equiv \phi_B + \phi_C + \phi_D + \phi_E - 4\phi_A + \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \Delta_A \quad /II.28/$$

Biharmoniski operator rešava se svodjenjem na prethodno, uočivši samo da je $(\Delta \Delta)$ isto što i $(\Delta) \cdot (\Delta)$, tako da se sve svodi na razmatranje harmoniskog problema. Sada dobivamo pet kategorija tačaka:

1/ Tačke na linijama 1, 2 i 3 računaju se po gruboj mreži prema /II.26.b/. Njima se mogu dodati i tačke poput B, E, M... na liniji 5.

2/ Tačke na linijama 7 i 8 računaju se po finijoj mreži prema obrascu

$$R_o \equiv 3\sum\phi_1 - 20\phi_o - 2\sum\phi_5 - \sum\phi_9 + \left(\frac{1}{2}\delta\right)^4 \cdot \Delta_o \quad /II.29/$$

Njima se mogu dodati i tačke P, T, ... na liniji 6.

Ostale tačke na linijama 4, 5, 6 računaju se po obrascima izvedenim dvostrukom primenom harmoniskog operatora [1]β :

3/ Tačke poput A računaju se prema formuli

$$R_A \equiv 5(\phi_B + \phi_C + \phi_D + \phi_E) - 16\phi_A - \frac{1}{2}(\phi_F + \phi_G + \phi_H + \phi_I) + \phi_K + \phi_L + \phi_M + \phi_N + \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^4 \cdot \Delta_A \quad /II.30/$$

4/ Tačke U, V, ... itd. na liniji 5 računaju se prema obrascu

$$R_U \equiv 8\phi_P + 4\frac{1}{4}(\phi_B + \phi_E) + 6\phi_A - 17\phi_U - (\phi_R + \phi_S + \phi_Q) - \frac{3}{4}(\phi_C + \phi_D) - \frac{1}{4}(\phi_F + \phi_G + \phi_M + \phi_N) + \left(\frac{1}{2}\delta\right)^4 \cdot \Delta_U \quad /II.31/$$

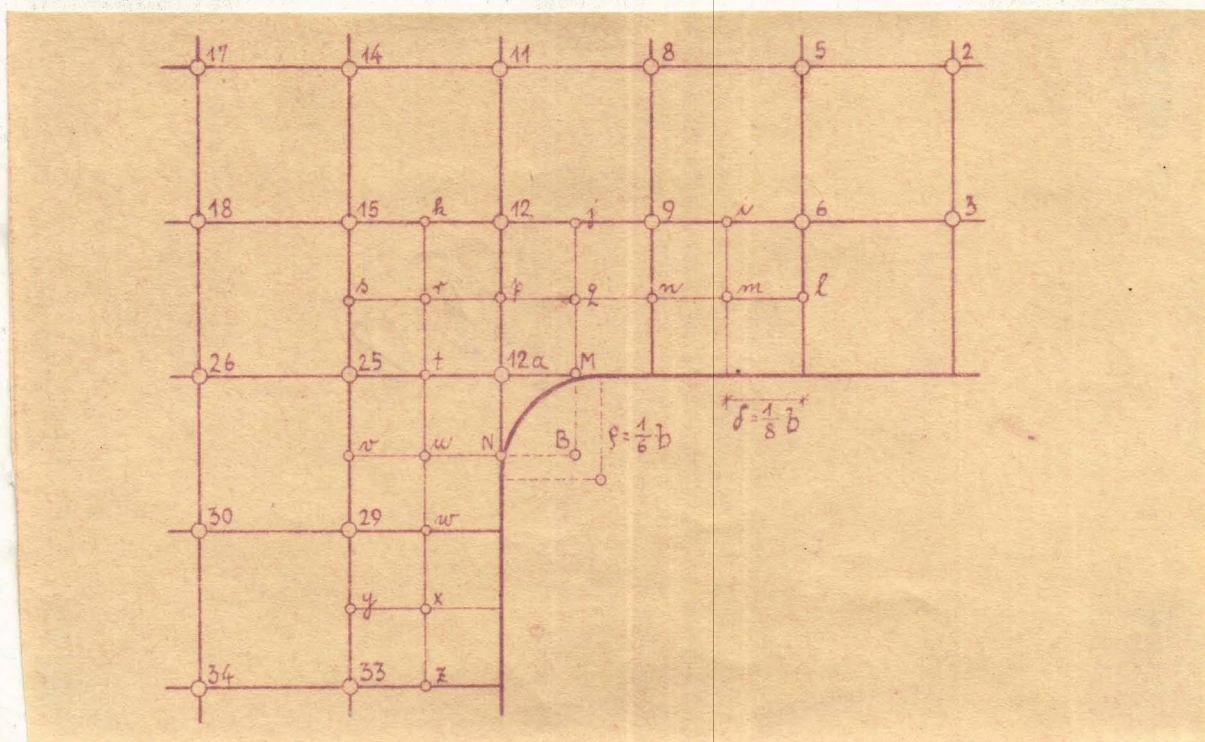
5/ Tačke S, Q, W, ... na liniji 6 prema obrascu

$$R_Q \equiv 7\frac{3}{4}\phi_N + 8(\phi_P + \phi_T) + 5\phi_E - 19\phi_Q - 2(\phi_R + \phi_X) - (\phi_S + \phi_U + \phi_V + \phi_W + \phi_Y) - \frac{1}{4}(\phi_B + \phi_D + \phi_M) + \left(\frac{1}{2}\delta\right)^4 \cdot \Delta_Q \quad /II.32/$$

Time je pitanje interpolacije ovakve mreže za harmonijski kao i za biharmonijski problem potpuno rešeno.

II.6.2. Primena na posmatrani problem. Konačno numeričko rešenje

U tačkama u okolini ugla smanjuje se raspon mreže na polovinu, kao što je prikazano na sl. II.18.



Sl. II.18

Pored problema interpolacije finije mreže ovde postoji još i iregularna tačka 12a za koju kod novog raspona mreže dolazi nova diferencna jednačina. Jednakim postupkom kao i ranije dobivamo

$$\left. \begin{aligned} \phi_B &= 0,1955 \phi_r \\ \phi_{12a} &= 0,0779 \phi_r \end{aligned} \right\} \rightarrow \phi_B = 2,5071 \phi_{12a} \approx 2,5 \phi_{12a}$$

Fiktivna tačka B pri ekstrapolaciji u tri razna pravca dobiva sada tri različite vrednosti ϕ_z , ϕ_w i $2,5 \phi_{12a}$

Tačke M i N uzete su aproksimativno kao da su na konturi /otstojanje od konture je zanemarljivo, iznosi $\Delta \delta = 0,04\delta = 0,0005 b /$.

Sada je moguće napisati diferencne jednačine za sve tačke nove mreže. Prema ranijem dobivamo sada šest kategorija tačaka /v. sl. II.19/.

- 1/ Tačke 1 - 44 stare mreže računaju se po standardnoj formuli za biharmonisku jednačinu sa rasponom grube mreže $(\delta = \frac{1}{4}b)$
- 2/ Tačke m, q, r, u, x računaju se po istoj formuli ali za finiju mrežu
- 3/ Tačka 12a je iregularna i računa se po specijalnoj jednačini.
- 4/ Tačke a, b, c, d, e, f, g, h računaju se po formuli /II.30/.
- 5/ Tačke l, i, j, k, s, v, y, z po formuli /II.31/.
- 6/ Tačke n, p, t, w po formuli /II.32/.

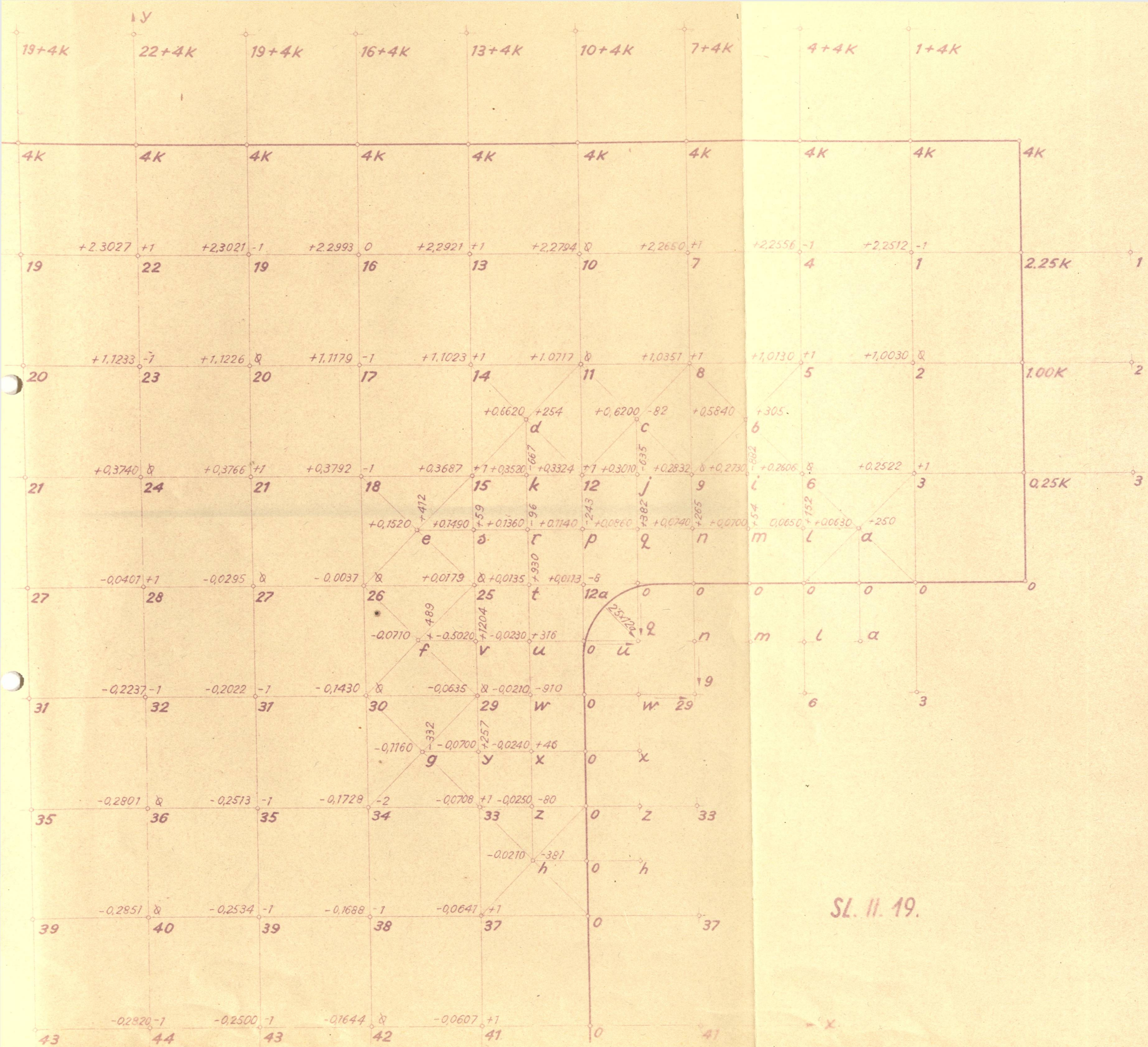
Na osnovu toga dobiva se sada 26 novih jednačina /II.33/ kao dodatak na 44 postojeće jednačine /II.24/.

Na sl. II.19 prikazan je ceo kvadrant sa interpoliranim tačkama. U kvadrantu postoji sada ukupno 70 čvornih tačaka. Vrednosti funkcije ϕ u tačkama 1 - 44 su poznate, a približne vrednosti za tačke a - z odredjujemo grafičkom interpolacijom crtajući reljef funkcije ϕ za sve horizontalne i vertikalne preseke. Na sl. II.19 upisane su te vrednosti kod svake tačke u gornjem levom kvadrantu, a residuali koji iz njih proizilaze u gornjem desnom kvadrantu. Pada u oči koliko sunesrazmerno veći residuali u umetnutim tačkama /na pr., residual kod tačke v iznosi $1204 \cdot 10^{-4}$ /. Svi residuali upisani na sl. II.19 množeni su sa 10^4 .

Relaksacioni proces nastavljen je za novi proces od 70 tačaka. Korekcije residuala u novim tačkama povlače međjutim promene za tačku 12a, a time automatski i za sve tačke stare mreže. Izvršeno je ukupno šest relaksacija po celom području, dok nije postignuta dovoljna tačnost /na 3 decimale/. Srednji residual na kraju računa iznosi $0,55 \cdot 10^{-3}$. Rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:

TABELARNI PREGLED REZULTATA ZA FUNKCIJU ϕ U POJEDINIM TAČKAMA

i	Res. ($\times 10^3$)	ϕ [K]	ϕ [pb^2]	i	Res. ($\times 10^3$)	ϕ [K]	ϕ [pb^2]
1	-1	+2,251	+0,28138	23	0	+1,123	+0,14038
2	-1	+1,003	+0,12538	24	+1	+0,374	+0,04675
3	0	+0,252	+0,03150	25	+3	+0,020	+0,00250
4	0	+2,256	+0,28200	26	+1	-0,003	-0,00038
5	0	+1,013	+0,12663	27	0	-0,029	-0,00363
6	0	+0,261	+0,03263	28	-2	-0,040	-0,00500
7	-1	+2,265	+0,28313	29	0	-0,063	-0,00788
8	0	+1,036	+0,12950	30	+1	-0,143	-0,01788
9	0	+0,238	+0,03550	31	0	-0,202	-0,02525
10	-1	+2,280	+0,28500	32	-1	-0,224	-0,02800
11	0	+1,073	+0,13413	33	-2	-0,071	-0,00888
12	+1	+0,335	+0,04188	34	0	-0,173	-0,02163
12a	0	+0,014	+0,00175	35	0	-0,251	-0,03138
13	0	+2,292	+0,28650	36	0	-0,280	-0,03500
14	+2	+1,103	+0,13788	37	0	-0,064	-0,00800
15	+2	+0,370	+0,04625	38	+1	-0,169	-0,02113
16	-1	+2,300	+0,28750	39	0	-0,253	-0,03163
17	+1	+1,118	+0,13975	40	+1	-0,285	-0,03563
18	+2	+0,380	+0,04750	41	0	-0,061	-0,00763
19	0	+2,302	+0,28775	42	0	-0,164	-0,02050
20	0	+1,123	+0,14038	43	-1	-0,250	-0,03125
21	-1	+0,377	+0,04713	44	0	-0,282	-0,03525
22	-1	+2,303	+0,28788				



SL. II. 19.

Sistem diferencnih jednačina za interpolirane tačke

(dodatak sistemu II. 24)

- m $8(\phi_l + \phi + \phi_l) - 21\phi_m - 2(\phi_6 + \phi_9) - (\phi_a + \phi_6 + \phi_2) = 0$
- q $8(\phi_n + \phi_j + \phi_p) - 21\phi_q - 2(\phi_9 + \phi_{12} + \phi_{12a}) - (\phi_m + \phi_c + \phi_t) = 0$
- r $8(\phi_p + \phi_k + \phi_s + \phi_t) - 20\phi_r - 2(\phi_{12} + \phi_{15} + \phi_{12a} + \phi_{25}) - (\phi_2 + \phi_d + \phi_e + \phi_u) = 0$
- u $8(\phi_t + \phi_r + \phi_w) - 21\phi_u - 2(\phi_{12a} + \phi_{25} + \phi_{29}) - (\phi_x + \phi_f + \phi_k) = 0$
- x $8(\phi_w + \phi_y + \phi_z) - 21\phi_x - 2(\phi_{29} + \phi_{33}) - (\phi_n + \phi_g + \phi_h) = 0$
- 12a $8(\phi_p + \phi_t) - 25\phi_{12a} - 2(\phi_2 + \phi + \phi_u) - (\phi_{12} + \phi_{25}) = 0$
- a $5(\phi_3 + \phi_6) - 16\phi_a - 0.5(\phi_2 + \phi_5 + \phi_9 + \phi_6 + \phi_3 + 0.2500K) = 0$
- b $5(\phi_5 + \phi_6 + \phi_9 + \phi_9) - 16\phi_b - 0.5(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_7 + \phi_{11} + \phi_{12}) = 0$
- c $5(\phi_8 + \phi_9 + \phi_{11} + \phi_{12}) - 16\phi_c - 0.5(\phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_{10} + \phi_{14} + \phi_{15} + \phi_{12a}) = 0$
- d $5(\phi_{11} + \phi_{12} + \phi_{14} + \phi_{15}) - 16\phi_d - 0.5(\phi_8 + \phi_9 + \phi_{10} + \phi_{13} + \phi_{17} + \phi_{18} + \phi_{12a} + \phi_{25}) = 0$
- e $5(\phi_{15} + \phi_{18} + \phi_{25} + \phi_{26}) - 16\phi_e - 0.5(\phi_{12} + \phi_{12a} + \phi_{14} + \phi_{17} + \phi_{29} + \phi_{27} + \phi_{29} + \phi_{30}) = 0$
- f $5(\phi_{25} + \phi_{26} + \phi_{29} + \phi_{30}) - 16\phi_f - 0.5(\phi_{12a} + \phi_{15} + \phi_{18} + \phi_{27} + \phi_{31} + \phi_{33} + \phi_{34}) = 0$
- g $5(\phi_{29} + \phi_{30} + \phi_{33} + \phi_{34}) - 16\phi_g - 0.5(\phi_{25} + \phi_{26} + \phi_{31} + \phi_{35} + \phi_{37} + \phi_{38}) = 0$
- h $5(\phi_{33} + \phi_{37}) - 16\phi_h - 0.5(\phi_{29} + \phi_{34} + \phi_{38} + \phi_{41} + \phi_{37} + \phi_{33}) = 0$
- l $\delta\phi_m + 4.25(\phi_6 + 0) + 6\phi_a - 17\phi_l - (\phi_i + \phi_n) - 0.75(\phi_3 + 0) - 0.25(\phi_9 + \phi_5 + \phi_6) = 0$
- i $8\phi_m + 4.25(\phi_6 + \phi_9) + 6\phi_b - 17\phi_i - (\phi_l + \phi_n) - 0.75(\phi_5 + \phi_8) - 0.25(\phi_3 + \phi_{12}) = 0$
- j $8\phi_2 + 4.25(\phi_9 + \phi_{12}) + 6\phi_c - 17\phi_j - (\phi_n + \phi_p) - 0.75(\phi_8 + \phi_{11}) - 0.25(\phi_{12a} + \phi_6 + \phi_{15}) = 0$
- k $8\phi_n + 4.25(\phi_{12} + \phi_{15}) + 6\phi_d - 17\phi_k - (\phi_t + \phi_p + \phi_s) - 0.75(\phi_{11} + \phi_{14}) - 0.25(\phi_{12a} + \phi_{25} + \phi_9 + \phi_{18}) = 0$
- o $8\phi_t + 4.25(\phi_{15} + \phi_{25}) + 6\phi_l - 17\phi_o - (\phi_p + \phi_k + \phi_t) - 0.75(\phi_{18} + \phi_{26}) - 0.25(\phi_{12} + \phi_{12a} + \phi_{14} + \phi_{29}) = 0$
- v $8\phi_n + 4.25(\phi_{25} + \phi_{29}) + 6\phi_f - 17\phi_v - (\phi_t + \phi_w) - 0.75(\phi_{26} + \phi_{30}) - 0.25(\phi_{12a} + \phi_{15} + \phi_{33}) = 0$
- y $8\phi_x + 4.25(\phi_{29} + \phi_{33}) + 6\phi_g - 17\phi_y - (\phi_w + \phi_z) - 0.75(\phi_{30} + \phi_{34}) - 0.25(\phi_{25} + \phi_{37}) = 0$
- z $8\phi_x + 4.25(0 + \phi_{33}) + 6\phi_h - 17\phi_z - (\phi_w + \phi_y) - 0.75(\phi_{37} + 0) - 0.25(\phi_{29} + \phi_{33} + \phi_{34}) = 0$
- n $+ 8(\phi_m + \phi_q) + 5\phi_g - 19\phi_n - (\phi_n + \phi_l + \phi_p + \phi_t + \phi_j) - 0.25(\phi_6 + \phi_{12} + \phi_8) = 0$
- p $7.75\phi_{12a} + 8(\phi_q + \phi_r) + 5\phi_{12} - 19\phi_p - 2(0 + \phi_t) - (\phi_n + \phi_s + \phi_j + \phi_k) - 0.25(\phi_9 + \phi_{10} + \phi_{11}) = 0$
- t $7.75\phi_{12a} + 8(\phi_r + \phi_n) - 5\phi_{25} - 19\phi_t - 2(0 + \phi_p) - \phi_k + \phi_w + \phi_s + \phi_v - 0.25(\phi_{15} + \phi_{29} + \phi_{26}) = 0$
- w $+ 8\phi_n + \phi_x + 5\phi_{29} - 19\phi_w - (\phi_w + \phi_t + \phi_z + \phi_v + \phi_y) - 0.25(\phi_{25} + \phi_{33} + \phi_{30}) = 0$

i	Res. (x10 ³)	φ [K]	φ [p6 ²]	i	Res. (x10 ³)	φ [K]	φ [p6 ²]
a	0	+0,065	+0,00813	i	+1	+0,268	+0,03350
l	+2	+0,067	+0,00838	j	+4	+0,303	+0,03788
m	-2	+0,070	+0,00875	k	+4	+0,354	+0,04425
n	-2	+0,077	+0,00963	s	+4	+0,152	+0,01900
q	+1	+0,090	+0,01125	v	+5	+0,040	-0,00500
p	+5	+0,119	+0,01488	y	-1	-0,070	-0,00875
r	+1	+0,141	+0,01763	b	0	+0,586	+0,07325
t	+1	+0,025	+0,00313	c	+3	+0,624	+0,07800
u	-1	-0,015	-0,00188	d	+3	+0,668	+0,08350
w	+2	-0,024	-0,00300	e	+3	+0,155	+0,01938
x	0	-0,025	-0,00313	f	+3	-0,869	-0,00863
z	0	-0,025	-0,00313	g	+1	-0,120	-0,01500
h	-1	-0,023	-0,00288				

Prema obrascima /II.18/ sračunati su odatle komponentalni naponi σ_x , σ_y i τ_{xy} , a zatim i glavni naponi prema poznatim obrascima

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} [\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}]$$

/II.34/

$$\tan 2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

U daljem usvojene su za glavne napona oznake

$$\sigma_1 = p \quad \sigma_2 = q$$

/II.35/

Glavni naponi sračunati su u svim unutrašnjim tačkama mreže kao i po konturi. Da bi se dobila bolja slika o koncentraciji napona u

okolini ugla, izvršena je grafička interpolacija na još finiju mrežu za tačke u toj okolini. Vrednosti funkcije ϕ u tim tačkama prikazane su na sl. II.20, a rezultati dobiveni za glavne napone dati su u preglednoj tabeli kao i na sl. II.21. Na sl. II.22 prikazan je dijagram konturnog napona paralelno s konturom.

Daljim smanjivanjem raspona mreže mogle bi se dobiti još tačnije vrednosti. To smanjivanje ima svog praktičnog opravdanja sve dotle dok se ne pokaže da sledeća aproksimacija menja krajnje rezultate za zanemarljivi izraz. U ovom radu zadržali smo se na rasponu opisanom u poslednjoj fazi računa, a dobiveni rezultati biće kasnije upoređeni sa rezultatima dobivenim metodom Fotoelastičnosti i primenom Teorije kompleksnih funkcija.

TABELARNI PREGLED NAPONA

š	Komponentalni naponi			Glavni naponi			
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_1	σ_2	stepen	Min.
1	+1,0016	+0,0080	-0,0064	+1,0017	+0,0079	- 0	23
2	+0,9936	+0,0128	-0,0008	+0,9936	+0,0128	0	
3	+0,9984	+0,0208	+0,0064	+0,9985	+0,0207	0	
4	+1,0016	+0,0080	-0,0164	+1,0018	+0,0078	- 0	57
5	+0,9824	+0,0272	-0,0092	+0,9826	+0,0270	- 0	56
6	+0,9824	+0,0288	+0,0164	+0,9826	+0,0286	+ 0	58
7	+1,0128	+0,0128	-0,0300	+1,0137	+0,0119	- 1	44
8	+0,9536	+0,0272	-0,0252	+0,9542	+0,0266	- 1	34
9	+0,9360	+0,0560	+0,0228	+0,9366	+0,0554	+ 1	28
10	+1,0256	-0,0064	-0,0336	+1,0265	-0,0073	- 1	51
11	+0,9392	-0,0128	-0,0296	+0,9401	-0,0137	- 1	48
12	+0,8336	-0,0320	+0,0236	+0,8340	-0,0324	+ 1	54
12a	+0,7232	-0,0320	+0,4432	+0,9278	-0,2366	+24	48
13	+1,0384	-0,0080	-0,0228	+1,0389	-0,0085	- 1	15
14	+0,9120	-0,0304	-0,0128	+0,9124	-0,0308	- 0	45
15	+0,7648	-0,0128	+0,0306	+0,7660	-0,0140	+ 2	15
16	+1,0368	-0,0112	-0,0100	+1,0371	-0,0115	- 0	55
17	+0,8864	-0,0208	+0,0020	+0,8864	-0,0208	0	
18	+0,7104	-0,0256	+0,0344	+0,7120	-0,0272	+ 2	40
19	+1,0368	-0,0032	-0,0024	+1,0368	-0,0032	0	
20	+0,8656	-0,0096	+0,0044	+0,8657	-0,0097	+ 0	20
21	+0,6816	+0,0001	+0,0208	+0,6823	-0,0005	+ 1	40
22	+1,0336	-0,0032	0	+1,0336	-0,0032	0	
23	+0,8624	0	0	+0,8624	0	0	

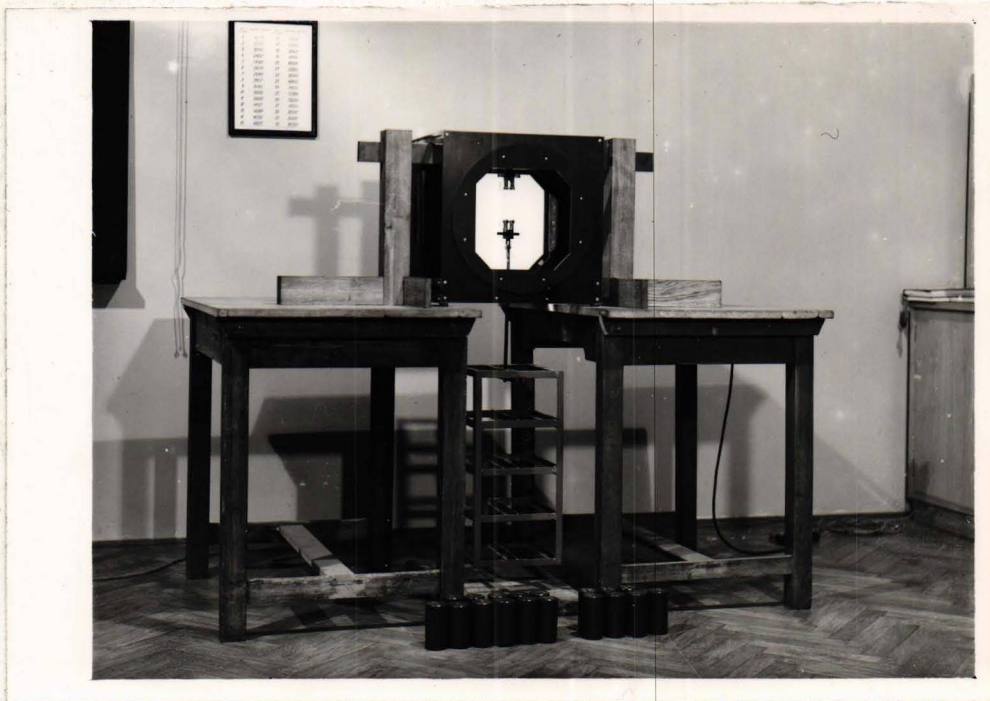
Komponentalni naponi				Glavni naponi		
i	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_1	σ_2	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ stepen. Mdn.
24	+0,6688	+0,0096	0	+0,6688	+0,0096	0
25	-0,5344	-0,0576	+0,0940	-0,5585	-0,0817	-8 49
26	+0,4608	-0,0224	+0,0728	+0,4622	-0,0238	+8 25
27	+0,4640	+0,0288	+0,0376	+0,4672	+0,0256	+4 55
28	+0,4608	+0,0448	0	+0,4608	+0,0448	0
29	+0,1504	-0,0336	-0,0600	+0,1682	-0,0514	+16 55
30	+0,2208	+0,0640	+0,0656	+0,2446	+0,0402	+19 46
31	-0,2496	+0,0752	+0,0352	+0,2565	+0,0683	+10 59
32	-0,2560	+0,0864	0	-0,2560	+0,0864	0
33	-0,0304	-0,0608	+0,0128	-0,0321	-0,0625	+7 50
34	-0,0672	+0,0592	+0,0328	+0,0962	+0,0302	-41 27
35	-0,0992	+0,0994	+0,0176	-0,1150	+0,0786	+37 22
36	+0,10240	+0,1152	0	-0,1152	+0,1024	0
37	-0,0080	-0,0816	+0,0044	-0,0077	-0,0819	-3 25
38	-0,0016	+0,0416	+0,0048	-0,0421	+0,0211	+86 37
39	-0,0080	+0,1040	+0,0056	+0,1043	+0,0077	+86 44
40	+0,0144	+0,1280	0	+0,1280	+0,0144	0
41	-0,0128	-0,1064	0	-0,0128	-0,1064	0
42	-0,0192	+0,0336	0	+0,0336	-0,01920	+90 00
43	-0,0096	+0,1088	0	+0,1088	-0,0096	+90 00
44	-0,0096	+0,1280	0	+0,1280	-0,0096	+90 00
h	0	-0,1664	+0,0144	+0,0008	-0,1672	+4 50
i	+0,9664	+0,0704	+0,0480	+0,9724	+0,0644	+3 02
j	-0,8640	+0,1024	-0,0032	+0,8641	+0,1023	0
k	-0,8000	-0,0256	-0,0064	+0,8001	-0,0257	-0 27
l	-1,0112	+0,0064	+0,0240	-1,0116	+0,0060	-1 22
m	-1,0176	+0,0256	+0,0464	-1,0198	+0,0234	-2 08
n	-1,0432	+0,0576	+0,0704	-1,0456	+0,0543	-4 04
q	-0,9792	-0,1208	+0,0736	-0,9854	+0,1146	-4 51
p	-0,8896	-0,0576	+0,0528	+0,8915	-0,0595	+3 12
r	-0,7808	-0,0832	+0,0592	-0,7849	-0,0873	-3 54
s	-0,6912	-0,0640	+0,0688	-0,6975	-0,0703	+5 10
t	-0,6080	-0,1216	+0,1456	-0,6368	-0,1496	-10 51
u	-0,2496	-0,1984	+0,1364	+0,2868	-0,2356	+15 32
v	-0,2304	-0,0320	+0,1416	+0,2893	-0,0909	-23 35
w	-0,0640	-0,1216	+0,0608	+0,0821	-0,1397	+16 37
x	-0,0064	-0,1664	+0,0160	+0,0078	-0,1678	+5 15
y	-0,0512	-0,0320	+0,0144	+0,0536	-0,0344	+9 34
z	+0,0128	-0,1728	+0,0064	+0,0130	-0,1730	+1 58

III. REŠENJE POMOĆU METODE FOTOELASTIČNOSTI

Primenjena metoda fotoelastičnosti u ovom radu nema za cilj detaljno ispitivanje naponskog stanja /oblik modela za to je dosta nepodesan/, već treba da posluži najpre kao orijentaciona slika kvalitativnog karaktera, a tek onda kao numerička kontrola rezultata dobivenih čisto teoriskim putem.

Eksperimenti su vršeni u Laboratoriji za ispitivanje konstrukcija Građevinskog fakulteta u Beogradu na aparaturi tipa Pirard /sl. III.1/, a delom i u Hidrotehničkom institutu "Jaroslav Černi" na aparaturi tipa Gačileo.

Napominjemo da su postojale velike teškoće tehničkog karaktera pri pripremi i izvođenju ovih eksperimenata, zato što nije postojalo osoblje specijalno kvalifikovano za ovu vrstu posla. Pažljiva obrada modela i instrumentarija igra tu bitnu ulogu.



Sl. III. 1

III.1 UVODNE NAPOMENE

Ako se ploča, napravljena od pogodnog providnog materijala /bakelit, pleksiglas, trolon, dekorit, itd./, a koja se nalazi u generalisanom ravnom stanju naprezanja, stavi u polje polariskopa tako da su joj glavne ravni paralelne sa smerom napredovanja svetlosnih zrakova, nastaje efekat sličan kao i kod prolaza svetlosti kroz kristal - dvojni lom svetlosti. Ekstraordinarni talas zaostaje u fazi za ordinarnim, te se kao rezultat interferencije tih zrakova vide na ekranu odredjena tamna odnosno svetla mesta, iz čega se daljom analizom mogu izvesti kvalitativni i kvantitativni zaključci o stanju napona u posmatranoj napregnutoj ploči.

Eksperimentima je utvrđeno da je spomenuta razlika u fazi, ako se radi unutar granica proporcionalnosti, direktno razmerna sa intenzitetom opterećenja.

Dve su osnovne familije krivih linija, dobivenih na ovaj način, koje služe za jednoznačno rešenje naponskog stanja u posmatranom modelu:

a/ Izochrome - nastaju kod prolaza cirkularno polarizovane svetlosti kroz napregnuti model, a označavaju geometriška mesta takvih tačaka gde je razlika glavnih napona konstantna.

b/ Izokline - nastaju kod prolaza ravno polarizovane svetlosti kroz napregnuti model, a označavaju geometriška mesta tačaka gde je smer glavnih napona isti.

Slika izoklina omogućuje geometrišku konstrukciju trajektorija glavnih napona, a kombinovana sa slikom izohroma daje nužne i dovoljne podatke za odredjivanje veličine glavnih napona u bilo kojoj tački modela.

III. 2 NEKI OSNOVNI POJMOVI IZ FOTOELASTIČNOSTI

III. 2. 1 Slika izohroma

Sliku izohroma dobivamo u polariskopu sa cirkularno polarizovanom belom ili monohromatskom svetlošću.

Intenzitet svetlosti posle prolaza kroz cirkularni polariskop dat je obrascem

$$I = I_1 \sin^2 \frac{\alpha_p}{2} \quad \text{/III.1/}$$

gde je α_p razlika u fazi nastala dvojnim lomom, a I_1 je intenzitet upadnog zraka. Odatle sledi direktno:

$$I = 0 \quad \text{za} \quad \alpha_p = m \cdot 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$I = I_1 = I_{max} \quad \text{za} \quad \alpha_p = (2m+1)\pi$$

Znači da o faznoj razlici α_p zavisi kakva će slika biti na ekranu posle prolaza kroz model: kod monohromatske svetlosti na ekranu će se pojaviti određena slika tamnih linija, a kod bele svetlosti sistem linija u spektralnim bojama /otuda naziv izohroma/. Linija iste boje spaja sve tačke u kojima je fazna razlika α_p ista.

U providnoj izotropnoj ploči koja se nalazi u stanju ravnog naprezanja unutar granica elastičnosti razlika u fazi R_t /ili relativna retardacija/ merena u talasnim dužinama data je izrazom

$$R_t = C \cdot t \cdot (p - q) \quad \text{/III.2/}$$

- gde je C - konstanta nazvana optičko - naponski koeficijent,
- t - debljina ploče,
- p, q - glavni naponi.

Jednačina /III.2/ zove se optičko - naponski zakon pri ravnom problemu.

Sve tačke modela u kojima je razlika $p - q$ konstantna, imaju istu retardaciju R_t , a geometrijsko mesto takvih tačaka je izohroma. Kako je, međjutim, $\tau_{max} = \frac{1}{2}(p - q)$, sledi da su izo-

hrome jednovremeno i geometrijska mesta tačaka sa jednakim maksimalnim tangencijalnim naponom. Red izohrome zavisi od optičke aktivnosti materijala. U eksperimentu se određuje utoliko tačnije ukoliko smo bliži granici proporcionalnosti. Povećavanjem opterećenja dobivamo na ekranu izohrome sve višeg i višeg reda.

Iz jednačine /III.2/ sledi $n\lambda = C \cdot t (p - q)$, gde je λ dužina talasa svetlosti. Odatle je

$$\tau_{max} = n \cdot F \quad \text{/III.3/}$$

Ovde je n red izohrome, a F konstanta zavisna od vrste materijala i debljine modela.

$$F = \frac{\lambda}{2Ct} \quad [kq/cm^2] \quad \text{/III.4/}$$
$$f = F \cdot t \quad [kq/cm]$$

F zove se optička konstanta modela /model fringe value/,

f zove se optička konstanta materijala /material fringe value/.

Konstanta F ustvari je veličina maksimalnog tangencijalnog napona u tačkama gde je red izohrome $n = 1$.

Za svaku kvantitativnu analizu iz fotoelastičnih slika potrebno je znati numeričke vrednosti ovih konstanata.

III. 2. 2 Slika izoklina

Intenzitet svetlosti posle prolaza kroz ravni polarizator dat je izrazom

$$J = C \cdot a^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \frac{\alpha_t}{2} \quad \text{/III.5/}$$

gde je C - optička konstanta,

a - amplituda ravno polarizovanog talasa,

α_t - retardacija (uglovna)

θ - ugao između ravni polarizatora i glavnog napona.

Ogavde vidimo da je intenzitet svetlosti jednak nuli, ako je

$$\Delta_t = m \cdot 2\pi$$

/uslov za izohrome/

ili $\theta = 0$.

U ravnom polariskopu javlja se, dakle, slika izohroma jednako kao i u cirkularnom, a pored toga još jedna tamna kriva linija za $\theta = 0$. To je izoklina. Menjajući nagib ravni polarizatora, pri čemu model ostaje u istom položaju, dobivamo izokline raznih parametara.

Za slike izoklina upotrebljava se bela svetlost, a veličina opterećenja bira se tako da jasnoća slika bude optimalna. Pri tome korisno je upotrebiti materijal manje optičke aktivnosti kako se ne bi pojavile i izohrome. Početni položaj polariskopa je nulta izoklina, a dalje izokline dobivamo rotacijom polariskopa za 5° ili 10° . Potpuna slika izoklina nastaje pri rotaciji u intervalu od 0 do 90° , te zbirnu sliku dobivamo crtajući sve te izokline na zajedničkom crtežu.

Tačke u kojima je $p = q$, tj. $p - q = 0$ zovu se izotropne tačke, a prema /III.2/ vidimo da one ostaju konstantno tamne. Specijalni slučaj izotropnih tačaka gde je $p = q = 0$ zovu se singularne tačke. U izotropnim tačkama je

$$\sigma_x = \sigma_y = p \qquad \tau_{xy} = 0$$

Tada iz poznatog odnosa $\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ sledi da je ovde

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{0}{0}$$

tj. uglovi θ_1 i θ_2 su neodredjeni. Svaki smer tu je ujedno i smer glavnih napona, tj. kroz izotropne tačke prolaze izokline sviju parametara. Izotropne tačke dele se na pozitivne i negativne: pozitivna je prema konvenciji ona gde parametar izoklina raste u smislu suprotnom od kazaljke na satu. U okolini tih tačaka tok trajektorija glavnih napona je karakterističan: kod pozitivnih izotropnih tačaka

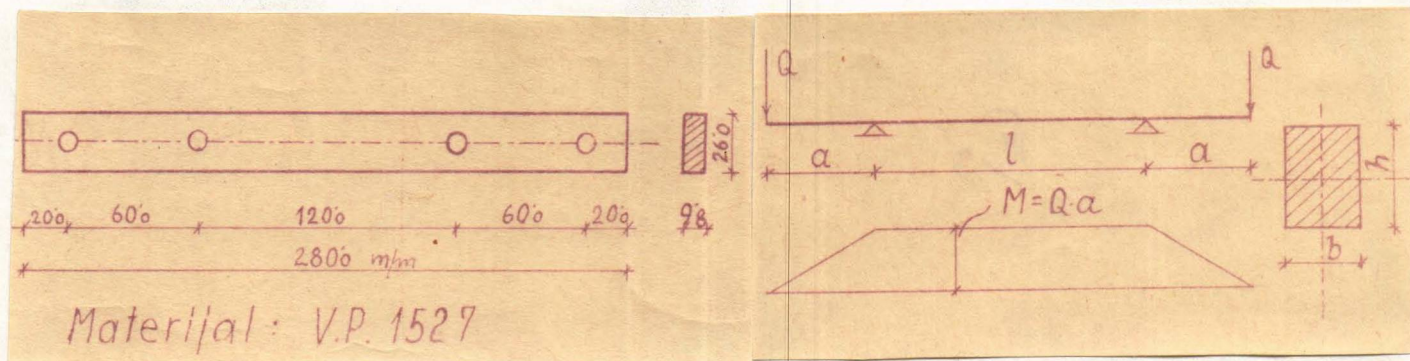
one su sučeljavajućeg, a kod negativnih odbojnog tipa.

III. 3 OPTIČKO BAŽDARENJE MATERIJALA

Da bi se omogućila kvantitativna analiza dobivenih rezultata potrebno je prethodno odrediti optičku konstantu modela i materijala. Optička konstanta modela $F = \frac{\lambda}{2ct}$ određuje se prema obrascu /III.3/. Princip rada je u tome da se pri nekom osnovnom slučaju naprezanja, gde je naponsko stanje potpuno jasno, odredi vrednost γ_{max} a iz eksperimenta u cirkularnom polariskopu veličina n , tj. red izohrome. Na taj način konstanta F je određena.

U ovom radu baždarenje je izvršeno na dva načina: na čisto savijanje i istežanje.

III. 3. 1 Baždarenje na čisto savijanje



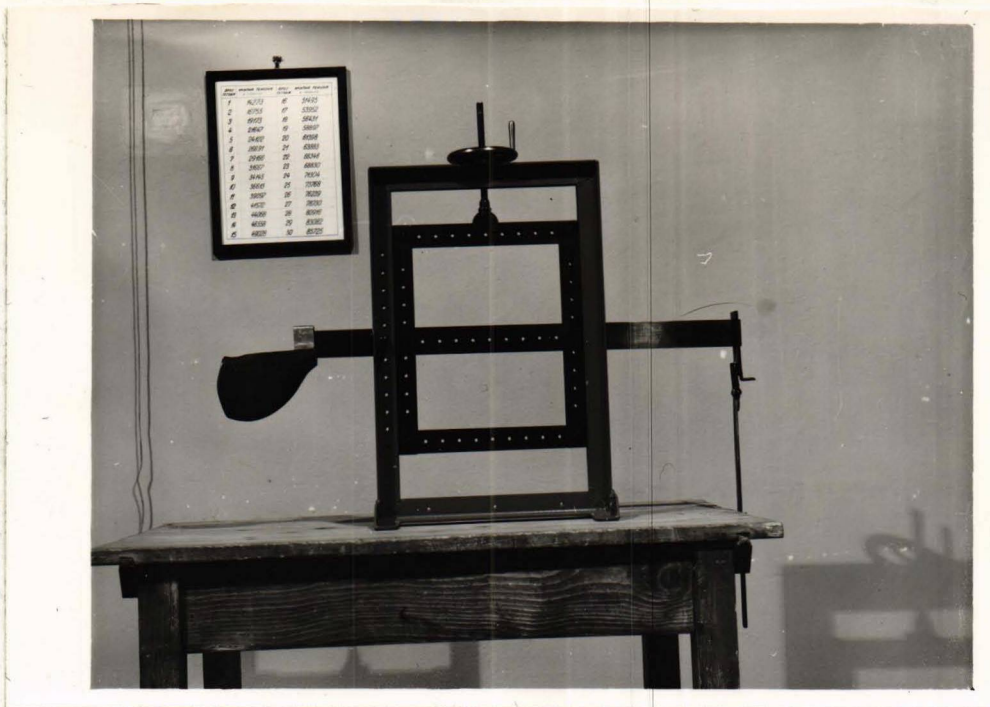
Sl. III.2

Sl. III.3

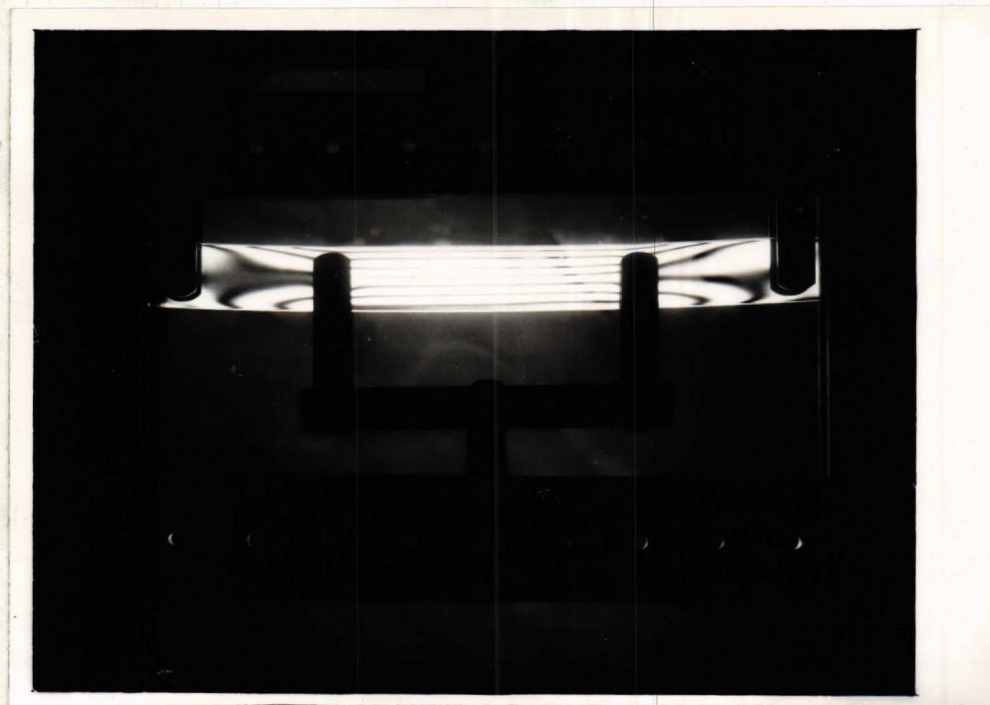
Model /sl. III.2/ ima oblik ravne grede sa dva prepusta, opterećene simetrično na krajevima. Deo između oslonaca je u stanju čistog savijanja.

Podaci za model: $l = 120$ mm, $a = 60$ mm, $b = 9.8$ mm,
 $h = 26$ mm.

Aparatura u kojoj je model bio učvršćen prikazana je na sl. III.4, a model učvršćen na toj aparaturi na sl. III.5.



Sl. III. 4



Sl. III.5

Olovnim tegom izvršeno je balansiranje poluge nakojoj je bio učvršćen model, zatim je na tas na desnoj strani poluge /v. sl. III.4/ postupno stavljeno opterećenje. Ceo uređaj radio je na zglobove, te se na bazi izmerenih dimenzija poluge i modela dobiva momenat savijanja u delu između oslonaca prema obrascu

$$M = 10,1118 \cdot P$$

$$[kqcm]$$

gde je P [kg] teret stavljen posle balansiranja na tas poluge.

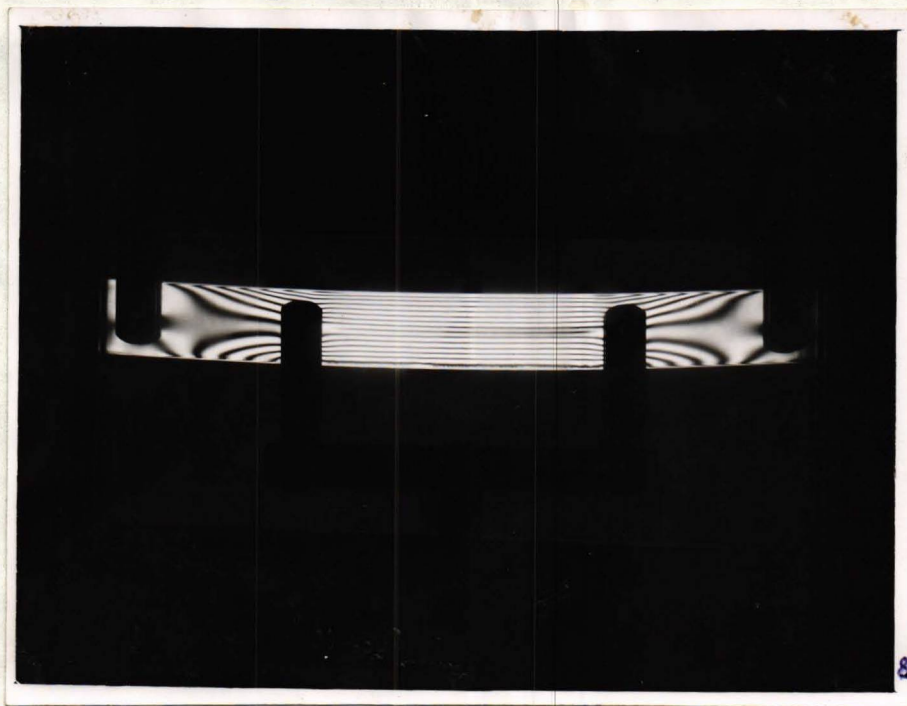
Normalni napon je $\sigma_z = \frac{M}{J_x} \cdot y$. Kako je $\sigma_y = 0$, sledi da je $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \frac{1}{2} \sigma_z$, tj. biće konačno

$$F = \frac{M}{2J_x} \cdot y \cdot \frac{1}{n} \quad /III.6/$$

gde je n red izohrome u posmatranoj tački na otstojanju y od neutralne ose. U našem slučaju izlazi da je

$$F = 3,5223 \cdot P \cdot y \cdot \frac{1}{n}$$

U eksperimentu je posmatrana tačka uz samu gornju ivicu, tj. $y = 130$ mm, a teret P je postepeno povećavan. Kako je greda u stanju čistog savijanja izohrome imaju oblik paralelnih pravih linija /v. sl. III.6/

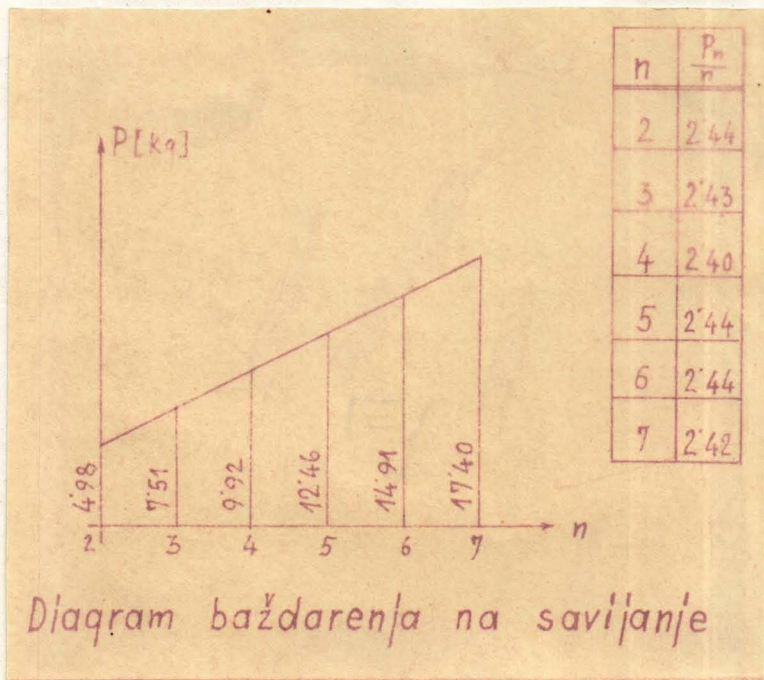


Sl. III.6

Registrovane su one vrednosti tereta P pri kojima je kroz posmatranu tačku prolazila nova izohroma. Prema optičko - naponskom zakonu tu postoji linearna zavisnost. Dobiveni su rezultati prikazani na dijagramu /III.7/, a odatle je prema obrascu /III.6/ sračunata je optička konstanta modela:

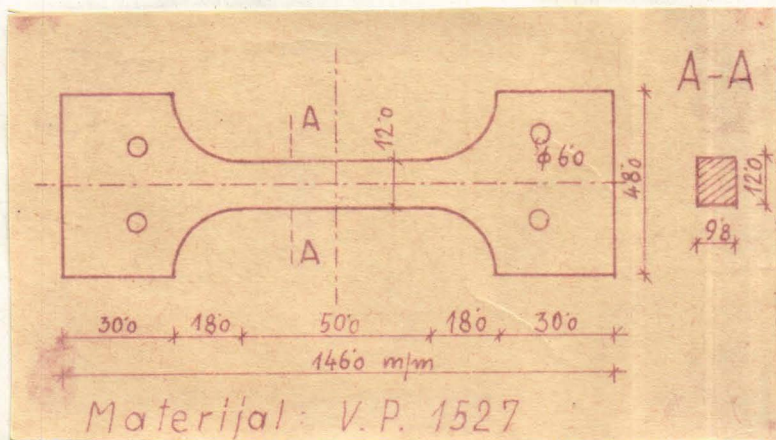
$$F = 11,3820 \text{ kg/cm}^2$$

Optička konstanta materijala: $f = F \cdot t = 11,1544 \text{ kg/cm}^2$



Sl. III.7

III. 3. 2 Baždarenje na istezanje



Sl. III.8

Stanje napona u štapu je homogeno linearno, te je srednji ravni deo modela pri povećavanju opterećenja naizmenično osvetljen ili taman /cela površina je izohroma istog reda/. Opterećenje je polako povećavano i registrovane su one vrednosti za silu P pri kojima je površina bila maksimalno tamna. Jedan ciklus od dva uzastopna tamna polja daje priraštaj 1 za red izohrome. Potrebno je ovde naglasiti da kod ovog načina baždarenja subjektivni momenat igra znatno veću ulogu nego kod baždarenja na čisto savijanje, te se po našem

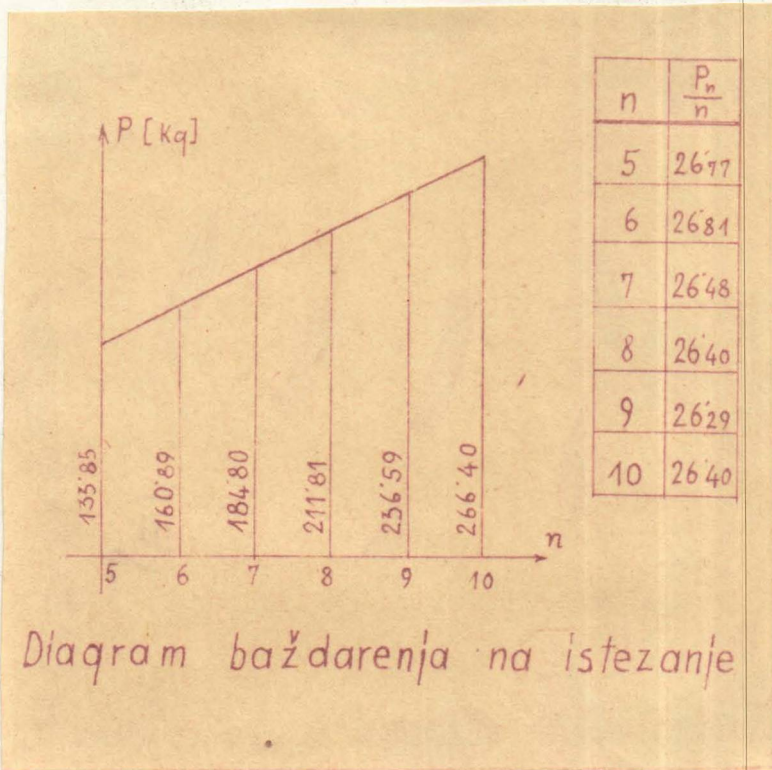
Model je imao oblik štapa pravougaonog poprečnog preseka

/v. sl. III.8/. Ovde vredi

$$F = \frac{1}{n} \cdot \tau_{max} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P}{2A} \quad /III.7/$$

gde je n red izohrome, P trenutno opterećenje, a $A = 1,166 \text{ cm}^2$ površina poprečnog preseka.

mišljenju baždarenje na savijanje može smatrati pouzdanijim.



Rezultati prikazani na sl. III.9 pokazuju naravno opet linearni odnos između n i P , te je odatle prema obrascu /III.7/ sračunato:

$$F = 11,3188 \text{ kg/cm}^2$$

$$f = 11,0924 \text{ kg/cm}'$$

Rezultati dobiveni baždarenjem na savijanje razlikuju se od ovih za 0,56%, tj.

baždarenje se može smatrati

Sl. III.9

kao dovoljno pouzdano. Eksperimentat je izvršen ⁵ na cirkularno polarizovanom žutom monohromatskom svetlošću.

Isti eksperimenti izvršeno su i sa drugim materijalom /dekoritom/, te su dobiveni rezultati:

na istezanje $f = 5,9402 \text{ kg/cm}'$

razlika 1,63%

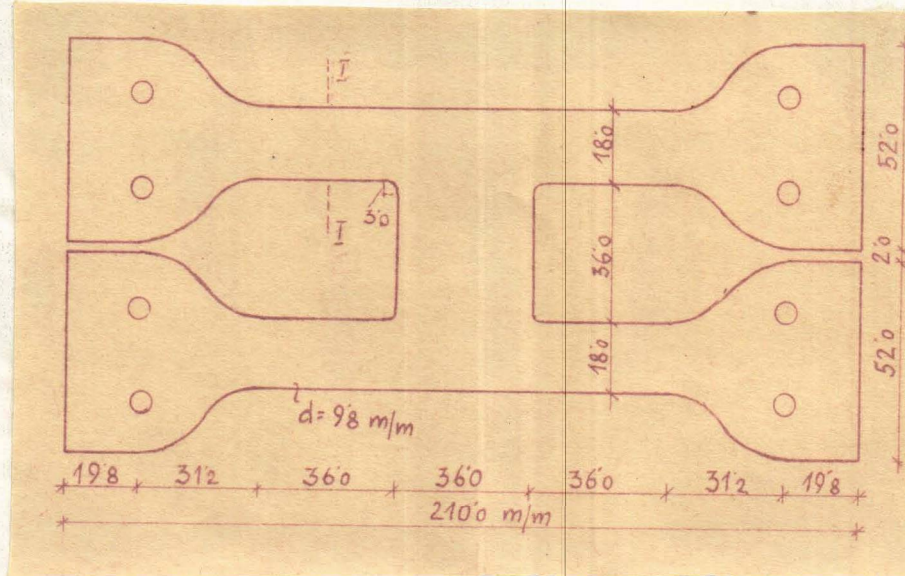
na savijanje $f = 6,0369 \text{ kg/cm}'$

Vidi se odatle da je dekorit daleko osetljiviji od V.P. 1527, te bi se njime mogli dobiti i bolji rezultati. Zbog svoje veće optičke osetljivosti dekorit zahteva i mnogo pažljiviju obradu. Nažalost, postojeće zalihe dekorita pokazivale su već znatne inicijalne napone, a sem toga i čvrstoća na istezanje mu je relativno malena, tako da se nije mogao optički dovoljno iskoristiti. Model je kod manjeg broja izohroma već prskao, te su konačna snimanja izvršena sa materijalom V.P. 1527. Taj materijal je srednje optičke osetljivosti, i upotrebljen je jednovremeno za izokline i za izohrome.

III. 4 EKSPERIMENTISANJE NA ORIGINALNOM MODELU I RAZRADA
OSNOVNIH PODATAKA

III. 4. 1 Snimanje izoklina i izohroma

Upotrebljen je oblik modela prema sl. III.10 debljine 0,98 cm.



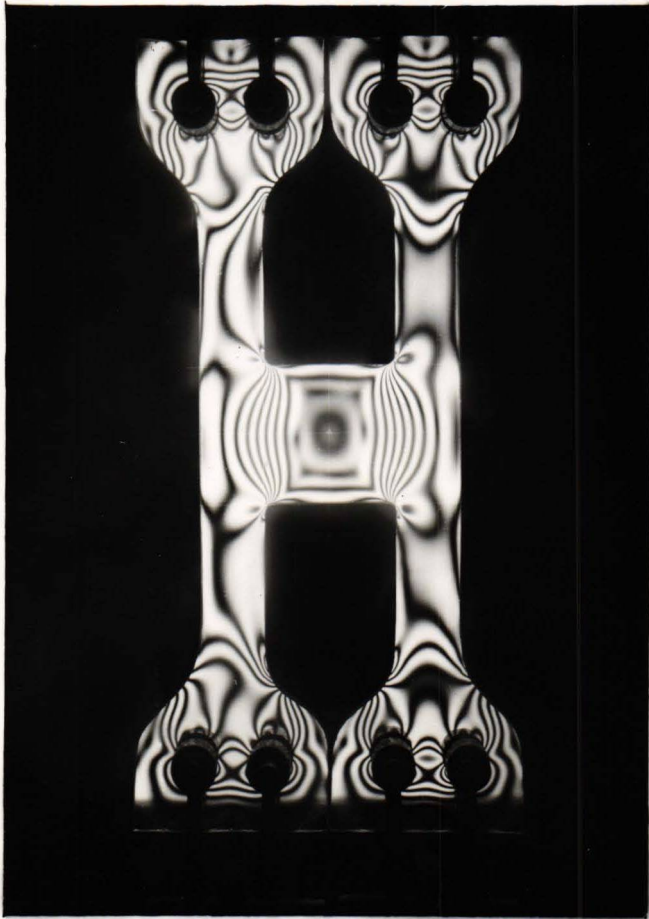
Model materijala V.P. 1527

Sl. III.10

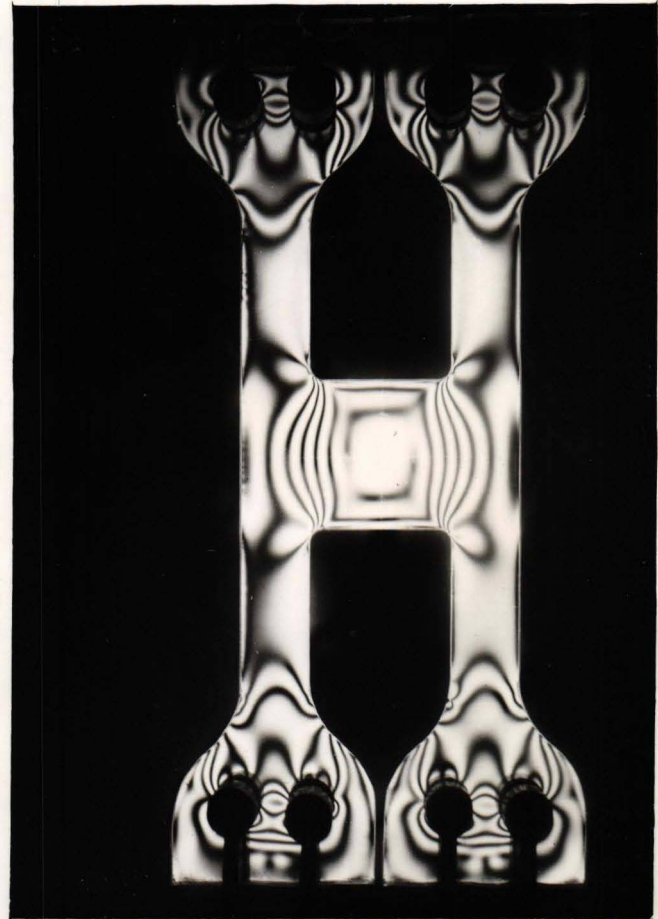
Za snimanje izoklina upotrebljena je bela, linearno polarizovana svetlost. Opterećenje kod snimanja iznosilo je cca 110 kg, a odabrano je tako da jasnoća izoklina bude što bolja. Fotografisanje je izvršeno na pločama, otvor sočiva 12,5, a vreme osvetljavanja 10 sec. Polariskop se ibrtao tako da su snimljene izokline za sledeće uglove: 0° , 5° , 10° , 15° , 25° , 35° , 45° , 55° , 65° , 75° , 80° , 85° i 90° . Zbog kontrole snimljen je ceo ciklus i sa modelom okrenutim za 180° . Izokline su antimetrične u odnosu na položaj 45° .

Za snimanje izohroma upotrebljen je isti model samo je svetlost bila žuta monohromatska, cirkularno polarizovana. Da bi se mogao sa sigurnošću pratiti red izohroma, tj. mesta odakle izvire, teret je povećavan postupno, te su snimljeni trenuci kada je teret iznosio 193 kg, 350 kg i 540 kg. Kod najvećeg tereta dobivena je slika izohroma prikazana na sl. III.11. Napominjemo da je ovaj eks-

perimenat morao biti četiri puta ponavljan sa četiri razna modela, jer su modeli od dekorita prskali već kod srednjeg napona $\sigma = 125 \text{ kg/cm}^2$ mereno na preseku I - I /v. sl. III.10. Na fotografiji stanje nije potpuno simetrično zbog toga što model nije bio savršeno tačno simetričan. Na sl. III.11a prikazana je fotografija izohroma za model istog oblika napravljen od dekorita debljine $d = 0,60 \text{ cm}$, snimljen kod opterećenja $P = 214 \text{ kg}$. Ovaj se model kod tereta od 285 kg slomio, baš u trenutku kada je trebao biti snimljen/.



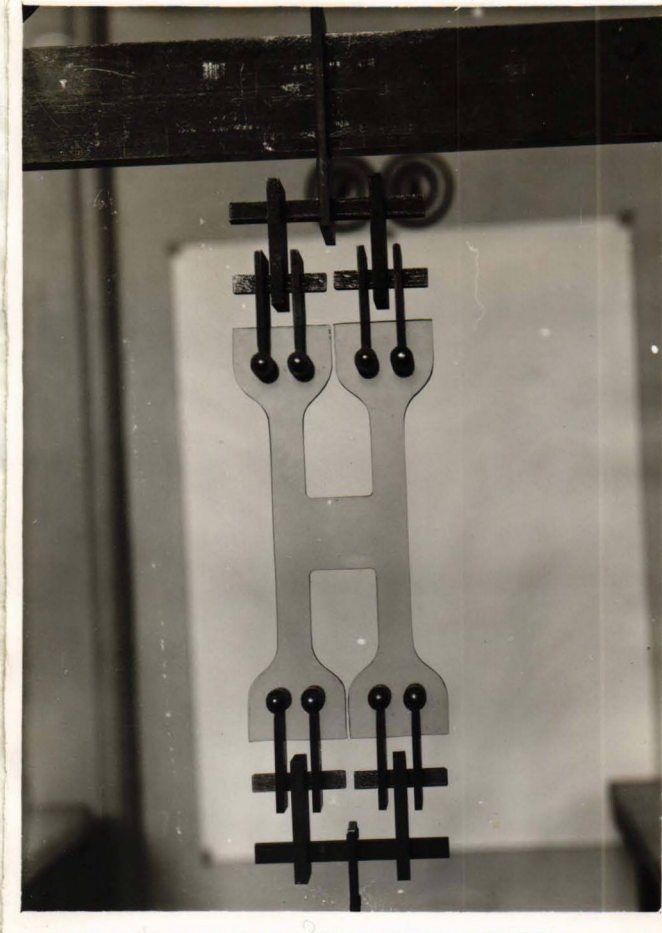
Sl. III. 11



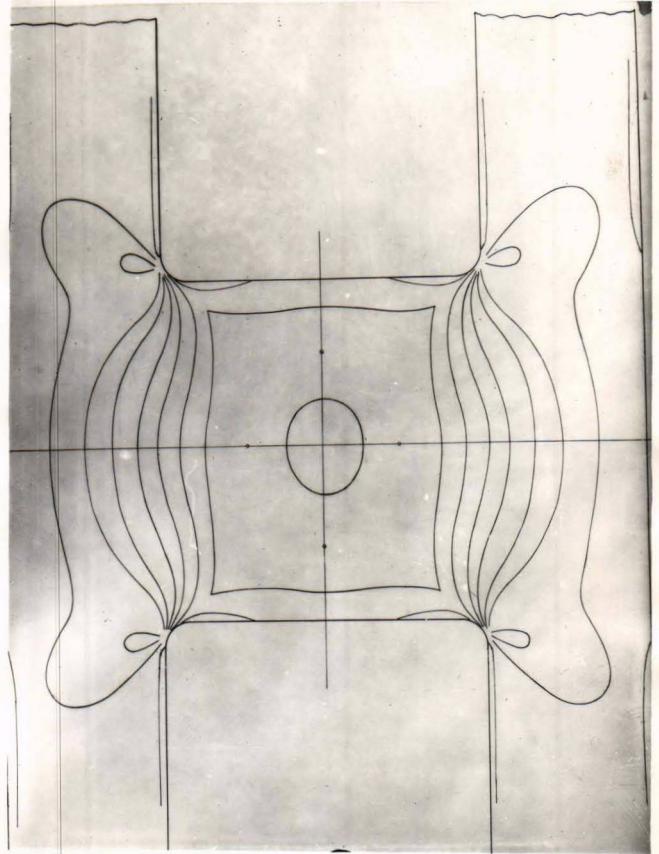
Sl. III.11a

Prskanje modela događalo se obično u unutrašnjem uglu na mestu gde postoji koncentracija napona. Materijal V.P. 1527 dobro je izdržao teret od 540 kg /tu je prosečni normalni napon u preseku I - I prema sl. III.10 iznosio $\sigma = 153 \text{ kg/cm}^2$. Veći teret nije se mogao primeniti, jer su se već kod 540 kg počele znatno kriviti poluge uredjaja na kojem je visio model /v. sl. III.12/.

Na sl. III.13 ucrtane su izohrome korigovane na osnovu triju fotografija snimljenih na tri razna modela istog oblika.



Sl. III.12



Sl. III.13

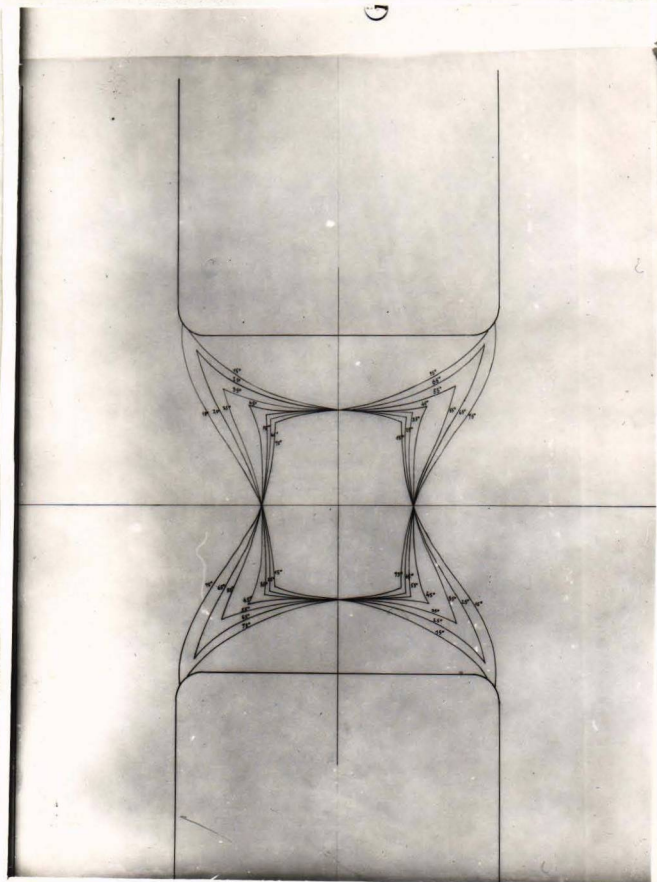
Sl. III.14 prikazuje zbirnu sliku izoklina. Kao regulator za crtanje izoklina služile su izotropne tačke. Na fotografijama su registrovane četiri izotropne tačke na osama simetrije, i četiri singularne tačke na periferiji kod uglova. U slici izohroma izotropne tačke vide se kao tamna mesta koja ostaju tamna i kada se linearna polariskop obrće. Sve izokline moraju prolaziti kroz izotropne tačke.

Model je relativno nepodesan za fotoelastična ispitivanja, jer je veći njegov deo gotovo u homogenom linearnom naponskom stanju. Koncentracija napona javlja se u uglovima u blizini singularnih tačaka. Međutim, ta koncentracija prostire se na vrlo malom području, te je ovde slika izohroma nedovoljno jasna, a izokline se optički i ne registruju, jer glavni naponi σ_x ovde sporo menjaju svoj smer.

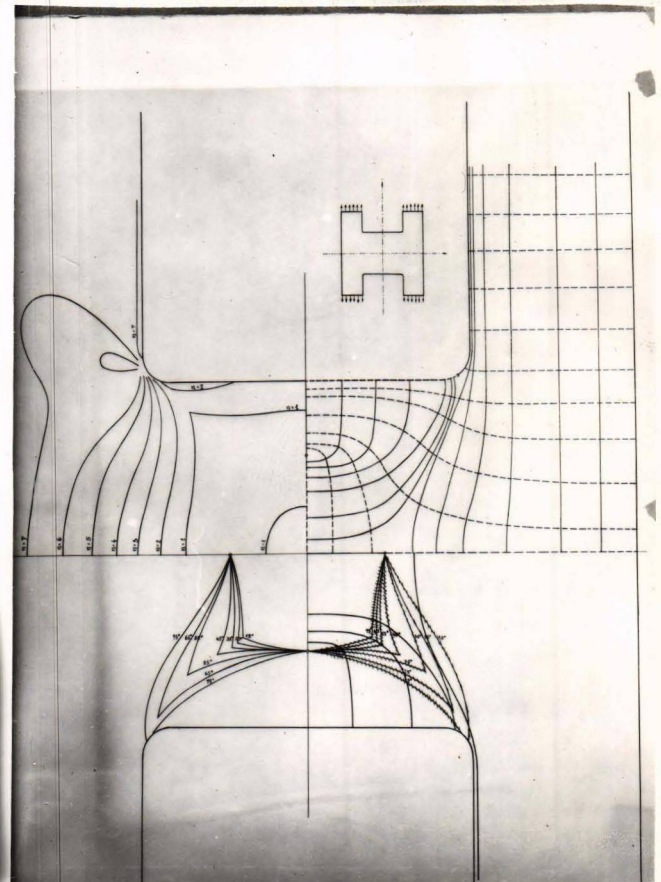
Zbog simetrije modela i opterećenja ose simetrije su ujedno i nulte izokline.

III. 4. 2. Konstrukcija trajektorija glavnih napona

Konstrukcija trajektorija glavnih napona izvršena je prostim geometrijskim postupkom. Na sl. III.15 prikazane su ujedno izohrome, izokline, trajektorije glavnih napona i konstrukcija trajektorija iz izoklina.

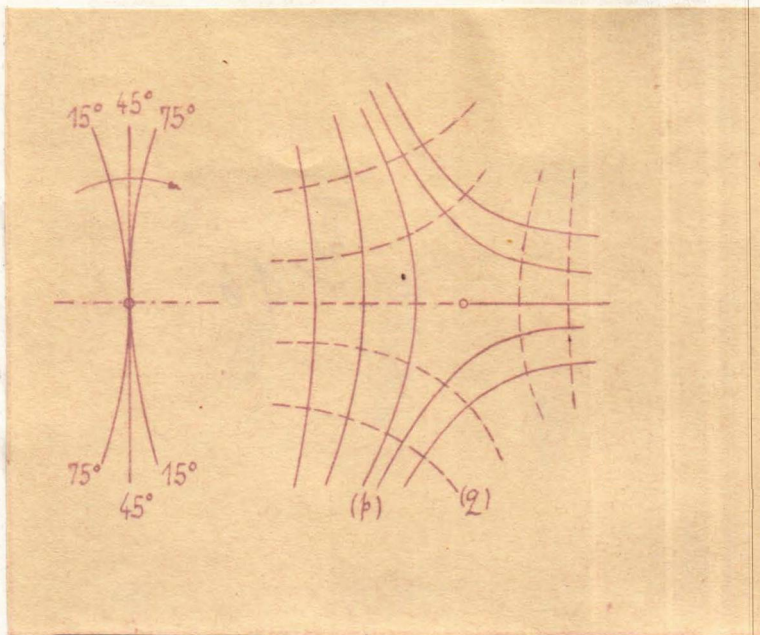


Sl. III.14



Sl. III.15

Pri konstrukciji trajektorija izotropne tačke izdvajale su p i q linije, kako na osama simetrije tako i na periferiji. Detalji kod izotropnih tačaka prikazani su na slikama III.16, III.17 i III.18.



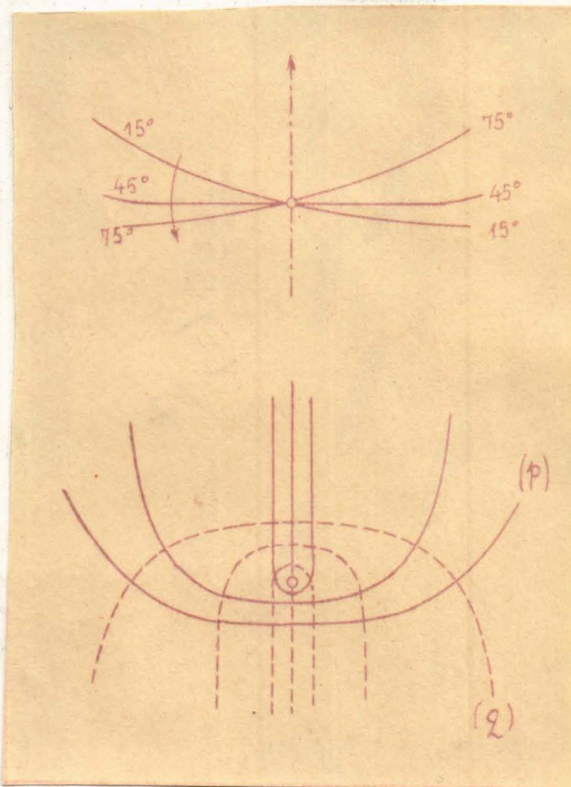
Sl. III.16

Izotropna tačka na vertikalnoj osi simetrije /sl. III.17/ je pozitivna, te su trajektorije ovde sučeljavajućeg tipa.

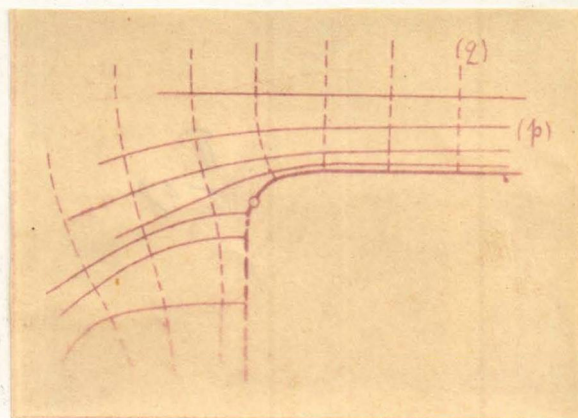
Idući po osi simetrije, do izotropne tačke poklapa se osa simetrije sa p trajektorijom, a od izotropne tačke dalje sa q trajektorijom.

Singularne tačke na periferiji takodje razgraničavaju p i q linije po periferiji. One isto tako kod iste familije trajektorija /bilo to p ili q linije/ razgraničavaju dva skupa krivih linija od kojih jedan ide paralelno sa konturom, a drugi upravno na nju.

Izotropna tačka na horizontalnoj osi simetrije je negativna izotropna tačka, te su trajektorije glavnih napona ovde odbojnog tipa.

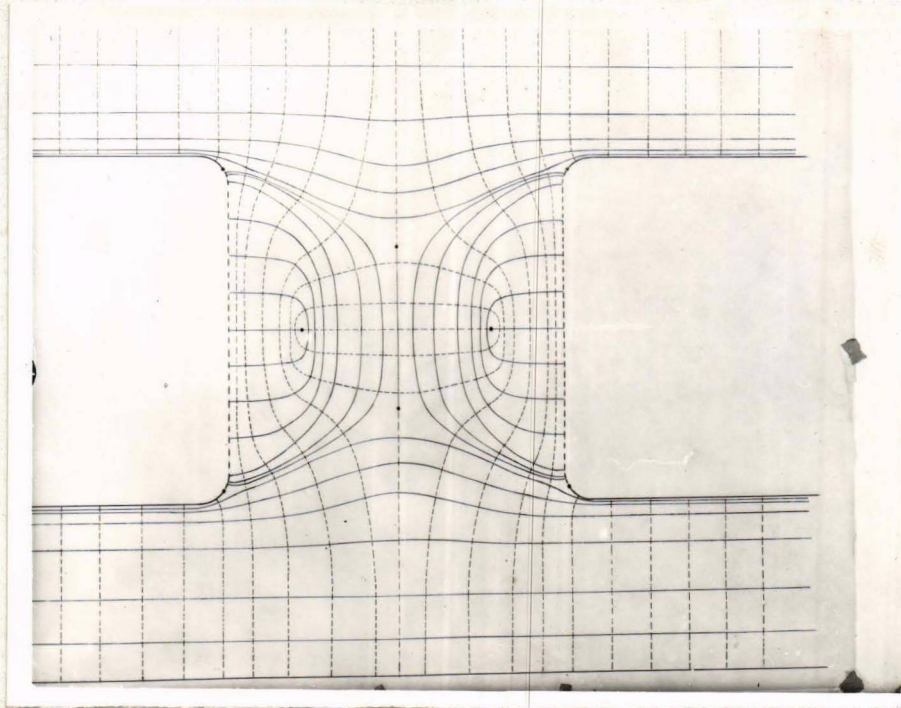


Sl. III.17



Sl. III.18

Na sl. III.19 prikazana je kompletna slika trajektorija glavnih napona. Ovde su p linije izvučene punom, a q linije isprekidanom linijom. Na slikama III.20, 21, 22 i 23 date su fotografije izoklina za 45° , 55° , 65° i 75° .



Sl. III.19

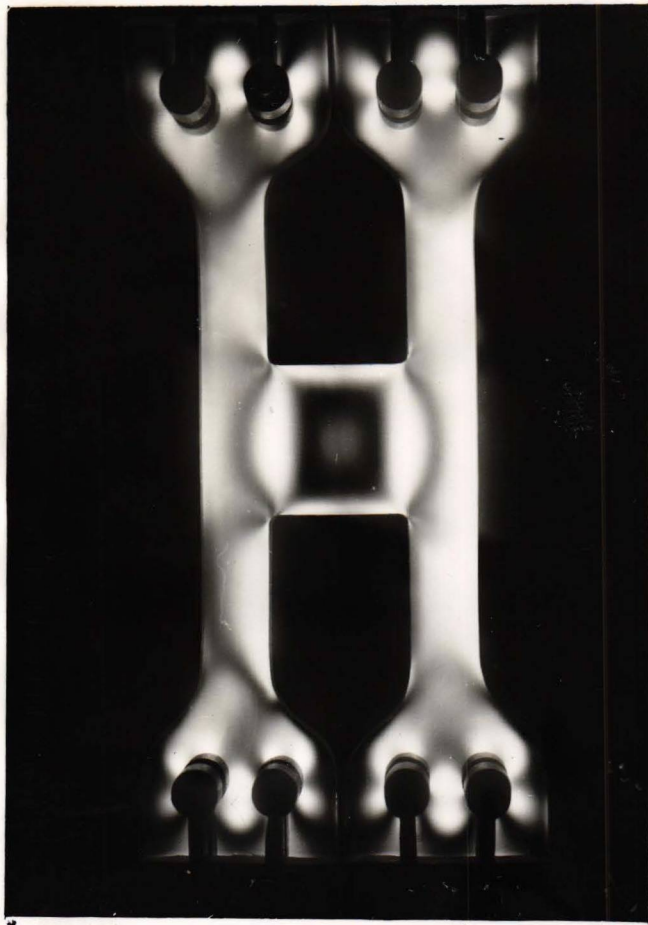
Ti me je uglavnom završena kvalitativna analiza dobivenih rezultata.

III.5. ODREDJIVANJE VREDNOSTI GLAVNIH NAPONA p i q

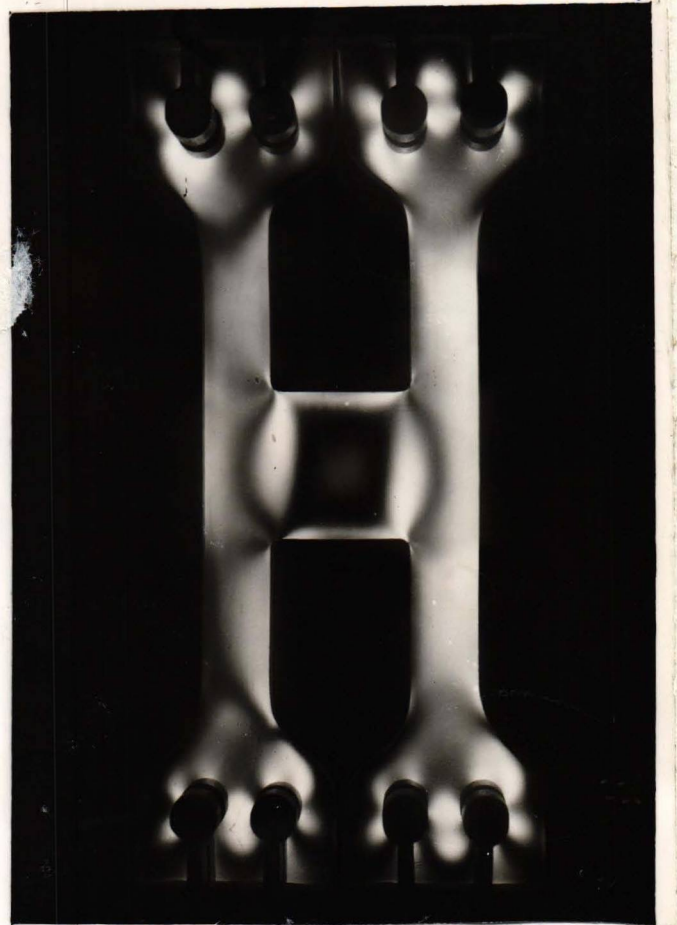
Od oblika modela, graničnih uslova i opterećenja zavisi na koji se način iz ranije navedenih podataka dolazi do vrednosti napona p i q u pojedinim tačkama. Postoji veći broj metoda, svaka ima izvesne prednosti odnosno mane. Dajemo ovde kratki kritički pregled tih metoda.

Metode se mogu podeliti u dve grupe:

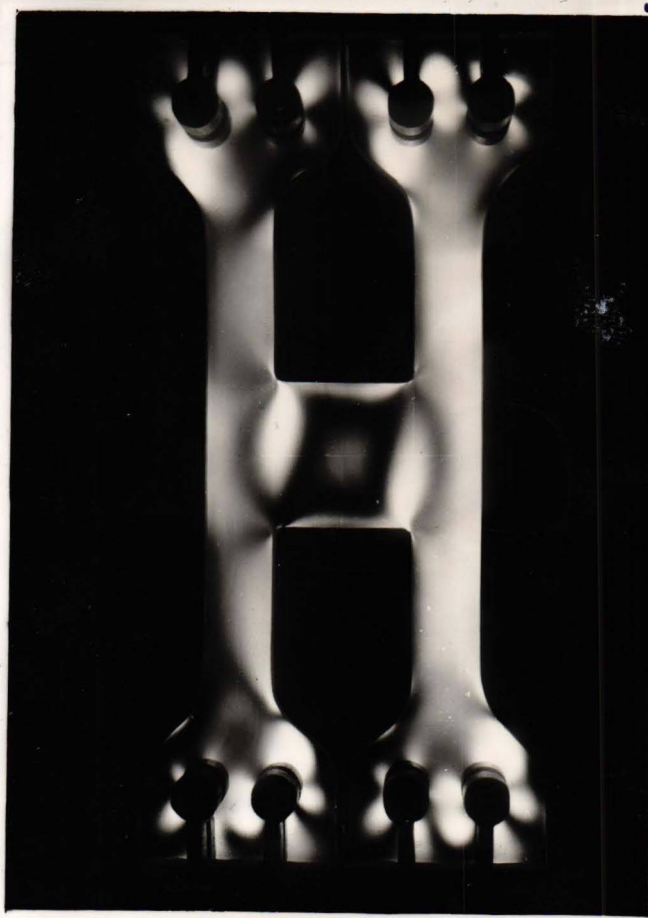
- 1/ One koje rešavaju problem direktno i isključivo s podacima dobivenim fotoelastičnim putem.
- 2/ One koje iz slike izohroma koriste razliku $p-q$, a na neki drugi način dolaze do vrednosti $p+q$ /tj. kombinuju izohrome i izopahe/ -



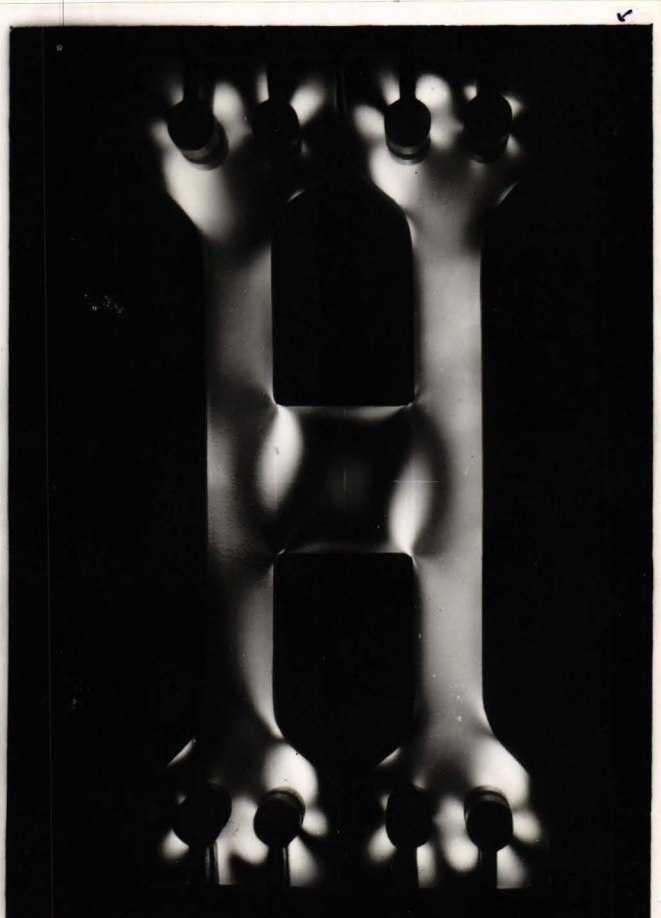
Sl. III.20



Sl. III.21

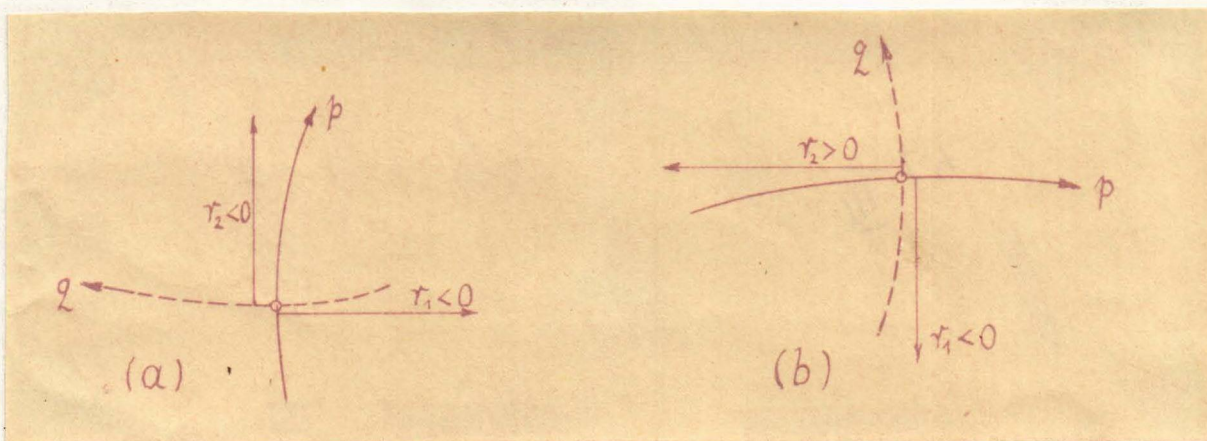


Sl. III.22



Sl. III.23

Pri računanju glavnih napona treba voditi računa o do-
slednoj primeni konvencija o znacima. Trajektorije p i q glavnih
napona orijentišu se po pravilu desnog koordinatnog sistema.

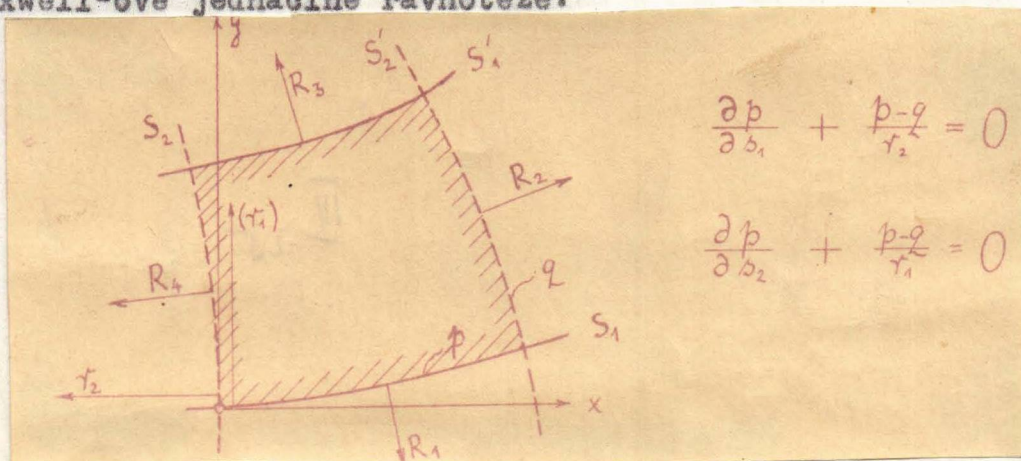


Sl. III.24a

Sl. III.24b

U okolini neke tačke krivina trajektorije glavnog napona
je pozitivna, ako se pri pozitivnom napredovanju po toj trajektoriji
uzastopne tangente obrću suprotno od kazaljke na satu.

Ovde je potrebno spomenuti poznate Lamé-Maxwell-ove dife-
rencijalne jednačine ravnoteže duž trajektorija glavnih napona. U
slučaju ravnog stanja napona uz odsustvo zapreminskih sila za pra-
voliniski elemenat površine u elastičnom napregnutom telu vrede po-
znate Navier-ove jednačine ravnoteže /I.1/. Posmatrajući ravnotežu
na krivoliniskom elementu površine formiranom tako da su konture
elementa kolinearne sa trajektorijama glavnih napona, dobivamo Lamé-
Maxwell-ove jednačine ravnoteže:



$$\frac{\partial p}{\partial s_1} + \frac{p-q}{r_2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_2} + \frac{p-q}{r_1} = 0$$

/III.8/

Sl. III.25

Integracijom duž trajektorija dobiva se odatle

$$p_i = p_0 - \int_0^i \frac{p-q}{r_2} ds_1$$

$$q_i = q_0 - \int_0^i \frac{p-q}{r_1} ds_2$$

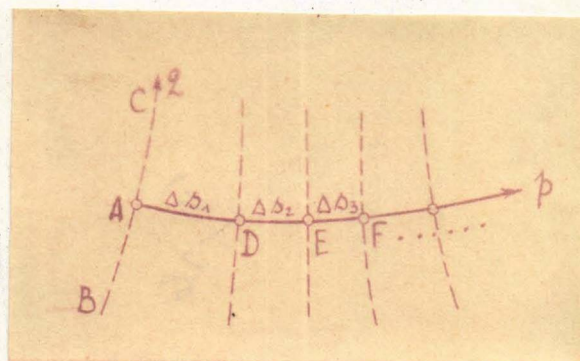
/III.9/

tj. poznavajući vrednosti p_0 , q_0 , oblik trajektorija i veličinu $(p-q)$, možemo integracijom dobiti glavne napona p i q u proizvoljnoj tački područja koje posmatramo. Sve ove podatke dobivamo iz slika na osnovu fotoelastičnih eksperimenata.

III. 5. 1 Metode I grupe

a/ Integracija duž linija glavnih napona

Polazi se od neke tačke na slobodnoj konturi /tj. takvoj gde ^{su} je tangencijalni napon i normalni napon upravan na konturu jednaki nuli/. Uzmimo da polazimo od konture gde je napon p jednak nuli. Tada je u nekoj tački na konturi $q-p=q$



Sl. III.26

a ta razlika može se dobiti iz slike izohroma. Tada možemo pomoću jednačine /III.9/ sračunati vrednosti p i q u bilo kojoj tački modela.

Numerička integracija sprovodi se aproksimativno po liniji u konačnim koracima. Razlika $q-p$ može se odrediti u svakoj od tačaka D, E, F, ..., a tačnost postupka zavisi od tačnosti kojom se u pojedinim tačkama meri poluprečnik r krivine. To je glavna slabost te metode, i rezultati dobiveni na taj način moraju se primati sa većom rezervom.

b/ Integracija po proizvoljnoj pravoj liniji

/Metoda razlike tangencijalnog napona/

Iz poznatog obrasca $\tau_{xy} = \frac{1}{2}(p-q)\sin 2\theta$ sledi da podaci dobiveni fotoelastičnim putem potpuno određuju τ - napon. / $p-q$ dobivamo iz slike izohroma, a smerove glavnih napona, tj. ugao θ iz slike izoklina/. Ravni problem biće rešen ako nadjemo još i komponentalne napone σ_x i σ_y .

Iz Navier-ovih jednačina /I.1/ sledi integracijom

$$(\sigma_x)_i = (\sigma_x)_o - \int_o^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx$$

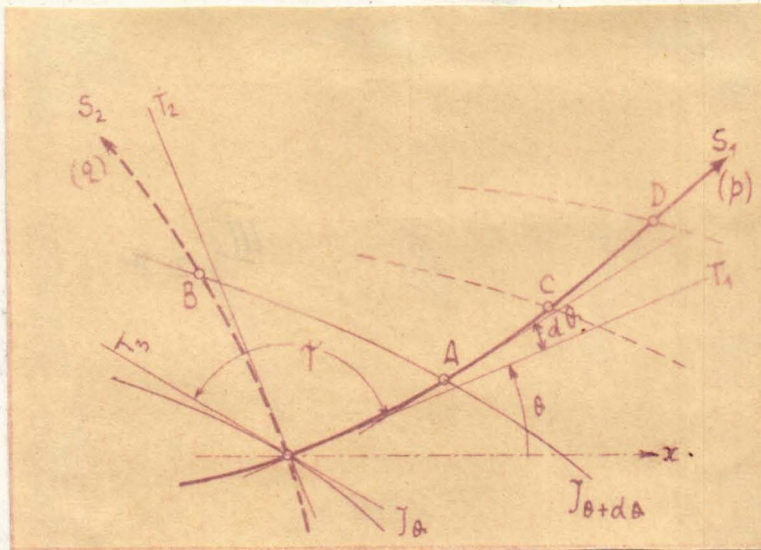
$$(\sigma_y)_i = (\sigma_y)_o - \int_o^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy$$

/III.10/

Ako podjemo od neke tačke na konturi i smer normalan na konturu kroz ploču usvojimo kao osu X , onda nam je početna vrednost poznata, jer je to vrednost glavnog napona na konturi. Tada možemo dobiti vrednost napona σ_x , odnosno σ_y , u proizvoljnoj tački prema /III.10/ sprovodeći integraciju na neki od aproksimativnih načina. Tačnost ove metode zavisna je od tačnosti kojom su crtane izokline, odnosno trajektorije glavnih napona, jer od toga zavisi kojom će tačnošću biti određena razlika $\Delta \tau_{xy}$, koja je potrebna za numeričku integraciju izraza /III.10/.

c/ Odredjivanje glavnih napona grafičkom integracijom

Glavni nedostatak integracije duž trajektorija glavnih napona je u tome što u obrascu /III.9/ dolazi poluprečnik krivine koji se ne može izmeriti sa velikom tačnošću. Filon-ovom transformacijom izbegnuta je ta slabost. Ovde se integracija sprovodi opet polazeći od neke tačke na konturi po trajektoriji glavnog napona, ali se služimo drugim podacima.



Sl. III.27

Ovde su S_1 i S_2 trajektorije, a J_0 i $J_{0+d\theta}$ dve uzastopne izokline.

γ je ugao između trajektorije S_1 i izokline

J_0 . Filon je Lamé-Maxwell-ove jednačine /III.9/ transformisao u sledeći oblik:

$$p_i = p_0 + \int_0^i (p-q) \operatorname{ctg} \gamma \, d\theta$$

$$q_i = q_0 - \int_0^i (p-q) \operatorname{ctg} \gamma' \, d\theta$$

/III.11/

U ove obrasce ulaze podaci koji se opet direktno dobivaju iz fotoelastičnih slika / $p-q$, γ , $\Delta\theta$ /, te integracijom duž trajektorije S_1 na neki od aproksimativnih načina dobivamo vrednosti p_i i q_i u proizvoljnoj tački i . Integraciju sprovodimo u konačnim koracima po tačkama $O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow$, tj. u tačkama gde sledeće izokline seku trajektoriju.

Ova metoda specijalno je još detaljnije razradjena za slučaj da je S_1 linija ujedno i osa simetrije.

Metoda je vrlo pogodna u slučajevima gde su jasno izraženi uglovi što ih trajektorija zaklapa sa izoklinama, i svakako je pouzdanija od integracije sa primenom Lamé-Maxwell-ovih jednačina u originalnom obliku.

- 51 -

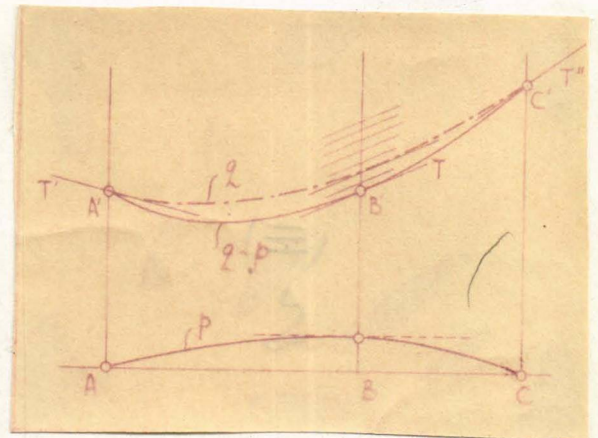
d/ Frocht-ova metoda nagiba

/Slope equilibrium method/

Tom metodom grafičkim putem određuje se dijagram napona σ kroz presek između dve tačke na slobodnoj konturi. Kombinujući taj dijagram sa dijagramom $\sigma-p$ koji dobivamo iz slike izohroma dolazimo i do dijagrama za p napon, te je tome problem potpuno rešen. Taj način određivanja glavnih napona naročito je pogodan za preseke kroz ose simetrije.

Metoda se bazira na Mesnager-ovom teoremu, koji kazuje da jedan glavni napon ima svoj relativni ekstrem u onoj tački trajektorije gde izoklina seče trajektoriju pod pravim uglom. Takva tačka zove se po Frocht-u cupic point.

Posmatramo presek A - C, na kojem postoji takva tačka B. Crtamo dijagram $\sigma-p$. U tačkama A i C je $p=0$, tj. AA' i CC' su ordinate i za dijagram σ . Iz Mesnager-ovog teorema sledi da je u tački B nagib tangente na σ liniju isti kao i za $(\sigma-p)$



Sl. III.28

liniju /jer ovde p linija ima svoj ekstrem/. S druge strane iz Lamé-Maxwell-ovih jednačina može se dobiti nagib tangenata T i T' linije σ u tačkama A i C. Ta tri nagiba služe nam sada kao pomoćno sredstvo za približno crtanje grafikona linije σ /v. sl. III.28/. Metoda je veoma praktična i brza, a i dovoljno tačna. Pogodna je za višestruko vezana područja /prstene/, naročito ona koja imaju osovine simetrije.

III.5. 2 Metode II grupe

a/ Metoda pomoću lateralnog ekstenzometra

Metoda potiče od Coker-a . Ovde se određuje suma glavnih napona merenjem poprečne deformacije δ ploče. Postoji jednačina

$$\delta = -\frac{\sigma \cdot t}{E} (\rho + \rho) = -K (\rho + \rho) \quad /III.12/$$

- gde je σ - Poisson-ov odnos,
- E - modul elastičnosti,
- t - debljina ploče.

Znači da je za sve tačke homogenog izotropnog modela jednake debljine veličina K konstantna. T_a konstanta može se odrediti optom na istezanje štapa napravljenog od istog materijala kao što je i model. Kada je konstanta K poznata, dovoljno je meriti δ u pojedinim tačkama, pa da možemo izračunati sumu $\rho + \rho$. Iz slike izohroma dobivamo razliku $\rho - \rho$, iz slike izoklina smerove glavnih napona, a sve to zajedno potpuno rešava ravni problem.

Ekstenzometri kojima se meri δ mogu biti optički, mehanički ili električni. Valja naglasiti da se razlika $\rho - \rho$ mnogo tačnije određuje nego suma $\rho + \rho$, i to je slaba strana te metode. Ipak, ona je gotovo nenadoknadiiva u slučajevima kada konturni uslovi nisu dovoljno poznati / na pr., kod elastično uklještenih ploča/.

Postoji mogućnost da se dobije sasvim gruba aproksimacija za veličinu $\rho + \rho$, ako se model zagreva do temperature od cca 250° F, jer su onda deformacije tako velike da se mogu meriti običnim mikrometrom. To je naročito efikasno kod određivanja koncentracije napona, kao prva aproksimacija stvarnog stanja koja onda dobro upućuje na tačniji račun.

b/ Metoda pomoću slike izopaha

Izopahe su, analogno izohromama, geometriška mesta tačaka u kojima je zbir glavnih napona konstantan. Izopahe kombinovane sa izohromama omogućuju, dakle, računanje odvojenih vrednosti za p i q . Slika izopaha dobiva se eksperimentalno pomoću refleksije na poliranoj površini napregnutog modela uz koju je priljubljena glatka, savršeno ravna staklena pločica, koja stoji paralelno sa srednjom ravni ploče. Debljina vazdušnog sloja između površina modela i pločice mera je za poprečnu deformaciju δ , koja je proporcionalna zbiru glavnih napona. Na taj način interferencijom se registruje zbir $p+q$.

Pored toga postoji i Neuber-ova grafička metoda za određivanje izopaha, kojom dobivamo kompletnu sliku zbira $p+q$ po celom posmatranom području. Detalje ovde nećemo iznositi.

Vrlo je interesantno određivanje sume glavnih napona pomoću membranske analogije /den Hartog, Biot, Biezeno/. Bazira se na činjenici da za zbir glavnih napona $\Sigma = p+q$ vredi Laplace-ova jednačina

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} = 0$$

/III.13/

To je međjutim i jednačina za površinu membrane koja je napadnuta silama samo po svojoj periferiji. Ako se uzme membrana protegnuta preko konture istog oblika kao i model, a visine u svakoj tački konture proporcionalne zbiru $\Sigma = p+q$ u odgovarajućim tačkama konture na originalnom modelu, onda ordinate ovako nastale površine membrane direktno daju vrednosti $p+q$ u pojedinim tačkama. Ovde se upotrebljava film od sapunice slično kao i kod problema torzije.

c/ Numeričko rešavanje Laplace-ove jednačine

U II grupu ulaze još i metode kojima se numerički rešava Laplace-ova jednačina /III.9/. Tim načinom rešen je i problem razmatran u ovom radu, pa ćemo ga detaljno objasniti na tom primeru.

III. 6. ODREDJIVANJE ZBIRA GLAVNIH NAPONA U POSMATRANOM MODELU

Sve metode grupe II pretpostavljaju povoljan raspored izohroma i izoklina po celom području ploče. Tada je moguće efikasno sprovesti integraciju na bilo koji od ranije spomenutih načina. Međutim, slika izoklina na posmatranoj ploči lokalizovana je uglavnom u srednjem delu ploče, dok se izohrome prostiru uglavnom van toga dela. Na taj način primena metode numeričke integracije veoma bi ne tačno obuhvatila naponsko stanje u celini. Iz tih razloga primenjena je metoda numeričkog rešavanja Laplace-ove jednačine za diskretni sistem tačaka unutar ploče. Sam oblik ploče, koja je sastavljena kao kombinacija samih kvadrata, upućuje odmah na primenu kvadratne mreže slično kao i kod diferencnog računa.

Osnova za rešenje je činjenica da u slučaju generalisanog ravnog naponskog stanja vredi za zbir srednjih glavnih napona $\Sigma = p+q$ Laplace-ova jednačina:

$$\Delta(\Sigma) \equiv \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} = 0 \quad /III.14/$$

Na osnovu poznatog Dirichlet-ovog teorema za harmoniske funkcije sledi da je uz date konturne uslove suma $\Sigma = p+q$ u svim tačkama unutar ploče jednoznačno odredjena. Time je biharmoniski problem sveden na harmoniski, dakle, na mnogo lakši.

Zbog dvostruke simetrije modela uzet je u razmatranje samo jedan kvadrant, v. sl. III.29.

Iz slike izohroma odredjujemo vrednost $p-q$ na linijama AB i CDE. To su ujedno i vrednosti $p+q$, jer je na tim sektorima jedan glavni napon svuda jednak nuli. Zbog nedovoljno jasnog stanja

na slici izohroma u okolini tačke gde je koncentracija napora, uzeti su za tu okolinu podaci dobiveni primenom Teorije kompleksnih funkcija na isti problem. Na delu BC pretpostavljamo homogeno linearno naponsko stanje, tj. $p = 1,00$ $q = 0$ $p+q = 1,00$.

Na osovinama simetrije AO i OE odredjujemo iz poznatih konturnih vrednosti grubim rezonovanjem dijagrame za funkcije p i q a odatle i približni dijagram za $p+q$ po osovinama simetrije /v. sl. III.30 i III.31/. Time su konturne vrednosti određene i može da se započne iterativni postupak za dobivanje tačnijih vrednosti $p+q$ u diskretnom skupu tačaka.

Orijentacija za grubo određivanje funkcija p i q po osovinama simetrije su jednačine /III.8/ iz kojih se dobiva

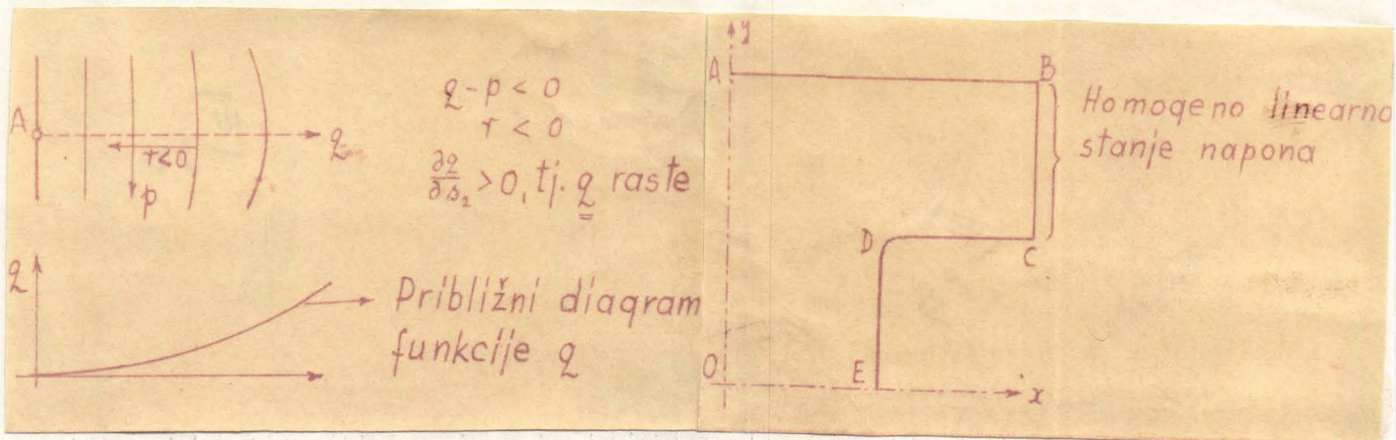
$$\frac{\partial q}{\partial s_2} \text{ (ili } \frac{\partial q}{\partial s_1}) = \frac{q-p}{r_1} ; \quad \frac{\partial p}{\partial s_1} \text{ (ili } \frac{\partial p}{\partial s_2}) = \frac{q-p}{r_2} \quad \text{/III.15/}$$

Kako je uvek $q-p$ manje od nule, a predznak poluprečnika krivine r vidimo iz slike trajektorija, dolazimo i do predznaka za količnike

$$\frac{\partial q}{\partial s_2} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial p}{\partial s_1} .$$

$$\text{sgn } \frac{\partial q}{\partial s_2} \neq \text{sgn } r_1 ; \quad \text{sgn } \frac{\partial p}{\partial s_1} \neq \text{sgn } r_2 \quad \text{/III.16/}$$

Na taj način možemo odmah oceniti da li pri napredovanju po trajektoriji vrednost glavnog napona raste ili opada, a prema poluprečniku krivine trajektorija koje pri tom napredovanju sečemo, cení se i brzina toga porasta ili opadanja. Važno je pri tome voditi pažljivo računa o konvenciji znakova za veličine p , q i r .



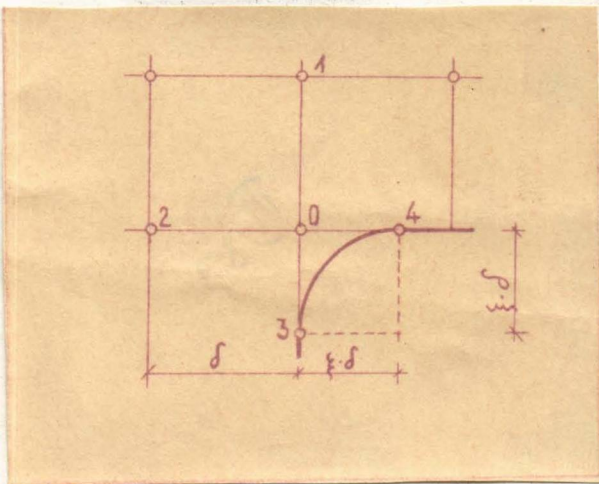
Sl. III.32

Sl. III.29

Posmatrani kvadrant ploče podelimo u kvadratnu mrežu, najpre u grubu, a kasnije u finiju. U tačkama na konturi kao i u unutrašnjim čvorovima pišu se vrednosti za funkciju Σ i onda započinje proces određivanja tačnijih vrednosti za harmonisku funkciju Σ putem relaksacije. Rukovodimo se poznatom Liebmann-ovom formulom koja daje diferencni oblik za Laplace-ovu jednačinu:

$$4\Sigma_0 - (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4) = 0 \quad /III.17/$$

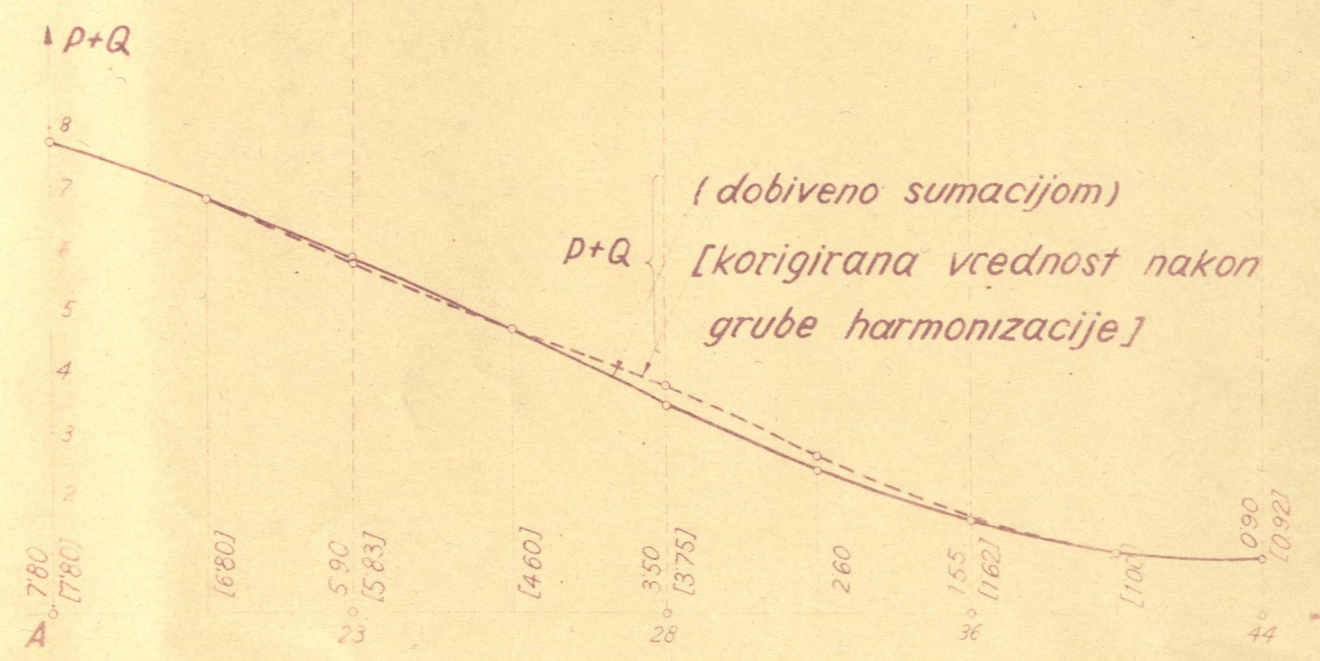
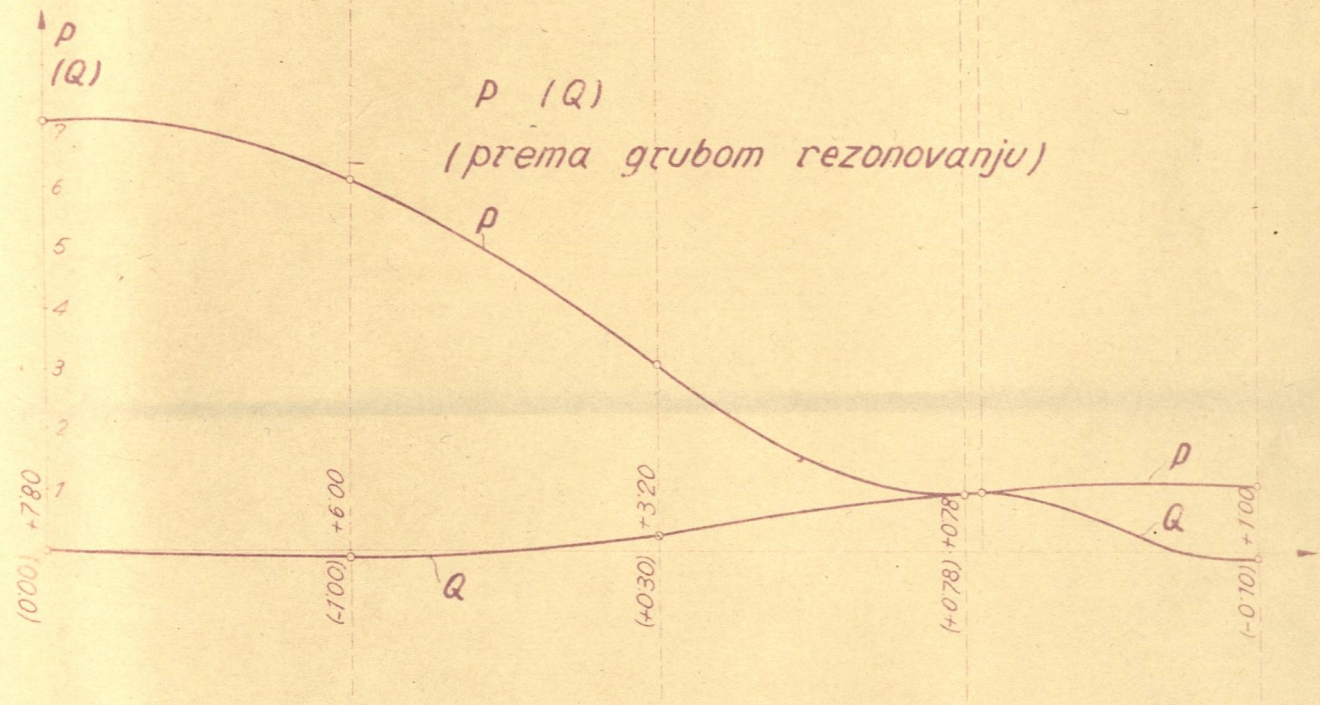
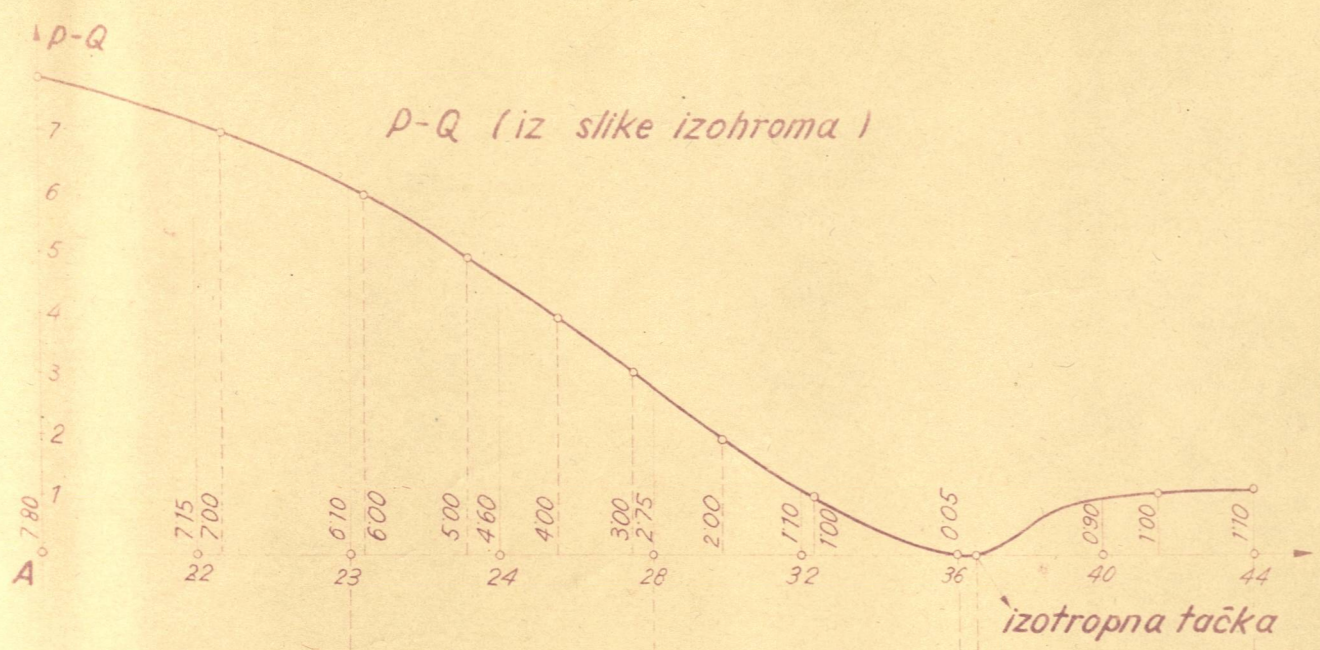
Za iregularnu tačku u uglu vrede specijalna jednačina



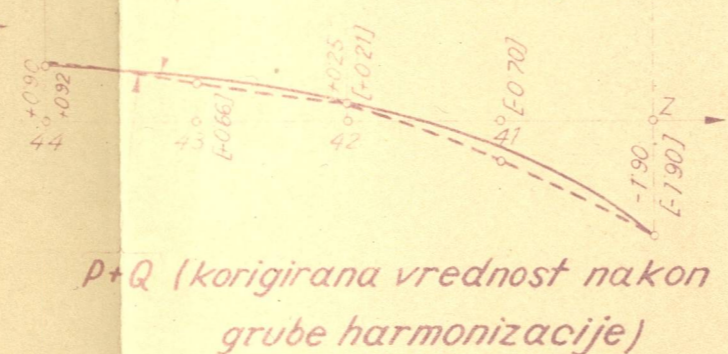
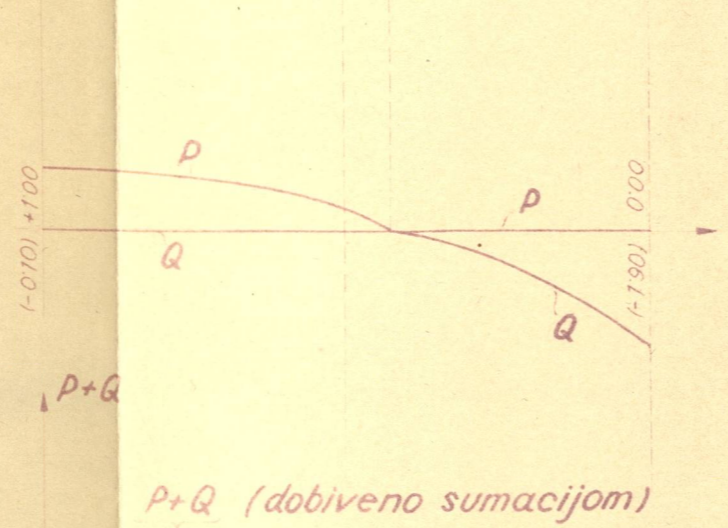
$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \frac{1}{5}\Sigma_3 + \frac{1}{5}\Sigma_4 - (2 + \frac{2}{5})\Sigma_0 = 0 \quad /III.18/$$

Sl. III.33

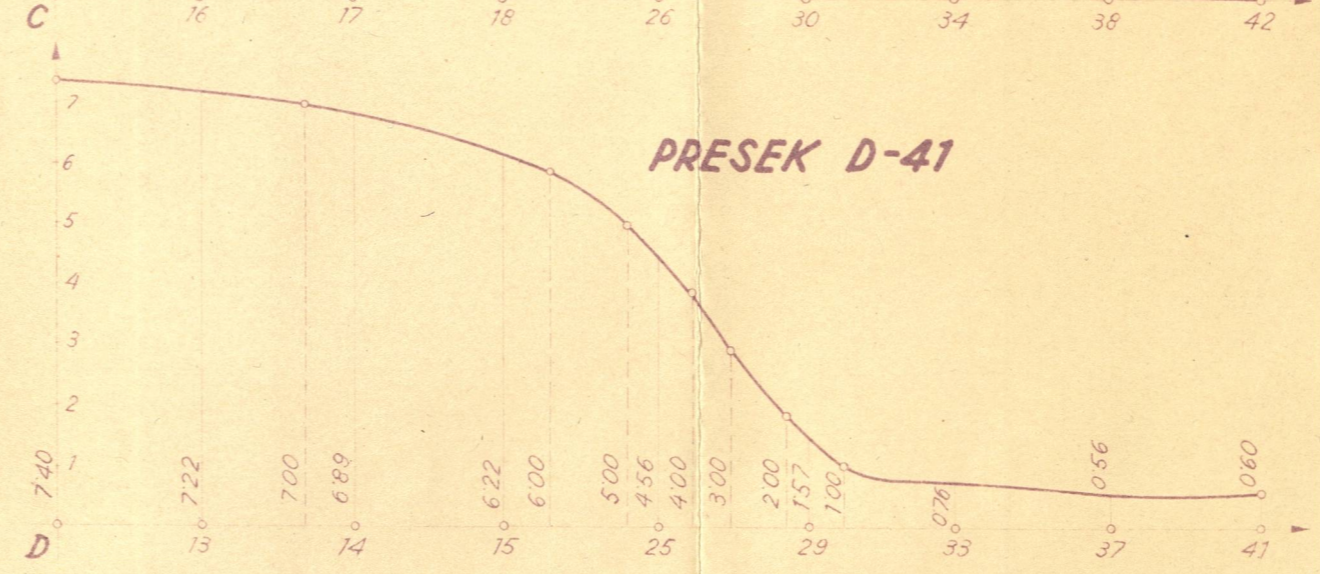
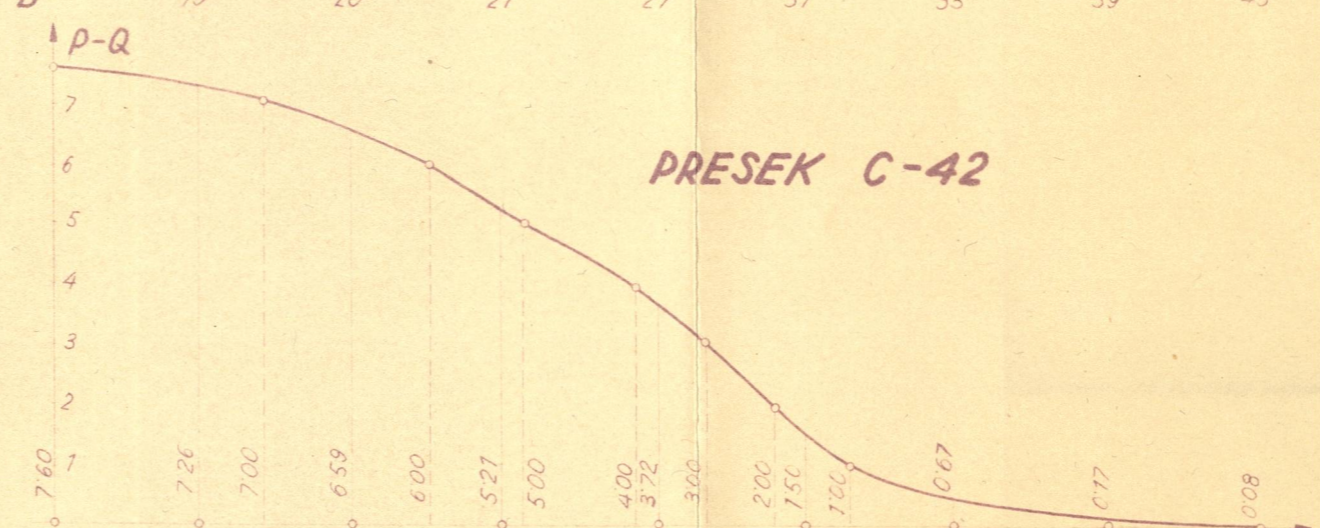
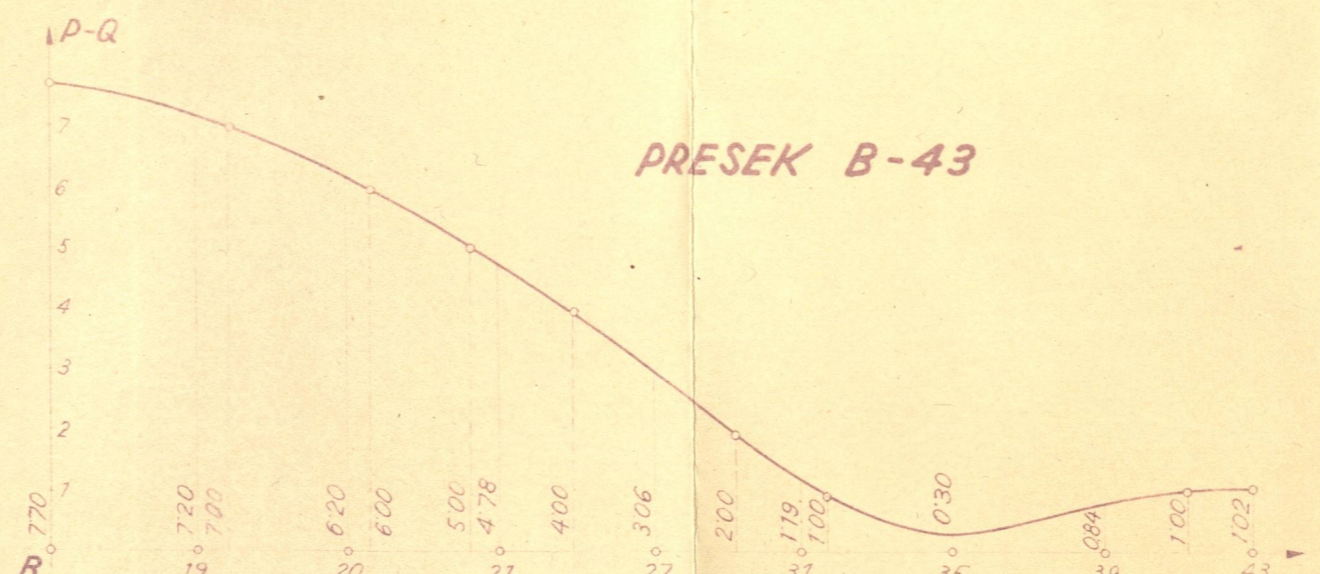
Pri računu sa grubom mrežom ocenjujemo u tačkama 11 i 34 sasvim grubo /interpolacijom/ vrednost funkcije Σ , a zatim na osnovu Liebmann-ove formule i jednačine /III.18/ sračunamo vrednosti Σ u svim ostalim čvorovima. Vrednosti za funkciju Σ na gruboj mreži pre i posle ove grube iteracije, kao i odgovarajući residuali,



SL. III.30 PRESEK A-44

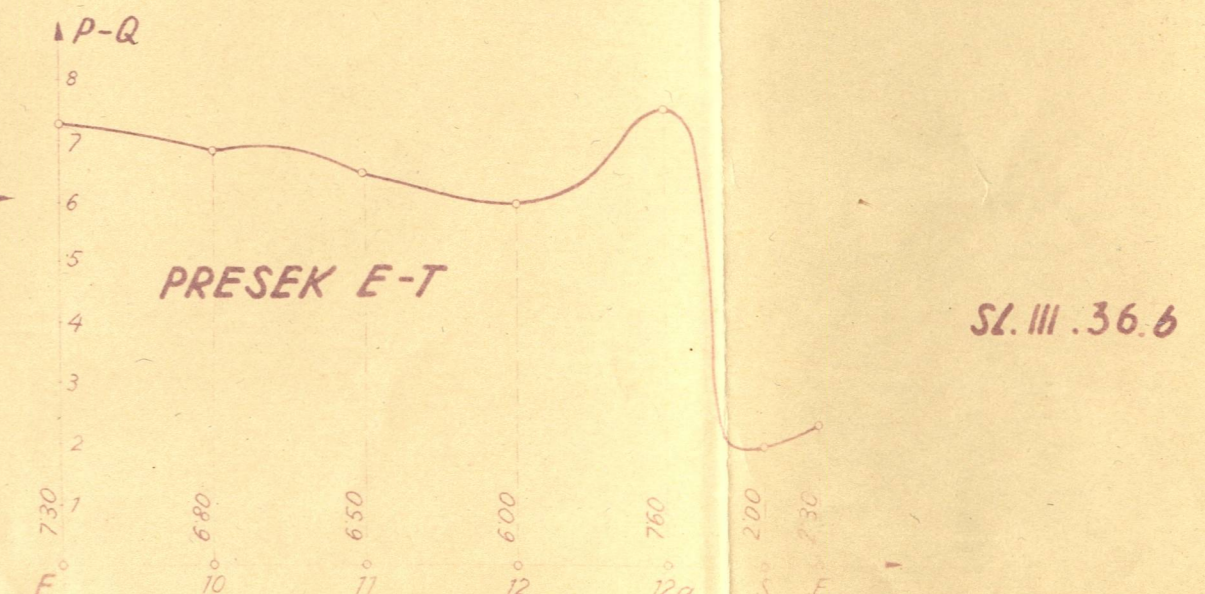
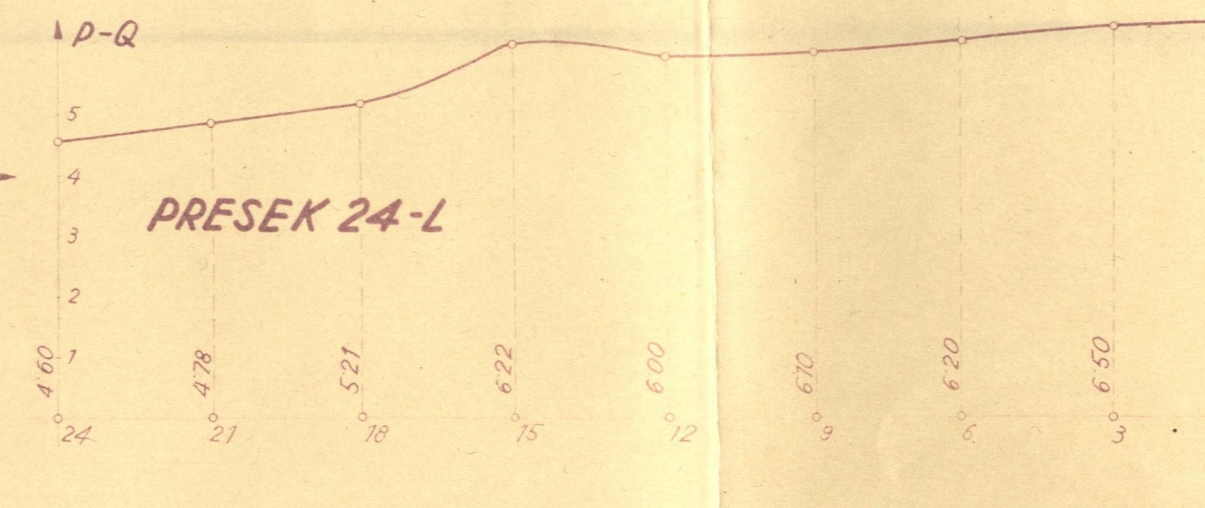
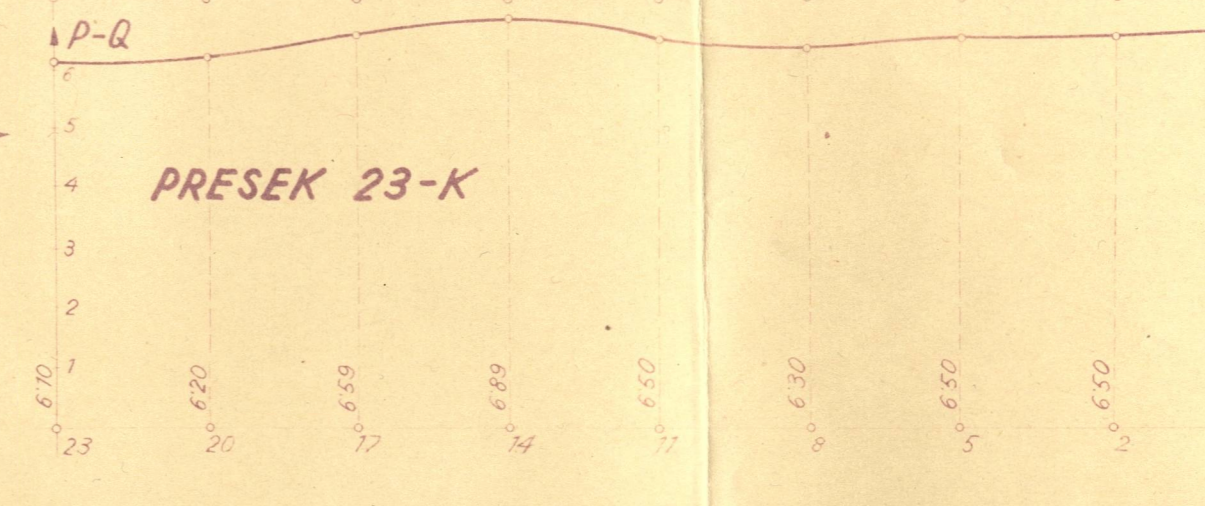
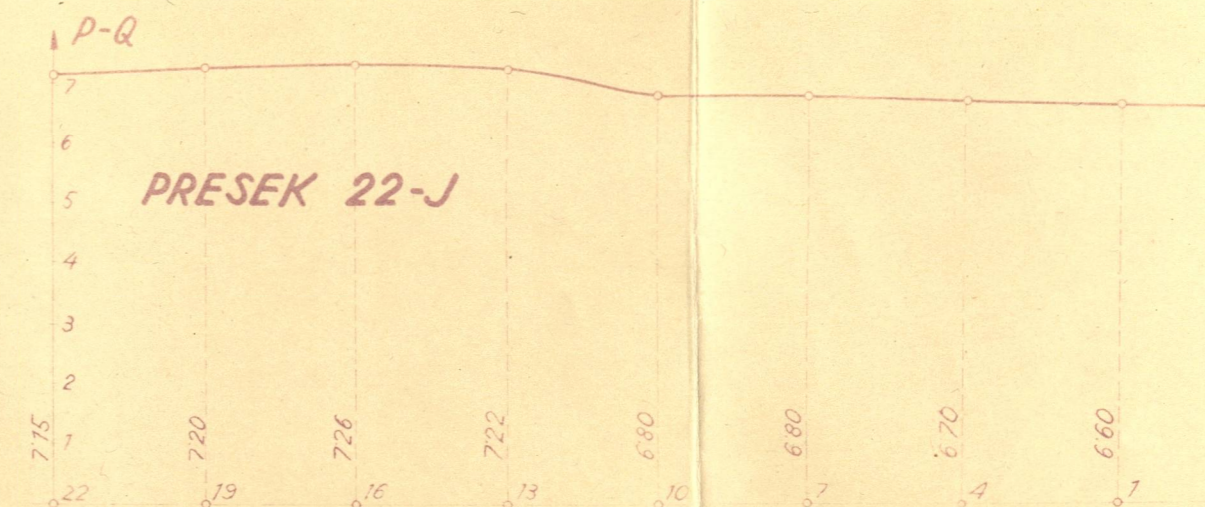


SL. III.31 PRESEK 44-Z

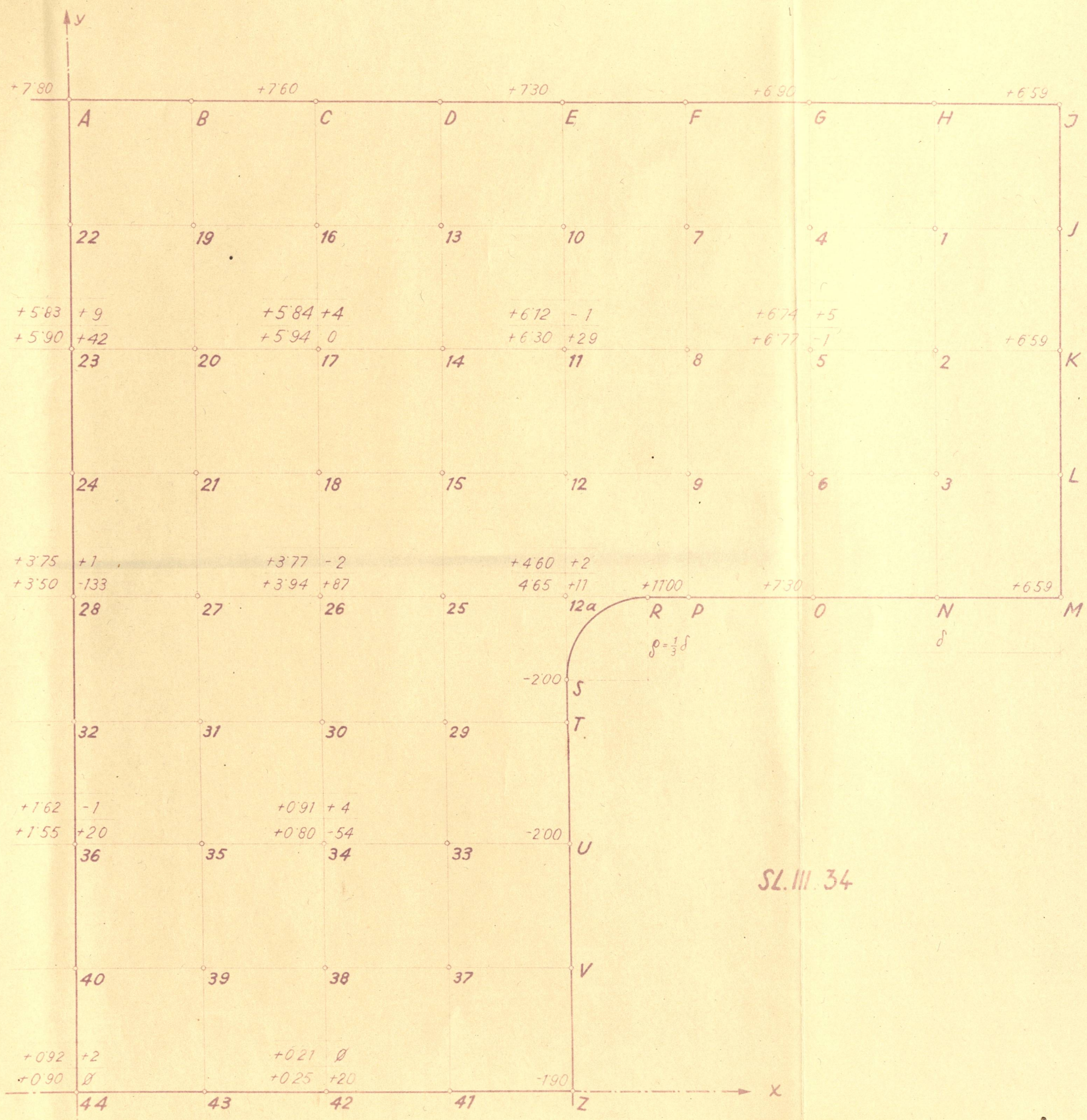


SL. III.36.a

DIAGRAMI (P-Q) DOBIVENI IZ SLIKE IZOHROMA



SL. III.36.b



prikazani su na sl. III.34. Ove vrednosti služile su kao početne za relaksacioni proces na finijoj mreži. Medjuvrednosti za finiju mrežu sračunate su po Liebmann-ovoj formuli. Relaksacioni proces na finijoj mreži završen je relativno brzo, približno za 4 radna sata.

Na sl. III.35 prikazan je završni deo tog postupka na finijoj mreži, kao i konačni rezultati za funkciju \sum u svim tačkama mreže. U prikazanom delu relaksacije primenjen je opet specijalni način grupne relaksacije po vertikali sa svrhom da se residuali istog znaka brzo likvidiraju pomeranjem njihovim prema periferiji. Srednji residual pre te grupne relaksacije na celoj mreži iznosio je $+1,61 \times 10^{-2}$, dok je na kraju srednji residual spao na $+0,44 \times 10^{-2}$. Iz sl. III.35 vidi se koliko su bile potrebne velike promene funkcije \sum da bi se likvidirali residuali maleni po veličini ali u grupi istog predznaka.

Sve veličine na sl. III.34 i III.35 za $\sum = p+q$ pisane su u jedinici "reda izohrome", jer su se te vrednosti direktno čitale iz slike izohroma. Tu vrednost treba proračunati na kg/cm^2 .

Specifično opterećenje na periferiji: $p_0 = \frac{540}{3,60} = 150 \text{ kg/cm}^2$
Iz jednačine $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(p-q) = n \cdot F$ sledi za $q=0$

$$n = \frac{p_0}{2F} = \frac{150}{2 \cdot 11,38} = 6,59$$

Znači da naponu od $1,00 \text{ kg/cm}^2$ odgovara red izohrome $n = 6,59$
/ova vrednost usvojena je na delu konture BC/.

Obratno, redu izohrome $n=1$ odgovara napon od $0,1517 \text{ kg/cm}^2$.

Na sl. III.36 a i III.36b prikazani su dijagrami za razliku $p-q$ dobiveni iz slike izohroma. Ove vrednosti, kao i vrednosti za $p+q$ prikazane su u završnoj tabeli, gde je izvršen i konačni račun za p i q , sve preračunate na jedinicu kg/cm^2 . Time je problem numerički potpuno rešen.

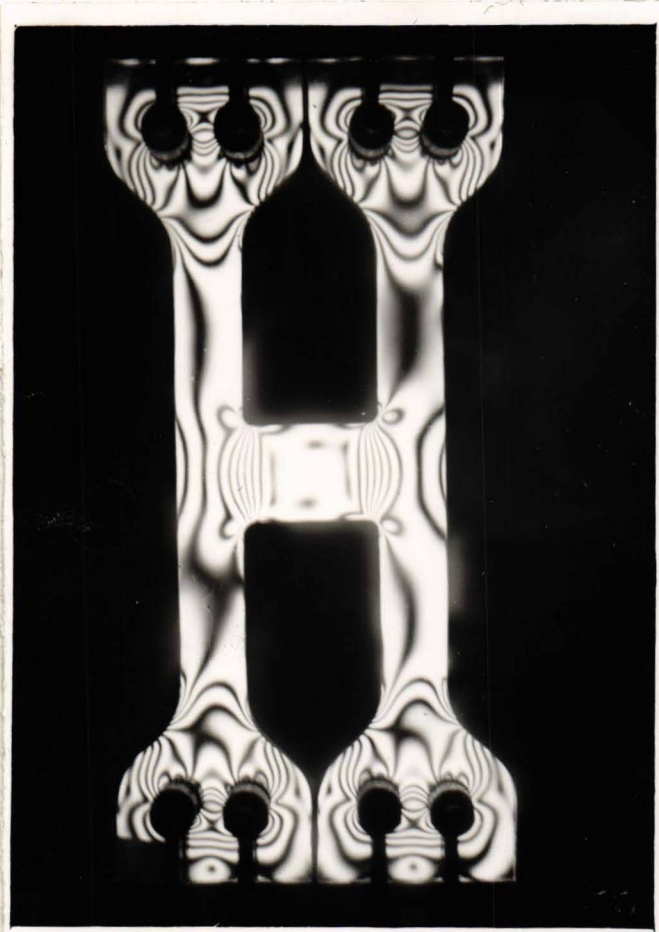
Ekperimenti su izvršeni još sa dva modela kod kojih srednji deo nâje bio kvadratičan, već pravougaoni sa odnosom strana 2 : 3 odnosno 3 : 2. Slike III.37 i III.38 prikazuju fotografije izohroma za ove slučajeve. Za oba modela snimljen je i ceo ciklus izoklina, no definitivni račun za glavne napone zasada nije izvršen.

U zaključnom delu ovog rada biće date opštije napomene o iskustvima stečenim kod eksperimentiranja, kao i o celishodnosti i dometu ove metode pri rešavanju sličnih problema.

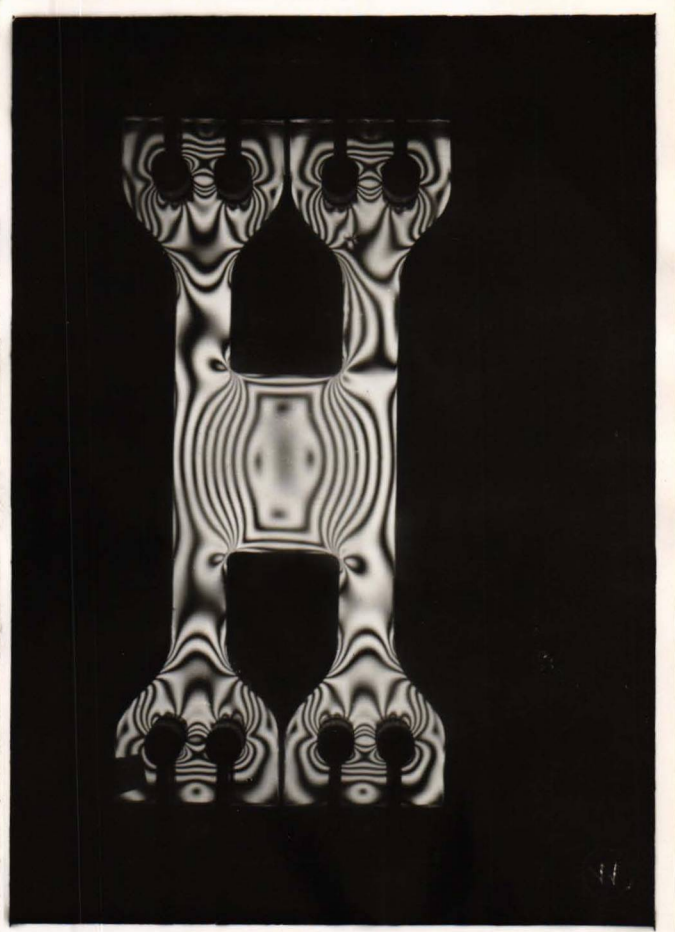
TABELA ZA PRORAČUN GLAVNIH NAPONA

i	p-q	p+q	p	q	p	q
	jedinica : red izohrome				jedinica kg/cm ²	
1	+6,60	+ 6,73	+ 6,675	+ 0,055	+ 1,01	+ 0,01
2	+ 6,50	+ 6,76	+ 6,630	+ 0,130	+ 1,00	+ 0,02
3	+ 6,50	+ 6,81	+ 6,655	+ 0,155	+ 1,00	+ 0,02
4	+ 6,70	+ 6,87	+ 6,785	+ 0,085	+ 1,03	+ 0,01
5	+ 6,50	+ 6,91	+ 6,700	+ 0,210	+ 1,01	+ 0,03
6	+ 6,20	+ 7,12	+ 6,660	+ 0,460	+ 1,01	+ 0,06
7	+ 6,80	+ 6,93	+ 6,865	+ 0,065	+ 1,04	+ 0,01
8	+ 6,30	+ 6,92	+ 6,610	+ 0,310	+ 1,00	+ 0,04
9	+ 6,10	+ 7,47	+ 6,780	+ 0,690	+ 1,02	+ 0,10
10	+ 6,80	+ 6,84	+ 6,820	+ 0,020	+ 1,03	0
11	+ 6,50	+ 6,39	+ 6,450	- 0,006	+ 0,98	+ 0,01
12	+ 6,00	+ 5,87	+ 5,990	- 0,120	+ 0,90	- 0,02
13a	+ 7,60	+ 4,53	+ 6,065	- 1,535	+ 0,92	- 0,23
13	+ 7,22	+ 6,72	+ 6,970	- 0,250	+ 1,06	- 0,04
14	+ 6,89	+ 5,94	+ 6,415	- 0,475	+ 0,97	- 0,07
15	+ 6,22	+ 4,92	+ 5,570	- 0,650	+ 0,84	- 0,10
16	+ 7,26	+ 6,68	+ 6,970	- 0,290	+ 1,06	- 0,04
17	+ 6,59	+ 5,72	+ 6,155	- 0,435	+ 0,93	- 0,06
18	+ 5,21	+ 4,58	+ 4,895	- 0,315	+ 0,74	- 0,05
19	+ 7,20	+ 6,67	+ 6,935	- 0,265	+ 1,05	- 0,04
20	+ 6,20	+ 5,61	+ 5,905	- 0,295	+ 0,90	- 0,04
21	+ 4,78	+ 4,47	+ 4,625	- 0,155	+ 0,70	- 0,02
22	+ 7,15	+ 6,68	+ 6,965	- 0,285	+ 1,05	- 0,04
23	+ 6,10	+ 5,59	+ 5,845	- 0,255	+ 0,89	- 0,04
24	+ 4,60	+ 4,45	+ 4,525	- 0,075	+ 0,69	- 0,01
25	+ 4,56	+ 3,30	+ 3,930	- 0,630	+ 0,60	- 0,10
26	+ 3,72	+ 3,18	+ 3,450	- 0,270	+ 0,52	- 0,04
27	+ 3,06	+ 3,23	+ 3,145	+ 0,085	+ 0,48	+ 0,01
28	+ 2,75	+ 3,26	+ 3,005	+ 0,255	+ 0,46	+ 0,04
29	+ 1,57	+ 0,55	+ 1,060	- 0,510	+ 0,16	- 0,08
30	+ 1,50	+ 1,59	+ 1,545	+ 0,045	+ 0,23	+ 0,00
31	+ 1,19	+ 2,02	+ 1,605	+ 0,415	+ 0,24	+ 0,04

	$p-q$	$p+q$	p	q	p	q
	jedinica: red izohrome				jedinica kg/cm^2	
32	+ 1,20	+ 2,15	+ 1,665	+ 0,485	+ 0,25	+ 0,07
33	+ 0,76	- 0,41	+ 0,175	- 0,585	+ 0,03	- 0,09
34	+ 0,47	+ 0,61	+ 0,540	+ 0,070	+ 0,08	0
35	+ 0,30	+ 1,13	+ 0,715	+ 0,415	+ 0,11	+ 0,06
36	+ 0,05	+ 1,30	+ 0,675	+ 0,625	+ 0,10	+ 0,09
37	+ 0,56	- 0,78	- 0,110	- 0,670	- 0,02	- 0,10
38	+ 0,17	+ 0,10	+ 0,135	- 0,035	+ 0,02	0
39	+ 0,84	+ 0,62	+ 0,730	- 0,110	+ 0,11	- 0,02
40	+ 0,90	+ 0,79	+ 0,845	- 0,055	+ 0,13	0
41	+ 0,60	- 0,88	- 0,140	- 0,740	- 0,02	- 0,11
42	+ 0,08	- 0,05	+ 0,015	- 0,065	+ 0,00	- 0,01
43	+ 1,02	+ 0,45	+ 0,730	- 0,280	+ 0,10	- 0,04
44	+ 1,10	+ 0,62	+ 0,860	- 0,240	+ 0,13	- 0,04
A	+ 7,80	+ 7,80	+ 7,80	0	+ 1,18	0
B	+ 7,70	+ 7,70	+ 7,70	0	+ 1,17	0
C	+ 7,60	+ 7,60	+ 7,60	0	+ 1,15	0
D	+ 7,40	+ 7,40	+ 7,40	0	+ 1,12	0
E	+ 7,30	+ 7,30	+ 7,30	0	+ 1,11	0
F	+ 7,10	+ 7,10	+ 7,10	0	+ 1,08	0
G	+ 6,90	+ 6,90	+ 6,90	0	+ 1,05	0
H	+ 6,70	+ 6,70	+ 6,70	0	+ 1,01	0
I	+ 6,59	+ 6,59	+ 6,59	0	+ 1,00	0
J	+ 6,59	+ 6,59	+ 6,59	0	+ 1,00	0
K	+ 6,59	+ 6,59	+ 6,59	0	+ 1,00	0
L	+ 6,59	+ 6,59	+ 6,59	0	+ 1,00	0
M	+ 6,59	+ 6,59	+ 6,59	0	+ 1,00	0
N	+ 6,80	+ 6,80	+ 6,80	0	+ 1,03	0
O	+ 7,30	+ 7,30	+ 7,30	0	+ 1,11	0
P	+ 10,00	+ 10,00	+ 10,00	0	+ 1,52	0
R	+ 11,0	+ 11,00	+ 11,00	0	+ 1,67	0
S	+ 2,0	- 2,00	0	- 2,00	0	- 0,30
T	+ 2,30	- 2,30	0	- 2,30	0	- 0,35
U	+ 2,00	- 2,00	0	- 2,00	0	- 0,30
V	+ 1,95	- 1,95	0	- 1,95	0	- 0,30
Z	+ 1,90	- 1,90	0	- 1,90	0	- 0,29



Sl. III. 37



Sl. III. 38

IV. REŠENJE PRIMENOM TEORIJE KOMPLEKSNIH FUNKCIJA

IV. 1 OSNOVNE JEDNAČINE RAVNOG PROBLEMA U KOMPLEKSNOM OBLIKU

Zadatak obradjen u ovom radu formulisan je kao I. fundamentalni konturni problem Teorije elastičnosti; treba naći stanje elastične ravnoteže uz date spoljašnje napone koji dejstvuju po konturi posmatranog područja. Problem je ekvivalentan sa t.zv. fundamentalnim biharmoniskim problemom, kojim se traži biharmoniska funkcija U^* u datom području, ako su dati izvodi $\frac{\partial U}{\partial x}$ i $\frac{\partial U}{\partial y}$ po konturi toga područja. Taj problem rešili su 1907 Hadamard, Lauricella, Korn i Boggio.

Rešenje ravnog problema pomoću Teorije kompleksnih funkcija svodi se na određivanje dveju kompleksnih funkcija $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ holomorfnih u posmatranom području, koje moraju zadovoljiti odgovarajuće konturne uslove. Kad su te funkcije određene, ravni problem je principijelno rešen.

IV. 1.1 Komponentalni naponi u kompleksnom obliku

Svaka biharmoniska funkcija $U(x,y)$ može se prikazati pomoću dve funkcije kompleksne promenljive $z = x + iy$. Ta činjenica je od izvanrednog značaja, jer rešenju ravnog problema Teorije elastičnosti stavlja na raspolaganje ceo aparat Teorije kompleksnih funkcija.

Neka je U biharmoniska funkcija, tj. $\Delta\Delta U = 0$.

Označimo

$$\Delta U = P(x,y) \quad /IV.1/$$

tj. $P(x,y)$ je harmoniska funkcija. Ako je $Q(x,y)$ harmoniska funkcija konjugovana funkciji P , tj. zadovoljava Cauchy-Riemann-ove uslove :

* Da ne bi došlo do zabune u oznakama usvajamo ovde iznimno oznaku U umesto Φ za biharmonisku funkciju.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad /IV.2/$$

tada izraz

$$f(z) = P(x, y) + i Q(x, y) \quad /IV.3/$$

označuje funkciju kompleksne promenljive $z = x + iy$ koja je holomorfna u posmatranom području S .

Stavimo li nadalje da je

$$\varphi(z) = p + i q = \frac{1}{4} \int f(z) dz \quad /IV.4/$$

tada je lako proveriti da je i funkcija $(U - px - qy)$ takodje harmoniska, tj. da je $\Delta(U - px - qy) = 0$. Odatle je $U = px + qy + p_1$ gde je p_1 neka harmoniska funkcija u posmatranom području S . Označimo li još sa $\chi(z)$ funkciju kompleksne promenljive z , čiji je realni deo p_1 , tada za jednevezna područja dobivamo

$$U = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z} \varphi(z) + \chi(z) \right\}$$

gde je \bar{z} simbol za konjugovani kompleksni izraz $x - iy$. Poslednje možemo pisati i ovako

$$2U = \bar{z} \varphi(z) + z \overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad /IV.5/$$

Ovde je, dakle, biharmoniska funkcija U prikazana pomoću dveju kompleksnih funkcija $\varphi(z)$ i $\chi(z)$. Taj izraz dao je 1898 u nešto drugačijem obliku E. Goursat [33]. Funkcije $\varphi(z)$ i $\chi(z)$ zovu se kompleksni potencijal. Naravno da će i komponentalni naponi G_x , G_y i τ_{xy} , kao i komponentalna pomeranja u i v biti takodje izraženi pomoću kompleksnog potencijala.

Umesto funkcije $\chi(z)$ uvodi se funkcija

$$\gamma(z) = \frac{d\chi}{dz} \quad /IV.6/$$

Iz dosadanjeg može se direktno izvesti jednačina

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\gamma(z)} \quad /IV.7/$$

Sada je moguće tražiti izraze za komponentalne napone pomoću kompleksnih funkcija $\varphi(z)$ i $\gamma(z)$. Iz konturnih uslova /I.2/ dobiva se, usvojivši samo oznaku U umesto ϕ , jednačina u kompleksnom obliku

$$(\bar{X} + i\bar{Y}) ds = -i \cdot d\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad /IV.8/$$

odnosno prema /IV.7/

$$(\bar{X} + i\bar{Y}) ds = -i \cdot d\left\{\varphi(z) + z \cdot \overline{\varphi'(z)} + \gamma(z)\right\} \quad /IV.9/$$

Našjim transformacijama svodi se poslednje na:

$$G_x + G_y = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \left[\varphi'(z) \right]$$

$$G_y - G_x + 2 \cdot i \cdot \tau_{xy} = 2 \left[z \cdot \overline{\varphi''(z)} + \gamma'(z) \right] \quad /IV.10/$$

ili, ako uvedemo oznake

$$\varphi'(z) = \Phi(z) \quad \gamma'(z) = \Psi(z) \quad /IV.11/$$

onda je

$$G_x + G_y = 2 \left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \left[\Phi(z) \right]$$

$$G_y - G_x + 2 \cdot i \cdot \tau_{xy} = 2 \left[z \cdot \overline{\Phi'(z)} + \Psi(z) \right] \quad /IV.12/$$

Ovim su komponentalni naponi jednoznačno određeni pomoću dve kompleksne funkcije $\varphi(z)$ i $\gamma(z)$. Obrasci i izvođenja potiču od Kolosova /1909/.

Može se pokazati da pri datom naponskom stanju izraženom preko funkcija φ i γ ostaju dve konstante slobodne. Da bi funkcije bile jednoznačno određene, usvajaju se dodatni uslovi za

$$\varphi(z) \text{ u obliku } \varphi(0) = 0, \quad \operatorname{Im} [\varphi'(0)] = 0 \quad /IV.13/$$

IV. 1.2 Slučaj beskonačnog područja

Uopštavanjem rezultata koji vrede za višezvezna područja [25] dolazimo do izraza za funkcije φ i ψ kod beskonačno velikih područja:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{\mathcal{X} + i\mathcal{Y}}{2\pi(1+\kappa)} \log z + \Gamma z + \varphi_0(z) & /IV.14/ \\ \psi(z) &= \frac{\mathcal{X}(\mathcal{X} - i\mathcal{Y})}{2\pi(1+\kappa)} \log z + \Gamma' z + \psi_0(z)\end{aligned}$$

gde su $\Gamma = B + iC$, $\Gamma' = B' + iC'$ kompleksne konstante, a $\varphi_0(z)$ i $\psi_0(z)$ funkcije holomorfne unutar posmatranog područja uključujući i beskonačno daleku tačku. \mathcal{X} i \mathcal{Y} su komponente rezultujućeg vektora spoljašnjih sila / tj. sila na konturama otvora, jer je područje višestruko vezano i beskonačno/, a κ je konstanta određena izrazom

$$\kappa = \frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma$$

gde su λ i μ konstante elastičnosti zavisne od materijala, a σ je Poisson-ov koeficijent.

Realne konstante u Γ i Γ' imaju vrlo просту fizičku interpretaciju:

$$(\sigma_x)_\infty = 2B - B' \quad (\sigma_y)_\infty = 2B + B' \quad (\tau_{xy})_\infty = C'$$

Konstanta C daje rotaciju krutog tela i ne utiče na naponsko stanje, pa je ovde odbacujemo. Iz poslednjih obrazaca izlazi:

$$\operatorname{Re} \Gamma = B = \frac{1}{4} (p + q)$$

$$\Gamma' = B' + iC' = -\frac{1}{2} (p - q) e^{-2i\alpha}$$

/IV.15/

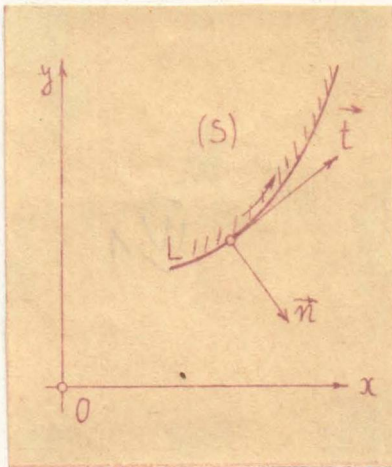
gde su p i q glavni naponi, a α ugao što ga napon p zaklapa sa osom x .

Iz obrazaca /IV.12/ vidi se da je naponsko stanje kod prosto vezanih područja nezavisno od materijala /zavisi samo od oblika područja i opterećenja/, a iz /IV.14/ sledi da kod višestruko vezanih područja naponsko stanje zavisi od materijala samo ako je $I \neq 0$ ili $Y \neq 0$, tj. ako postoje sile na konturama otvora.

IV. 1. 3 Formulisanje konturnog uslova

Iz jednačine /IV.8/ sledi da je

/v. sl. IV.1/



$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = i \int_0^s (X_n + i Y_n) ds + \text{const} \quad (\text{na } L)$$

Uvedimo još oznaku:

Sl. IV.1

$$i \int_0^s (X_n + i Y_n) ds = f_1(s) + i f_2(s) \quad /IV.16/$$

gde su f_1 i f_2 sada poznate realne funkcije koordinate s .

Tada je

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = f_1 + i f_2 + \text{const} \quad (\text{na } L) \quad /IV.17/$$

Medjutim, funkcija na levoj strani može se izraziti pomoću kompleksnih funkcija $\varphi(z)$ i $\psi(\bar{z})$ prema obrascu /IV.7/. Odatle izlazi uslov koji moraju zadovoljiti funkcije φ i ψ na konturi L :

$$\varphi(z) + z \cdot \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(\bar{z})} = f_1 + i f_2 + \text{const} \quad /IV.18/$$

Naravno da za funkcije φ i ψ vrede i ovde dodatni uslovi /IV.13/.

Konturni uslov može se izraziti i na drugi način, ako se umesto komponentata \bar{I} i \bar{Y} totalnog vektora spoljašnjih sila uzmu njegove komponente N i T u smeru normale i tangente. Konturni uslov tada glasi:

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\alpha} \left\{ \bar{z} \cdot \Phi'(z) + \Psi(z) \right\} = N - iT \quad /IV.19/$$

(na L)

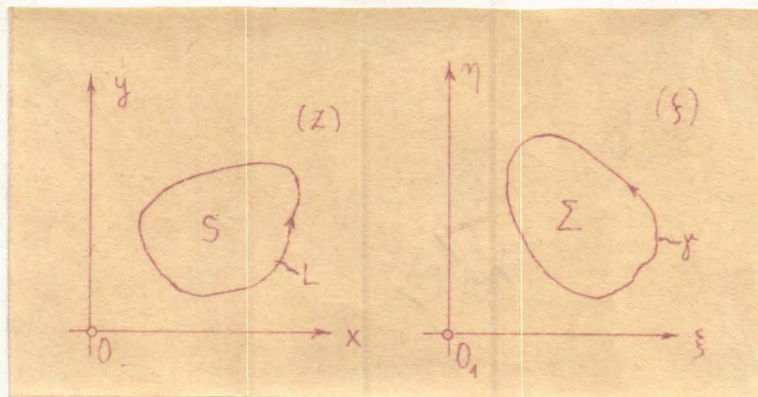
Ovde je usvojena oznaka

$$\Phi(z) = \varphi'(z) \quad \Psi(z) = \psi'(z) \quad /IV.20/$$

Izraz /IV.19/ neki puta je pogodniji za primenu nego /IV.18/.

IV. 2. PRIMENA KONFORMNOG PRESLIKAVANJA

Na osnovu obrazaca /IV.10/ odnosno /IV.14/ i /IV.18/ može se vrlo efikasno rešavati I fundamentalni problem za područja kružnog ili prstenastog oblika bez obzira kakvo je spoljašnje opterećenje. Ako područje nije takvog oblika, direktno rešavanje ravnog problema ovim putem vodilo bi do suviše glomaznih i nepreglednih računa. Zbog toga prelazi se na metodu konformnog preslikavanja originalnog područja na beskonačnu poluravan ili na kružna područja.



Sl. IV. 2

Neka je Σ konačno ili beskonačno jednevezno područje ~~je - ravnine i granice moraju biti nepokretnom uključivo u IV.20, beskonačno~~ u (ξ) -ravni, ograničeno prostom konturom γ /sl. IV, 2/, i neka je $\omega(\xi)$ funkcija holomorfna u području Σ uključivo i u beskonačno

dalekoj tački ukoliko je područje beskonačno veliko, a neprekidna i na konturi γ . Ako nadalje neka proizvoljna tačka definisana sa $z = \omega(\xi)$ opiše u (z) -ravni prostu konturu L kada tačka ξ opiše konturu γ , tada funkcija $z = \omega(\xi)$ daje konformno preslikavanje područja S unutar L na područje Σ unutar γ i obratno. Pretpostavlja se samo da je u tačkama konture $\omega(\xi)$ konačna, $\omega'(\xi)$ konačno, a $\omega'(\xi) \neq 0$, kao i to da je $\omega''(\xi)$ neprekidna na a njena konturna vrednost da je data izrazom

$$\omega''(\xi) = \frac{d\omega'(\xi)}{d\xi} \quad /IV.21/$$

Ako je područje Σ konačno, a S beskonačno veliko, funkcija $\omega(\xi)$ mora postati beskonačna u nekoj tački područja Σ . Lako je pokazati da $\omega(\xi)$ mora imati prosti pol u toj tački, tj. ako zbog uprošćenja pretpostavimo da tački $\xi = 0$ odgovara tačka $z = \infty$, tada je $\omega(\xi) = \frac{c}{\xi} +$ holomorfnu funkciju, gde je c konstanta, a u Σ ne postoji nijedan drugi singularitet /inače transformacija ne bi bila reverzibilna i jednoznačna/.

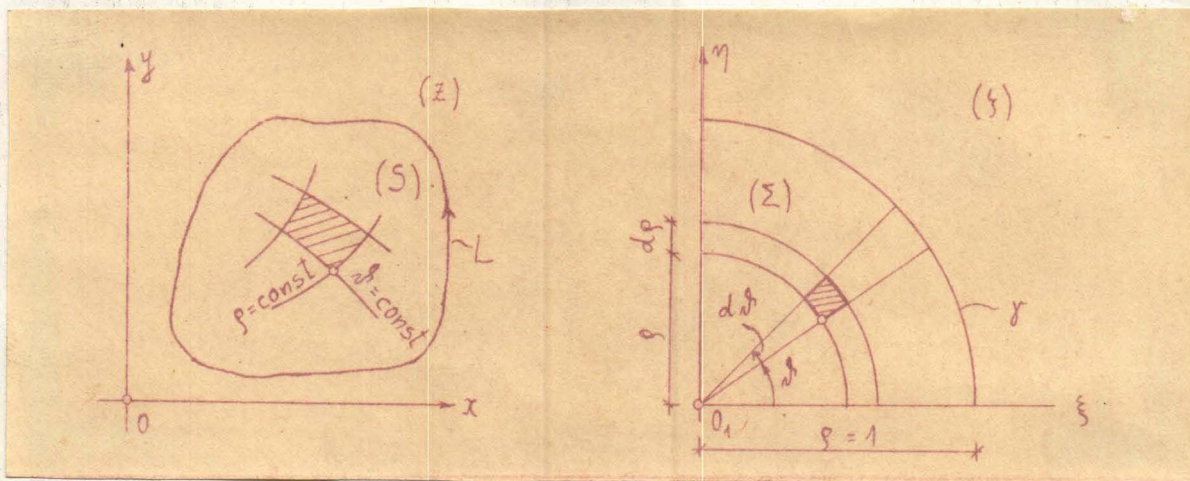
Krivolinisne koordinate vezane sa konformnim preslikavanjem na kružna područja: Ako posmatrano područje S u (z) -ravni preslikavamo na kružno područje Σ u (ξ) -ravni, uvodimo polarne koordinate

$$\xi = \rho \cdot e^{i\theta} \quad /IV.22/$$

Krugovima $\rho = const$ i radijalnim pravcima $\theta = const$ u (ξ) -ravni odgovaraju u (z) -ravni dva međusobna ortogonalna sistema krivih linija. Veličine ρ i θ mogu se smatrati krivolinijskim koordinatama tačke (x, y) u (z) -ravni. Postoji veza

$$x + iy = \omega(\xi) = \omega(\rho e^{i\theta})$$

Na sl. IV. 3 prikazana je korespondencija izmedju koordinata u ravnima (z) i (ξ) .



Sl. IV. 3

Ako je \vec{A} neki vektor u (z) -ravni, onda je očigledno /v. sl. IV.4/

$$A_\rho + i A_\phi = e^{-i\alpha} (A_x + i A_y) \quad /IV.23/$$

Dobije li tačka z neko pomeranje dz u tangencijalnom smeru (ρ) , odgovarajuća tačka ξ dobiće pomeranje $d\xi$ u radijalnom smeru. Ovde vredi odnos

$$dz = e^{i\alpha} |dz| \quad d\xi = e^{i\alpha} |d\xi|$$

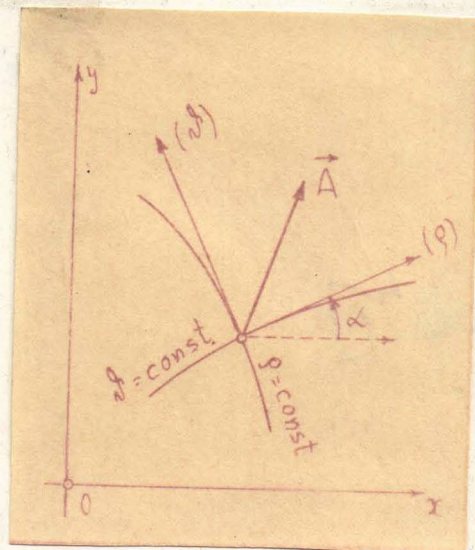
z i ξ vezani su funkcijom preslikavanja ω , pa se može izvesti da je

$$e^{-i\alpha} = \frac{\xi}{\rho} \cdot \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{|\omega'(\xi)|}$$

tj. prema /IV.23/ izlazi konačno

$$A_\rho + i A_\phi = \frac{\xi}{\rho} \cdot \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{|\omega'(\xi)|} (A_x + i A_y)$$

/IV.24/



Sl. IV. 4

Ovo je formula transformacije za prelaz iz Dekartovih koordinata x, y u krivolinijske koordinate ρ, ν u (z) -ravni.

IV. 2. 1 Osnovni obrasci krivolinijskih koordinatama

Izrazi /IV.10/ i /IV.12/ za komponentalne napone i konturni uslov /IV.18/ mogu se izraziti i u funkciji krivolinijskih koordinata. Koristeći se formulom transformacije /IV.24/ kojom je dat prelaz iz Dekartovih na krivolinijske koordinate pri konformnom preslikavanju na kružna područja, dobivamo sada obrasce:

a/ za komponentalne napone

$$\hat{\rho\rho} + \hat{\nu\nu} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$$

$$\hat{\nu\nu} - \hat{\rho\rho} + 2i \cdot \hat{\rho\nu} = \frac{z^2}{\rho^2 \omega'(z)} \left\{ \overline{\omega(z)} \Phi'(z) + \omega'(z) \Psi(z) \right\} \quad /IV.25/$$

/ovde su $\hat{\rho\rho}$, $\hat{\nu\nu}$ normalni, a $\hat{\rho\nu}$ tangencijalni napon u odnosu na smerove ρ i ν u posmatranoj tački/.

Manjim transformacijama dobiva se još

$$\hat{\rho\rho} - i \cdot \hat{\rho\nu} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \frac{z^2}{\rho^2 \omega'(z)} \left\{ \overline{\omega(z)} \Phi'(z) + \omega'(z) \Psi(z) \right\} \quad /IV.25a,$$

Tim obrascima dati su naponi koji dejstvuju na konturi $\rho = \text{const}$, mereno u smislu ukogem ρ raste;

b/ konturni uslov /IV.18/ glasi:

$$\varphi(z) + \frac{\omega(z)}{\omega'(z)} \cdot \overline{\varphi'(z)} + \overline{T(z)} = f_1 + i f_2 + \text{const} \quad (\text{na } \gamma) \quad /IV.26/$$

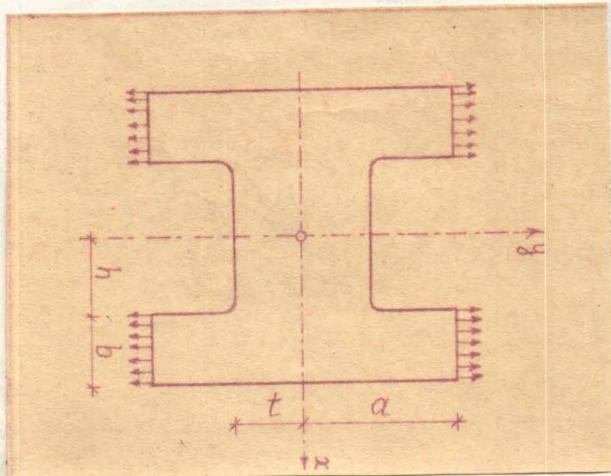
Funkcije f_1 i f_2 bile su u ranijem poznate funkcije lučne koordinata ζ . Kako je ζ funkcija luka γ na konturi γ , to se u /IV.26/ f_1 i f_2 moraju sada smatrati poznatim funkcijama koordinate ζ .

Ako upotrebimo jednačinu /IV.19/, konturni uslov svodi se na drugačiji oblik:

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - \frac{\sigma^2}{\omega'(z)} \left\{ \overline{\omega(z)} \cdot \Phi'(z) + \omega'(z) \Psi(z) \right\} = \hat{p}\hat{p} - i \cdot \hat{p}\hat{q} \quad /IV.26a/$$

(na γ)

IV. 2. 2 Primena na rešavanje posmatranog problema

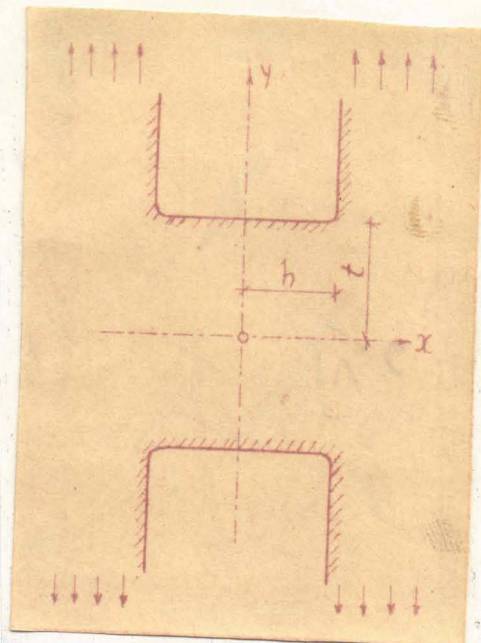


Sl. IV.5

Ploča je dvostruko simetrična /v. sl. IV.5/, pa je i ovde dovoljno posmatrati samo jedan kvadrant. Očigledno je da direktno računanje napona bez konformnog preslikavanja na prostije područje pretstavlja računski veoma dugačku i gotovo neizvodljivu operaciju. Potrebno je stoga ovo područje konformno preslikati bilo na beskonačnu poluravan, bilo na unutrašnjost jediničnog kruga. Primenom poznate Schwarz-Christophell-ove transformacije može se svako poligonalno područje konformno preslikati na beskonačnu poluravan. Funkcija preslikavanja vodi na eliptične integrale i veoma je nepodesna za primenu u konturnom uslovu /IV.26/.

Rezultati dobiveni za posmatranu ploču diferencnim računom i fotoelastičnim putem pokazuju da se naponsko stanje u ploči relativno brzo smiruje idući od sredine prema krajevima. Na osnovu toga problem je modificiran time što je područje prošireno, te je tako dobivena beskonačna ravan sa dva paralelna zarezima koji se protežu u beskonačnost. Ravan je u beskonačnosti napregnuta na zatezanje paralelno sa osom y /v. sl. IV.6/.

N. Davy [25] dao je obrazac za konformno preslikavanje ovakvog područja /ali sa oštrim uglovima/ na beskonačnu poluravan $|y| > 0$. Radi ilustracije dajemo taj obrazac:



Sl. IV. 6

$$\zeta = x + iy = a \cdot \frac{i \left\{ u(k^2 - \frac{2E}{K}) - 2Z(u) - \frac{cn u \, dn u}{sn u} \right\} - b}{2E - k^2 K}$$

Ovde je još $\xi = \frac{1}{sn u}$, te se vidi da na desnoj strani jednačine dolazi komplikovana kombinacija eliptičnih integrala i eliptičnih funkcija. Poznatom bilinearnom transformacijom

$$\zeta = \frac{i(w - i)}{w + i}$$

mogla bi se sada beskonačna poluravan preslikati konformno na unutrašnjost jediničnog kruga, tj. i posmatrano prošireno područje bilo bi time preslikano na unutrašnjost jediničnog kruga. Odmah je jasno da uvođenje ovakvih transformacija u konturni uslov /IV.26/ izaziva nepremostive računске teškoće, te otpada a priori kao pomagalo za racionalno rešavanje problema.

Zbog toga se prešlo na rešavanje datog problema pomoću približnog preslikavanja proširenog područja sa zaobljenim uglovima na unutrašnjost jediničnog kruga /v. sl. IV.7/.

Posmatrano područje je beskonačno veliko, a i kontura mu se proteže u beskonačnost. U knjizi N.I. Mushelišvili-a [23] razmatrana su mnoga područja, jednevezna i viševezna, ali sva su ili konačna ili beskonačna sa otvorima u konačnosti, te konformno pre-

slikavanje na jedinični krug ili na beskonačnu ravan sa kružnim otvorom ide uglavnom bez teškoća. Ovde se kao novi element javlja prostiranje konture u beskonačnost. Neke probleme ove vrste diskutovao je ^MKikukawa [24]. On je ovde predložio i metodu za aproksimativno preslikavanje na jedinični krug, koja je dosta dugačka, ali daje rezultate sa stepenom tačnosti koji je podešen prema potrebi pri rešavanju konkretnog problema.

Ako je, naime, funkcija preslikavanja data beskonačnim polinomom

$$\omega(\zeta) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_n \zeta^n + a_{n+1} \zeta^{n+1} + \dots$$

kojim se preslikava neko područje S na jedinični krug $|\zeta| < 1$, tada polinom

$$\omega_n(\zeta) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_n \zeta^n$$

daje preslikavanje nekog područja S_n na jedinični krug. Ovde je S_n aproksimacija za područje S , a stepen tačnosti ove aproksimacije može se birati po volji, u zavisnosti od broja članova u polinomu. Ovakva aproksimativna preslikavanja pokazala su se naročito efikasna kod beskonačnih područja sa poligonalnim otvorima.

Na pr., preslikavanje spoljašnjosti pravilnog n -ugla na unutrašnjost jediničnog kruga [27] sprovodi se pomoću obrasca

$$\xi = \omega(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^n - 1)^2}}$$

Podintegralna funkcija može se lako razviti u red, te sa relativno malim brojem članova reda dobivamo dovoljno tačnu aproksimaciju posmatranog područja. Ovakva približna funkcija u izvesnom smislu čak se i bolje približuje stvarnosti nego egzaktni izraz dobiven Schwarz-Christophell-ovom transformacijom, jer ona ne daje oštre, već zaobljene uglove, što je u konstrukcijama gotovo uvek i ostvareno.

Metodu približnog preslikavanja sa uspehom su primenili na razne probleme pomenutog tipa G.N.Savin, A.N.Dnnik i drugi [23].

Pri rešavanju ploče oblika prikazanog na sl. IV.7, koja je konformno preslikana na unutrašnjost jediničnog kruga, usvojeni su osnovni obrasci /IV.25/ i /IV.25a/ u transformisanom obliku 24

$$\widehat{p\bar{p}} + i\widehat{p^2\bar{p}} = 4 \operatorname{Re} \frac{F(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

/IV.27/

$$\widehat{p\bar{p}} + i\widehat{p^2\bar{p}} = \frac{1}{\omega'(\xi)} \left[F(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{\xi^2}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{\xi^2}{\xi})} \cdot \bar{F}(\frac{\xi^2}{\xi}) \right\} - \frac{\xi^2}{\xi^2} \bar{G}(\frac{\xi^2}{\xi}) \right]$$

Ovde je $\xi = \rho \cdot e^{i\theta}$, a $\rho = |\xi|$ posmatrano je kao konstantno. Funkcije $F(\xi)$ i $G(\xi)$ izvode se iz $\varphi(z)$ i $\psi(\frac{z}{\xi})$ prema jednačinama

$$F(\xi) = \varphi'(z) \cdot \omega'(\xi)$$

/IV.27a/

$$G(\xi) = \left\{ \psi'(z) - z \cdot \psi''(z) + \varphi'(z) \right\} \cdot \omega'(\xi)$$

Obrascima /IV.27/ biće komponentalni naponi potpuno određeni čim se odrede funkcije $F(\xi)$ i $G(\xi)$.

Konturni uslov glasi:

$$[\widehat{p\bar{p}}(\xi) + i\widehat{p^2\bar{p}}(\xi)] \omega'(e^{i\theta}) = F(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \bar{F}(\frac{1}{\xi}) \right] - \frac{1}{\xi^2} \bar{G}(\frac{1}{\xi}) \quad /IV.28/$$

/vredi na konturi $\xi = e^{i\theta}$, tj. za $\rho = 1$ /.

U obrascu /IV.28/ dolazi izraz

$$\Omega(\xi) = \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} = \frac{2 \operatorname{Re} [\omega(\xi)]}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \quad (z = e^{i\theta}) /IV.29/$$

Ovaj izraz, dakle, je funkcija od θ , i pretpostavlja se da ga je moguće razviti u kompleksni Fourier-ov red:

$$\Omega(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{in\theta}$$

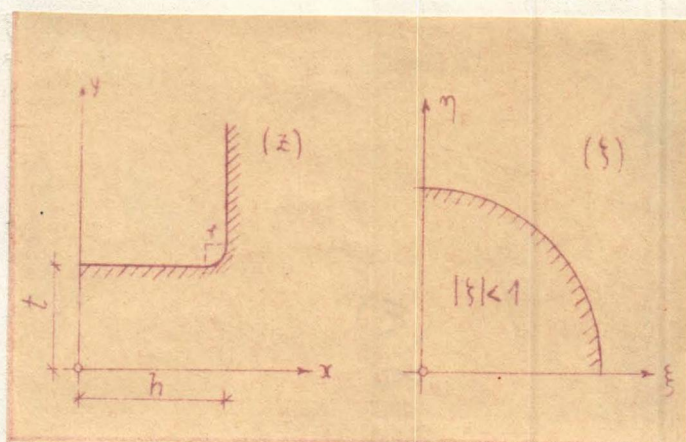
/IV.30/

gde je

$$\Omega_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Uz određene uslove za funkciju $\Omega(\zeta)$ ovaj će red biti apsolutno i uniformno konvergentan.

Funkcija preslikavanja posmatranog beskonačnog područja na jedinični krug određena je aproksimativno, pri čemu je vodjeno računa da oblik funkcije mora zadovoljiti određene uslove.



Sl. IV.8

Na sl. IV.8 prikazan je jedan kvadrant. Preslikavanje je sprovedeno uz uslov da tački ζ_∞ odgovara tačka $\zeta = +1$, tački $z = +i$ tačka $\zeta = +i$, i da još zakrivljenije u uglu ima približno dati poluprečnik krivine r .

Oblik funkcije mora biti takav da zadovoljava uslov dvostruke simetrije. Ova funkcija traži se u opštem slučaju u obliku:

$$\omega(\zeta) = a_0 \frac{\zeta}{1-\zeta^2} + a_1 \zeta + a_3 \zeta^3 + a_5 \zeta^5 + \dots$$

/IV.31/

Prvi član obezbeđuje preslikavanje beskonačno daleke tačke ravni a parni članovi polinoma otpadaju zato što preslikavanje treba da bude dvostruko simetrično.

Izraz $\frac{\zeta}{1-\zeta^2}$ može se transformisati u oblik

$$\frac{\zeta}{1-\zeta^2} = i \cdot \frac{1}{2 \sin \theta}$$

$$(\zeta = e^{i\theta})$$

tj. to je čisto imaginarna veličina. Zbog toga koeficijent ω_0 uzima se realan, dok a_1, a_2, a_3, \dots mogu u opštem slučaju biti kompleksni.

Prema obrascu /IV.31/ tački z_∞ odgovaraju u (ξ) -ravni tačke $\xi = \pm 1$. Funkcija $\omega(\xi)$ postaje u toj tački beskonačna, ali zbir $\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi}) = 2 \operatorname{Re}[\omega(\xi)]$ ostaje konačan. Imenitelj $\omega'(\frac{1}{\xi})$ izraza /IV.15/ postaje u tački $\frac{1}{\xi} = \pm 1 = \pm 1$ beskonačan, tj. ceo izraz /IV.15/ za $\xi = \pm 1$ jednak je nuli, te ostaje neprekidan i u toj tački.

Za približno preslikavanje polinom /IV.31/ ima konačni broj članova sa numerički odredjenim koeficijentima, te izraz /IV.29/ nije potrebno razvijati pomoću kompleksnog Fourier-ovog reda /IV.30/, već se može direktno upoređivanjem koeficijenata razviti u polinom.

Funkcije $F(\xi)$ i $G(\xi)$ odredjujemo iz konturnog uslova /IV.28/. U tu svrhu prikazujemo ih u obliku reda

$$F(\xi) = F_0 + F_1 \xi + F_2 \xi^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \xi^i$$

/IV.32/

$$G(\xi) = G_0 + G_1 \xi + G_2 \xi^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \xi^i$$

Ovde možemo staviti da je koeficijent F_0 realan /ukoliko $\omega'(0)$ nije čisto imaginarno/, jer prema ranijem je

$$\operatorname{Im}[\omega'(0)] = \operatorname{Im}\left[\frac{F(0)}{\omega'(0)}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{F_0}{\omega'(0)}\right] = 0$$

Da bi rešenje bilo regularno traži se da funkcije $F(\xi)$ i $G(\xi)$ budu holomorfné u području $|\xi| < 1$, a neprekidne i na konturi područja. Kako je posmatrano područje beskonačno, funkcije $\omega(\xi)$ i $\omega'(\xi)$ su singularne u tačkama $\xi = \pm 1$. Funkcije $F(\xi)$ i $G(\xi)$ postaju u tim tačkama također singularne. Da bi ih ovde učinili regularnim,

superponiramo im funkcije $F_1(\xi)$ i $G_1(\xi)$ čiji singulariteti zadovoljavaju date uslove u beskonačnosti. Tada umesto konturnog uslova /IV.28/ imamo

$$[\hat{\rho}\hat{\rho} + i\sqrt{\hat{\rho}}] \cdot \omega'(e^{i\theta}) = F(\xi) + F_1(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \left[\bar{F}(\frac{1}{\xi}) + \bar{F}_1(\frac{1}{\xi}) \right] - \frac{1}{\xi^2} \left[\bar{G}(\frac{1}{\xi}) + \bar{G}_1(\frac{1}{\xi}) \right] \right\} \quad /IV.33/$$

Kako u datom slučaju od spoljašnjeg opterećenja postoji samo jedinično zatezanje u beskonačnosti $(\epsilon_y)_\infty = 1$, leva strana poslednje jednačine jednaka je nuli, te možemo pisati

$$-F_1(\xi) - \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \cdot F_1(\frac{1}{\xi}) \right\} + \frac{1}{\xi^2} \bar{G}_1(\frac{1}{\xi}) = \\ = F(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \bar{F}(\frac{1}{\xi}) \right\} - \frac{1}{\xi^2} \bar{G}(\frac{1}{\xi}) \quad /IV.33a/$$

Prema obrascima /IV.15/ za beskonačna područja kod opterećenja $(\epsilon_y)_\infty = 1,00$ sledi da je

$$F_1(\xi) = \frac{1}{4} \omega'(\xi) \quad G_1(\xi) = \frac{1}{4} \omega'(\xi) \quad /IV.34/$$

te poslednja jednačina dobiva oblik

$$-\frac{1}{2} \omega'(\xi) + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^2} \bar{\omega}'(\frac{1}{\xi}) = F(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \cdot \bar{F}(\frac{1}{\xi}) \right\} - \frac{1}{\xi^2} \bar{G}(\frac{1}{\xi}) \quad (\xi = e^{i\theta}) \quad /IV.35/$$

Ako funkcija preslikavanja $\omega(\xi)$ ima polinom n -tog stepena, tj.

$$\omega(\xi) = a_0 \frac{\xi}{1-\xi^2} + a_1 \xi + a_2 \xi^3 + \dots + a_n \xi^n$$

onda se izraz $\Omega(s)$ može prikazati u obliku

$$\Omega(s) = \frac{\omega(s) + \bar{\omega}(s)}{\omega'(s)} = \omega_n s^n + \omega_{n-1} s^{n-1} + \dots + \omega_1 s + \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{-k} s^{-k} \quad (s = e^{i\theta}) \quad /IV.36/$$

Jednačina /IV.35/ identički je ispunjena za svako s , te možemo upoređivanjem koeficijenata na levoj i desnoj strani doći do koeficijenata za funkcije $F(s)$ i $G(s)$. Iz ove jednačine vidimo da se funkcija $G(s)$ javlja samo sa negativnim stepenima od s , tj. upoređivanjem koeficijenata uz članove sa pozitivnim /odnosno nenegativnim/ stepenima dolazimo do koeficijenata F_i . Kada je funkcija $F(s)$ poznata, funkcija $G(s)$ određuje se direktno iz jednačine /IV.35/. Ravni problem time je principijelno rešen, jer komponentalne napone nalazimo tada prema obrascima /IV.27/.

Specijalno, ako se traži samo normalni napon paralelno sa konturom, račun se znatno uprošćava, jer nije potrebno tražiti funkciju $G(s)$. Na konturi je, naime, $\widehat{pp}(\widehat{v}) = 0$, te iz prve jednačine /IV.27/ kao i iz /IV.34/ sledi da je

$$\widehat{v}(\widehat{v}) = 1 + 4 \operatorname{Re} \frac{F(s)}{\omega'(s)} \quad (\text{za } s = e^{i\theta}) \quad /IV.37/$$

Kada su komponentalni naponi \widehat{v}_1 , \widehat{pp} i \widehat{v}_2 , u nekoj posmatranoj proizvoljnoj tački područja S poznati, onda se veličina i smer glavnih napona nalazi uobičajenim putem:

$$p, q = \frac{1}{2} \left[\widehat{pp} + \widehat{v}_1 \widehat{v}_2 \pm \sqrt{(\widehat{pp} - \widehat{v}_1 \widehat{v}_2)^2 + 4 \cdot \widehat{v}_1^2 \widehat{v}_2^2} \right]$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2 \cdot \widehat{v}_1 \widehat{v}_2}{\widehat{pp} - \widehat{v}_1 \widehat{v}_2} \quad /IV.38/$$

Ovde se ugao $\alpha_{1,2}$ meri od osa $\widehat{v}_1 \widehat{v}_2$, krivoliniskog koordinatnog sistema u odnosu na tačku koju posmatramo. Znači da je u originalnom

području potrebno nacrtati dovoljno gustu mrežu krivolinijskih koordinata, te se onda smerovi glavnih napona nanose direktnim odmeravanjem uglova α_i od ose ρ krivolinijskog koordinatnog sistema u posmatranoj tački.

IV. 3. NUMERIČKO ODREĐJIVANJE STANJA NAPONA

Obrasci /IV.27/ i /IV.37/ daju komponentalne napone za posmatrano prošireno područje prikazano na sl. IV.8, ako je pretpostavljena funkcija preslikavanja u obliku

$$\omega(\xi) = a_0 \frac{\xi}{1-\xi^2} + a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 \quad /IV.31/$$

Međutim, praktično je nemoguće koeficijente u ovom izrazu dobiti u opštem obliku kao funkciju odnosu $h : t$ /v. sl. IV.8/. Za svaki posebni numerički odnos $h : t$ moraju se ovi koeficijenti posebno izračunavati iz uslova da se dobivena kontura što je moguće bolje podudara sa originalnom konturom. Kao što je već ranije rečeno, koeficijent a_0 uzima se realan, a koeficijenti a_1, a_3, a_5, \dots , mogu biti i kompleksni. Račun sproveden u ovom radu pokazao je da se sa povećavanjem broja članova u redu /IV.31/ određivanje napona izvanredno produžuje i komplikuje. Zbog toga račun je izveden sa maksimalnim uprošćenjem: u jednačini /IV.31/ uzeti su svega koeficijenti a_1, a_3 i a_5 , a pored toga svi su usvojeni kao realni brojevi. Prvi obrazac /IV.28/ numerički nije pretstavljao veću teškoću, ali drugi, gde ulazi u račun funkcija $G(\xi)$ i količnik $\Omega(\xi)$, i pored tolikog uprošćenja dao je ogroman numerički posao, dosta nepraktičan iz razloga što tokom rada nije bilo moguće sprovesti efikasniji sistem kontrole numeričkih rezultata, te su tek krajnje vrednosti komponentalnih napona davale kontrolu računa. Za praktičnu primenu bila bi ova metoda racionalna samo pri računanju konturnog napona. Osnovna slabost postupka je u tome što u

krajnjim rezultatima ne figuriše opšti parametar h/t , pa to znatno otežava detaljniju opštu analizu celoga problema.

IV. 3. 1 Račun za prvu invarijantu stanja napona

Funkciju preslikavanja pretpostavljamo u obliku

$$\omega(\xi) \equiv \bar{z} = a_0 \frac{\xi}{1-\xi^2} + a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + O(\xi^7) \quad /IV.39/$$

gde su a_0, a_1, a_3, a_5 realni koeficijenti. Za određivanje prve invarijante stanja napona

$$g_1 = \hat{f}\hat{f} + \hat{f}\hat{f}$$

dovoljno je odrediti samo funkciju $F(\xi)$ prema jednačini /IV.23/.

Konturni uslov /IV.21/ svodi se sada na:

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{2} a_5 \xi^4 - \frac{3}{2} a_3 \xi^2 - \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_1 \xi^{-2} + \frac{3}{2} a_3 \xi^{-4} + \frac{5}{2} a_5 \xi^{-6} = \\ & = F(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\xi})} \bar{F}'(\frac{1}{\xi}) \right] - \frac{1}{\xi^2} \bar{G}(\frac{1}{\xi}) \end{aligned} \quad /IV.40/$$

(na $\xi = v^{i\theta}$)

Upoređivanjem nenegativnih koeficijenata uz ξ odredj^ujemo odavde koeficijente za funkciju $F(\xi)$. Račun je pokazao da ova funkcija ima samo članove sa parnim eksponentima.

Za funkciju $\Omega(\xi)$ dobiva se izraz

$$\Omega(\xi) = A_5 \xi^5 + A_3 \xi^3 + A_1 \xi + O(\frac{1}{\xi}) \quad /IV.41/$$

gde je

$$A_5 = \frac{a_5}{a_0 + a_1}, \quad A_3 = \frac{1}{(a_0 + a_1)^2} (a_0 a_3 - 3a_0 a_5 + a_1 a_3 - 3a_3 a_5)$$

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{1}{(a_0 + a_1)^3} & \left[a_0^2 (a_1 - 3a_3 + 4a_5) + a_0 (2a_1^2 - 3a_1 a_3 - \right. \\ & \left. - 3a_3^2 - 5a_1 a_5 + 18a_3 a_5 - 5a_5^2) + a_1 (a_1^2 - 3a_3^2 - 5a_5^2) + 9a_3^2 a_5 \right] \end{aligned} \quad /IV.41a/$$

Funkcija $F(\xi)$ nalazi se odatle u konačnom obliku

$$F(\xi) = F_0 + F_2 \xi^2 + F_4 \xi^4 \quad /IV.42/$$

gde su koeficijenti F_0 , F_2 , F_4 dati izrazima

$$F_0 = \frac{1}{2} \frac{(a_1 - 5a_5 A_5)(1 + 3A_5) - 3a_3 A_3}{3A_3^2 - (1 + A_1 - 5A_5^2)(1 + 3A_5)}$$

$$F_2 = \frac{3}{2} \frac{A_3(-a_1 + 5a_5 A_5) + a_3(1 + A_1 - 5A_5^2)}{\%} \quad /IV.42a/$$

$$F_4 = \frac{5}{2} \frac{(1 + 3A_5)(a_5 - a_1 A_5 + a_5 A_1) - 3A_3(a_5 A_3 - a_3 A_5)}{\%}$$

Uvedemo li još skraćenice

$$k_3 = F_4$$

$$l_3 = 5a_5$$

$$k_6 = F_2 - 2F_4$$

$$l_6 = 3a_3 - 10a_5$$

$$k_4 = F_0 - 2F_2 + F_4$$

$$l_4 = a_1 - 6a_3 + 5a_5$$

/IV.43/

$$k_2 = -2F_0 + F_2$$

$$l_2 = a_0 - 2a_1 + 3a_3$$

$$k_0 = F_0$$

$$l_0 = a_0 + a_1$$

tada je prema /IV.37/ prva invarijantna stanja napona data izrazom

$$g_1 = \hat{p}\hat{p} + \hat{J}\hat{J} = 1 + 4 \cdot \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \quad /IV.44/$$

gde je

$$A = \sum_{n=0}^4 k_{2n} \rho^{2n} \cos(2n \nu^{\circ}) \quad B = \sum_{n=0}^4 k_{2n} \rho^{2n} \sin(2n \nu^{\circ})$$

/IV.44a/

$$C = \sum_{n=0}^4 l_{2n} \rho^{2n} \cos(2n \nu^{\circ}) \quad D = \sum_{n=0}^4 l_{2n} \rho^{2n} \sin(2n \nu^{\circ})$$

Ako veličinama ρ i ν dajemo posebne vrednosti, dobivamo prema jednačinama /IV.41 - IV.44/ prvu invarijantu stanja napona.

Specijalno: ako je $\rho = 1$, dobivamo vrednosti invarijante q_1 za tačke na konturi područja. Kako je ovde normalni napon $\hat{p}_p = 0$, to izraz /IV.44/ daje veličinu normalnog napona paralelno sa konturom. Nakon sredjivanja za taj napon dajemo izraz

$$\hat{\nu}^{\circ} \nu^{\circ} = 1 + 4 \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \quad /IV.45/$$

gde je

$$AC + BD = \sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^{4-m} [k_{2(m+n)} l_{2n} + k_{2n} l_{2(m+n)}] \cos(2m \nu^{\circ})$$

/IV.45a/

$$C^2 + D^2 = \sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^{4-m} 2 l_{2(m+n)} l_{2n} \cos(2m \nu^{\circ})$$

IV.3.2 Rezultati dobiveni za razne odnose h/t

Račun je sproveden za odnose:

$$\frac{h}{t} = \frac{5}{4}, \quad 1, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{2}{3}$$

Kod svih ovih slučajeva usvojen je poluprečnik krivine u uglu $\rho = \frac{1}{6} h$, tj. isti kao i kod ploče razmatrane diferencnim postupkom, odnosno fotoelastičnim ispitivanjem.

$$\frac{h}{t} = \frac{2}{3}$$

Funkcija preslikavanja usvojena je u obliku

/IV.46/

$$\xi = 1,01 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 1,05 \xi + 0,02 \xi^3 - 0,04 \xi^5$$

odate je

$$F(\xi) = -0,3504 + 0,0115 \xi^2 + 0,0660 \xi^4$$

$$AC + BD = -1,7472 + 2,4875 \cos 2\delta - 0,3268 \cos 4\delta - 0,6198 \cos 6\delta + 0,2060 \cos 8\delta$$

$$C^2 + D^2 = +6,0890 - 5,2598 \cos 2\delta + 1,7680 \cos 4\delta + 2,3072 \cos 6\delta - 0,8240 \cos 8\delta$$

Koordinata tačaka približne konture i napon $\sigma_{\xi\xi}$ za razne vrednosti ugla date su u sledećoj tabeli.

δ	x	i.y	$\sigma_{\xi\xi}$
0°	+ 1,0300	∞	+ 1,0000
10°	+ 1,0265	+ 3,0698	+ 1,0754
15°	+ 1,0179	+ 2,1985	+ 1,1992
22,5°	+ 0,9931	+ 1,7029	+ 1,6252
25°	+ 0,9796	+ 1,6252	+ 1,8555
28°	+ 0,9598	+ 1,5731	+ 2,0933
30°	+ 0,9439	+ 1,5350	+ 2,0407
37,5°	+ 0,8706	+ 1,4926	+ 0,0323
45°	+ 0,7566	+ 1,4990	- 0,3891
60°	+ 0,4850	+ 1,5270	- 0,3852
75°	+ 0,2191	+ 1,5125	- 0,3963
90°	0	+ 1,4950	- 0,4966

Dijagrami konture i konturnog napona za sve razmatrane odnose h/t prikazani su na sl. IV.9.

$$\frac{b}{t} = \frac{4}{5}$$

Usvojena je funkcija preslikavanja

$$\omega(\xi) = z = 0,602 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,990 \xi + 0,090 \xi^3 - 0,010 \xi^5$$

/IV.47/

Ovde je

$$F(\xi) = -0,3163 - 0,0750 \xi^2 - 0,0151 \xi^4$$

$$AC + BD = -1,2217 + 1,5419 \cos 2\xi - 0,0310 \cos 4\xi - 0,3290 \cos 6\xi + 0,0399 \cos 8\xi$$

$$C^2 + D^2 = +4,0616 - 4,1553 \cos 2\xi + 0,4137 \cos 4\xi + 1,2889 \cos 6\xi - 0,1592 \cos 8\xi$$

ξ°	x	iy	$\frac{C^2 + D^2}{\xi^\circ}$
0°	+ 1,0700	∞	+ 1,0000
7,5°	+ 1,0592	+ 2,4564	+ 1,0761
10°	+ 1,0465	+ 1,9465	+ 1,1602
15°	+ 1,0173	+ 1,4731	+ 1,4168
18°	+ 0,9944	+ 1,3427	+ 1,6134
20°	+ 0,9770	+ 1,2966	+ 1,7123
21°	+ 0,9677	+ 1,2653	+ 1,7260
22,5°	+ 0,9528	+ 1,2394	+ 1,6607
26°	+ 0,9149	+ 1,2014	+ 1,0011
30°	+ 0,8661	+ 1,1820	- 0,2415
45°	+ 0,6438	+ 1,1967	- 0,3194
60°	+ 0,4000	+ 1,2136	- 0,2252
75°	+ 0,1829	+ 1,2017	- 0,3049
90°	0	+ 1,1911	- 0,3509

$$\frac{b}{t} = \frac{1}{1}$$

Usvojena je funkcija preslikavanja

$$\omega(\xi) \equiv z = 0,400 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,920 \xi + 0,130 \xi^3$$

/IV.48/

$$F(\xi) = -0,2845 - 0,1109 \xi^2$$

$$g_1 = \frac{-0,6177 + 1,0169 \cos 2N^\circ + 0,2406 \cos 4N^\circ + 0,0002 \cos 6N^\circ}{+ 3,0166 - 2,9568 \cos 2N^\circ - 0,4494 \cos 4N^\circ + 1,0296 \cos 6N^\circ}$$

N°	x	iy	$\overline{g_1}$
0°	+ 1,0500	∞	+ 1,0000
5°	+ 1,0420	+ 2,4090	+ 1,0625
7,5°	+ 1,0320	+ 1,6900	+ 1,1478
10°	+ 1,0190	+ 1,3770	+ 1,2778
12,5°	+ 1,0010	+ 1,2020	+ 1,4590
15°	+ 0,9810	+ 1,1020	+ 1,6579
18°	+ 0,9510	+ 1,0350	+ 1,6673
22,5°	+ 0,8997	+ 0,9942	+ 0,5101
25°	+ 0,8680	+ 0,9880	- 0,0202
30°	+ 0,7967	+ 0,9900	- 0,3407
45°	+ 0,5600	+ 1,0250	- 0,2476
60°	+ 0,3300	+ 1,0280	- 0,2168
75°	+ 0,1470	+ 1,0050	- 0,2574
90°	0	+ 0,9900	- 0,3102

$$\frac{h}{L} = \frac{5}{4}$$

Funkcija preslikavanja usvojena je u obliku

$$\omega(\xi) \equiv z = 0,225 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,819\xi + 0,169\xi^3 + 0,048\xi^5$$

/IV.49/

$$F(\xi) = -0,2434 - 0,1520\xi^2 - 0,0639\xi^4$$

$$AC+BD = -0,5734 + 0,5511 \cos 2\xi + 0,0407 \cos 4\xi + 0,1067 \cos 6\xi - 0,1250 \cos 8\xi$$

$$C^2+D^2 = +1,7706 - 1,8000 \cos 2\xi - 0,1644 \cos 4\xi - 0,3796 \cos 6\xi + 0,5002 \cos 8\xi$$

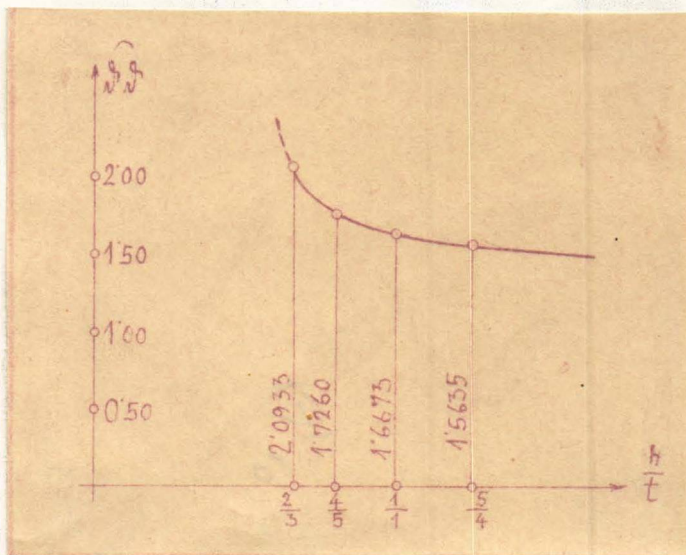
	x	xy	$\frac{xy}{x^2}$
0°	+ 1,0360	∞	+ 1,0000
3°	+ 1,0311	+ 2,2120	+ 1,0062
5°	+ 1,0226	+ 1,4147	+ 1,1680
8°	+ 1,0022	+ 1,0146	+ 1,4532
10°	+ 0,9838	+ 0,9056	+ 1,5635
12°	+ 0,9618	+ 0,8477	+ 1,2747
15°	+ 0,9230	+ 0,8087	+ 0,3350
22,5°	+ 0,8031	+ 0,8052	- 0,1511
30°	+ 0,6678	+ 0,8255	- 0,1302
45°	+ 0,4857	+ 0,8224	- 0,1219
60°	+ 0,2645	+ 0,7964	- 0,2056
75°	+ 0,1389	+ 0,7994	- 0,2108
90°	0	+ 0,8100	- 0,1703

Oblik konture područja, koje se jednačinama /IV.46 - IV.49/ preslikava na jedinični krug, kao i dijagram konturnog normalnog napona paralelnog sa konturom, dat je na sl. IV.9. Upoređivanjem ovih dijagrama može se doći do zaključaka o koncentraciji napona u uglu. Sami dijagrami pokazuju izvesno talasanje koje je nastalo zbog toga što je funkcija preslikavanja uzeta u vrlo grubom obliku.

Veličinu maksimalnog konturnog napona dobivenog prema dijagramu IV.9 u zavisnosti od odnosa h/t prikazaćemo sledećom tabelom:

h/t	$2/3$	$4/5$	$1/1$	$5/4$
σ_{\max}	+2,0933	+1,7260	+1,6673	+1,5635

Svi ovi podaci vrede uz uslov da je poluprečnik krivine u uglu stalno isti $r = \frac{1}{6} h$. Iz ovih podataka može se konstruirati dijagram / σ_{\max} , h/t /:

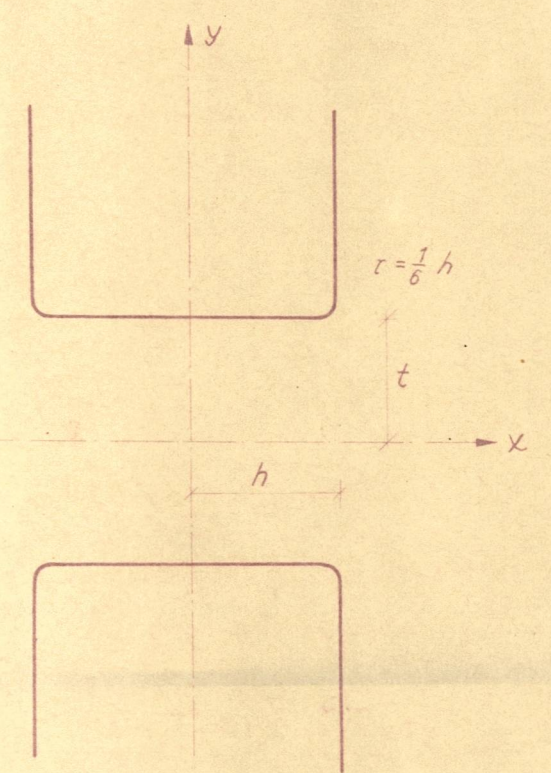


Sl. IV.10

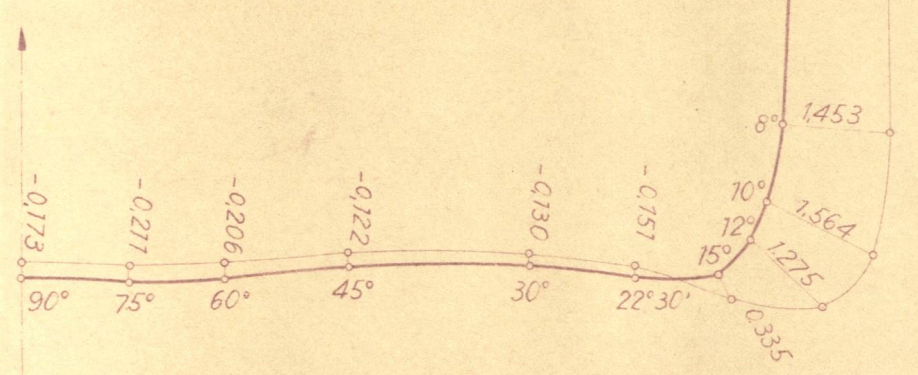
Dijagram daje vrednost u domenu odnosa h/t koji se u praksi uglavnom i javljaju. Za porast odnosa $h/t \rightarrow \infty$, tj. kada srednji deo postaje sve uži, vrednost napona σ_{\max} teži prirodno graničnoj vrednosti 1,00 /srednji deo ploče ovde praktično prestaje saradjevati u preuzimanju opterećenja/.

Drugi je ekstremni slučaj kada odnos $h/t \rightarrow 0$. Toj granici moguće je približavati se ostavljajući h konačno, a povećavajući t preko svake granice - čime bi problem praktički gubio svoj prvobitni karakter, jer bi na taj način dobili beskonačnu ravan sa dva nezavisna jako udaljena otvora - ili, pak, tako da

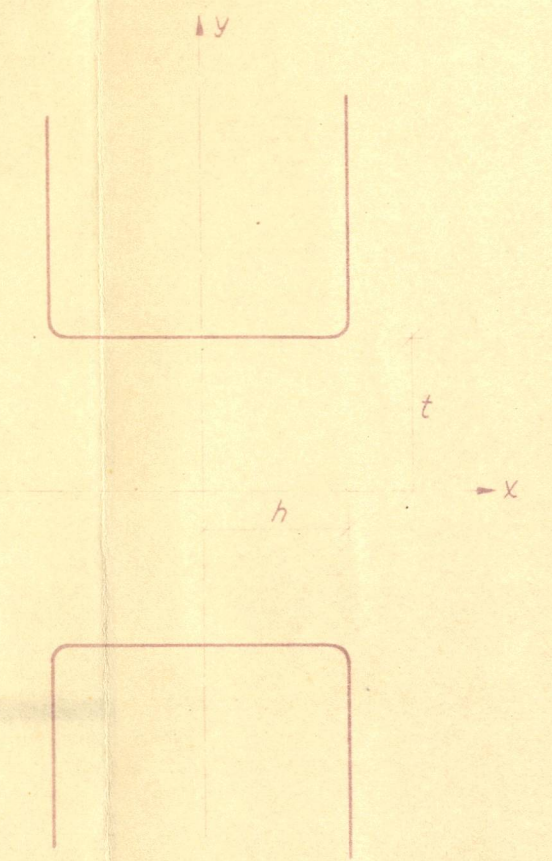
$h:t = 5:4$



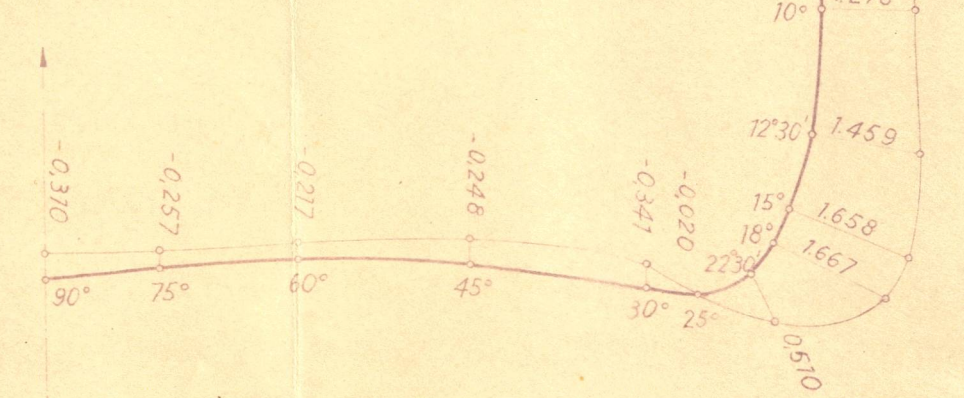
$$Z = 0,223 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,819\xi + 0,169\xi^3 + 0,048\xi^5$$



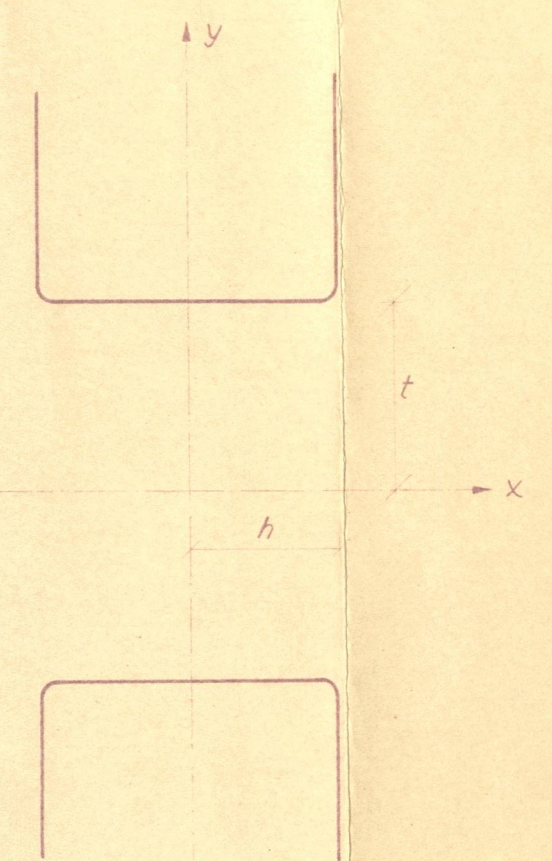
$h:t = 1:1$



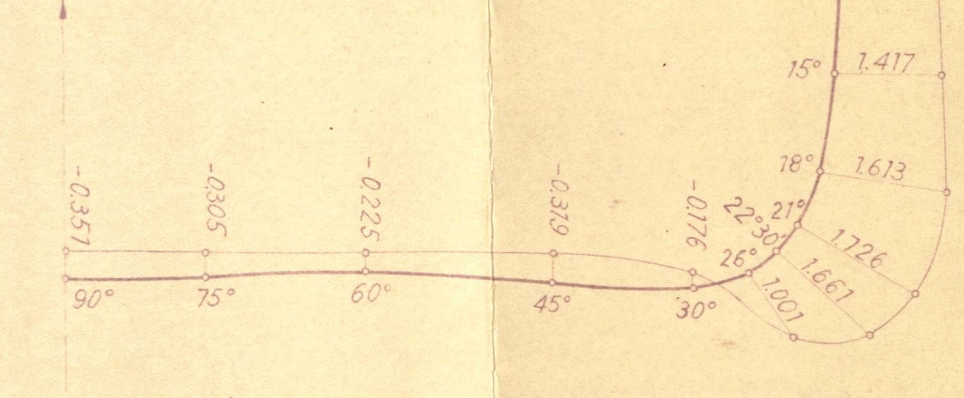
$$Z = 0,400 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,920\xi + 0,130\xi^3$$



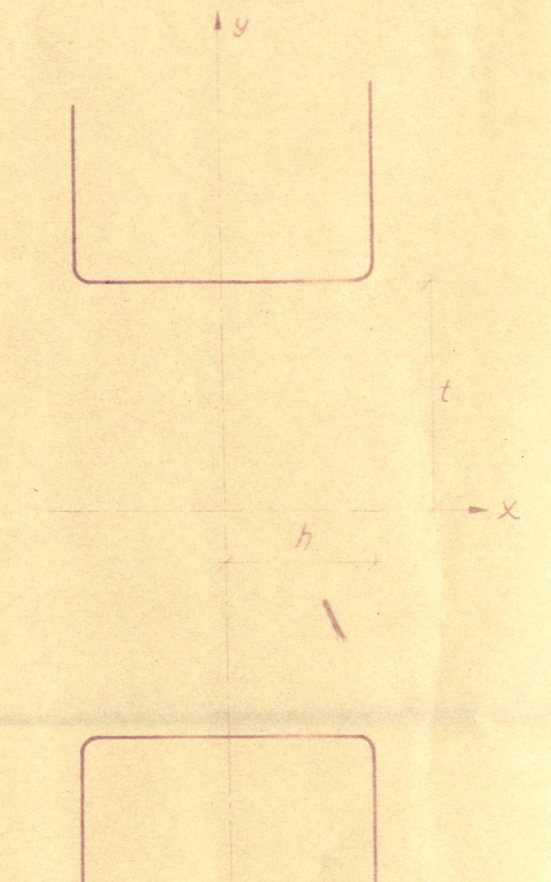
$h:t = 4:5$



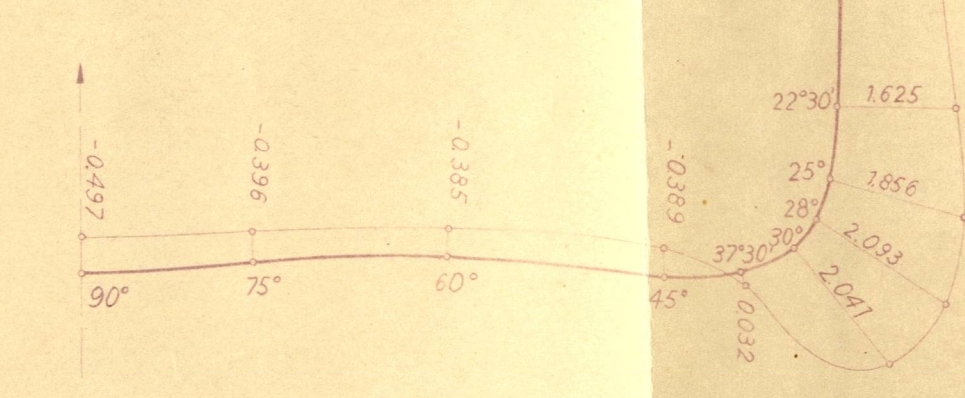
$$Z = 0,602 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,990\xi + 0,090\xi^3 - 0,010\xi^5$$



$h:t = 2:3$



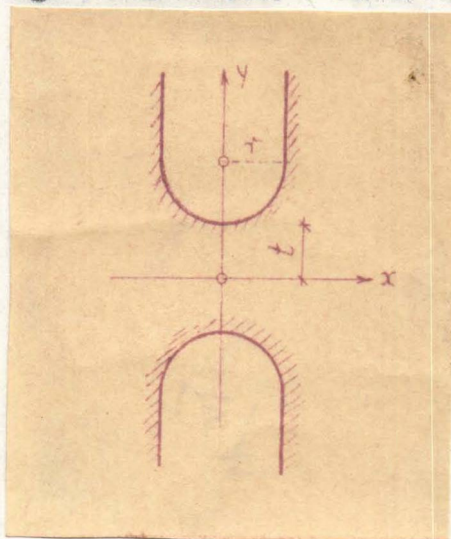
$$Z = 1,010 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 1,050\xi + 0,020\xi^3 - 0,040\xi^5$$



SL. IV.9 DIAGRAM NORMALNOG NAPONA PARALELNO SA KONTUROM

t ostane konačno, a h da $\rightarrow 0$. U tom slučaju dobili bi beskonačnu ravan sa dva oštra zarez. Smatramo da numerički podaci dobiveni sa svega 4 sračunata odnosa h/t ne daju još opravdanje za neko sigurnije ekstrapoliranje dijagrama prema levoj strani na sl. IV.10, gde bih kao granica za koncentraciju napona bila ∞ . Oba ekstremna slučaja, koji svakako pretstavljaju područja od interesa za dalja teoriska razmatranja, izlaze sasvim iz praktičnog okvira postavljenog problema.

Postoji i treći parametar koji bitno utiče na naponsko stanje u posmatranoj ploči. To je poluprečnik krivine r u uglu, odnosno, tačnije rečeno, odnos poluprečnika krivine prema jednoj od dimenzija h ili t . U dosadašnjim razmatranjima taj je ^{odnos} poluprečnik uzet kao konstantan / $r = \frac{1}{8} h$ /, čime se uglavnom približavamo stanju realizovanom pri konstrukciji brodske palube. Naravno da se približnom funkcijom preslikavanja u području oko zaobljenja u uglu ne može tačnije analizirati naponsko stanje u zavisnosti od promene odnosa $\frac{r}{h}$ ili $\frac{r}{t}$. Taj parametar bilo bi moguće uneti u obrasce za konturne napone u najprostijem slučaju kada otvor ima oblik polukruga /sl. IV.11/. M.Kikukawa [24] dao je za takvo područje dijagram koncentracije napona i faktor koncentracije napona u zavisnosti od odnosa $\frac{t}{r}$, ali za slučaj da dejstvuje zatezanje paralelno sa osom X , te je svoje rezultate uporedio sa Neuber-ovim slučajem zarez hiperboličnog oblika [34].



Sl. IV. 11

IV. 4 DETALJNI RAČUN NAPONSKOG STANJA ZA ODNOS $b/t = 1/4$

Funkcija preslikavanja bila je za taj slučaj usvojena u obliku /IV.48/

$$\omega(\xi) \equiv Z = 0,400 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0,920 \xi + 0,130 \xi^3$$

Polazimo od jednačina /IV.27/ za komponentalne napone i konturnog uslova /IV.28/, gde samo funkcijama $F(\xi)$ i $G(\xi)$ moramo, prema onome što je rečeno ranije, superponirati funkcije $F_1(\xi)$ i $G_1(\xi)$. Jednačina /IV.27/ tada prelaze u oblik:

$$\widehat{p}_p + \widehat{p}_N = 4 \cdot \operatorname{Re} \frac{F(\xi) + F_1(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

$$\widehat{p}_p + i \cdot \widehat{p}_g = \frac{1}{\omega'(\xi)} \left[F(\xi) + F_1(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\omega(\xi) + \bar{\omega}(\frac{\xi^2}{\xi})}{\bar{\omega}'(\frac{\xi^2}{\xi})} \right\} \right] \quad /IV.50/$$

$$\cdot \left(\bar{F}(\frac{\xi^2}{\xi}) + \bar{F}_1(\frac{\xi^2}{\xi}) \right) \left. \right\} - \frac{\xi^2}{\xi^2} \left\{ \bar{G}(\frac{\xi^2}{\xi}) + \bar{G}_1(\frac{\xi^2}{\xi}) \right\} \right]$$

Kako prema /IV.34/ imamo

$$F_1(\xi) = \frac{1}{4} \omega'(\xi) \quad G_1(\xi) = \frac{1}{4} \omega'(\xi)$$

to prva od jednačina /IV.50/ dobiva oblik

$$\widehat{p}_p + \widehat{p}_N = 1 + 4 \cdot \operatorname{Re} \frac{F(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad /IV.51/$$

a konturni uslov /IV.28/ prelazi u /IV.35/.

Iz jednačine /IV.35/ i funkcije preslikavanja /IV.48/ dolazimo na ranije opisan način do funkcije $F(\xi)$:

$$F(\xi) = -0,2845 - 0,1109 \xi^2 \quad /IV.52/$$

Iz jednačine /IV.35/ dobiva se tada funkcija $G(\xi)$ u vrlo glomaznom obliku

$$G(\xi) = +0,0841\xi^4 + 0,1755\xi^2 - 0,1950\xi^{-2} - 0,4600 + \frac{M}{N}, \text{ gde je}$$

$$M = -0,1465\xi^{18} - 0,0727\xi^{16} + 0,4006\xi^{14} - 1,6675\xi^{12} + 0,5007\xi^{10} +$$

$$+ 1,0418\xi^8 - 0,0276\xi^6 - 0,0988\xi^4 + 0,0531\xi^2 + 0,0169$$

/IV.53/

$$N = +1,7424\xi^{14} - 2,7720\xi^{12} + 1,4721\xi^{10} + 0,7356\xi^8 -$$

$$- 0,7994\xi^6 + 0,1092\xi^4 + 0,1521\xi^2$$

Izrazima /IV.52/ i /IV.53/ odredjen je kompleksni potencijal za datu ploču, pa je sada moguće neposredno računanje komponentalnih napona. Iz /IV.51/ dobiva se za prvu invarijantu stanja napona izraz

$$g_1 \equiv \hat{p}\hat{p} + \hat{n}\hat{n} = \frac{A}{B}, \text{ gde je}$$

$$A = +0,2402 + 0,8417\rho^2 \cos 2\eta + \rho^4(-0,1208 \cos 4\eta - 0,8215) + \rho^6(+0,0002 \cos 6\eta +$$

$$+ 0,2259 \cos 2\eta) + \rho^8(+0,3614 \cos 4\eta - 0,0155) - 0,0507\rho^{10} \cos 2\eta - 0,0209\rho^{12} \text{ /IV.54/}$$

$$B = +1,7424 - 2,7720\rho^2 \cos 2\eta + \rho^4(+0,3696 \cos 6\eta + 1,1025) + \rho^6(+1,0296 \cos 6\eta -$$

$$- 0,2940 \cos 2\eta) + \rho^8(-0,8190 \cos 4\eta + 0,0196) + 0,1092\rho^{10} \cos 2\eta + 0,1521\rho^{12}$$

Ovde su ρ i η krivolinijske koordinate u (ξ) -ravni, te uvođenjem posebnih vrednosti za ρ i η dobivamo iz /IV.54/ numerički zbir glavnih napona. Izraz je dosta dugačak, ali je još uvek relativno prost prema onome koji proizilazi za desnu stranu jednačine /IV.50/. Ta jednačina razdvajanjem na realni i imaginarni deo daje eksplicitne vrednosti za napone $\hat{p}\hat{p}$ i $\hat{n}\hat{n}$. Kada odatle sračunamo

$\widehat{\rho\rho}$, iz /IV.54/ dobivamo i $\widehat{\rho\vartheta}$, pa je time ravnopravno problem definitivno rešen.

Vrednosti za komponentalne napone $\widehat{\rho\rho}$ i $\widehat{\rho\vartheta}$ dobivaju se konačno u obliku

$$\widehat{\rho\rho} = \frac{A'B' + A''B''}{B'^2 + B''^2} + \frac{C'D' + C''D''}{D'^2 + D''^2} \quad \text{/IV.55/}$$

$$\widehat{\rho\vartheta} = \frac{A''B' - A'B''}{B'^2 + B''^2} + \frac{C''D' - C'D''}{D'^2 + D''^2}$$

gde je

$$\begin{aligned} A' &= \sum_{n=0}^5 A_{2n} \rho^{2n} \cos(2n\vartheta); & A'' &= \sum_{n=0}^5 A_{2n} \rho^{2n} \sin(2n\vartheta) \\ B' &= \sum_{n=0}^5 B_{2n} \rho^{2n} \cos(2n\vartheta); & B'' &= \sum_{n=0}^5 B_{2n} \rho^{2n} \sin(2n\vartheta) \\ C' &= \sum_{n=0}^9 C_{2n} \rho^{2n} \cos(2n\vartheta); & C'' &= \sum_{n=0}^9 C_{2n} \rho^{2n} \sin(2n\vartheta) \\ D' &= \sum_{n=0}^9 D_{2n} \rho^{2n} \cos(2n\vartheta); & D'' &= \sum_{n=0}^9 D_{2n} \rho^{2n} \sin(2n\vartheta) \end{aligned} \quad \text{/IV.56/}$$

a koeficijenti A_{2n} , B_{2n} , C_{2n} , D_{2n} dati su u tabeli IV.12. Iz ovih koeficijenata može se odmah uočiti da za $\rho=1$ svi koeficijenti A i C postaju nule, što je i potrebno, jer je na konturi u konačnosti napon $\widehat{\rho\rho}$ svuda jednak nuli.

Na sl. IV.13 prikazan je sistem krivolinijskih koordinata u (ξ) -ravni, koje odgovaraju koncentričnim krugovima $\rho = \text{const}$ i radialnim pravcima $\vartheta = \text{const}$ u jediničnom krugu $|\xi| < 1$. U završnoj tabeli prikazan je prelaz iz krivolinijskih na Dekartove koordinate za niz tačaka u (ξ) -ravni.

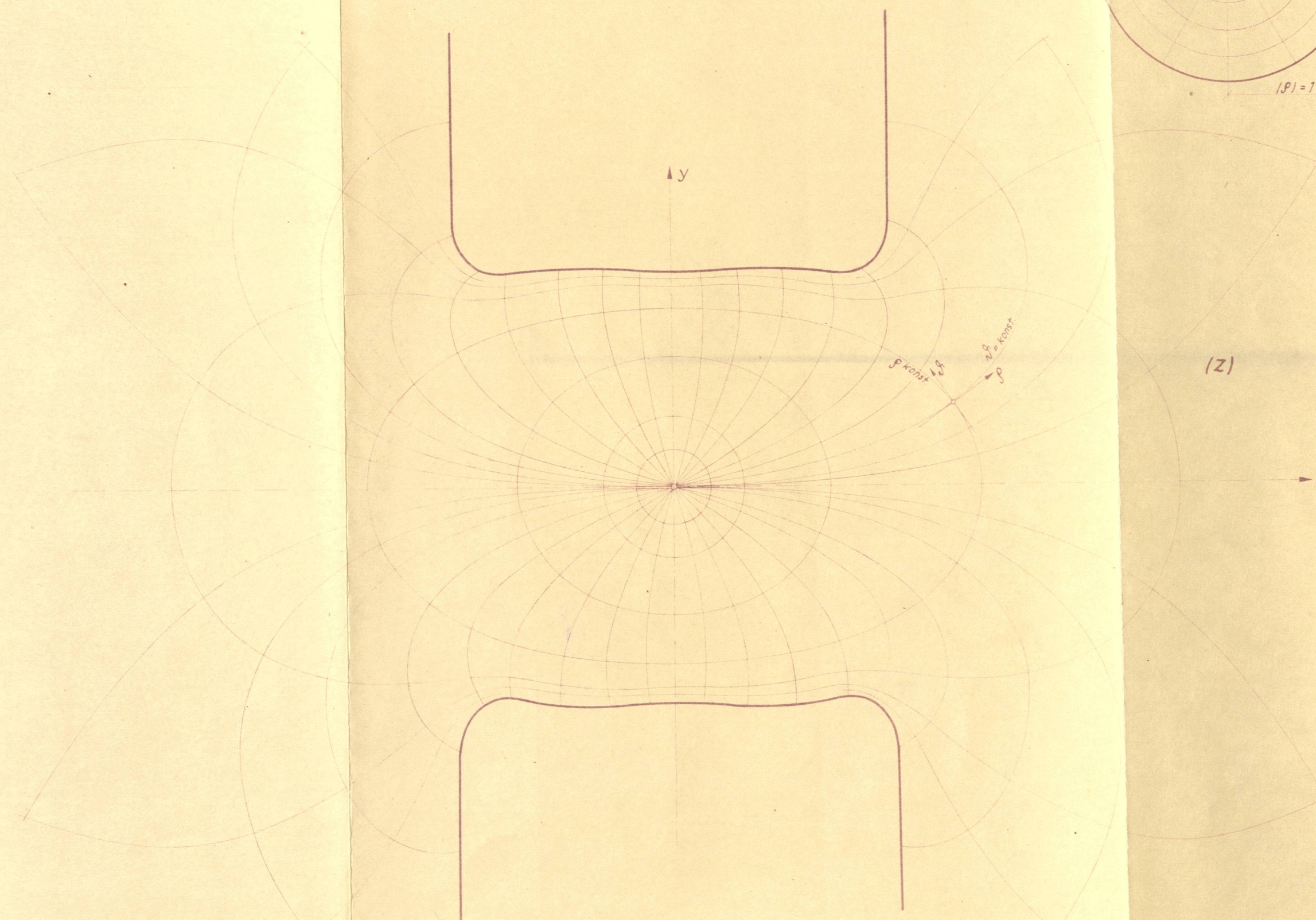
	ρ^0	ρ^2	ρ^4	ρ^6	ρ^8	ρ^{10}	ρ^{12}	ρ^{14}
A_{10}	-0.0841			+0.0841				
A_8	+0.1682	-0.0073	+0.0073		-0.1682			
A_6	-0.0841	+0.0146	-0.0669	+0.0669	-0.0146			+0.0841
A_4		-0.0073	+0.3755	-0.1338	+0.1338	-0.3755	+0.0073	
A_2				+0.0669	-0.7510	+0.7510	-0.0669	
A_0						-0.3755	+0.3755	

	ρ^6	ρ^{10}	ρ^{14}
B_{10}	+0.3900		
B_8	+0.1400	-0.7800	
B_6	-1.0500	-0.2800	+0.3900
B_4	+1.3200	+2.1000	+0.1400
B_2		-2.6400	-1.0500
B_0			+1.3200

	ρ^0	ρ^2	ρ^4	ρ^6	ρ^8	ρ^{10}	ρ^{12}	ρ^{14}	ρ^{16}	ρ^{18}	ρ^{20}	ρ^{22}	ρ^{24}	ρ^{26}	ρ^{28}	ρ^{30}
C_{18}	+0.1465			-0.1465												
C_{16}	-0.2930	+0.0727	-0.0525			+0.2728										
C_{14}	+0.1465	-0.1454	+0.3945	+0.0951	-0.2776		-0.2131									
C_{12}		+0.0727	-0.4957	-0.1907	+0.3429	+0.2639	+0.0289		-0.0221							
C_{10}				+0.0350	+0.3847	-0.5281	+0.2712	-0.4873	+0.1200		+0.1445					
C_8						+0.2640	-0.5699	+0.9735	-0.3075	-0.5464	+0.2043		-0.0180			
C_6							-0.4872	+0.1081	+1.0928	-0.8257	+0.1448	-0.0173		-0.0155		
C_4										-0.5464	+0.7065	-0.1896	+0.0796	+0.0572	-0.0073	
C_2												+0.1448	-0.0764	-0.1144	+0.0460	
C_0														+0.0572	-0.0972	
D_{18}				+0.6795												
D_{16}				+0.2439		-1.0811										
D_{14}				-1.8295		-0.3881		+0.5741								
D_{12}				+2.3000		+2.9106		+0.2061		+0.2869						
D_{10}						-3.6590		-1.5457		-0.1030		-0.3118				
D_8								-1.9432		-0.7724		-0.1119		+0.0426		
D_6									+0.9710		+0.6334		+0.0153		+0.0593	
D_4											-1.0522		-0.1147		+0.0213	
D_2													+0.1441		-0.1597	
D_0															+0.2008	

TABELA (IV.12)

$$\omega = Z = 0.400 \frac{\xi}{1-\xi^2} + 0.920 \xi + 0.130 \xi^3$$



SL. IV.13.

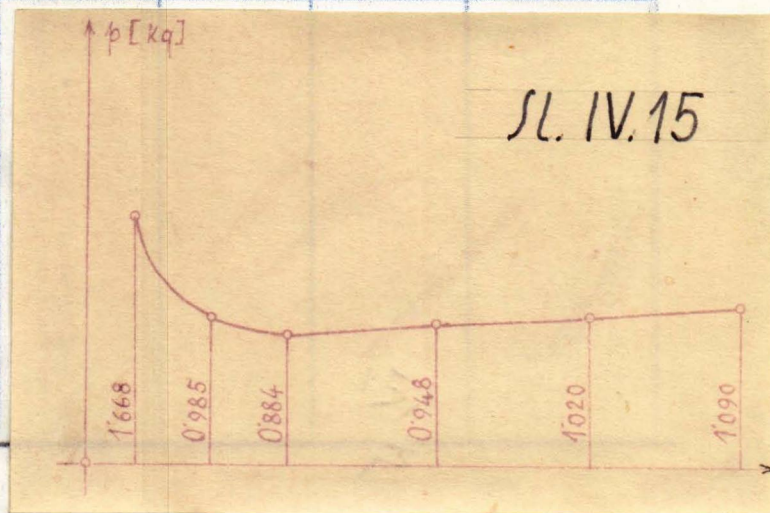
Na sl. IV.14 prikazani su numerički rezultati za glavne napone na konturi i po osama simetrije, sračunati prema gornjim obrascima. Na istom crtežu dati su i rezultati dobiveni diferentnim postupkom i metodom Fotoelastičnosti, te se može uočiti relativno dobro podudaranje rezultata. Naravno da naponi dobiveni primenom Teorije kompleksnih funkcija sporije rastu prema vrednosti $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1,00$ kod pomeranja po osi x , jer je područje uzeto kao beskonačno veliko, te se tek u tački z_∞ dostiže vrednost $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1,00$.

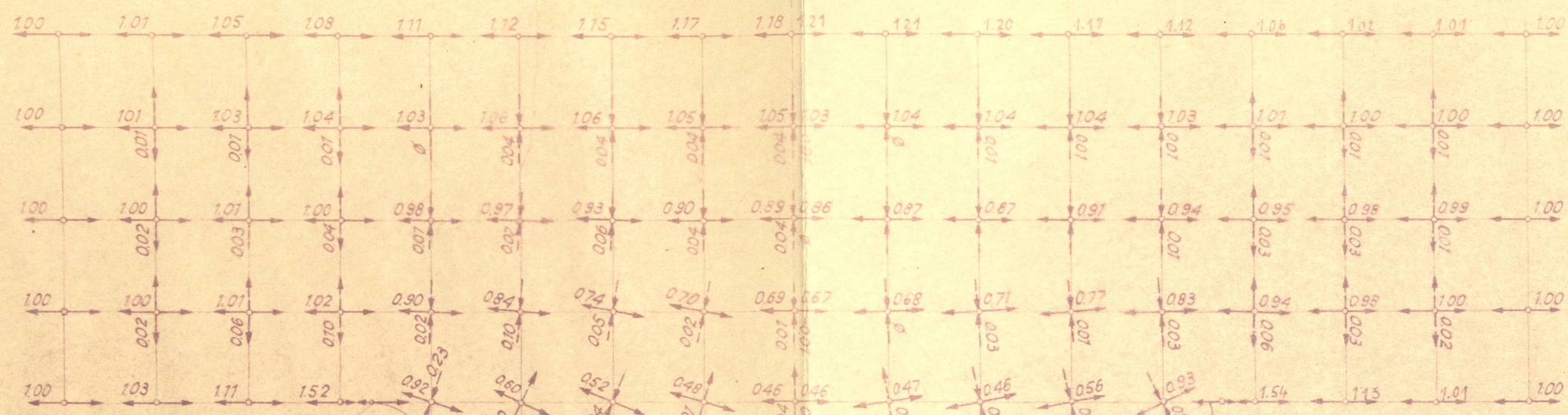
Na sl. IV.15 prikazan je prema rezultatima dobivenim diferencnim računom dijagram maksimalnog normalnog napona za tačke poprečnog preseka uzetog na onom mestu gde postoji koncentracija napona /v. presek I - I, sl. IV.14/.

TABELARNI PREGLED KOORDINATA ZA PRELAZ IZ KRIVOLINISKIH U DEKARTOVE KOORDINATE

ρ	ν°	x	iy	ρ	ν°	x	iy
1,00	5°	1,042	2,409	0,97	7,5°	1,331	1,616
	7,5°	1,032	1,690		10°	1,175	1,332
	10°	1,019	1,377		12,5°	1,090	1,172
	12,5°	1,001	1,202		15°	1,033	1,078
	15°	0,981	1,102	0,9375	0°	4,059	0
	18°	0,951	1,035		2,5°	3,088	1,491
	22,5°	0,900	0,994		5°	2,055	1,587
	25°	0,868	0,988		7,5°	1,557	1,385
	30°	0,797	0,990		10°	1,313	1,217
	45°	0,560	1,025		12,5°	1,174	1,101
	60°	0,330	1,028		15°	1,084	1,037
	75	0,147	1,005		20	0,964	0,954
90	0	0,990	30	0,791	0,933		

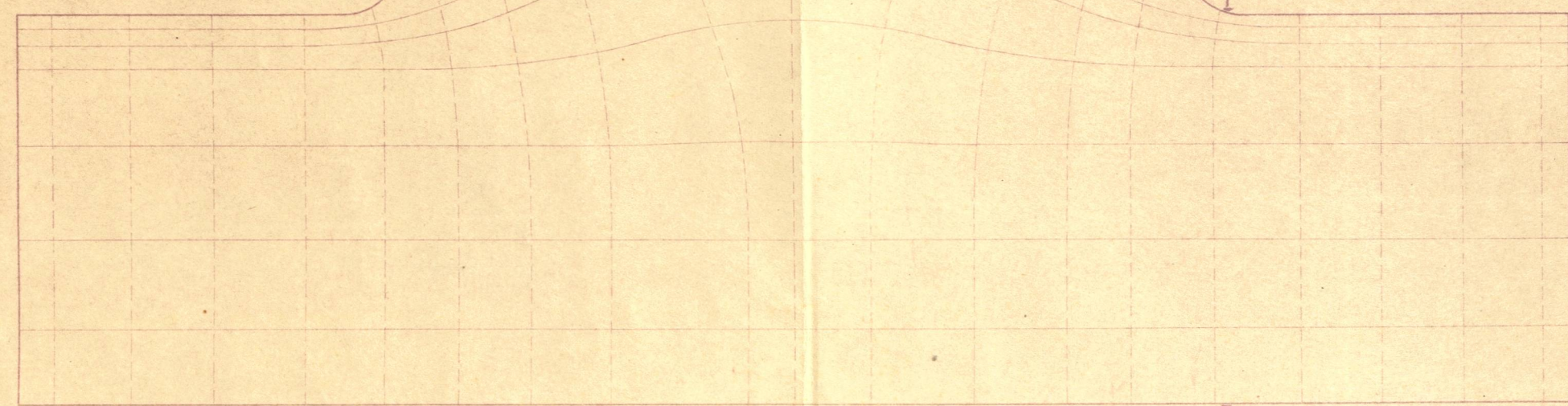
ρ	α	x	iy	ρ	α	x	iy
0,9375	45°	0,552	0,967	0,875	90°	0	0,916
	90°	0	0,955	0,750	"	0	0,827
0,875	0°	2,384	0	0,625		0	0,723
	5°	1,929	0,780	0,375		0	0,469
	10°	1,416	0,911	0,250		0	0,322
	12,5°	1,258	0,902	0,125		0	0,164
	15°	1,144	0,885	0,875	7,5°	1,639	0,891
	20°	0,987	0,862	0,750		1,302	0,379
	30°	0,784	0,866	0,500		0,727	0,123
	60°	0,333	0,925	0,250		0,335	0,047
	75°	0,155	0,940	0,875	45°	0,544	0,907
0,500	15°	0,687	0,234	0,750		0,520	0,779
	20°	0,648	0,297	0,625		0,478	0,642
	30°	0,558	0,400	0,500		0,414	0,503
	60°	0,271	0,563	0,375		0,329	0,367
	75°	0,134	0,594	0,250		0,227	0,239
	90°	0	0,604	0,125		0,116	0,117
1,00	0°		0	0,050		0,047	0,047
0,750		1,431	0				
0,625		1,018	0				
0,500		0,743	0				
0,375		0,527	0				
0,250		0,339	0				
0,125		0,172	0				





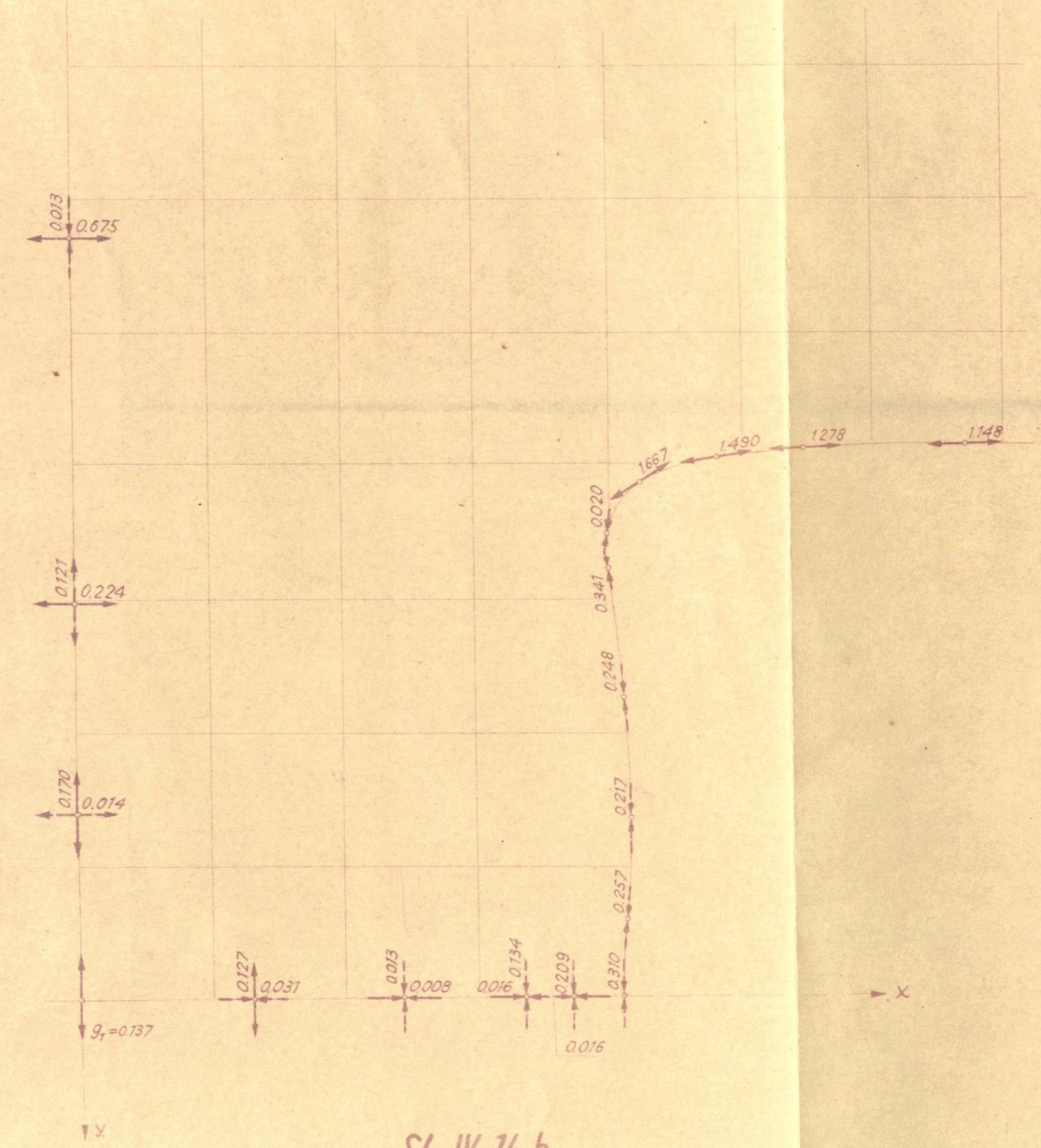
Rezultati dobiveni
metodom fotoelastičnosti

Rezultati dobiveni
diferencnim postupkom



SL. IV. 14.a

Rezultati dobiveni teorijom kompl. funkcija



SL. IV. 14.b

V. ZAKLJUČAK

Dobiveni rezultati pokazuju da koncentracija napona kod zaobljenja u uglu ima veličinu koja svakako nije zanemarljiva. U dijagramima /IV.9/ dat je porast konturnog napona u uglu, a na dijagramu /IV.15/ prikazana je veličina maksimalnog normalnog napona u preseku poprečnom na konturu na onom mestu gde je konturni napon najveći. Oba dijagrama zajedno daju inženjeru - konstrukteru već dobre indicije za dimenzionisanje ojačanja ploče u području oko ugla.

Medjutim, problem dimenzionisanja takve ploče na palubi broda time nije završen. U uvodu je napomenuto da se paluba nalazi naizmenično u stanju pritiska i zatezanja. Time se otvara nova problematika u dva pravca: jedno je ispitivanje stabilnosti ovakve ploče u stadiju pritiska, a drugo je ispitivanje zamora materijala zbog naizmeničnog pritiska i zatezanja. U ovom radu taj deo problema nije obradjen. Vrlo iscrpnu studiju o zamoru materijala u okolini otvora, dokumentovanu obimnim eksperimentalnim podacima, dao je H.L.Cox [32].

Na kraju potrebno je kritički rezimirati neka iskustva stečena tokom ovog rada, kao i dati neke opšte napomene o primenjenim metodama. Primenom diferencnog računa i metode relaksacije, kao i primenom fotoelastičnog ispitivanja može se principijelno rešiti svaki slučaj ravnog problema. Napominjemo ovde da je diferencni postupak jednako dobro primenljiv bez obzira na to da li su konturni uslovi dati po naponima, po pomeranjima ili mešovito. Kod primene metode Fotoelastičnosti druga dva slučaja zasada su veoma slabo razradjena.

Ako se u problemu traži odjednom kompletna kvalitativna slika naponskog stanja, eventualno još i koncentracija napona, onda

Fotoelastičnost dovodi najbrže do cilja. Ako se traži kvantitativna analiza sa određenim stepenom tačnosti, diferencni postupak svakako je brži i tačniji. U pogledu stepena tačnosti postoji ovde bitna razlika: kod diferencnog postupka mi svesno biramo formule aproksimacije da bi dobili željenu tačnost, dok smo kod fotoelastičnih ispitivanja vezani relativno jakim subjektivnim momentom kod čitanja dobivenih rezultata iz prilično širokih i neodređenih tamnih krivih linija, odnosno mogućnošću unošenja sistematskih grešaka zbog nedovoljno tačno obradjenog modela i priručnog instrumentarija, kao i zbog eventualnih tehnoloških nedostataka upotrebljenog providnog materijala.

Za uspešnu primenu relaksacionog postupka, naročito kod biharmoniskih problema, potrebna je velika rutina i intuicija, zbog toga što je proces konvergencije veoma spor i osetljiv, dok fotoelastično ispitivanje zahteva besprekorne uslove laboratoriskog rada, pre svega dobro izbežban personal koji priprema modele i izvodi opte. Broj računskih operacija potrebnih za dobivanje definitivnih rezultata mnogo je veći kod diferencnog postupka, ali zato priprezni radovi za fotoelastično ispitivanje mogu često biti duži nego sam ~~opte~~ i obrada dobivenih rezultata.

Pri primeni relaksacionih metoda poželjno je da je diferencijalna jednačina problema linearna, da su konturni uslovi dati po zatvorenoj konturi i da su takodje linearni, da je rešenje problema jednoznačno i bez singulariteta. Međjutim, i takvi problemi uspešno se rešavaju primenom diferencnog postupka, samo je račun ovde znatno duži i komplikovaniji /na pr., problem odredjivanja singulariteta u nekoj tački zahteva primenu višestrukog smanjivanja raspona mreže u okolini te tačke/. Da spomenemo još i to - isti postupak primenjuje se sa uspehom i kod prostornih problema - ali ovde je račun veštoliko obiman da se može racionalno savladati upotrebom

elektronskih računskih mašina.

Proces likvidacije residuala ne konvergira uvek. Temple [16a] je dokazao da je proces konvergentan, ako je sistem linearnih jednačina dobiven iz uslova da je neka pozitivno definitna kvadratna funkcija datih promenljivih minimum. Međutim, pitanje teoriske konvergencije nije kod relaksacionih procesa najvažnije. Značajnija je praktična konvergencija, koja, međutim, može po [neki] put biti toliko spora da metodu čini neupotrebljivom. Ali i ovde se pogodnim grupnim relaksacijama može ubrzati taj proces, te veština autora igra ovde bitnu ulogu.

Još je jedno važno pitanje vezano za rezultate dobivene fotoelastičnim putem na modelu: kako te rezultate primeniti na originalnu konstrukciju?

U slučaju da je ploča u stanju generalisanog ravnog naprežanja, a područje je prosto vezano, unutar granice elastičnosti stanje napona je nezavisno od materijala. Rezultati dobiveni fotoelastičnim putem mogu se, dakle, preneti prostom proporcijom na originalnu konstrukciju. Ako je područje višestruko vezano, a na konturama otvora dejstvuju spoljašnje sile, stanje napona zavisi od materijala. Eksperimenti su, međutim, pokazali da ta činjenica ipak ne unosi znatnije greške za slučaj ravnog naponskog stanja. Kod prostornog problema ove su razlike već značajnije.

Kod ravnog stanja napona mora model u svojoj srednjoj ravni biti geometrijski sličan originalu. Odnos debljina ne mora ovde biti isti kao i odnos ostalih dimenzija, jedino treba paziti da odnos debljine prema širini na modelu bude barem toliki da je ravno stanje napona stvarno i realizovano. Pretpostavivši da su svi ovi geometrijski uslovi ispunjeni i da je naprežanje unutar granice elastičnosti, odnos napona P u nekoj tački originala prema naponu p u odgovarajućoj tački modela dat je izrazom:

$$\frac{P}{p} = \frac{W}{w} \cdot \frac{L}{L} \cdot \frac{t}{T}$$

gde je $\frac{W}{w}$ odnos opterećenja, $\frac{L}{L}$ odnos linearnih dimenzija u ravni ploče, a $\frac{T}{t}$ odnos debljina /velika slova odnose se na originalnu konstrukciju/.

Uporedna analiza dveju spomenutih metoda dovodi do zaključka da se ne može postaviti neko jasno razgraničenje o izboru metode, već taj izbor treba izvršiti prema formulaciji datog problema i zahtevima koji se pri rešenju traže. Ako je moguće, najbolje je raditi uporedo na oba načina.

Nezavisno od diferencnog postupka i metode Fotoelastičnosti ima primena Teorija kompleksnih funkcija svoje opravdanje kod određenih tipova problema. Za prosto vezana područja /kao što je, na pr., razmatrani problem/ primena ove metode ima praktičnog smisla jedino za određivanje napona po konturi, odnosno za analizu koncentracije napona pri promeni geometrijskih odnosa dimenzija ploče. Računanje napenskog stanja unutar posmatranog područja toliko je obimno da se za konkretnu primenu ne može preporučiti kao racionalno. Međutim, za beskonačno velika, kao i za višestruko vezana područja, Teorija kompleksnih funkcija je u odnosu na opštu analizu problema i zaključaka izvedenih iz takve analize vrlo efikasna, te njena primena ima ovde, bez obzira na obimnost računice, svoje puno opravdanje. Ovom metodom uspešno su rešeni i mnogi problemi ravnog stanja naprezanja za slučaj anizotropnih sredina.

Dalja razrada Teorije kompleksnih funkcija u Teoriji elastičnosti zahteva primenu Cauchy-evih integrala i integralnih jednačina. Razradjeno je nekoliko numeričkih metoda za rešavanje takvih jednačina /S.G. Mihlin, D.I. Šerman, A.Ya.Gorgidze i dr./, i one su sa uspehom primenjivane i za područja s angularnim tačkama /uglovima/ /L.G.Magnaradze, J.Radon, T.Carleman/.

Primena Teorije kompleksnih funkcija u raznim problemima Teorije elastičnosti i danas se vrlo intenzivno proučava, te u tom pravcu postoji još široka perspektiva ne samo za razne generalizacije kod problematike vezane za ravni problem, već i za mnoge druge oblasti Teorije elastičnosti.

L i t e r a t u r a

U ovom spisku dat je pregled literature koja je korišćena pri radu. Na kraju svakog dela navedene su knjige u kojima postoji opširnija bibliografija iz dotične oblasti.

I, Opšta dela

- [1] S.P.Timoshenko, "Theory of Elasticity", New York, 1951
- [2] S.P.Timoshenko, "History of Strength of Materials", New York, 1953
- [3] A.E.H.Love, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", IV ed., New York, Dover Publ., 1944
- [4] K.Girkmann, "Flächentragwerke", Wien, Springer, 1948
- [5] Biezeno - Grammel, "Technische Dynamik", Berlin, Springer, 1939
- [5a] A.E.Green, W.Zerna, "Theoretical Elasticity", Oxford, 1954

II. Diferencni račun i metoda relaksacije

- [6] R.V. Southwell, "Relaxation methods in Theoretical Physics", Oxford University Press, 1946
- [7] R.V.Southwell, "Relaxation methods in Engineering Sciences", Oxford University Press, 1940
- [8] L.Fox, "Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations", Proc.Roy.Soc., A, 190, 1947
- [9] L.Fox and R.V.Southwell, "Biharmonic analysis as applied to the flexure and extension of flat elastic plates", Phil.Trans.R.S.C., 1, 1941
- [10] D.N. de G.Allen, "Relaxation methods", New York, 1954
- [11] F.S.Shaw, "An Introduction to Relaxation Methods", New York, Dover Publ.Inc., 1953

- [12] R.H.Wood, "A Special Type of Groupe Displacement for Use in the Relaxation Technique", Quart.Journ. Mech.and Appl.Mathem., 1951
- [13] D.N. de G.Allen, S.C.R. Dennis, "Graded Nets in Harmonic and Biharmonic Relaxation", Quart.Journ.Mech.and Appl.Mathem., 1951
- [14] F.Wolf, "Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen", ZAMM, 1926
- [15] L.Collatz, "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen", Springer, 1951
- [16] v.Mises und Geiringer, "Praktisches Verfahren der Gleichungslösung", ZAMM, 1929
- [16a] G.Temple, "The general Theory of Relaxation Methods applied to linear Systems", Proc.Roy.Soc., A, 169, 1939

Opširna bibliografija o ovoj oblasti nalazi se u delima navedenim pod [10] i [11] .

III. Fotoelastičnost

- [17] F.G.Cooker, L.N.G.Filon, "Treatise on Photoelasticity", Cambridge, 1930
- [18] M.M.Frocht, "Photoelasticity", I, New York, 1949
- [19] M.M.Frocht, "Photoelasticity", II, New York, 1948
- [20] H.T.Jessup and F.C.Harris, "Photoelasticity", London, 1949
- [21] A.Pirard, "La Photoélasticité", Paris et Liege, 1947
- [22] M.Hetenyi, "Handbook of Experimental Stress Analysis", New York - London, 1950

Opširniji pregled radova uz te oblasti v. [18] i [19] .

IV. Primena Teorije kompleksnih funkcija

- [23] N.I.Mušelišvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Groningen, 1953

- [24] M. Kikukawa, "On Plane - Stress Problems in Domains of arbitrary Profiles", Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1954
- [25] N. Davy, "The Field between Equal Semi - infinite Rectangular Electrodes or Magnetic Pole - pieces", Phil. Mag. Journ. Sc., 1944
- [26] L. Föppl, "Konforme Abbildung ebener Spannungszustände", ZAMM, 1931
- [27] И. И. Криваров, "Введение в теорию функций комплексного переменного", Москва, 1954.
- [28] Я. И. Смирнов, "Курс высшей математики", Москва, 1953.
- [29] A. E. H. Love, "Biharmonical Analysis" Journ. London Math. Soc., 1928
- [30] S. L. Green, "The Theory and Use of Complex Variable",
- [31] М. А. Рабренителъ, "Конформные отображения", Москва, 1946.
- [32] H. L. Cox, "Four Studies in the Theory of Stress Concentration", London, 1953, Aeronautical Research Council
- [33] E. Goursat, "Sur l'équation $\Delta\Delta w = 0$ ", Bull. Soc. Math. France, 1898
- [34] G. Neuber, "Kerbspannungslehre", (ruski prevod - 1947.)

Vrlo opširna bibliografija o ovoj oblasti nalazi se u radu pod [23] .

S A D R Ž A J

	Str.
I. UVOD	
I.1 Formulisanje problema	1
I.2 Osnovne oznake upotrebljene u ovom radu	1
I.3 Diferencijalne jednačine problema	3
I.4 Kratak istoriski pregled rešavanja ravnog problema	5
I.5 Izbor metoda i raspored gradiva	8
II. REŠENJE PROBLEMA DIFERENCNIM RAČUNOM	
II.1 Uvod	11
II.2 Neki osnovni pojmovi iz diferencnog računa i metode relaksacije	11
II.3 Odredjivanje Airy-eve funkcije napona po konturi	17
II.4 Račun za grubu mrežu	18
II.5 Račun za finiju mrežu	24
II.6 Smanjivanje raspona mreže u okolini ugla ploče	30
III. REŠENJE PROBLEMA METODOM FOTOELASTIČNOSTI	39
III.1 Uvodne napomene	40
III.2 Neki osnovni pojmovi iz Fotoelastičnosti	42
III.3 Optičko baždarenje materijala	45
III.4 Eksperimentisanje na modelu i razrada osnovnih podataka	50
III.5 Odredjivanje vrednosti glavnih napona i	55
III.6 Odredjivanje glavnih napona u posmatranom modelu	64

IV. REŠENJE PROŠIRENOG PROBLEMA PRIMENOM TEORIJE

KOMPLEKSNIH FUNKCIJA

IV.1 Osnovne jednačine ravnog problema u kompleks- nom obliku	70
IV.2 Primena konformnog preslikavanja	75
IV.3 Numeričko određivanje stanja napona	87
IV.4 Detaljni račun naponskog stanja za odnos	97
V. ZAKLJUČAK	102
LITERATURA	107

Beograd, jula 1956.

Ing Vlaho Jović.

