GRAĐEVINSKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

STANKO BRČIĆ

DINAMIČKO PONAŠANJE KONSTRUKCIJA U FLUIDNOJ SREDINI

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD
1987

5

GRADJEVINSKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

STANKO BRČIĆ

DINAMIČKO PONAŠANJE KONSTRUKCIJA U FLUIDNOJ SREDINI

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1987. GODINE

Najtoplije se zahvaljujem svom profesoru, akademiku dr. Nikoli Hajdinu, mentoru ovog rada, na inicijativi i ideji za ovaj rad, kao i na pomoći i podršci u toku izrade rada.

Razumevanje i pomoć kolega sa Katedre za mehaniku, prof. dr. Natalije Naerlović-Veljković, doc. dr. Dragoljuba Grbića, mr. Rastislava Mandića i mr. Dragoslava Šumarca, su mi bitno omogućili da brže završim posao na ovom radu, na čemu im se najsrdačnije zahvaljujem. Takodje se zahvaljujem i svim drugovima i kolegama u Inženjersko-računskom centru Gradjevinskog fakulteta na pomoći tokom izrade i testiranja programa.

Najzad, zadovoljstvo mi je da se zahvalim Ugrica Nadi i Krstić Draganu na izuzetno uspeloj tehničkoj obradi ovog teksta.

Stanko Brčić

S A D R Ž A J

III DINAMIČKO PONAŠANJE KONSTRUKCIJA

IV MEDJUSOBNA INTERAKCIJA FLUIDA I KONSTRUKCIJA

V NUMERIČKA REALIZACIJA INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJE

I. UVODNA RAZMATRANJA O INTERAKCIJI FLUIDA I KONSTRUKCIJA

1. UOBIČAJEN PRISTUP INTERAKCIJI FLUIDA I KONSTRUKCIJA

Sve gradjevinske konstrukcije, izuzev podzemnih objekata, se nalaze u fluidnoj sredini, pri čemu je fluidna sredina uglavnom vazduh ili voda. Znači, najveći deo konstrukcija je "uronjen" u fluid, odnosno fluid opstrujava oko konstrukcija. Osim toga, odredjeni specifični objekti, kao što su cevovodi, vodotornjevi i drugi rezervoari, sadrže u sebi neki fluid koji se ili kreće ili je manje-više u stanju mirovanja. Pri tome je uvek prisutan medjusoban uticaj jednog medijuma (solida, konstrukcije) na drugi (fluid) i obrnuto, tako da se u inženjerskim proračunima konstrukcija uvek uzima u obzir i uticaj fluida.

U nekim situacijama je uticaj fluida na konstrukciju manje izražen, ili čak, inženjerski gledano, zanemarljiv, dok je u drugim situacijama to primaran uticaj koji mora da se što potpunije obuhvati.

Ovaj rad se odnosi na probleme medjusobne dinamičke interakcije fluida i konstrukcija u situacijama opstrujavanja fluida oko konstrukcija, dok se problemi unutrašnjeg kretanja fluida u konstrukcijama ne razmatraju, iako je i to značajna oblast sadejstva fluida i konstrukcije. Takodje je u samom nazivu rada usvojen termin "fluid", a ne "vetar", iako se razmatraju konstrukcije kao što su visoke zgrade, dimnjaci i tornjevi, znači objekti koji su izloženi opstrujavanju vetra, a ne vode. Ovo je uradjeno namerno, iz dva osnovna razloga. Prvo, problematika uticaja vetra je veoma kompleksna i još nedovoljno ispitana naučno-tehnička disciplina. Drugo, predloženi način razmatranja medjusobnog sadejstva fluida i konstrukcija je bitno različit od za sada uobičajenog, tako da je potrebno još dosta dopunske nadgradnje da bi predložen pristup bio praktično primenljiv u problematici uticaja vetra na konstrukcije (a time i opravdao termin "vetar" u nazivu rada).

Uobičajen i opšte prihvaćen pristup izučavanju kako uticaja vetra na konstrukcije, tako i uticaja vode (posebno kod platformi za eksploataciju nafte), sastoji se u tome da se direktno definišu rezultujuće sile kojima vetar ili voda deluju na konstrukciju. Ovde je posebno kompleksna problematika uticaja vetra (videti, na pr. | I.5 |).

Postoji veoma širok dijapazon mogućnosti i manifestacija medjusobnog sadejstva fluida (vetra) i konstrukcija, koje se ispoljavaju kombinovano i na razne načine, no u odredjenim uslovima jedan od fenomena medjusobne interakcije može da postane dominantan u odnosu na ostale. U zavisnosti od toga koji se od fenomena interakcije izučava, rezultujuće sile kojima fluid deluje na konstrukciju se izražavaju (odnosno usvajaju)u odgovarajućem medjusobno različitom obliku.

U načelu, rezultujuće (aerodinamičke) sile se izražavaju preko tzv. dinamičkog pritiska fluida i odgovarajućih bezdimenzionalnih (aerodinamičkih) koeficijenata. Pri tome u usvojenim izrazima za sile kojima fluid deluje na konstrukciju mogu da figurišu i vreme, kao i funkcije kojima se izražavaju pomeranja odn. obrtanja konstrukcija.

Prisustvo konstrukcije u struji fluida nameće odgovarajuće konturne uslove samom strujanju. Usled uticaja sila kojima fluid deluje na konstrukciju može da dodje do deformisanja (ili kretanja) konstrukcije, a time i do promene konturnih uslova strujanja. Usled promene konturnih uslova dolazi do promene strujanja, a time i do promene u silama kojima fluid deluje na konstrukciju. Nekad su ove sile nezavisne od male promene položaja konstrukcije, a nekad zavise isključivo od relativnog položaja i relativne brzine izmedju konstrukcije i strujanja fluida.

Suština uobičajenog pristupa se zasniva na eksperimentalnom izučavanju pojedinih vidova medjusobne interakcije fluida i konstrukcije i na merenjima aerodinamičkih (ili hidrodinamičkih) sila i drugih parametara kretanja (pomeranja, brzina, ubrzanja, frekvencija itd.). Na osnovu ovih eksperimentalnih ispitivanja se postuliraju izrazi za rezultujuće aerodinamičke sile. U ovim izrazima figuriše čitav niz koeficijenata i drugih parametara kretanja koji se biraju tako da odgovarajući matematički model daje prihvatljiva slaganja sa eksperimentalnim modelom. Znači, ne postoji jedinstven pristup koji bi mogao da obuhvati sve moguće vidove medjusobne interakcije fluida i konstrukcije, već se za svaki od eksperimentalno izučavanih fenomena interakcije predlažu posebni matematički modeli u kojima su, na odgovarajući način, direktno definisane rezultujuće sile kojima fluid deluje na konstrukciju.

2. PREDLOŽEN PRISTUP INTERAKCIJI FLUIDA I KONSTRUKCIJA

Suština ovog rada je u tome da se istovremeno računski posmatraju kako konstrukcija, tako i odgovarajuća šira oblast prostora oko konstrukcije u kojoj se kreće fluid (opstrujava oko konstrukcije). Formulišu se jednačine kratanja fluidne sredine, same konstrukcije, kao i konturni uslovi na kontaktu fluida i konstrukcije. Oba skupa jednačina, za fluidnu sredinu i za konstrukciju, su medjusobno povezana konturnim uslovima, a takodje i "slobodnim" članovima, jer su slobodni članovi u jednom skupu jednačina zavisni od rešenja drugog skupa jednačina, tako da se dobija jedan jedinstven sistem od dva spregnuta skupa jednačina, čijim rešavanjem se istovremeno dolazi do kretanja kako fluida, tako i konstrukcije.

Iako to nije i jedini pristup, kretanje fluidne sredine se opisuje pomoću Navier-Stokes-ovih jednačina i jednačine kontinuiteta. Kako ove nelinearne jednačine nemaju u opštem slučaju rešenje u zatvorenom obliku, to se koristi metoda konačnih elemenata za diskretizaciju oblasti strujanja fluida i samih jednačina. Dobijene diskretizovane jednačine koje opisuju kretanje fluida su obične diferencijalne jednačine prvog reda, vremenski singularne i sa nelinearnim i nesimetričnim matricama, pri čemu su osnovne nepoznate brzine i pritisci fluida u čvornim tačkama usvojene mreže konačnih elemenata.

Trodimenzionalna formulacija kretanja fluidne sredine je u potpunosti analogna sa dvodimenzionalnom, barem kad je reč o teoretskom aspektu. Medjutim, za iole realnije prikazivanje domena strujanja fluida posebno u zonama neposredno oko konstrukcije, potreban je veliki broj konačnih elemenata. Time se broj nepoznatih u trodimenzionalnoj formulaciji izuzetno povećava - tipičan red veličine broja nepoznatih bi bio $10 \div 20000$. Imajući ovo u vidu, kao i pomenutu numeričku osetljivost rešavanja Navier Stokes-ovih jednačina, a takodje i raspoloživ računar, DIGITAL DEC 20/40, u ovom radu se razmatra samo dvodimenzionalna formulacija problema interakcije fluida i konstrukcija.

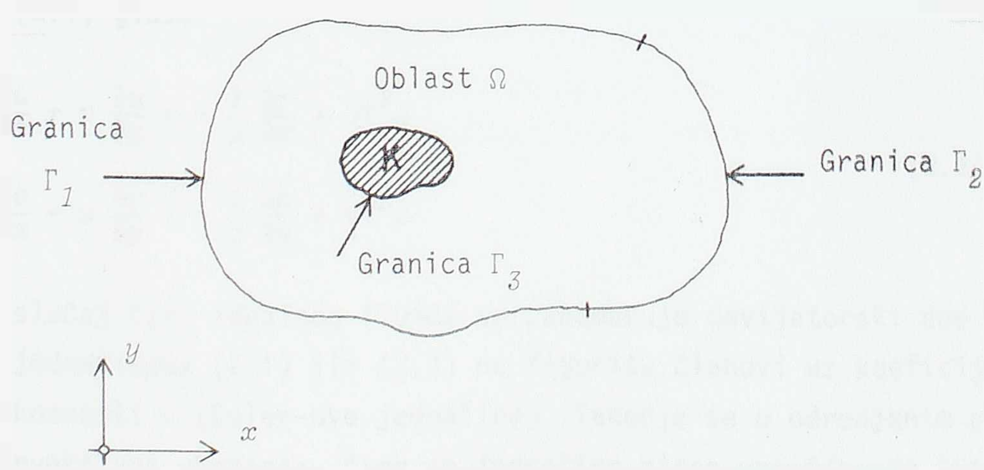
To znači da su i razmatrane konstrukcije (visoke zgrade, dimnjaci, tornjevi) aproksimirane pomoću odgovarajućih dvodimenzionalnih računskih modela sa tri stepena slobode kretanja. Ova tri stepena slobode kretanja dvodimenzionalnih računskih modela konstrukcija su u opštem slučaju medjusobno spregnuta, a u pojedinim slučajevima se svode ili na tri nezavisna stepena slobode, ili na modele sa dva + jedan stepen slobode kretanja. Diskretizacija konstrukcija na ekvivalentne dvodimenzionalne modele može da se izvrši ili primenom Galerkinovog postupka ili modalnom analizom.

II. PONAŠANJE FLUIDNE SREDINE

1. JEDNAČINE DVODIMENZIONALNOG STRUJANJA NESTIŠLJIVOG VISKOZNOG FLUIDA

1.1. Jednačine kretanja - u, v, p formulacija

Kao što je već rečeno- medjusobna interakcija fluida i konstrukcije se posmatra na problemu opstrujavanja fluida oko konstrukcije. Na sl. 2.1 je šematski prikazana dvodimenzionalna predstava prisustva konstrukcije *(K)* u fluidnoj sredini. Strujanje fluida se posmatra unutar neke oblasti Ω, koja sadrži konstrukciju, i unutar koje je strujanje fluida "poremećeno" prisustvom konstrukcije.



Sl. 2.1. Šematski prikaz oblasti strujanja fluida oko konstrukcije i granice fluidne sredine

Za fluid se usvaja da je nestišljiv, kao i da je zanemarljivo svako dovodjenje ili odvodjenje toplote. Prva predpostavka znači da je gustina ρ fluida konstantna, dok iz druge predpostavke sledi da je koeficijent dinamičke viskoznosti μ konstantan.

Kao posledica navedenih predpostavki zakoni balansa količine kretanja i konzervacije mase fluidne sredine se svode na poznate Navier-Stokes-ove jednačine i jednačinu nepromenljivosti mase (jednačinu kontinuiteta). Za dvodimenzionalno strujanje u odnosu na dekartove koordinate xy Navier-Stokes-ove jednačine i jednačina kontinuiteta glase:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2.2)$$

U ovim jednačinama su u i v komponente brzine fluida u odnosu na ose x i y, sa p je obeležen pritisak fluida (odnosno razlika u odnosu na hidrostatički ili atmosferski pritisak), dok je $\nu = \mu/\rho$ i predstavlja koeficijent kinematičke viskoznosti. Sa f_x i f_y su obeležene zapreminske sile fluida, koje se u daljem tekstu zanemaruju, jer se posmatra strujanje u horizontalnoj ravni. Sa t je obeležena vremenska koordinata.

Članovi na levoj strani jednačine (2.1) predstavljaju ubrzanja fluida: prvi član je lokalno ubrzanje, a druga dva člana su konvektivna ubrzanja. U slučaju ustaljenog (stacionarnog) strujanja su lokalna ubrzanja jednaka nuli, pa jednačine (2.1) glase:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v \qquad (2.3)$$

Za slučaj tzv. idealnog fluida se zanemaruje devijatorski deo tenzora napona, pa u jednačinama (2.1) ili (2.3) ne figurišu članovi uz koeficijent kinematičke viskoznosti ν (Euler-ove jednačine). Takodje se u odredjenim primenama zanemaruju konvektivna ubrzanja, čime se jednačine bitno uprošćavaju (Stokes-ove jednačine).

U slučaju dvodimenzionalnog strujanja moguće je da se jednačine kretanja fluida formulišu i pomoću tzv. vrtložne i strujne funkcije ili potencijala brzine. Ovde se posmatra tzv. "u,v,p formulacija" prikazana jednačinama (2.1) i (2.2), gde su brzine i pritisak nepoznate veličine (tzv. "primitivne" promenljive) koje definišu kretanje fluida.

1.2. Granični i početni uslovi

Da bi kretanje fluida u posmatranoj oblasti Ω bilo odredjeno, potrebno je da budu poznati, ili definisani, granični i početni uslovi.

Granični uslovi za brzine mogu da budu definisani na dva načina. Prvo, kao esencijalni (Dirichlet-ovi) uslovi:

$$\begin{aligned} & u_n = \bar{u}_n \\ & v_s = \bar{v}_s \quad \text{na konturi } \Gamma_1 \text{ i } \Gamma_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

gde su na konturi zadate vrednosti brzina fluida u pravcu normale n i tangente s na konturu, ili kao prirodni (Neumann-ovi) uslovi:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma_u \\ & \frac{\partial v}{\partial n} = \gamma_v \quad \text{na konturi } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

gde je $\partial/\partial n$ izvod u pravcu spoljašnje normale na konturu.

Granični uslovi Dirichlet-ovog tipa (2.4) mogu da budu zadati na "ulaznoj" granici posmatrane oblasti Ω, čime se simuliraju poznati uslovi strujanja fluida u oblasti udaljenoj od konstrukcije. Esencijalni uslovi (2.4) se definišu i na kontaktnoj površi fluida i čvrstog tela (konstrukcije). Fluid prianja uz čvrstu granicu i relativna brzina fluida u odnosu na konstrukciju je jednaka nuli. Ako je konstrukcija nepokretna (znači, veoma kruta, a ne fleksibilna), onda su granični uslovi dati sa:

$$\begin{aligned} & u_n = 0 \\ & v_s = 0 \quad \text{na konturi } \Gamma_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Za fleksibilnu konstrukciju, koja se kreće zbog strujanja fluida ili iz drugih razloga, granični su uslovi dati sa (2.4), gde su $\bar{u}_n$ i $\bar{v}_s$ odgovarajuće brzine tačaka konstrukcije.

Prirodni granični uslovi po brzinama (2.5) proističu "prirodno" u izvodjenju diskretizovane forme jednačina metodom težinskih ostataka, kao što će da se vidi kasnije. Uslovi tipa (2.5) mogu da se koriste u simuliranju paralelnog strujanja na primer na izlasku fluida iz posmatrane oblasti Ω.

Navier-Stokes-ove jednačine (2.1) su u svom izvedenom (transformisanom) obliku. Zakon o promeni količine kretanja, kao polazište jednačina (2.1), glasi (napisano u tenzorskoj notaciji):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad (i,j=1,2) \tag{2.7}$$

Ako se tenzor napona σ_{ij} rastavi na sferni i devijatorski deo

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + \sigma^{d}_{ij} \tag{2.8}$$

i iskoriste veze izmedju devijatorskog dela napona i brzina deformacija

$$\sigma^{d}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \, \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{2.9}$$

onda se polazne jednačine (2.7) transformišu na uobičajen oblik (2.1).

Ukoliko se vrši diskretizacija jednačina (2.7) metodom težinskih ostataka, parcijalnom integracijom članova koji potiču od gradijenata napona dolazi se do integrala po konturi oblasti, odnosno do prirodnih (Neumann-ovih) graničnih uslova po površinskim silama. Ako su na konturi Γ_2 zadate vrednosti površinskih sila u pravcu spoljašnje normale n i tangente s na konturu, onda prirodni granični uslovi po silama glase:

$$\begin{aligned} f_n &= - p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} = \bar{f}_n \\ f_s &= \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) = \bar{f}_s \quad \text{na konturi } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sa u_n i v_s su, kao što je rečeno, obeležene komponente brzine fluida u pravcima normale i tangente, a $\bar{f}_n$ i $\bar{f}_s$ su zadate vrednosti površinskih sila.

U literaturi [I.2.2] se navodi da su granični uslovi po silama:

$$f_n = 0 \, , \quad f_s = 0 \tag{2.11}$$

veoma pogodni za konturu na "izlazu" iz oblasti strujanja Ω za slučajeve velikih Reynolds-ovih brojeva (t.j. strujanja sa dominantnim inercijalnim silama). U slučaju da se želi simulacija izlaznog strujanja jednog pravca, mogu da se na izlaznoj konturi koriste uslovi

$$v_s = 0\,, \quad f_n = 0 \quad , \tag{2.12}$$

znači i esencijalni i prirodni uslovi.

Što se tiče pritisaka fluida, granični uslovi po pritiscima nisu konzistentni sa Navier-Stakes-ovim jednačinama. Pritisci su, doduše nezavisne, ali u suštini implicitne promenljive u Navier-Stokes-ovim jednačinama-posledica razlaganja tenzora napona na sferni i devijatorski deo i predpostavke o nestišljivosti fluida usled koje postoje veze izmedju napona i brzina deformacija samo za devijatorske delove.

Sa druge strane, jednačina o konzervaciji mase (jednačina kontinuiteta) prikazana u obliku (2.2) nije u osnovnom obliku, već je posledica predpostavke o nestišljivosti fluida (usled koje i ne postoji veza izmedju sfernog dela napona, t.j. pritisaka, i brzina deformacija).

Zbog svega ovoga može da se kaže da su pritisci implicitne promenljive u jednačinama čija je vrednost odredjena, u suštini, zadovoljavanjem jednačine kontinuiteta. To znači da ako se smatra da je pritisak poznate (zadate) vrednosti bilo gde u oblasti Ω (uključujući i neki deo konture Γ), da se time automatski smatra da je na tim mestima oblasti Ω ili konture Γ zadovoljena jednačina kontinuiteta. Prema tome, ako se smatra da je u nekoj tački oblasti ili konture poznata vrednost pritiska, mora da se iz ukupnog sistema izbaci jednačina kontinuiteta vezana za tačku gde je p zadat.

Medjutim, ako vrednost (referentnog) pritiska nije nigde zadata, dobijene vrednosti pritisaka (rešavanjem N.S. jednačina) će biti proizvoljne do na konstantu. Da bi se osigurale numeričke vrednosti za pritiske posle rešavanja jednačina, koristi se praksa da se samo u jednoj (udaljenoj) čvornoj tački mreže, kojom se aproksimira oblast Ω, definiše granični uslov po pritisku, odnosno referentni pritisak. Pri tome bi trebalo i da se odgovarajuća jednačina kontinuiteta izbaci iz sistema jednačina.

Alternativni postupak bi bio u definisanju referentnog pritiska posredno-preko zadavanja vrednosti površinske sile u pravcu normale:

$$f_n = -p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} = \bar{f}_n \tag{2.13}$$

Time se zadržavaju sve jednačine kontinuiteta u sistemu, a postiže se (graničnim uslovom (2.13)) da je pritisak relativno blizak željenoj vrednosti, jer je član $2\mu\, \partial u_n/\partial n$ relativno mali posebno za strujanje sa dominantnim inercijalnim silama (većim brzinama fluida, odnosno na većim R_e brojem), jer je koeficijent viskoznosti obrnuto proporcionalan sa R_e brojem. Na primer za vazduh je normalan atmosferski pritisak $0.1013\ MPa$, dok je koeficijent dinamičke viskoznosti $\mu = 1.714 \times 10^{-5}\ kg/ms$.

Osim graničnih uslova, u slučaju nestacionarnog strujanja moraju da budu definisani i početni uslovi. Početni uslovi se svode na poznate brzine fluida u trenutku $t = 0$:

$$t = 0: \quad u(x,y,0) = u_o(x,y) \qquad v(x,y,0) = v_o(x,y) \tag{2.14}$$

pri čemu ove početne brzine u_o i v_o moraju da zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta (2.2):

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} = 0 \tag{2.15}$$

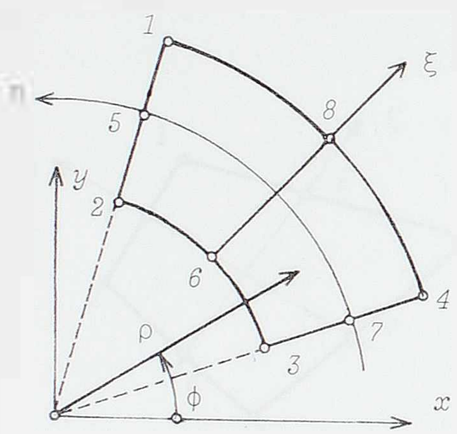
2. DISKRETIZACIJA OBLASTI FLUIDNE SREDINE NA KONAČNE ELEMENTE

Obzirom na numerički pristup rešavanju problema, domen Ω u kome se posmatra strujanje fluida se diskretizuje na odredjen broj konačnih elemenata Ω_e.

Kao što je moguće da se strujanje fluida, posebno dvodimenzionalno, posmatra i na druge načine, a ne samo u tzv. "u,v,p formulaciji" koja je ovde usvojena, takodje je moguće da se diskretizacija domena Ω izvrši pomoću raznih tipova konačnih elemenata. U ovom radu su usvojena četiri tipa konačnih elemenata, koja su i implementirana u programski paket, ali je ostavljena mogućnost i da se proširuje biblioteka elemenata.

2.1. Opisivanje geometrije elemenata

Kao element tipa 1 je usvojen kružno-segmentni element prikazan na sl. 2.2.



1,2,..,4: geometrija, pritisci
1,2,..,8: brzine

Sl. 2.2. Linearni kružno-segmentni element (tip 1)

Kružno-segmentni element je posebno pogodan za probleme opstrujavanja fluida oko konstrukcije oblika kružnog cilindra. Ovaj element je oblast ograničena sa polarnim koordinatama $\rho \in [R_1, R_2]$, $\phi \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Geometrija elementa se opisuje preko interpolacionih funkcija u prirodnim koordinatama ξ, η i polarnih koordinata četiri ugaone tačke elementa. Globalne polarne koordinate bilo koje tačke unutar elementa su date u obliku

$$\rho = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\rho_i \qquad \phi = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\phi_i \qquad (2.16)$$

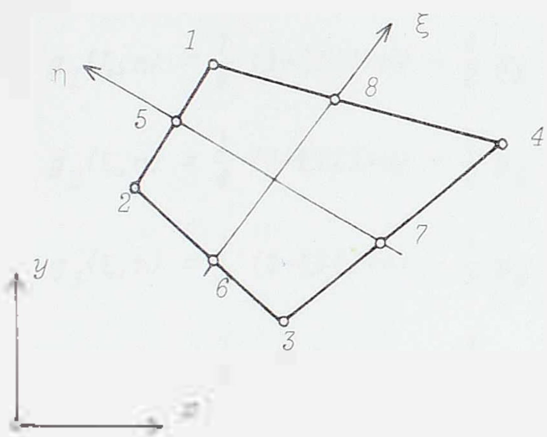
gde su ρ_i, ϕ_i $(i=1,..,4)$ polarne koordinate ugaonih čvornih tačaka elementa, a $h_i(\xi,\eta)$ interpolacione funkcije date sa:

$$\begin{aligned} h_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ h_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ h_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ h_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad \xi,\eta \in [-1,1] \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Globalne dekartove koordinate neke tačke unutar elementa se dobijaju iz polarnih koordinata prema transformaciji

$$x = \rho \cos \varphi \qquad y = \rho \sin \phi \tag{2.18}$$

Kao element tipa 2 je usvojen linearni četvorougaoni element prikazan na sl. 2.3.



$1,..,4$: geometrija, pritisci
$1,..,8$: brzine

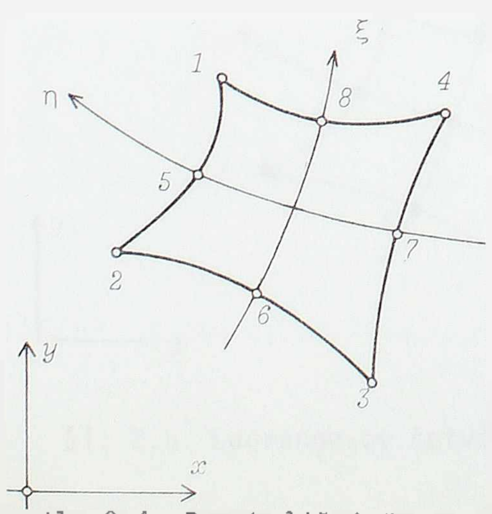
Sl. 2.3. Linearni četvorougaoni element (tip 2)

Globalne dekartove koordinate bilo koje tačke unutar elementa se izražavaju u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\, x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\, y_i \tag{2.19}$$

gde su x_i, y_i $(i=1,..,4)$ dekartove koordinate ugaonih čvornih tačaka elementa, a $h_i(\xi,\eta)$ interpolacione tačke date sa (2.17).

Za element tipa 3 je usvojen paraboličan element prikazan na sl. 2.4.



$1,..,8$: geometrija, brzine
$1,..,4$: pritisci

Sl. 2.4. Parabolični četvorougaoni element (tip 3)

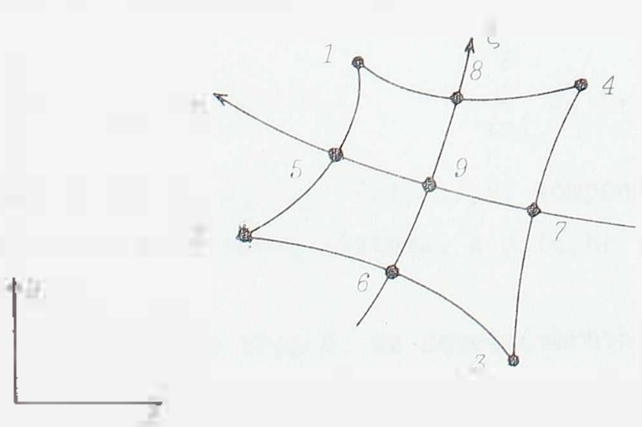
Globalne dekartove koordinate bilo koje tačke unutar elementa se izražavaju u obliku:

$$x = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, y_i \tag{2.20}$$

gde su x_i, y_i $(i=1,2,..,8)$ dekartove koordinate svih osam čvornih tačaka elementa a $g_i(\xi,\eta)$ interpolacione funkcije u prirodnim koordinatama date sa:

$$\begin{aligned}
g_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \tfrac{1}{2} g_5(\xi,\eta) - \tfrac{1}{2} g_8(\xi,\eta)\\
g_2(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \tfrac{1}{2} g_5(\xi,\eta) - \tfrac{1}{2} g_6(\xi,\eta)\\
g_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \tfrac{1}{2} g_6(\xi,\eta) - \tfrac{1}{2} g_7(\xi,\eta)\\
g_4(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \tfrac{1}{2} g_7(\xi,\eta) - \tfrac{1}{2} g_8(\xi,\eta)\\
g_5(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\\
g_6(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\\
g_7(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\\
g_8(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \qquad \xi,\eta \in [-1,1]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Kao element tipa 4 je usvojen element sa devet čvornih tačaka prikazan na sl. 2.5'.



$1,\ldots,9$: geometrija, brzine

$1,\ldots,4$: pritisci

Sl. 2.5'. Lagrange-ov četvorougaoni element (tip 4)

Globalne dekartove koordinate bilo koje tačke unutar elementa se izražavaju u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)y_i \tag{2.20)'}$$

gde su x_i i y_i dekartove koordinate svih devet čvornih tačaka, dok su $e_i(\xi,\eta)$ Lagrangeove interpolacione funkcije date sa

$$\begin{aligned}
e_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\,\xi\eta\,(1+\xi)(1+\eta)\\
e_2(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4}\,\xi\eta\,(1-\xi)(1+\eta)\\
e_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\,\xi\eta\,(1-\xi)(1-\eta)\\
e_4(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4}\,\xi\eta\,(1+\xi)(1-\eta)\\
e_5(\xi,\eta) &= -\frac{1}{2}\,\eta\,(1-\eta)(1-\xi^2)\\
e_6(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\,\xi\,(1+\xi)(1-\eta^2)\\
e_7(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\,\eta\,(1+\eta)(1-\xi^2)\\
e_8(\xi,\eta) &= -\frac{1}{2}\,\xi\,(1-\xi)(1-\eta^2)\\
e_9(\xi,\eta) &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) \qquad \xi,\eta \in |-1,1|
\end{aligned} \tag{2.21)'}$$

2.2. Brzine i pritisci fluida unutar konačnih elemenata

Za prva tri posmatrana tipa elemenata komponente brzine fluida u odnosu na dekartov koordinatni sistem se izražavaju u obliku

$$u = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, v_i \tag{2.22}$$

U izrazima (2.22) su u_i, v_i $(i=1,\ldots,8)$ komponente brzine čvornih tačaka elemenata u pravcima dekartovog sistema, a $g_i(\xi,\eta)$ interpolacione funkcije date izrazima (2.21).

Za elemente tipa 4, sa devet čvornih tačaka, komponente brzine fluida se izražavaju na analogan način:

$$u = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)\, u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)\, v_i \tag{2.22)'}$$

gde su $e_i(\xi,\eta)$ Lagrange-ovi interpolacioni polinomi dati sa (2.21)'.

Raspodela pritisaka fluida unutar sva četiri tipa elemenata se usvaja u obliku

$$p = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\, p_i \qquad (2.23)$$

gde su p_i $(i=1,\ldots,4)$ pritisci ugaonih čvornih tačaka, a $h_i(\xi,\eta)$ interpolacione funkcije date sa (2.17).

Osnovne nepoznate veličine koje definišu ponašanje fluidne sredine su brzine i pritisci čvornih tačaka usvojene mreže konačnih elemenata kojom se aproksimira stvaran domen strujanja fluida. Kao što se vidi iz usvojenog načina opisivanja geometrije elemenata i usvojene interpolacije brzina i pritisaka unutar elementa, elementi tipa 1 i 2, znači linearni kružno-segmentni element i linearni četvorougaoni element, predstavljaju subparametarske elemente sa stanovišta brzina i izoparametarske elemente sa aspekta pritisaka. Što se tiče paraboličnog elementa tipa 3, kao i elementa tipa 4, u odnosu na brzine fluida to su izoparametarski elementi, a u odnosu na pritiske superparametarski elementi.

Kao što se vidi, interpolacioni polinomi kojima se prikazuju raspodela prtisaka unutar elementa su za jedan red niži od interpolacionih polinoma za brzine. Ovo nije uradjeno slučajno već namerno, zbog već pominjanih specifičnosti odnosa pritisaka i brzina u NS jednačinama i jednačini kontinuiteta. Potreba za interpolacijom prtisaka polinomima nižeg reda od polinoma za brzine je uočena relativno skoro |Olson 1977|.

3. DISKRETIZACIJA JEDNAČINA - GALERKINOV METOD TEŽIŠNIH OSTATAKA

Posmatraju se jednačine (2.1) i (2.2). Njihova diskretizacija se vrši metodom težinskih ostataka i to u Galerkinovoj formulaciji. Neka su u^*, v^* i p^* proizvoljne funkcije koje imaju jednoznačne, konačne pozitivne vrednosti, osim na konturama Γ_1 i Γ_3 gde su zadati granični uslovi po brzinama, pa je na Γ_1 i Γ_3 usvojeno $u^* = v^* = 0$.

Jednačine (2.1) i (2.2) se množe redom sa težinskim funkcijama u^*, v^*, p^* i vrši se integracija jednačina po zapremini konačnog elementa (odnosno po površini, zbog dvodimenzionalne formulacije):

$$\int_{\Omega_e} u^* \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega_e} v^* \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] d\Omega = 0 \qquad (2.24)$$

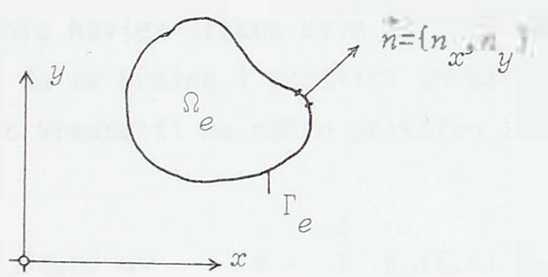
$$\int_{\Omega_e} p^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega = 0$$

Posmatraju se integrali koji potiču od viskoznih članova u jednačinama (2.24). Parcijalnom integracijom (odnosno primenom Green-ove teoreme) se dobija

$$\int_{\Omega_e} u^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega +$$

$$+ \oint_{\Gamma_e} u^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \tag{2.25}$$

gde je $\vec{n} = \{n_x, n_y\}$ ort spoljašnje normale na konturu Γ_e posmatranog elementa, sl. 2.5:



Sl. 2.5. Oblast i kontura konačnog elementa

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \tag{2.26}$$

izvod u pravcu normale, to je

$$\int_{\Omega_e} u^* (\nabla^2 u) d\Omega = - \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \oint_{\Gamma_e} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \tag{2.27}$$

Analogno je i za drugu od jednačina (2.24):

$$\int_{\Omega_e} v^* (\nabla^2 v) d\Omega = - \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \oint_{\Gamma_e} v^* \frac{\partial v}{\partial n} d\Omega \tag{2.28}$$

Konturni integrali predstavljaju fluks (protok)brzine fluida kroz element. Kada se vrši grupisanje (sabiranje) jednačina po svim elementima koji čine ukupni posmatrani domen Ω strujanja fluida, konturni članovi se medjusobno poništavaju na zajedničkim granicama susednih elemenata unutar oblasti Ω.

Ukoliko je posmatrani element na granici domena Ω strujanja fluida i ukoliko je u pitanju granica Γ_1, ili Γ_3 na konturi sa konstrukcijom gde su zadate vrednosti brzine fluida kao granični uslovi, onda su na toj konturi težinske funkcije u^* i v^* jednake nuli $(u^* = v^* = 0)$, pa konturni članovi postaju:

$$\oint_{\Gamma_e} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{1e}+\Gamma_{3e}} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_{2e}} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{2e}} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \qquad (2.29)$$

Analogno je i za fluks u izrazu (2.28). Sa druge strane su na konturi Γ_2 zadati gradijenti brzina, tako da su izvodi brzina u pravcu normale zadati graničnim uslovima i kao što će da se vidi kasnije, od ovih članova potiču slobodni članovi u diskretizovanim Navier-Stakes-ovim jednačinama.

Rečeno je da se brzine i pritisci unutar konačnog elementa izražavaju preko svojih čvornih vrednosti na način prikazan izrazima (2.22) i (2.23):

$$u = \sum_{j=1}^{8} g_j(\xi,\eta)\, u_j \qquad v = \sum_{j=1}^{8} g_j(\xi,\eta)\, v_j$$
$$p = \sum_{l=1}^{4} h_l(\xi,\eta)\, p_l \qquad (2.30)$$

Za težinske funkcije u^*, v^* i p^* se usvaja da se unutar posmatranog elementa izražavaju u obliku istom kao i brzine i pritisci:

$$u^* = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, u_i^* \qquad v^* = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, v_i^*$$
$$p^* = \sum_{i=1}^{4} h_k(\xi,\eta)\, p_k^* \qquad (2.31)$$

gde su u_i^*, v_i^*, p_k^* proizvoljni parametri, a $g_i(\xi,\eta)$ i $h_k(\xi,\eta)$ iste interpolacione funkcije preko kojih se izražavaju brzine i pritisci fluida.

U jednačine (2.24) gde je izvršena parcijalna integracija prikazana relacijama (2.25)-(2.29) se unose relacije (2.30) i (2.31) za brzine, pritiske i težinske funkcije. Kako su u_i^*, v_i^* i p_k^* proizvoljni parametri, dolazi se do sledećeg sistema jednačina na novou konačnog elementa:

$$\sum_{j=1}^{8} \int_{\Omega_e} g_i\, g_j\, d\Omega\, \frac{\partial u_j}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{8} \int_{\Omega_e} (g_i \sum_{k=1}^{8} g_k u_k \frac{\partial g_j}{\partial x} + g_i \sum_{k=1}^{8} g_k v_k \frac{\partial g_j}{\partial y}) d\Omega \, u_j +$$

$$+ \sum_{l=1}^{4} \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_e} g_i \frac{\partial h_l}{\partial x} d\Omega \, p_l + \sum_{j=1}^{8} \nu \int_{\Omega_e} (\frac{\partial g_i}{\partial x} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \frac{\partial g_i}{\partial y} \frac{\partial g_j}{\partial y}) d\Omega \, u_j =$$

$$= \nu \oint_{\Gamma_{2e}} g_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \qquad (i=1,2,\ldots,8) \qquad (2.32a)$$

$$\sum_{j=1}^{8} \int_{\Omega_e} g_i \, g_j \, d\Omega \frac{\partial v_j}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{8} \int_{\Omega_e} (g_i \sum_{k=1}^{8} g_k u_k \frac{\partial g_j}{\partial x} + g_i \sum_{k=1}^{8} g_k v_k \frac{\partial g_j}{\partial y}) \, d\Omega \, v_j +$$

$$+ \sum_{l=1}^{4} \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_e} g_i \frac{\partial h_l}{\partial y} d\Omega \, p_l + \sum_{j=1}^{8} \nu \int_{\Omega_e} (\frac{\partial g_i}{\partial x} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \frac{\partial g_i}{\partial y} \frac{\partial g_j}{\partial y}) \, d\Omega \, v_j =$$

$$\nu \oint_{\Gamma_{2e}} g_i \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma \qquad (i=1,2,\ldots,8) \qquad (2.32b)$$

$$\sum_{j=1}^{8} \int_{\Omega_e} h_l \frac{\partial g_i}{\partial x} d\Omega \, u_i + \sum_{i=1}^{8} \int_{\Omega_e} h_l \frac{\partial g_i}{\partial y} d\Omega \, v_i = 0 \qquad (2.32c)$$

$$(l=1,2,\ldots,4)$$

Prva dva skupa jednačina (2.32a,b) predstavljaju diskretnu formu Navier-Stokes-ovih jednačina, a treći skup, (2.32c), predstavlja jednačinu kontinuiteta - sve na nivou jednog konačnog elementa.

4. MATRIČNA FORMULACIJA JEDNAČINA

Sistem jednačina (2.32) može da se napiše u matričnom obliku kao:

$$[M]\,\{\dot{a}\} + ([K(a)] + [B])\{a\} + [C]\,\{p\} = \{d\}$$

$$[D]\,\{a\} = \{0\} \qquad (2.33)$$

Prva matrična jednačina (2.33) predstavlja Navier-Stokes-ove jednačine, kojih ima 16 za jedan konačni element, a druga od jednačina (2.33) je jednačina kontinuiteta - ukupno 4 skalarne jednačine. U jednačinama (2.33) su uvedene sledeće oznake.

- Vektori čvornih nepoznatih brzina i pritisaka elementa

$$\{a\}_{16,1} = \{a_i\} \qquad (i=1,2,..,8)$$

$$\{a_i\}_{2,1} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (2.34)$$

$$\{p\}_{4,1} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

- Matrica mase elementa:

$$[M]_{16,16} = [M_{ij}] \qquad (i,j=1,2,\ldots,8)$$

$$[M_{ij}]_{2,2} = \left[\begin{array}{c|c} M_{ij}^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & M_{ij}^{(1)} \end{array}\right] \qquad (2.35)$$

$$M_{ij}^{(1)} = \int_{\Omega_e} \phi_i\, \phi_j\, d\Omega$$

- Matrica viskoznih napona (matrica viskoznosti):

$$[B]_{16,16} = [B_{ij}] \qquad (i,j=1,2,..,8)$$

$$[B_{ij}]_{2,2} = \left[\begin{array}{c|c} B_{ij}^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & B_{ij}^{(1)} \end{array}\right] \tag{2.36}$$

$$B_{ij}^{(1)} = \nu \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \frac{\partial g_i}{\partial y} \frac{\partial g_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

- Matrica konvektivnih ubrzanja (matrica konvektivnosti)

$$[K(a)]_{16,16} = [K_{ij}^{(a)}] \qquad (i,j=1,2,..,8)$$

$$[K_{ij}(a)]_{2,2} = \left[\begin{array}{c|c} K_{ij}^{(1)}(a) & 0 \\ \hline 0 & K_{ij}^{(1)}(a) \end{array}\right] \tag{2.37}$$

$$K_{ij}^{(1)}(a) = \sum_{k=1}^{8} u_k \int_{\Omega_e} g_k \, g_i \frac{\partial g_j}{\partial x} d\Omega + \sum_{k=1}^{8} v_k \int_{\Omega_e} g_k \, g_i \frac{\partial g_j}{\partial y} d\Omega$$

- Matrica gradijenata pritiska

$$[C]_{16,4} = [C_{il}] \qquad \begin{array}{l}(i=1,2,..,8)\\ (l=1,2,..,4)\end{array}$$

$$[C_{il}]_{2,1} = \left[\begin{array}{c} C_{il}^{(1)} \\ \hline C_{il}^{(2)} \end{array}\right] \tag{2.38}$$

$$C_{il}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_e} g_i \frac{\partial h_l}{\partial x} d\Omega$$

$$C_{il}^{(2)} = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_e} g_i \frac{\partial h_l}{\partial y} d\Omega$$

- Matrica divergencije:

$$[D]_{4,16} = [D_{li}] \qquad (l=1,2,..,4) \quad (i=1,2,..,8)$$

$$[D_{li}]_{1,2} = [D_{li}^{(1)} \quad D_{li}^{(2)}]$$

$$D_{li}^{(1)} = \int_{\Omega_e} h_l \frac{\partial g_i}{\partial x} d\Omega \qquad (2.39)$$

$$D_{li}^{(2)} = \int_{\Omega_e} h_l \frac{\partial g_i}{\partial y} d\Omega$$

- Vektor slobodnih članova (fluks brzina)

$$\{d\}_{16,1} = \{d_i\} \qquad (i=1,2,..,8)$$

$$\{d_i\} = \left\{ \begin{array}{c} d_i^{(1)} \\ \hline d_i^{(2)} \end{array} \right\}$$

$$d_i^{(1)} = \nu \oint_{\Gamma_{2e}} g_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \qquad (2.40)$$

$$d_i^{(2)} = \nu \oint_{\Gamma_{2e}} g_i \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma$$

Dve matrične jednačine (2.33) mogu da se napišu i kao jedna matrična jednačina reda 20:

$$[M_1] \{\dot{a}_1\} + [K_1(a)] \{a_1\} = \{d_1\} \qquad (2.41)$$

gde je

$$[M_1] = \left| \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$[K_1(a)] = \left[\begin{array}{c|c} K(a)+B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \tag{2.42}$$

$$\{a_1\} = \left\{\begin{array}{c} a \\ \hline p \end{array}\right\} \qquad \{d_1\} = \left\{\begin{array}{c} d \\ \hline 0 \end{array}\right\}$$

Kao što je rečeno, prikazane jednačine (2.33) ili (2.41) su na nivou jednog konačnog elementa. Da bi se došlo do jednačina koje se odnose na ceo domen strujanja fluida potrebno je da se izvrši sabiranje po svim elementima. Time se dolazi do globalnih matričnih jednačina za celu oblast i ove globalne jednačine su po obliku iste kao i jednačine na nivou elementa:

$$\begin{aligned} [M]\,\{\dot{a}\} + ([K(a)] + [B])\{a\} + [C]\,\{p\} &= \{d\} \\ [D]\,\{a\} &= \{0\} \end{aligned} \tag{2.43}$$

ili skraćeno, kao jedna globalna matrična jednačina:

$$[M_1]\,\{\dot{a}_1\} + [K_1(a)]\,\{a_1\} = \{d_1\} \tag{2.44}$$

Kao što je rečeno, slobodni članovi potiču samo od elementa na granici cele oblasti Ω na delu konture Γ_σ gde su zadati prirodni granični uslovi (gradijenti brzina).

Polazeći od prikazanih jednačina, moguće je da se posmatraju razni specijalni slučajevi. U slučaju ustaljenog (stacionarnog) strujanja fluida se dobija

$$\begin{aligned} ([K(a)] + [B])\{a\} + [C]\,\{p\} &= \{d\} \\ [D]\,\{a\} &= \{0\} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Odnosno kao jedna jednačina

$$[K_1(a)]\,\{a_1\} = \{d_1\} \tag{2.46}$$

U slučaju zanemarenja viskoznosti fluida i stacionarnog strujanja (Euler-ove jednačine) se dobija

$$[K(a)]\ \{a\} + [C]\ \{p\} = \{0\}$$
$$[D]\ \{a\} = \{0\} \qquad (2.47)$$

dok je diskretizovan oblik Stokes-ovih jednačina dat sa

$$[B]\ \{a\} + [C]\ \{p\} = \{d\}$$
$$[D]\ \{a\} = \{0\} \qquad (2.48)$$

5. REŠAVANJE N.S. JEDNAČINA ZA SLUČAJ STACIONARNOG STRUJANJA

Posmatraju se jednačine (2.45) ili (2.46), koje predstavljaju sistem običnih, a ne diferencijalnih jednačina kao u slučaju nestacionarnog strujanja. O rešavanju i teškoćama rešavanja Navier-Stokes-ovih jednačina bilo u kontinualnoj ili diskretizovanoj formi, u literaturi je dosta razmatrano, Ovde će da se pomenu samo osnovni problemi.

Prvo, jednačine su veoma nelinearne zbog članova koji potiču od konvektivnih ubrzanja. Zbog nelinearnosti je put rešavanja jednačina inkrementalan, ili iterativan (ili mešovit). Dalje, koeficijenti uz nepoznate (opet matrica konvektivnih ubrzanja) su nesimetrični, što znatno otežava i usporava eliminaciju u svakom koraku nekog od iterativnih postupaka. Treće, numeričke vrednosti koeficijenata u raznim matricama jednačina su različitog reda veličine, što stvara dalje probleme u algebarskim manipulacijama kompjutera. Četvrto, sama struktura jednačina (NS jednačine sa brzinama i pritiscima i jednačina kontinuiteta samo sa brzinama) stvara numeričke probleme, posebno u nestacionarnim slučajevima.

I najzad, ali nikako zadnje po značaju, je činjenica da je ukupan broj nelinearnih, nesimetričnih i numerički osetljivih jednačina veliki. To je zbog toga što svako koliko-toliko realno aproksimiranje domena strujanja fluida, posebno u zoni oko konstrukcije, neminovno zahteva veliki broj konačnih elemenata, a time i veliki broj nepoznatih.

Obzirom na veliki broj jednačina i na potrebu za ponovljenim rešavanjima odgovarajućih linearnih jednačina u svakom ciklusu nekog iterativnog postupka, očigledno je da je bitno da sam postupak rešavanja linearnih jednačina bude što je efikasniji. čini se da je tzv. frontalni postupak formiranja i rešavanja jednačina Gausovom eliminacijom najpogodniji. O tome će biti reči kasnije, dok će sada da se prikažu neke od mogućnosti rešavanja nelinearnih jednačina (2.46):

$$[K_1(a)]\,\{a_1\} = \{d_1\} \qquad (2.46)$$

5.1. Metod sukcesivne zamene (direktna iteracija)

Ako se sa n obeleži redni broj iteracije u procesu rešavanja jednačina, metod sukcesivne zamene se sastoji u rešavanju jednačina

$$[K_1(a^*_{n-1})]\,\{a_{1,n}\} = \{d_1\} \qquad (2.49)$$

što znači da se nelinearni članovi izračunavaju unošenjem brzina fluida koje su odredjene u prethodnom koraku. Početni vektor $\{a_0\}$ može da bude i nulti, znači da se u prvom koraku procesa zanemare konvektivna ubrzanja.

Za brzine a^*_{n-1} koje se unose u nelinearne članove (u matricu konvektivnih ubrzanja) mogu da se, kao što je rečeno, unose brzine dobijene prethodnom iteracijom, a takodje i

$$\{a^*_{n-1}\} = \{a_{n-2}\} + \alpha(\{a_{n-1}\} - \{a_{n-2}\}) \qquad (2.50)$$

gde je α faktor relaksacije. Izborom faktora relaksacije može da se utiče na ubrzanje konvergencije. Kao što se vidi iz relacije (2.50), ako je $\alpha = 1.0$, onda je

$$\{a^*_{n-1}\} = \{a_{n-1}\} \qquad (2.50)'$$

čime se u nelinearne članove unose baš rešenja iz prethodne iteracije, dok je

$$\left.\begin{aligned} &- \text{za} \quad \alpha > 1.0 \qquad \{a^*_{n-1}\} > \{a_{n-1}\} \\ &- \text{za} \quad \alpha < 1.0 \qquad \{a^*_{n-1}\} < \{a_{n-1}\} \end{aligned}\right. \qquad (2.50)''$$

Moguće je da se faktor α definiše na početku programa i da mu se vrednost tokom proračuna ne menja (kao što je u ovom radu uradjeno), a moguće je i da se faktor α automatski koriguje posle svake iteracije prema usvojenim kriterijumima.

Postupak rešavanja jednačina ovakvom direktnom metodom se smatra završenim kada je

$$\| \{a_{1,n}\} - \{a_{1,n-1}\} \| \leqslant \varepsilon \qquad (2.50)''$$

gde je sa $\| \ \|$ obeležena odgovarajuća norma razlike vektora nepoznatih u dva koraka iteracije, a ε je neki usvojen nivo tolerancije.

U ovom radu je usvojeno da je konvergencija ostvarena ukoliko je relativna razlika svake od nepoznatih u dva ciklusa iteracije manja od usvojene tolerancije:

$$\left| \Delta = \frac{a_n(i) - a_{n-1}(i)}{a_n(i)} \right| < \varepsilon \qquad (i=1,2,..,NP)$$

Ovakav metod rešavanja nelinearnih jednačina je najjednostavniji iterativni postupak sa manom što ne mora da bude uvek konvergentan i što se u svakom koraku iteracije ponovo formira nelinearan deo ukupne matrice koeficijenata i ponovo vrši njena dekompozicija u procesu eliminacije nepoznatih.

5.2. Newton-Raphson-ovi postupci

Druga od mogućnosti rešavanja nelinearnih jednačina je Newton-Raphson-ov iterativni postupak ili neka modifikacija Newton-Rephson-ovog postupka.

Za vreme bilo kog koraka iterativnog rešavanja, jednačine (2.46) neće biti zadovoljene, osim u slučaju ostvarivanja konvergencije. Ako je $a_{1,r}$ r-ti korak (aproksimacija rešenja) u iterativnom rešavanju, očigledno je da se unošenjem $\{a_{1,r}\}$ u jednačine (2.46) dobija tzv. rezidualni vektor (koji se približava ka nultom vektoru u slučaju konvergencije ka tačnom rešenju):

$$\{\psi_r\} = [K_1(a,r)] \, \{a_{1,r}\} - \{d_1\} \neq \{0\} \qquad (2.51)$$

U slučaju naponske analize kod deformabilnih tela, $\{\psi_r\}$ je vektor neizbalansiranog opterećenja. Očigledno da se rezidualni vektor ψ_r može da posmatra kao zavistan od približnog rešenja $\{a_{1,r}\} : \{\psi_r\} = \{\psi_r(a_{1,r})\}$.

Ako se smatra da je $\{a_{1,r}\}$ aproksimativno rešenje jednačina koje nije daleko od tačnog, onda se to rešenje poboljšava sa

$$\{a_{1,r+1}\} = \{a_{1,r}\} + \{\Delta a_{1,r}\} \qquad (2.52)$$

dok se $\{\Delta a_{1,r}\}$ odredjuje iz uslova da je rezidualni vektor u narednom koraku jednak nuli:

$$\{\psi_{r+1}\} = 0 \qquad (2.53)$$

Kako je rezidualni vektor $\{\psi_r\}$ zavistan od aproksimativnog rešenja, to se vrši razvijanje rezidualnog vektora u Taylor-ov red u okolini $\{a_{1,r}\}$:

$$\{\psi_{r+1}\} = \{\psi_r\} + \left[\frac{d\psi}{da_1} \right]_r \{\Delta a_{1,r}\} \qquad (2.54)$$

Izvodi rezidualnog vektora po nepoznatim predstavljaju Jacobi-evu matricu

$$[J_r] = \left[\frac{d\psi_r}{da_{1,r}} \right] \qquad (2.55)$$

koja u slučaju naponske analize deformabilnog tela predstavlja tangentnu matricu krutosti. Obzirom na (2.51), Jacobi-eva matrica ima oblik:

$$[J_r] = \left[\frac{d\psi_r}{da_{1,r}}\right] = [K_1(a_r)] + \left[\frac{dK_1(a_r)}{da_r}\right] \{a_{1,r}\} \qquad (2.56)$$

Iz jednačine (2.53) se dobija rešavanjem

$$\{\Delta a_{1,r}\} = -[J_r^{-1}]\{\psi_r\} = [J_r^{-1}](\{a_2\} - [K_1(a_r)]\{a_{1,r}\}) \qquad (2.57)$$

pa se, prema (2.52) dobija poboljšano rešenje.

Jacobieva matrica, data sa (2.56), može da se piše u obliku

$$[J_r] = [K_1(a_r)] + [K_1^*(a_r)] \qquad (2.58)$$

gde je $[K_1]$ matrica koeficijenata jednačina data sa (2.42):

$$[K_1(a_r)] = \left[\begin{array}{c|c} K(a_r)+B & C \\ \hline D & 0 \end{array} \right] \qquad (2.59)$$

tako da se vidi da samo matrica konvektivnih ubrzanja predstavlja nelinearan deo. Drugi deo Jacobi-eve matrice, $K_1^*(a_r)$ je prema tome jednak

$$|K_1^*(a_r)| = \left|\begin{array}{c|c} K^*(a_r) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|_{20,20} \tag{2.60}$$

gde je, na nivou jednog konačnog elementa

$$|K^*(a_r)|_{16,16} = |K_{ij}^*(a_r)| \qquad (i,j=1,2,\ldots,8)$$

$$|K_{ij}^*|_{2,2} = \left|\begin{array}{c|c} \sum\limits_{k=1}^{8} u_k \int g_i g_j \dfrac{\partial g_k}{\partial x}\, d\Omega & \sum\limits_{k=1}^{8} u_k \int g_i g_j \dfrac{\partial g_k}{\partial y}\, d\Omega \\ \hline \sum\limits_{k=1}^{8} v_k \int g_i g_j \dfrac{\partial g_k}{\partial x}\, d\Omega & \sum\limits_{k=1}^{8} v_k \int g_i g_j \dfrac{\partial g_k}{\partial y}\, d\Omega \end{array}\right| \tag{2.61}$$

Postupak Newton-Raphson-a je obično brže konvergentan u odnosu na direktnu iteraciju postupkom sukcesivne zamene. Medjutim, Newton-Raphson-ov postupak je osetljiviji numerički u izboru početne iteracije (jer je u prikazivanju rezidualnog vektora Taylor-ovim redom zadržan samo prvi član reda). Takodje je potrebno da se u svakom koraku izvrši novo izračunavanje Jacobi-eve matrice (u čemu ima više posla nego kod direktne iteracije - zbog matrice $|K_1^*|$), kao i da se ponovo vrši dekompozicija matrice koeficijenta u procesu eliminacije.

Ova poslednja činjenica upućuje na tzv. modifikovan Newton-Raphson-ov postupak u kome se zadržava Jacobi-eva matrica odredjena u početnoj iteraciji, tako da je

$$\{\Delta a_{1,r}\} = - [J_o^{-1}]\, \{\psi_r\} \tag{2.62}$$

Znači, dekompozicija Jacobi-eve matrice je izvršena samo jednom, a u svakom narednom koraku se vrši odgovarajuća korekcija rezidualnog vektora (slobodnih članova u jednačinama). Ovakvim pristupom je konvergencija sporija, u smislu da je potrebno više koraka do konvergencije, ali je zato svaki korak brži i "jeftiniji" (jer nema formiranja novih matrica i dekompozicije).

Takodje postoji mogućnost da se objedine oba Newton-Raphson-ova postupka u smislu da se prvo odredjen broj koraka računa sa inicijalnom Jacobi-evom matricom. Zatim se odredi nova Jacobi-eva matrica sa kojom se računa, kao nepromenjenom, u odredjenom broju narednih koraka, itd.

U numeričkoj realizaciji postupka u ovom radu, u opciji rešavanja nelinearnih jednačina modifikovanim Newton-Raphson-ovim postupkom, koristi se pomenuta varijanta modifikovanog postupka. Naime, prvo se u "nultoj" iteraciji odrede rešenja bez uzimanja u obzir nelinearnih članova. Zatim se sa dobijenim rešenjima odredi Jacobi-eva matrica $|J_o|$, koja se zatim zadržava konstantnom u naredne tri iteracije. Pri tome se, naravno, u svakoj iteraciji vrši korekcija slobodnog člana prema relaciji (2.57). U četvrtoj iteraciji se ponovo odredi nova Jacobi-eva matrica, koja se zatim zadržava nepromenjenom u naredne tri iteracije, posle čega se opet ponovo izračunava i tako redom sve do prihvatljive konvergencije rezultata ili do prekoračenja propisanog maksimalnog broja iteracija.

Takodje je moguće da se u relaciju (2.52) kojom se dobija novo (poboljšano) aproksimativno rešenje uvede faktor relaksacije:

$$\{a_{1,r+1}\} = \{a_{1,r}\} + \alpha\{\Delta a_{1,r}\} \qquad (2.63)$$

Ovaj faktor relaksacije α može da bude i manji od 1.0 u početnim koracima, ($\alpha=0.5$ ili 0.25), a takodje i veći od 1.0 (recimo 1.90) u cilju ubrzanja konvergencije. Ova mogućnost korekcije rešenja sa faktorom α je ugradjena u sastavljene programe.

6. REŠAVANJE N.S. JEDNAČINA ZA SLUČAJ NESTACIONARNOG STRUJANJA

Posmatraju se jednačine (2.43) ili (2.44). Ako se jednačine (2.44) napišu rastavljene na blokove:

$$\left[\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \dot{a} \\ p \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} K(a)+B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.64)$$

vidi se da predstavljaju vremenski singularne jednačine, jer je matrica $|M_1|$ uz globalni vektor nepoznatih $\{\dot{a}\ \dot{p}\}^T$ očigledno singularna. Ovo znači da nije moguće da se jednačine (2.64) rešavaju nekim čisto eksplicitnim postupkom integracije. Znači, preostaju implicitni postupci koji su sa stanovišta rada računara znatno skuplji (potreban je znatno veći utrošak vremena rada računara), ali im je numerička stabilnost zato veća (ili bezuslovno stabilna).

Mogući su i mešoviti postupci integracije-eksplicitno-implicitni u smislu da se pritisak i jednačina kontinuiteta moraju da posmatraju implicitno, dok se lokalna i konvektivna ubrzanja i matrica viskoznih napona mogu da tretiraju i eksplicitnim postupkom.

Naravno, moguće je da se ceo sistem (2.64) integrali nekim čisto implicitnim postupkom, na primer Wilson θ postupkom. Medjutim, zbog same prirode jednačina (veliki broj nelinearnih, nesimetričnih jednačina), zbog moguće dužine vremena u kome se traži rešenje, kao i najzad zbog posmatranja interakcije fluida sa konstrukcijom, koja će da nameće iterativna rešavanja unutar istog vremenskog koraka, o čemu će biti reči kasnije, od interesa je da se nadje što jednostavniji,brži i robustniji način integracije jednačina.

6.1. Prediktor - korektor postupak

6.1.1. Unošenje početnih uslova

Početni uslovi su dati sa relacijama (2.14) i (2.15) i odnose se samo na poznate vrednosti brzina fluida u početnom trenutku. Medjutim, kako polje početnih brzina mora da zadovoljava i jednačinu kontinuiteta, to znači da početni uslovi mogu da budu dati sa bilo kojim solenoidalnim poljem brzina (koje zadovoljava jednačinu $\nabla\vec{u} = 0$). Može da se pokaže da će u slučaju solenoidalnog polja brzina, polje pritiska fluida biti jednoznačno (do na aditivnu konstantu).

Znači, početni uslovi, u diskretizovanom obliku se svode na zadate početne vrednosti čvornih brzina:

$$\{a(t=0)\} = \{a_o\} \qquad (2.65)$$

pri čemu mora da bude zadovoljena jednačina kontinuiteta (u diskretizovanom obliku):

$$[D]\{a_o\} = \{0\} \qquad (2.66)$$

U nameri da se dobije polje početnih pritisaka fluida, kompatibilno sa uslovom $[D]\{a_o\} = \{0\}$, posmatraju se diskretizovane NS jednačine i jednačina kontinuiteta (2.43) u početnom trenutku vremena. Pri tome je moguće da se jednačina kontinuiteta diferencira po vremenu, što je dozvoljivo jer mora da bude $[D]\{a\}=\{0\}$ u svakom trenutku. Jednačine se pišu u obliku:

$$\begin{bmatrix} M & | & C \\ -- & + & -- \\ D & | & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a}_o \\ \\ p_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d-(K(a_o) + B)a_o \\ ------- \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.67)$$

i predstavljaju linearne algebarske jednačine po početnom ubrzanju $\{\dot{a}_o\}$ i početnim pritiscima $\{p_o\}$. Ovakvim rešavanjem jednačina (2.67), koje se obavlja samo jedamput u posmatranom problemu, omogućuju se dve stvari: prvo, dobijaju se pritisci fluida u početnom trenutku vremena koji su takvi da je jednačina kontinuiteta zadovoljena, a drugo, dobija se vektor čvornih ubrzanja u početnom trenutku koji je kasnije potreban u integraciji jednačina (2.64).

6.1.2. Prediktorska (eksplicitna) jednačina za brzine

Matrična jednačina (2.64) je sistem običnih diferencijalnih jednačina prvog reda oblika $\dot{y} = f$. Jedna od mogućih prediktorskih relacija u integraciji jednačine $\dot{y} = f$ je formula Adams-Bashforth-a drugog reda sa promenljivim vremenskim korakom |I.2.2|:

$$y^p_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t_n}{2} \left[(2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}}) \dot{y}_n - \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \dot{y}_{n-1} \right] \qquad (2.68)$$

U relaciji (2.68) je a^p_{n+1} prediktorska vrednost nepoznate u koraku $n+1$ i vidi se da je u pitanju eksplicitna relacija u kojoj se nepoznata veličina y u koraku $n+1$ izražava preko poznatih izvoda $\dot{y}$ iz prethodna dva koraka. Relacija oblika (2.68) može da se primeni samo na čvorne brzine u NS jednačinama, tako da je prediktorski izraz za brzine fluida u koraku $n+1$ dat sa:

$$\{a^p_{n+1}\} = \{a_n\} + \frac{\Delta t_n}{2} \left[(2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}}) \{\dot{a}\}_n - \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \{\dot{a}_{n-1}\} \right] \qquad (2.69)$$

Ova relacija može da se koristi tek posle drugog koraka $(n=1)$, kada su poznata prva dva prethodna vektora ubrzanja $\{\dot{a}_o\}$ i $\{\dot{a}_1\}$. Pri tome je $\{\dot{a}_o\}$ odredjen rešavanjem jednačine (2.67), dok se $\{\dot{a}_1\}$ dobija iz korektorskog koraka.

6.1.3. Implicitni korektor i rešenja za pritiske

Kao korektorski korak se koristi implicitna trapezna formula drugog reda, primenjena na jednačinu $\dot{y} = f$ |I.2.2|:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t_n}{2}(f_n + f_{n+1}) \tag{2.70}$$

Relacija (2.70) može da se piše u obliku (rešavanjem po $f_{n+1} = \dot{y}_{n+1}$):

$$\dot{y}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n}(y_{n+1} - y_n) - \dot{y}_n \tag{2.71}$$

Ako se nepoznata čvorna ubrzanja u koraku $n+1$ izraze na način (2.71), dobija se, unošenjem u jednačine (2.64):

$$[M]\left(\frac{2}{\Delta t_n}(\{a_{n+1}\} - \{a_n\} - \{\dot{a}_n\})\right) +$$

$$+ ([K(a_{n+1})] + [B])\{a_{n+1}\} + [C]\{p_{n+1}\} = \{d_{n+1}\}$$

$$[D]\{a_{n+1}\} = \{0\} \tag{2.72}$$

što može da se transformiše na oblik:

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{2}{\Delta t_n} M + K(a_{n+1}) + B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} a_{n+1} \\ p_{n+1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} d_{n+1} + M(\frac{2}{\Delta t_n} a_n + \dot{a}_n) \\ \hline 0 \end{array}\right\} \tag{2.73}$$

Jednačine (2.73) su nelinearne nesimetrične algebarske jednačine po nepoznatim brzinama i pritiscima fluida u koraku $n+1$. Njihovim rešavanjem se dobijaju brzine i pritisci fluida u koraku $n+1$.

6.1.4. Rešavanje nelinearnih jednačina

Jednačine (2.73) su nelinearne algebarske jednačine oblika $A(x)\cdot X = b$, pri čemu nelinearnost potiče od konvektivnih članova. Za njihovo rešavanje bi mogao da se koristi postupak Newton-Raphson-a, kao u slučaju stacionarnog strujanja. Rešavanje ovim postupkom se svodi na iteracije do postizanja željene konvergencije rezidualnog vektora.

Medjutim, obzirom na prediktorski izraz za nepoznate brzine fluida, koji je relativno dobra početna aproksimacija za nepoznate brzine, moguće je da se jednačine (2.73) reše u samo *jednom koraku* u posmatranom vremenskom intervalu. Ako se jednačine (2.73) posmatraju u obliku $A(x)\cdot x = b$, onda bi se odgovarajuće jednačine svodile na oblik:

$$J_p(X - X_p) = b - A(X_p) \cdot X_p \tag{2.74}$$

koji je analogan jednačinama (2.57). U jednačinama (2.74) je J_p Jacobi-eva matrica zasnovana na prediktorskim brzinama, X_p je prediktor za nepoznate, dok je X (uslovno) tačna vrednost nepoznatih. Dakle,

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} a_{n+1} \\ \\ p_{n+1} \end{Bmatrix} \qquad \{X_p\} = \begin{Bmatrix} a^p_{n+1} \\ \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.75}$$

i razlika $\{X\} - \{X_p\}$ je poboljšanje prediktorske vrednosti, analogno sa $\Delta a_{i,r}$ u relaciji (2.52) u slučaju stacionarnog strujanja. Znači, i ovde se koristi Newton-Raphson-ov postupak, ali samo u jednom koraku, jer prediktorske relacije omogućavaju početnu predpostavku nepoznatih koja je bliska, uslovno rečeno, tačnim vrednostima, tako da je dovoljna korekcija prediktora samo u jednom koraku.

Jakobi-eva matrica $|J_p|$ u jednačinama (2.74), koje simbolično predstavljaju jednačine (2.73), je analogna sa izrazom (2.58) za Jacobi-eve matrice kod stacionarnog strujanja:

$$[J_p] = [J_{po}] + [J_{p1}] \tag{2.76}$$

U relaciji (2.76) je uvedeno obeležavanje

$$[J_{po}] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{2}{\Delta t_n} M + K(a^p_{n+1}) + B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \tag{2.77}$$

kao i

$$[J_{p1}] = \left[\begin{array}{c|c} K^*(a^p_{n+1}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.78}$$

U izrazu (2.78) je matrica $K^*(a^p_{n+1})$ data sa relacijama (2.61), na nivou jednog elementa, sa razlikom što u (2.78), kao uostalom i u (2.77), figurišu prediktorske vrednosti brzina $\{a^p_{n+1}\}$.

6.1.5. Procena greške i izbor vremenskog koraka u integraciji jednačina

Kao što je rečeno, smatra se da se rešavanjem jednačina (2.73) na način prikazan jednačinom (2.74) dobijaju tačna rešenja u posmatranom vremenskom koraku (naravno, uslovno tačna u numeričkom pristupu). Znači, smatra se da se na početku narednog koraka, u intervalu vremena Δt_{n+1} poznaje tačno rešenje. Ako se jednačine (2.67) simbolično prikažu u obliku $y' = f$, i ako se tačno rešenje u trenutku t_n obeleži sa $y(t_n)$, onda se, dakle, smatra da je $y_n = y(t_n)$.

Procena greške u diferencnim aproksimacijama metodom prediktor-korektor se vrši zavijanjem funkcija u Taylor-ov red. Može da se pokaže, |I.2.2|, da je procena greške za prediktorsku relaciju Adams-Bashforth-a (2.68) data u obliku:

$$y^p_{n+1} - y(t_{n+1}) = -\frac{1}{12}\left(2 + 3\,\frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n}\right) \Delta t^3_n \dddot{y}_n + O(\Delta t^4_n) \qquad (2.79)$$

dok je za implicitnu korektorsku trapeznu formulu (2.70):

$$y_{n+1} - y(t_{n+1}) \equiv d(y_{n+1}) = \frac{1}{12}\,\Delta t^3_n \dddot{y}_n + O(\Delta t^4_n) \qquad (2.80)$$

U relacijama (2.79) i (2.80) je sa $O(\Delta t^4_n)$ obeležen ostatak čiji je red veličine jednak Δt^4_n, dok je sa $d(y_{n+1})$ obeležena greška u odnosu na tačno rešenje koja je dobijena rešavanjem jednačina (2.73) u korektorskom koraku. Kako su prediktorska i korektorska vrednost nepoznatih y^p_{n+1} i y_{n+1} poznate, iz relacija (2.79) i (2.80) mogu da se eliminišu $y(t_{n+1})$ i $\dddot{y}_n$, tako da se dobija:

$$d(y_{n+1}) \equiv \frac{y_{n+1} - y^p_{n+1}}{3\left(1 + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n}\right)} + O(\Delta t^4_n) \qquad (2.81)$$

Ovaj rezultat, koji predstavlja grešku korektorskog rešenja u odnosu na tačno rešenje, može da se koristi za izbor veličine vremenskog intervala u narednom koraku.

Naime, iz relacije (2.80) se dobija

$$\frac{|d(y_{n+2})|}{|d(y_{n+1})|} = \left(\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}\right)^3 \frac{|\dddot{y}_{n+1}|}{|\dddot{y}_n|} \qquad (2.82)$$

koja predstavlja relativnu grešku (odnosno normu greške) u narednom koraku. Ako se usvoji da je

$$d(y_{n+2}) = \varepsilon \qquad (2.83)$$

gde je ε neka usvojena veličina tolerancije greške (na primer, $\varepsilon = 0.001$) kao u relaciji (2.50) za stacionarno strujanje, i kako je

$$\dddot{y}_{n+1} = \dddot{y}_n + O(\Delta t_n) \qquad (2.84)$$

to se iz relacije (2.82) dobija

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \cdot \left(\frac{\varepsilon}{|d(y_{n+1})|}\right)^{1/3} \qquad (2.85)$$

Relacija (2.85) može da se koristi za automatski izbor veličine vremenskog intervala u narednom koraku, koji je zasnovan na usvojenoj toleranciji greške. Pri tome je greška u prethodnom koraku $d(y_{n+1})$ poznata - data je relacijom (2.80).

Očigledno je da izbor veličine tolerancije greške ε od bitnog uticaja kako na tačnost, tako i na vreme (odnosno cenu) proračuna. Za veću toleranciju ε (na primer $\varepsilon > 0.10$), a time i veći vremenski korak, javlja se, u literaturi poznato, oscilatorno ponašanje u primeni Eulerove trapezne formule.

Treba da se napomene da se procena greške, a time i odredjivanje veličine narednog intervala vremena, vrši samo na osnovu dobijenih prediktorskih i korektorskih vrednosti brzina. Za pritiske ne postoji prediktorska vrednost, jer u NS jednačinama ne figurišu vremenski izvodi pritisaka.

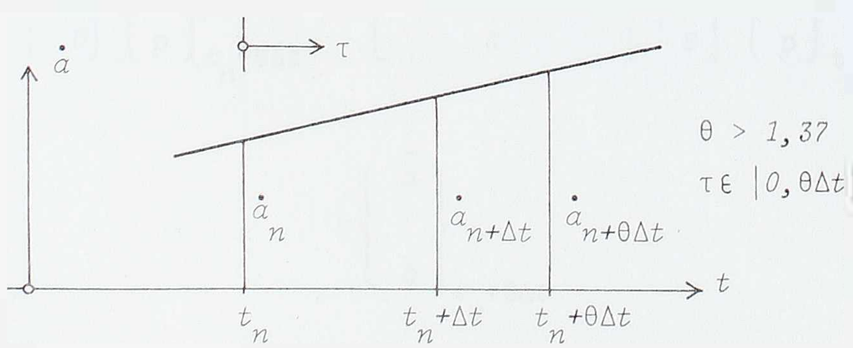
6.2. Wilson θ postupak

6.2.1. Formulacija postupka

Prikazani prediktor-korektor postupak predstavlja mešoviti (eksplicitno-implicitni) postupak vremenske integracije diferencijalnih jednačina (2.64). Rečeno je već da zbog vremenski-singularnog oblika jednačina nije moguće da se koristi neki (diferencni) čisto eksplicitni postupak. Kao alternativa prediktor-korektor postupku, može da se koristi neki čisto implicitni metod. Jedna od takvih mogućnosti je Wilson θ postupak, odnosno njegova modifikacija, obzirom da su jednačine (2.64) prvog reda, a ne drugog reda kao u dinamici konstrukcija.

Ukupan vremenski domen posmatranja nestacionarnog strujanja fluida se podeli na odredjen broj jednakih vremenskih intervala Δt. Diskretni vremenski trenutci u kojima se traži da su jednačine (2.64) zadovoljene su $t_o = 0$, $t_1 = \Delta t$, ... , $t_n = n \cdot \Delta t$, ... Metod Wilson θ spada u postupke direktne numeričke integracije kod kojih se usvaja linearna promena ubrzanja unutar vremenskih intervala.

Posmatra se interval vremena $t \in |t_n, t_n + \theta\Delta t|$, gde je θ parametar veći od 1.0, sl. 2.6:



Sl. 2.6. Linearna promena ubrzanja u postupku Wilson θ

Wilson θ postupak je bezuslovno stabilan za $\theta > 1.37$, pri čemu se optimalna tačnost numeričke integracije dobija za $\theta = 1.40$.

Uvodjenjem lokalne vremenske koordinate τ definisane unutar intervala vremena $[t_n, t_n + \theta\Delta t]$, pri čemu je $\tau \in [0, \theta\Delta t]$, vektor ubrzanja fluida $\dot{a}$ u posmatranom intervalu vremena može da se izrazi kao:

$$\dot{a}_{t_n+\tau} = \dot{a}_{t_n} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}\,(\dot{a}_{t_n+\theta\Delta t} - \dot{a}_{t_n}) \tag{2.86}$$

Integracijom po vremenu izraza (2.86) se dobija

$$a_{t_n+\tau} = a_{t_n} + \dot{a}_{t_n}\,\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\,(\dot{a}_{t_n+\theta\Delta t} - \dot{a}_{t_n}) \tag{2.87}$$

Iz ove relacije se dobija za trenutak vremena $\tau = \theta\Delta t$:

$$a_{t_n+\theta\Delta t} = a_{t_n} + \frac{1}{2}\,\theta\Delta t\,(\dot{a}_{t_n+\theta\Delta t} - \dot{a}_{t_n}) \tag{2.88}$$

Odakle se, rešavanjem po $\dot{a}_{t_n+\theta\Delta t}$, dobija:

$$\dot{a}_{t_n+\theta\Delta t} = \frac{2}{\theta\Delta t}\,(a_{t_n+\theta\Delta t} - a_{t_n}) - \dot{a}_{t_n} \tag{2.89}$$

Da bi se dobila rešenja jednačina (2.64) u trenutku vremena $t_{n+1} = t_n+\Delta t$, koja bi bila izražena preko vrednosti nepoznatih u trenutku t_n, jednačine (2.64) se pišu za trenutak vremena $t_n+\theta\Delta t$. Pri tome se smatra da se i slobodan član jednačina menja linearno tokom intervala vremena:

$$\left[\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \dot{a} \\ p \end{Bmatrix}_{t_n+\theta\Delta t} + \left[\begin{array}{c|c} K(a_{t_n+\theta\Delta t})+B & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix}_{t_n+\theta\Delta t} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{d} \\ 0 \end{Bmatrix}_{t_n+\theta\Delta t} \tag{2.90}$$

gde je

$$\bar{d}_{t_n+\theta\Delta t} = d_{t_n} + \theta\,(d_{t_n+\Delta t} - d_{t_n}) \tag{2.91}$$

Unošenjem relacije (2.89) u jednačine (2.90) se dobija

$$\left[\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \frac{2}{\theta\Delta t}\,(a_{t_n+\theta\Delta t} - a_{t_n}) - \dot{a}_{t_n} \\ p_{t_n+\theta\Delta t} \end{Bmatrix} +$$

$$\left[\begin{array}{c|c} K(a_{t_n+\theta\Delta t}) + B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} a_{t_n+\theta\Delta t} \\ p_{t_n+\theta\Delta t} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \bar{d}_{t_n+\theta\Delta t} \\ 0 \end{array}\right\} \qquad (2.92)$$

Jednačine (2.91) mogu da se pišu skraćeno u obliku:

$$[\hat{K}(a)]\ \{a_1\}_{t_n+\theta\Delta t} = \{\hat{d}\}_{t_n+\theta\Delta t} \qquad (2.93)$$

gde su uvedene oznake:

$$[\hat{K}(a)] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{2}{\theta\Delta t} M + K(a_{t_n+\theta\Delta t}) + B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right]$$

$$\{\hat{d}\} = \left\{\begin{array}{c} d_{t_n} + \theta\ (d_{t_n+\Delta t} - d_{t_n}) + M\ (\frac{2}{\theta\Delta t} a_{t_n} + \dot{a}_{t_n}) \\ \hline 0 \end{array}\right\} \qquad (2.94)$$

$$\{a_1\} = \left\{\begin{array}{c} a \\ p \end{array}\right\}$$

Slobodan član u diskretizovanim N.S. jednačinama je dat sa (2.40). Vidi se da on potiče od graničnih uslova strujanja na konturi Γ_2. Kako se ovi granični uslovi tokom vremena ne menjaju, to je

$$\{d_{t_n}\} = \{d_{t_n+\Delta t}\} = \{d\} = const \qquad (2.95)$$

odnosno

$$\{\hat{d}\} = \left\{\begin{array}{c} d + M\ (\frac{2}{\theta\Delta t} a_{t_n} + \dot{a}_{t_n}) \\ \hline 0 \end{array}\right\} \qquad (2.96)$$

Rešavanjem nelinearnih jednačina (2.93) - o načinu rešavanja ovih jednačina će biti reči malo posle, dobija se vektor $\{a_1\}_{t_n+\theta\Delta t}$, koji se sastoji, kao što se vidi iz (2.94) iz vektora čvornih brzina $\{a\}_{t_n+\theta\Delta t}$ i vektora čvornih pritisaka fluida $\{p\}_{t_n+\theta\Delta t}$. Vektor brzina $\{a\}_{t_n+\theta\Delta t}$ se unosi u relaciju (2.89) kojom se dobijaju čvorna ubrzanja fluida $\{\dot{a}\}_{t_n+\theta\Delta t}$:

$$\{\dot{a}\}_{t_n+\theta\Delta t} = \frac{2}{\theta\Delta t}(\{a\}_{t_n+\theta\Delta t} - \{a\}_{t_n}) - \{\dot{a}\}_{t_n} \tag{2.97}$$

Najzad, unošenjem čvornih ubrzanja (2.97) u relacije (2.86) i (2.87), i to za trenutak vremena $\tau = \Delta t$, dobijaju se čvorna ubrzanja i brzine u trenutku vremena $t = t_{n+1} = t_n+\Delta t$:

$$\begin{aligned} \{\dot{a}\}_{t_{n+1}} &= \{\dot{a}\}_{t_n} + \frac{1}{\theta}(\{\dot{a}\}_{t_n+\theta\Delta t} - \{\dot{a}\}_{t_n}) \\ \{a\}_{t_{n+1}} &= \{a\}_{t_n} + \{\dot{a}\}_{t_n} \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2\theta}(\{\dot{a}\}_{t_n+\theta\Delta t} - \{\dot{a}\}_{t_n}) \end{aligned} \tag{2.98}$$

Za čvorne pritiske u trenutku $t = t_{n+1}$ može da se usvoji:

$$\{p\}_{t_{n+1}} = \{p\}_{t_n+\theta\Delta t} \tag{2.99}$$

odnosno vrednosti dobijene rešavanjem jednačina (2.93).

6.2.2. Unošenje početnih uslova i inicijalizacija postupka

Unošenje početnih uslova se vrši na isti način kao i u slučaju prediktor-korektor postupka: rešavanjem jednačina (2.67). Time se dobijaju početna čvorna ubrzanja u trenutku $t = 0$, a takodje i pritisci u trenutku $t = 0$ koji su takvi da je jednačina kontinuiteta zadovoljena.

Izračunata čvorna ubrzanja - rešavanjem jednačina (2.67) i zadate početne brzine fluida omogućuju da se formiraju jednačine (2.93) i nadju rešenja (2.98) i (2.99) na kraju prvog intervala vremena $t_1 = \Delta t$. Vidi se, dakle da nema posebnih procedura za inicijalizaciju postupka integracije, jer se rešenja u svakom narednom koraku dobijaju prema relacijama (2.98) i (2.99), znači rešavanjem jednačina (2.93) i korišćenjem već poznatih čvornih ubrzanja i brzina na početku posmatranog intervala vremena.

6.2.3. Rešavanje nelinearnih jednačina

Jednačine (2.93) su nelinearne algebarske jednačine, oblika $A(x) \cdot x = b$, koje mogu da se rešavaju na prikazane načine. Znači, iterativni metod sukcesivne zamene (direktna iteracija), ili Newton-Raphson-ov postupak. U oba slučaja za početne vrednosti nepoznatih, na bazi kojih se izračunavaju nelinearni članovi ili odgovarajuća Jacobi-eva matrica, koriste se vrednosti čvornih brzina i pritisaka fluida koje su ranije dobijene na početku posmatranog intervala vremena. Ukoliko je vremenski inkrement Δt relativno mali, ova početna vrednost je veoma dobra početna aproksimacija nepoznatih na kraju posmatranog intervala vremena.

III. DINAMIČKO PONAŠANJE KONSTRUKCIJA

1. KRUTE (STACIONARNE) KONSTRUKCIJE

1.1. Klasifikacija konstrukcija na krute i fleksibilne

Pre svega, gradjevinske konstrukcije tretirane u ovom radu se posmatraju kao linearno elastične. Samim tim, one poseduju odredjenu mogućnost kretanja (elastičnog deformisanja), tako da ne mogu da se smatraju kao stacionarni (nepokretni) objekti.

Medjutim, imajući u vidu da se u ovom radu posmatra medjusobna interakcija fluida i konstrukcije, pri čemu se pod fluidom smatra odredjena idealizacija vetra kao fluida koji opstrujava konstrukciju, sasvim je moguće, šta više i inženjerski opravdano, da se deformabilne konstrukcija klasifikuju u dve grupe. U prvu grupu bi spadale one konstrukcije koje pod uticajem bilo kakvog vetra ne menjaju bitno svoj položaj u prostoru, odnosno svoj prvobitni oblik. Nesumnjivo je da se sve, pa i pomenute konstrukcije, deformišu pod uticajem vetra, medjutim, deformacija može da bude dovoljno mala i dovoljno spora, tako da ne mora da se uzima u obzir. Ovu grupu čine tzv. krute konstrukcije, kao što su, na primer, relativno niske zgrade (naravno, ne sve niske zgrade).

Sa druge strane, sve konstrukcije koje nisu krute, čine drugu grupu tzv. fleksibilnih konstrukcija. Strujanje vetra kao fluida koji ih okružuje može da bude takvo da primetno (nezanemarljivo) deformiše takve konstrukcije, a takodje i da ih pobudi na kretanje, oscilatornog ili drugačijeg karaktera.

Pitanje granice i kriterijuma koje su to konstrukcije, sa stanovišta uticaja vetra, krute odnosno fleksibilne, nikako nije jednostavno. Navedena opisna klasifikacija ipak daje odredjenu intuitivnu sliku. Sa stanovišta analitičkog formulisanja kriterijuma podele konstrukcija, najcelishodnije, a u isto vreme najjednostavnije, se čini definisanje na bazi osnovnog sopstvenog perioda slobodnih harmonijskih vibracija konstrukcija (u vakuumu). Ako je T_{gr} neka granična vrednost osnovnog perioda konstrukcije T, onda sve konstrukcije kod kojih je

$$T \leqslant T_{gr} \tag{3.1}$$

spadaju u krute, dok su konstrukcije fleksibilne ukoliko je

$$T > T_{gr} \tag{3.2}$$

Naravno, ostaje da se definiše i kolika je granična vrednost T_{gr} osnovnog perioda. Čini se da bi ova granica mogla da bude $0,25$ do $0,50$ sekundi, odnosno da granična osnovna svojstvena frekvencija iznosi $f_{gr} = 2 \div 4\ Hz$.

1.2. Ponašanje krutih konstrukcija u fluidnoj sredini

Pre svega, mora da se istakne da se krute konstrukcije (krute u smislu ranije iznetog) uopšte nikako ne "ponašaju". Znači, bez obzira na to kakvo je strujanje fluida, krute konstrukcije su potpuno nepokretne i ne postoji nikakva medjusobna interakcija izmedju fluida i konstrukcije. Krute konstrukcije predstavljaju jedino čvrste granice u odnosu na kretanje fluida i samim svojim prisustvom u struji fluida utiču na njegovo kretanje zbog toga što predstavljaju (t.j. nameću) odredjene granične uslove. Medjutim, za razliku od fleksibilnih konstrukcija, ovde ne postoji uzajamno dejstvo i medjusobno prilagodjavanje (interakcija) u kretanju. Krute konstrukcije su jednostavno nepokretni objekti "uronjeni" u struju fluida i svaka promena strujnog polja oko konstrukcije je prouzrokovana drugim razlozima, a ne prisustvom krute konstrukcije.

1.2.1. Granični uslovi na kontaktu fluida i konstrukcije

U slučaju dvodimenzionalnog posmatranja strujanja fluida oko nepokretne (krute) konstrukcije, situacija je šematski prikazana na Sl. 2.1. Oblast K na Sl. 2.1. predstavlja horizontalan presek konstrukcije, a granice Γ_3 kontaktnu površ izmedju fluida i konstrukcije.

Granični uslovi na konturi Γ_3 su dati sa (2.6):

$$u_n = 0, \quad v_s = 0 \qquad \text{(na konturi } \Gamma_3\text{)} \tag{3.3}$$

gde je, kao što je rečeno, u_n komponenta brzine fluida u pravcu normale na konturu Γ_3, a v_s komponenta u pravcu tangente. Prvi od uslova (3.3) može da se shvati i kao uslov neprodiranja fluida kroz čvrstu granicu Γ_3, a drugi uslov kao uslov prianjanja (lepljenja) fluida uz čvrstu granicu. Oba uslova (3.3) ujedno znače i da je relativna brzina fluida u odnosu na konstrukciju (koja je nepokretna) jednaka nuli.

Esencijalni uslovi (3.3), naravno u svom diskretizovanom obliku preko čvornih brzina na konturi Γ_3, se unose ili u jednačine (2.41) ili (2.46), u zavisnosti od toga da li se strujanje fluida posmatra kao nestacionarno ili stacionarno. Unošenjem konturnih uslova i na ostalim granicama posmatranog domena strujanja, kao i početnih uslova za nestacionarno strujanje, odgovarajuće jednačine kretanja fluida se rešavaju na način prikazan u delu II.

1.2.2. Odredjivanje sila kojima fluid deluje na konstrukciju

Sa stanovišta konstrukcije, od celokupnog dobijenog rešenja koje definiše strujanje fluida unutar posmatrane oblasti Ω, bitne su jedino vrednosti brzina i pritisaka fluida u neposrednoj okolini konstrukcije.

Površinske sile fluida na konturi Γ_3 na kontaktu sa konstrukcijom, date su, za slučaj dvodimenzionalnog strujanja, u obliku:

$$\begin{aligned} f_n &= -p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} \\ f_s &= \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) \qquad \text{(na konturi } \Gamma_3\text{)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ovo su površinske sile u pravcima normale n i tangente s na konturu, dok su u_n i v_s, kao što je rečeno, komponente brzine fluida u pravcima normale i tangente na konturu.

Komponente brzine fluida u pravcima dekartovog sistema xy su obeležene sa u i v, dok su komponentalni naponi dati sa:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ako je vektor spoljašnje normale na konturu fluida (znači usmeren ka unutrašnjosti konstrukcije) dat sa $\vec{n} = \{n_x, n_y\}$, onda su x- i y- komponente površinskih sila date sa

$$
\begin{aligned}
f_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\
f_y &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y
\end{aligned}
\qquad (3.6)
$$

Ukupne površinske sile (rezultante u pravcima x i y) se dobijaju integracijom po konturi Γ_3. Kako je u pitanju dvodimenzionalno strujanje, onda su površinske sile (3.6) u stvari linijske sile, jer je kontaktna površ Γ_3 linija.

Ako se razdvoje doprinosi pritiska fluida od viskoznih sila, t.j. ako se posebno posmatraju sferni i devijatorski udeo u površinskim silama (3.6), onda se dobija:

$$
\begin{aligned}
F_x^p &= - \oint_{\Gamma_3} p n_x d\Gamma \\
F_y^p &= - \oint_{\Gamma} p n_y d\Gamma
\end{aligned}
\qquad (3.7)
$$

$$
\begin{aligned}
F_x^v &= \mu \oint_{\Gamma_3} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] d\Gamma \\
F_y^v &= \mu \oint_{\Gamma_3} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right] d\Gamma
\end{aligned}
\qquad (3.8)
$$

U relacijama (3.7) i (3.8) su F^p i F^v rezultujuće sile usled pritisaka i viskoznosti fluidne sredine, koje deluju na konstrukciju.

Ako je udaljeno ("ulazno") strujanje fluida paralelno strujanje u pravcu x ose sa brzinom u_∞, onda je pogodan referentan dinamički (ili zaustavni) pritisak fluida dat sa

$$
q = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \qquad (3.9)
$$

gde je ρ gustina fluida. Koeficijenti otpora i uzgona posmatrane konstrukcije u struji fluida su dati tada sa:

$$
\begin{aligned}
C_D &= \frac{1}{qD} (F_x^p + F_x^v) \\
C_L &= \frac{1}{qD} (F_y^p + F_y^v)
\end{aligned}
\qquad (3.10)
$$

gde je D prečnik konstrukcije upravno na pravac strujanja fluida.

Integralima (3.7) i (3.8) su dati intenziteti rezultujućih sila kojima fluid deluje na konstrukciju. Položaji napadnih tačaka ovih rezultujućih sila mogu da se odrede na uobičajen način:

$$s_x = \frac{1}{F_x} \oint_{\Gamma_3} f_x s \, d\Gamma$$
$$s_y = \frac{1}{F_y} \oint_{\Gamma_3} f_y s \, d\Gamma \qquad (3.11)$$

gde je

$$F_x = F_x^p + F_x^v$$
$$F_y = F_y^p + F_y^v \qquad (3.12)$$

dok su f_x i f_y dati sa (3.6), a s je koordinata u pravcu tangente na konturu. Relacije (3.11) su načelno napisane. U slučajevima svakog konkretnog oblika poprečnog preseka konstrukcije, na primer pravougaonog, moguće je da se na analogan način izračunavanjem odgovarajućih integrala duž pojedinih delova konture odrede rezultujuće sile i njihovi položaji (na primer na svakoj stranici pravougaonog preseka).

O praktičnom načinu izračunavanja integrala (Gauss-ovom kvadraturom) biće detaljnije reči kasnije.

Sa dobijenim silama kojima fluid deluje na konstrukciju, moguće je da se dalje posmatra izolovana konstrukcija, što ovde neće da se razmatra.

2. FLEKSIBILNE (NESTACIONARNE) KONSTRUKCIJE

Za razliku od krutih konstrukcija, fleksibilne konstrukcije vrše odredjeno kretanje u struji fluida. Ova dva kretanja, fluida i konstrukcije, su u uzajamnoj vezi i medjusobno utiču jedno na drugo. Pre nego što počne da se razmatra ova medjusobna interakcija, prvo će da se prikaže način analiziranja globalnog ponašanja konstrukcije nezavisno od fluidne sredine (u vakuumu).

2.1. Diskretizacija visokih vitkih konstrukcija na dvodimenzionalno ponašanje

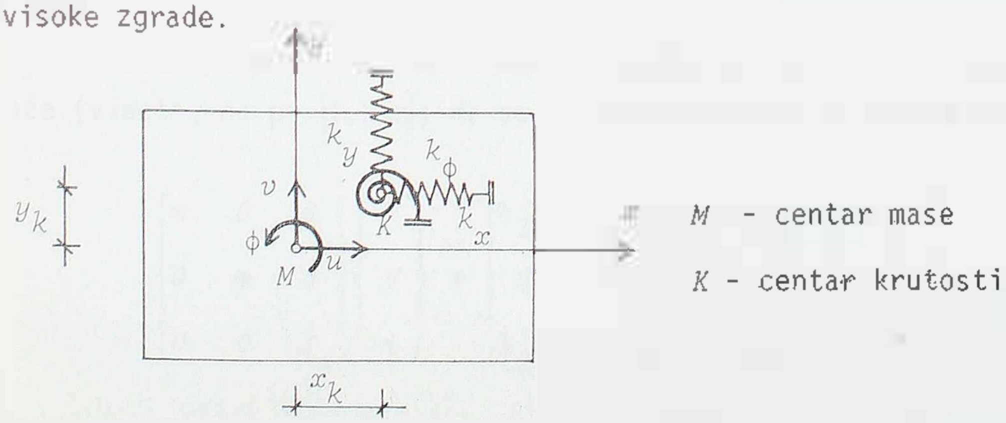
Kako se u ovom radu razmatraju samo dvodimenzionalni problemi, prvo će da se prikaže mogućnost svodjenja realne konstrukcije na ekvivalentan dvodimenzionalan model. Pri tome se u ovom radu ne koristi metoda konačnih elemenata u analizi konstrukcija, već se koriste tzv. kontinualni pristupi u prostornoj analizi konstrukcija. Za fomulisanje ekvivalentnog dvodimenzionalnog tretiranja koriste se postupci dinamike konstrukcija koji to omogućavaju.

Pri tome se iz klase fleksibilnih konstrukcija izdvajaju i posmatraju jedino visoki vitki objekti, kao što su visoke zgrade, tornjevi (za vodu i telekomunikacije) i dimnjaci.

2.1.1. Formiranje ekvivalentnog računskog modela za visoke zgrade

Visoki vitki objekti, izloženi uticaju horizontalnog opterećenja, poseduju tri dominantna stepena slobode kretanja. To su dva translatorna pomeranja u pravcima dve medjusobno ortogonalne ose u horizontalnoj ravni (x i y) i rotaciono kretanje oko vertikalne ose (z). Ukoliko je reč o visokoj zgradi sa N etaža, onda se u tzv. diskretnom pristupu, pomenuta tri stepena slobode kretanja posmatraju kao diskretne veličine vezane za svaku etažu, tako da je ukupan broj stepeni slobode $3N$. Sa druge strane, u tzv. kontinualnom pristupu se dve horizontalne translacije i rotacija oko vertikalne ose tretiraju kao kontinualne funkcije po visini zgrade. Ovde se posmatra kontinualna aproksimacija visokih vitkih objekata.

Na Sl. 3.1. je prikazan ekvivalentan dvodimenzionalan računski model visoke zgrade.



Sl. 3.1. Ekvivalentan dvodimenzionalan računski model sa tri stepena slobode kretanja.

Sa M i K su obeleženi centri mase i krutosti objekta, dok se tri stepena slobode kretanja $u(t), v(t), \phi(t)$ (dve translacije u horizontalnoj ravni i rotacija oko vertikalne ose) vezuju za koordinatni sistem xyz u centru mase. Sa k_x i k_y su obeležene ekvivalentne globalne krutosti objekta u pravcima x i y, dok je k_ϕ ekvivalentna torziona krutost.

Ako na dvodimenzionalnu krutu ploču prikazanu na Sl. 3.1. deluju neke sile u ravni x,y, čijom se redukcijom na centar mase M dobija F_x, F_y i M_z, diferencijalne jednačine kretanja ploče mogu da se napišu u obliku:

$$\begin{bmatrix} m^* & 0 & 0 \\ 0 & m^* & 0 \\ 0 & 0 & J_z^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x y_k \\ 0 & k_y & k_y x_k \\ -k_x y_k & k_x x_k & k_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

gde je

$$k_\varphi = k_\phi + k_x y_k^2 + k_y x_k^2 \tag{3.14}$$

dok su sa m^* i J_z^* obeleženi masa ploče i momenat inercije mase (odnosno ekvivalentna masa i ekvivalentni momenat inercije mase posmatrane zgrade). Jednačine (3.13) mogu da se pišu skraćeno u obliku

$$[M^*]\ \{\ddot{u}\} + [K^*]\ \{u\} = \{f^*\} \tag{3.15}$$

gde su $[M^*]$ i $[K^*]$ matrice mase i krutosti posmatranog dvodimenzionalnog modela, dok je $\{f^*(t)\}$ vektor sila, a $\{u(t)\}$ vektor nepoznatih generalisanih koordinata.

Jednačine (3.13) predstavljaju jednačine ravnog kretanja krute ploče prikazane na Sl. 3.1. Transformacija trodimenzionalnog ponašanja fleksibilne zgrade na ravno kretanje krute ploče može da se izvrši primenom Galerkinovog postupka ili primenom modalne analize.

Na primer, ako se posmatra zgrada sa zidnim platnima, može da se pokaže (videti, na pr. [I.5.8]) da se jednačine kretanja zgrade dobijaju u obliku:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \phi \end{Bmatrix}^{IV} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ m_z \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

Sa m i J_z su obeleženi masa i momenat inercije mase zgrade po jedinici visine, k_{ij} su odgovarajući koeficijenti krutosti zgrade, dok su sa $U(z,t)$, $V(z,t)$ i

$\phi(z,t)$ označeni dve translacije zgrade u pravcima horizontalnih osa x i y i rotacija oko ose z. Ove veličine su kontinualne funkcije prostorne koordinate z (po visini zgrade) i vremena t. Jednačine (3.16) mogu da se napišu u matričnom obliku

$$[M]\ \{\ddot{U}\} + [K]\ \{U\}^{IV} = \{q\} \tag{3.17}$$

Usvaja se da se nepoznate funkcije izražavaju u obliku

$$\begin{aligned} U(z,t) &= \psi_u(z)\ u(t) \\ V(z,t) &= \psi_v(z)\ v(t) \\ \phi(z,t) &= \psi_\phi(z)\ \varphi(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

gde su ψ_u, ψ_v, ψ_ϕ pogodne funkcije koje zadovoljavaju granične uslove (najpogodnije: svojstveni oblici slobodnih vibracija konzole). Relacije (3.18) se pišu u matričnoj formi

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_u & & \\ & \psi_v & \\ & & \psi_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

ili skraćeno

$$\{U(z,t)\} = [\psi(z)]\ \{u(t)\} \tag{3.20}$$

Ako se, u skladu sa Galerkinovim postupkom, jednačina (3.17) množi sa leva sa $[\psi]^T$ i integrali po visini zgrade $z \in [0,l]$, dobija se, posle parcijalne integracije,

$$[M^*]\ \{\ddot{u}\} + [K^*]\ \{u\} = \{f^*\} \tag{3.21}$$

gde je

$$[M^*] = \int_0^l [\psi]^T\ [M]\ [\psi]\ dz$$

$$[K^*] = \int_0^l [\psi]''^T [K] [\psi]'' dz$$

$$\{f^*\} = \int_0^l [\psi]^T \{q\} dz \qquad (3.22)$$

U razvijenom obliku su integrali (3.22) dati sa:

$$[M^*] = \int_0^l \begin{bmatrix} m\psi_u^2 & & \\ & m\psi_v^2 & \\ & & J_z\psi_\phi^2 \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} m^* & & \\ & m^* & \\ & & J_z^* \end{bmatrix}$$

$$[K^*] = \int_0^l \begin{bmatrix} k_{11}\psi_u''^2 & 0 & k_{13}\psi_u''\psi_\phi'' \\ 0 & k_{22}\psi_v''^2 & k_{23}\psi_v''\psi_\phi'' \\ k_{13}\psi_u''\psi_\phi'' & k_{23}\psi_v''\psi_\phi'' & k_{33}\psi_\phi''^2 \end{bmatrix} dz \qquad (3.23)$$

$$\{f^*\} = \int_0^l \begin{Bmatrix} q_x\psi_u \\ q_y\psi_v \\ m_z\psi_\phi \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Jednačine (3.21) su u potpunosti ekvivalentne sa jednačinama (3.15) za krutu ploču na sl.3.1., ukoliko je

$$m^* = \int_0^l m(z)\, \psi_u^2\, dz = \int_0^l m(z)\, \psi_v^2\, dz$$

$$J_z^* = \int_0^l J_z\, \psi_\phi^2\, dz \qquad (3.24a)$$

$$k_x = \int_0^l k_{11}\psi_u''^2\, dz$$

$$-k_x y_k = \int_0^l k_{13}\psi_u''\psi_v''\, dz$$

$$k_y = \int_o^l k_{22} \psi_v''^2 \, dz$$

$$k_{y\varphi} = \int_o^l k_{23} \psi_v'' \psi_\phi'' \, dz \qquad (3,24b)$$

$$k_\varphi = \int_o^l k_{33} \psi_\phi''^2 \, dz$$

$$F_x = \int_o^l q_x \psi_u \, dz$$

$$F_y = \int_o^l q_y \psi_v \, dz \qquad (3,24c)$$

$$M_z = \int_o^l m_z \psi_\phi \, dz$$

Ako se usvoji da je

$$\psi_u = \psi_v = \psi_\phi = 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) = \psi(z) \qquad (3.25)$$

što je prihvatljiva aproksimacija za prvi ton konzolnog nosača, dobija se

$$\int_o^l \psi^2(z) dz = 0.228 \; l$$

$$\int_o^l \psi''^2(z) dz = \frac{\pi^4}{32 l^3} \qquad (3.26)$$

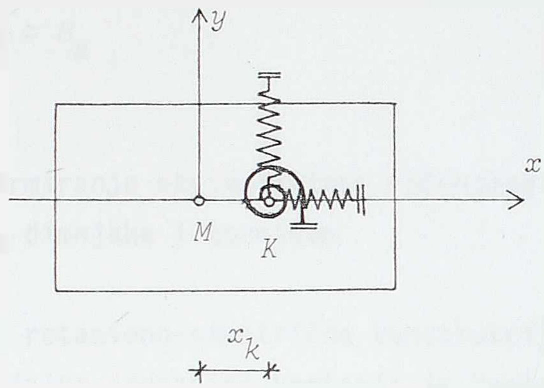
$$\int_o^l \psi'^2(z) \; dz = \frac{\pi^2}{8l}$$

$$\int_o^l \psi(z) \; dz = 0,364 \; l$$

tako da se, za zgradu sa konstrantnim karakteristikama po visini, integrali dati sa (3.24) lako odredjuju.

Očigledno je da se računski model sa tri stepena slobode kretanja, prikazan na sl.3.1, odnosi na zgrade nesimetrične osnove. U specijalnim slučajevima se dolazi do računskih modela sa dva, ili sa jednim stepenom slobode kretanja.

Ako je osnova zgrade sa jednom osom simetrije, na primer u odnosu na osu x, onda je ekvivalentan računski model prikazan na sl.3.2.



Sl. 3.2. Zgrada sa jednom osom simetrije (x-osa)

U ovom slučaju je $x_k \neq 0$ i $y_k = 0$, tako da matrica krutosti data sa (3.13) postaje

$$[K^*] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & k_y x_k \\ 0 & k_y x_k & k_\phi + k_y x_k^2 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Kako je matrica mase dijagonalna, jednačine (3.13) se svode na jednu nezavisnu jednačinu za pravac ose simetrije:

$$m^* \ddot{u} + k_x u = F_x \tag{3.28}$$

i na dve spregnute jednačine

$$\begin{bmatrix} m^* & 0 \\ 0 & J_z^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & k_y x_k \\ k_y x_k & k_\phi + k_y x_k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

U slučaju zgrade koja je simetrična u odnosu na dve ose, centri mase i krutosti se poklapaju ($x_k = y_k = 0$), tako da se jedn. (3.13) svode na tri nezavisne jednačine:

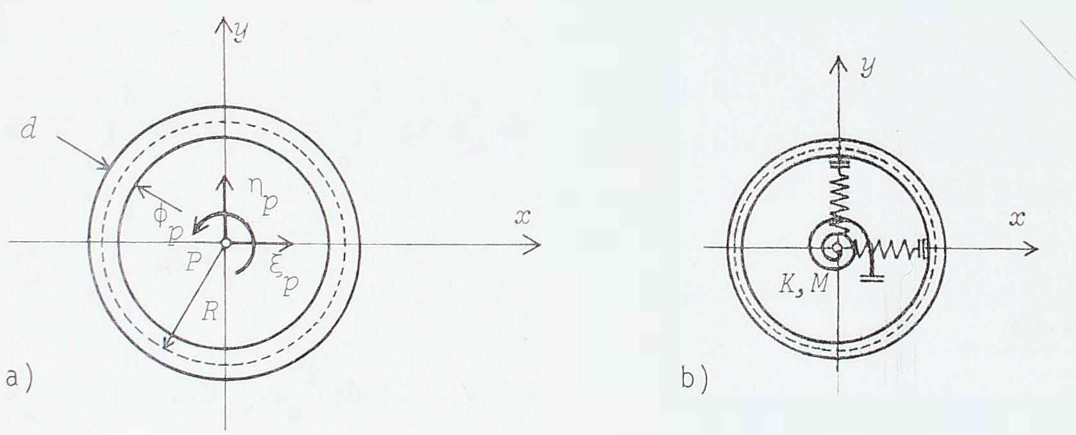
$$m^*\ddot{u} + k_x u = F_x$$

$$m^*\ddot{v} + k_x v = F_y \qquad (3.30)$$

$$J_z^*\ddot{\varphi} + k_\phi \varphi = M_z$$

2.1.2. Formiranje ekvivalentnog računskog modela za dimnjake i tornjeve

U slučaju rotaciono-simetrične konstrukcije, kao što je na primer dimnjak, diferencijalne jednačine kretanja (u kontinualnoj formulaciji) su medjusobno nezavisne. Na sl.3.3. je prikazan poprečni presek dimanjaka posmatranog kao tankozidni štap.



Sl. 3.3. (a) Poprečni presek dimnjaka,
(b) Ekvivalentni dvodimenzionalni računski model

Korišćenjem oznaka uobičajenih u teoriji tankozidnih štapova, može da se pokaže da se dobijaju sledeće nezavisne jednačine poprečnih i torzionih vibracija tankozidnog kružnog cilindra:

$$E'J_{xx}\xi_p^{IV} + \rho F\ddot{\xi}_p = p_x$$

$$E'J_{yy}\eta_p^{IV} + \rho F\ddot{\eta}_p = p_y \qquad (3.31)$$

$$GK\varphi_p'' - \rho K\ddot{\varphi}_p = -m_p$$

Ako se parametri pomeranja ξ_p, η_p i φ_p prikažu u obliku:

$$\xi_p(z,t) = \psi_u(z)\ u(t)$$

$$\eta_p(z,t) = \psi_v(z)\ v(t) \tag{3.32}$$

$$\varphi_p(z,t) = \psi_\varphi(z)\ \varphi(t)$$

jednačine (3.31) mogu da se transformišu na oblik:

$$m^*\ddot{u} + k_x u = F_x$$

$$m^*\ddot{v} + k_y v = F_y \tag{3.33}$$

$$J_z^*\ddot{\varphi} + k_\phi \varphi = M_z$$

gde je:

$$m^* = \int_o^l \rho F\ \psi_u^2\ dz = \int_o^l \rho F\ \psi_v^2\ dz$$

$$J_z^* = \int_o^l \rho K\ \psi_\phi^2\ dz$$

$$k_x = \int_o^l E'J_{xx}\ \psi_u''^2\ dz \tag{3.34}$$

$$k_y = \int_o^l E'J_{yy}\ \psi_v''^2\ dz$$

$$k_\phi = \int_o^l GK\ \psi_\phi'^2\ dz$$

$$F_x = \int_o^l \psi_u\ p_x\ dz$$

$$F_y = \int_o^l \psi_v\ p_y\ dz$$

$$M_z = \int_o^l \psi_\phi\ m_p\ dz$$

U zaključku, dinamičko ponašanje visokih fleksibilnih objekata može da se približno analizira pomoću odgovarajućeg dvodimenzionalnog računskog modela. Ovakav dvodimenzionalan model poseduje tri stepena slobode kretanja i jednačine kretanja u matričnom obliku su date sa (3.21):

$$[M^*]\ \{\ddot{u}\} + [K^*]\ \{u\} = \{f^*\} \tag{3.21}$$

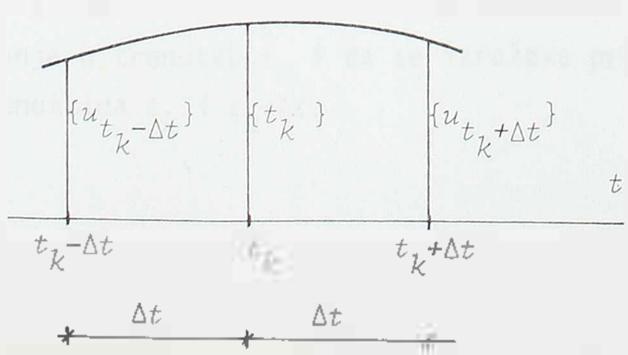
Kao što je rečeno, matrica mase je dijagonalna, dok matrica krutosti može, ali ne mora da bude dijagonalna. U odredjenim slučajevima tri spregnute jednačine (3.21) mogu da se svode na "dve + jednu" jednačinu ili na tri nezavisne jednačine.

2.2. Rešavanje jednačina kretanja ekvivalentnih dvodimenzionalnih računskih modela

Sistem od tri obične diferencijalne jednačine (3.21) može da se rešava na razne načine, na primer primenom modalne analize ili metodom direktne integracije. Ovde se koristi ovaj drugi pristup. To znači da se traži rešavanje jednačina (3.21) u diskretnim vremenskim trenucima t_i, a ne za bilo koje (kontinualno) vreme t. Takodje se unapred usvaja promena ubrzanja, brzina i pomeranja unutar svakog intervala vremena Δt (izmedju dva diskretna trenutka t_k i t_{k+1}). Od raznih mogućih postupaka direktne integracije, biće prikazana dva: diferencni postupak i metod Wilson θ.

2.2.1. Diferencni (eksplicitni) postupak

Od raznih diferencnih izraza kojima se aproksimiraju brzina i ubrzanje, najčešće se koristi metod centralnih razlika. Unutar dva susedna intervala vremena se usvaja parabolična raspodela nepoznatog vektora pomeranja, sl. 3.4.



Sl. 3.4. Parabolična raspodela pomeranja unutar intervala vremena

Prvi i drugi izvod po vremenu nepoznatog pomeranja u trenutku vremena $t = t_k$ su dati približno sa:

$$
\begin{aligned}
\{\dot{u}_{t_k}\} &= \frac{1}{2\Delta t}\left(\{u_{t_k+\Delta t}\} - \{u_{t_k-\Delta t}\}\right) \\
\{\ddot{u}_{t_k}\} &= \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\{u_{t_k-\Delta t}\} - 2\{u_{t_k}\} + \{u_{t_k+\Delta t}\}\right)
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Kako je u jednačinama (3.21) zanemareno prigušenje, to diferencna aproksimacija brzina nije potrebna u ovoj fazi - potrebna je u razmatranju interakcije sa fluidom. Ako se (3.35/2) unese u jednačine (3.21), napisane za trenutak vremena $t = t_k$, dobija se:

$$
\frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{t_k+\Delta t}\} = \{f^*_{t_k}\} - ([K^*] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[M^*])\{u_{t_k}\} - \frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{t_k-\Delta t}\}
\tag{3.36}
$$

ili skraćeno

$$
\frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{t_k+\Delta t}\} = \{\hat{f}^*_{t_k}\}
\tag{3.37}
$$

Kako je matrica mase dijagonalna matrica, rešenje jednačina (3.37) se direktno dobija

$$
u^{(i)}_{t_k+\Delta t} = \hat{f}^{*(i)}_{t_k} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{m^*_{ii}}
\tag{3.38}
$$

gde je sa i $(i=1,2,3)$ obeležena komponenta vektora odn. dijagonalni element matrice mase. Desna strana jednačina (3.36) se lako formira množenjem matrica i vektora. Vidi se da se vektor nepoznatog pomeranja u trenutku $t_k+\Delta t$ dobija iz jednačina kretanja u trenutku t_k i da se izražava preko prethodno odredjenih pomeranja u trenutcima t_k i $t_k-\Delta t$.

2.2.1.1. Početak postupka

U početnom trenutku vremena, $t_k = t_o = 0$, poznati su početni uslovi:

$$\{u(t=0)\} = \{u_o\}$$
$$\{\dot{u}(t=0)\} = \{\dot{u}_o\} \tag{3.38}$$

pri čemu su u_o i $\dot{u}_o$ poznati početni položaj i početna brzina konstrukcije (najčešće nulte vrednosti). Da bi se odredio vektor nepoznatog pomeranja (i brzine) na kraju prvog intervala vremena, napišu se jednačine (3.36) za trenutak $t_k = 0$, odakle se dobija

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{\Delta t}\} = \{f_o^*\} - ([K^*] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[M^*])\{u_o\} - \frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{-\Delta t}\} \tag{3.39}$$

Znači, potrebno je pomeranje u trenutku $-\Delta t$. Ako se diferencni izrazi (3.35) napišu za $t_k = 0$:

$$\{\dot{u}_o\} = \frac{1}{2\Delta t}(\{u_{\Delta t}\} - \{u_{-\Delta t}\})$$
$$\{\ddot{u}_o\} = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\{u_{-\Delta t}\} - 2\{u_o\} + \{u_{\Delta t}\}) \tag{3.40}$$

onda se eliminacijom vektora $u_{\Delta t}$ iz dva izraza (3.40) dobija relacija koja se rešava po nepoznatom $\{u_{-\Delta t}\}$:

$$\{u_{-\Delta t}\} = \{u_o\} - \Delta t\,\{\dot{u}_o\} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\{\ddot{u}_o\} \tag{3.41}$$

Pri tome je ubrzanje u početnom trenutku, vektor $\ddot{u}_o$, odredjeno iz jednačina (3.21):

$$[M^*]\{\ddot{u}_o\} + [K^*]\{u_o\} = \{f_o^*\} \tag{3.42}$$

koje se lako rešavaju po $\{\ddot{u}_o\}$, jer je $[M^*]$ dijagonalna matrica. Unošenjem vektora $\{u_{-\Delta t}\}$, datog sa (3.41) u rekurentnu relaciju (3.39) dobija se pomeranje $\{u_{\Delta t}\}$ na kraju prvog intervala vremena.

Započinjanje rekurentnog rešavanje je moguće i na alternativni način.

Naime, iz prve od relacija (3.40) se dobija

$$\{u_{-\Delta t}\} = -2\Delta t\ \{\dot{u}_o\} + \{u_{\Delta t}\} \tag{3.43}$$

Ako se ovo unese u (3.39) dobija se

$$\frac{2}{(\Delta t)^2}\ [M^*]\ \{u_{\Delta t}\} = \{f_o^*\} - \left([K^*] - \frac{2}{(\Delta t)^2}\ [M^*]\right)\ \{u_o\} + \frac{2}{\Delta t}\ [M^*]\ \{\dot{u}_o\} \tag{3.44}$$

odakle se opet dobija nepoznato pomeranje na kraju prvog intervala vremena $\{u_{\Delta t}\}$. Ovaj drugi pristup, prikazan relacijom (3.44), je pogodniji za primenu u slučaju nehomogenih uslova.

U slučaju homogenih početnih uslova, $\{\dot{u}_o\} = \{u_o\} = \{0\}$, dobija se pomeranje na kraju prvog intervala vremena u obliku:

$$\frac{2}{(\Delta t)^2}\ [M^*]\ \{u_{\Delta t}\} = \{f_o^*\} \tag{3.45}$$

Sa dobijenim vektorom pomeranja na kraju prvog intervala vremena $\{u_{\Delta t}\}$ mogu da se u drugom, a dalje i narednim koracima, koriste rekurentne relacije (3.36).

2.2.1.2. Stabilnost numeričke integracije i kritičan interval vremena

Prikazan postupak centralnih razlika je jednostavan za primenu i zbog dijagonalne matrice mase odredjivanje nepoznatih pomeranja (i brzina) ne zahteva nikakvu dekompoziciju matrica (iako su reda 3), već samo matrična množenja.

Medjutim, ovaj eksplicitni postupak je samo uslovno stabilan, pri čemu je za stabilnost postupka neophodno da je vremenski interval Δt manji od kritičnog intervala vremena Δt_{cr}. Ako se sa T_{min} obeleži najniži svojstveni period. t.j. period koji odgovara najvišem svojstvenom obliku (sa frekvencijom ω_{max}), onda može da se pokaže da je uslov stabilnosti numeričke integracije dat sa

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{cr} = \frac{T_{min}}{\pi} = \frac{2}{\omega_{max}} \tag{3.46}$$

Svojstvene frekvencije ekvivalentnog dvodimenzionalnog modela se dobijaju rešavanjem odgovarajuće frekventne jednačine

$$D(\omega) = det\ [K^* - \omega^2 M^*] = 0 \tag{3.47}$$

Kako su matrice mase i krutosti date sa

$$[M^*] = \begin{bmatrix} m^* & 0 & 0 \\ 0 & m^* & 0 \\ 0 & 0 & J_z^* \end{bmatrix}$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x y_k \\ 0 & k_y & k_y x_k \\ -k_x y_k & k_y x_k & k_\varphi \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

ako se uvede oznaka

$$\Omega = \omega^2 \tag{3.49}$$

dobija se frekventna jednačina u obliku

$$D(\Omega) = A\Omega^3 + B\Omega^2 + C\Omega + D = 0 \tag{3.50}$$

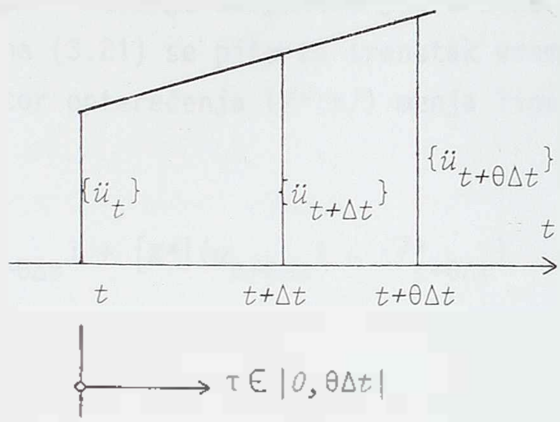
gde je

$$\begin{aligned} A &= m^{*2} J_z^* \\ B &= -\ m^* \ [m^* k_\varphi + J_z^* \ (k_x + k_y)] \\ C &= m^* k_\varphi \ (k_x + k_y) + J_z^* \ k_x k_y - m^*(k_x^2 y_k^2 + k_y x_k^2) \\ D &= -\ k_x k_y k_\varphi + k_x k_y (k_x y_y^2 + k_y x_k^2) \end{aligned} \tag{3.51}$$

Znači, naviši koren frekventne jednačine ω_{max} odredjuje, prema relaciji (3.46), graničnu, t.j. maksimalnu veličinu intervala vremena Δt_{cr}.

2.2.2. Wilson θ (implicitni) postupak

Kod Wilson θ postupka se usvaja predpostavka o linearnoj raspodeli ubrzanja u intervalu vremena $[t, t+\theta\Delta t]$, gde je $\theta > 1.0$, sl.3.5:



Sl. 3.5. Linearna raspodela ubrzanja u postupku Wilson θ

Uvodjenjem lokalne vremenske koordinate τ unutar intervala vremena $[t, t+\theta\Delta t]$, definisane sa $\tau \in [0, \theta\Delta t]$, zbog predpostavke o linearnoj raspodeli ubrzanja sledi:

$$\{\ddot{u}_{t+\tau}\} = \{\ddot{u}_t\} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \tag{3.52}$$

Integracijom izraza (3.52) se dobija

$$\begin{aligned} \{\dot{u}_{t+\tau}\} &= \{\dot{u}_t\} + \{\ddot{u}_t\}\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \\ \{u_{t+\tau}\} &= \{u_t\} + \{\dot{u}_t\}\tau + \frac{1}{2}\{\ddot{u}_t\}\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \end{aligned} \tag{3.53}$$

odakle sledi za trenutak vremena $t+\theta\Delta t$ (t.j. za $\tau=\theta\Delta t$):

$$\begin{aligned} \{\dot{u}_{t+\theta\Delta t}\} &= \{\dot{u}_t\} + \frac{1}{2}\theta\Delta t(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} + \{\ddot{u}_t\}) \\ \{u_{t+\theta\Delta t}\} &= \{u_t\} + \theta\Delta t\{\dot{u}_t\} + \frac{1}{6}(\theta\Delta t)^2(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} + 2\{\ddot{u}_t\}) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Iz izraza (3.54) mogu da se vektori ubrzanja $\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\}$ i brzine $\{\dot{u}_{t+\theta\Delta t}\}$ izraze preko pomeranja $\{u_{t+\theta\Delta t}\}$:

$$\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(\{u_{t+\theta\Delta t}\} - \{u_t\}) - \frac{6}{\theta\Delta t}\{\dot{u}_t\} - 2\{\ddot{u}_t\}$$

$$\{\dot{u}_{t+\theta\Delta t}\} = \frac{3}{\theta\Delta t}(\{u_{t+\theta\Delta t}\} - \{u_t\}) - 2\{\dot{u}_t\} - \frac{1}{2}\theta\Delta t\{\ddot{u}_t\} \tag{3.55}$$

Da bi dobili rešenje za pomeranja, brzine i ubrzanja u trenutku vremena $t+\Delta t$, jednačina (3.21) se piše za trenutak vremena $t+\theta\Delta t$, pri čemu se smatra da se i vektor opterećenja $\{f^*(t)\}$ menja linearno tokom intervala vremena:

$$[M^*]\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} + [K^*]\{u_{t+\theta\Delta t}\} = \{\bar{f}^*_{t+\theta\Delta t}\} \tag{3.56}$$

gde je

$$\{\bar{f}^*_{t+\theta\Delta t}\} = \{f^*_t\} + \theta(\{f^*_{t+\Delta t}\} - \{f^*_t\}) \tag{3.57}$$

Unošenjem izraza (3.55/1) u jednačinu (3.56) se dobija:

$$\left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[M^*] + [K^*]\right)\{u_{t+\theta\Delta t}\} = \{\bar{f}^*_{t+\theta\Delta t}\} + \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[M^*]\{u_t\} +$$

$$+ \frac{6}{\theta\Delta t}[M^*]\{\dot{u}_t\} + 2[M^*]\{\ddot{u}_t\} \tag{3.58}$$

ili skraćeno u obliku

$$[\hat{K}]\{u_{t+\theta\Delta t}\} = \{\hat{f}\} \tag{3.59}$$

gde je

$$[\hat{K}] = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[M^*] + [K^*]$$

$$\{\hat{f}\} = \{f^*_t\} + \theta(\{f^*_{t+\Delta t}\} - \{f^*_t\}) + \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[M^*]\{u_t\} + \tag{3.60}$$

$$+ \frac{6}{\theta\Delta t}[M^*]\{\dot{u}_t\} + 2[M^*]\{\ddot{u}_t\}$$

Rešavanjem jednačina (3.59) se dobija vektor pomeranja $u_{t+\theta\Delta t}$, a zatim unošenjem rešenja u relaciju (3.55/1) se dobija vektor ubrzanja $\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}$. Najzad, unošenjem u relacije (3.52) i (3.53), za $\tau=\Delta t$ dolazi se do ubrzanja, brzine i pomeranja u trenutku $t+\Delta t$:

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\ddot{u}_t\} + \frac{1}{\theta}\,(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\})$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + \Delta t\{\ddot{u}_t\} + \frac{\Delta t}{2\theta}\,(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\}) \qquad (3.61)$$

$$\{u_{t+\Delta t}\} = \{u_t\} + \Delta t\{\dot{u}_t\} + \frac{1}{2}\,(\Delta t)^2\,\{\ddot{u}_t\} + \frac{(\Delta t)^2}{6\theta}\,(\{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{u}_t\})$$

Prikazan postupak Wilson θ postupak je implicitni postupak, jer u svakom koraku uz nepoznat vektor pomeranja figuriše i matrica krutosti kao matrica koeficijenata. Može da se pokaže da je Wilson θ postupak bezuslovno stabilan za $\theta \geq 1.37$, kao i da se optimalna tačnost numeričke integracije dobija za $\theta = 1.40$.

Zbog bezuslovne stabilnosti postupka (za $\theta \geq 1.37$), može da se vrši integracija za znatno veći interval vremena Δt, nego što je to slučaj sa postupkom centralnih razlika. Medjutim, u svakom koraku je potrebno da se rešavaju jednačine (bez obzira što ih ima najviše tri), što u slučaju diferencnog postupka, za dijagonalnu matricu mase, nije tako.

Vidi se iz izraza (3.61) da se pomeranja, brzine i ubrzanja u trenutku $t+\Delta t$ izražavaju preko istih veličina u trenutku t (kao i preko ubrzanja u trenutku $t+\theta\Delta t$, do kojih se dolazi rešavanjem jednačina (3.59)). Drugim rečima, u Wilson θ postupku nema potrebe za posebnim postupkom započinjanja integracije, jer su pomeranje i brzina u trenutku $t = 0$ poznati početni uslovi, dok se početno ubrzanje dobija iz jednačina kretanja (3.42).

IV. MEDJUSOBNA INTERAKCIJA FLUIDA I KONSTRUKCIJA

1. GRANIČNI USLOVI NA KONTAKTU FLUIDA I KONSTRUKCIJE

Pod pojmom "interakcija" se podrazumeva, kao što je već rečeno, medjusoban uticaj jednog medijuma (fluida) na kretanje drugog medijuma (konstrukcije) i obrnuto. Prema tome, interakcija sa fluidom može da postoji samo kod fleksibilnih konstrukcija. Kako su sve konstrukcije deformabilne, teoretski je kod svih konstrukcija prisutna interakcija sa fluidom koji ih opstrujava. Medjutim, deformabilnost je kod nekih konstrukcija više izražena, a kod nekih manje, ili je čak i zanemarljiva, tako da, u smislu podele konstrukcija na krute i fleksibilne, kod krutih konstrukcija interakcija sa fluidom ne postoji (zanemaruje se).

Na konturi Γ_3 na kontaktu konstrukcije i fluida moraju da budu zadovoljeni esencijalni granični uslovi po brzinama (videti (2.4)):

$$\begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n \\ v_s &= \bar{v}_s \qquad \text{(na konturi } \Gamma_3\text{)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

gde su u_n i v_s brzine fluida u pravcu normale i tangente na konturu Γ_3, dok su $\bar{u}_n$ i $\bar{v}_s$ odgovarajuće brzine konstrukcije.

2. SILE KOJIMA FLUID DELUJE NA KONSTRUKCIJU

Površinske sile na konturi Γ_3 kojima fluid deluje na konstrukciju su, za posmatrano dvodimenzionalno strujanje, date sa (3.4):

$$\begin{aligned} f_n &= -p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} \\ f_s &= \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) \qquad \text{(na konturi } \Gamma_3\text{)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ovo su površinske sile u pravcu normale n i tangente s na konturu Γ_3. Ako je vektor normale $\vec{n}$ dat u odnosu na dekartov sistem xy sa $\vec{n}=\{n_x, n_y\}$ i ako se u površinskim silama (4.2) razdvoje delovi koji potiču od pritiska fluida i gradijenata brzina (t.j. od sfernog i devijatorskog dela tenzora napona), dobijaju se sledeće rezultujuće sile u pravcima osa x i y:

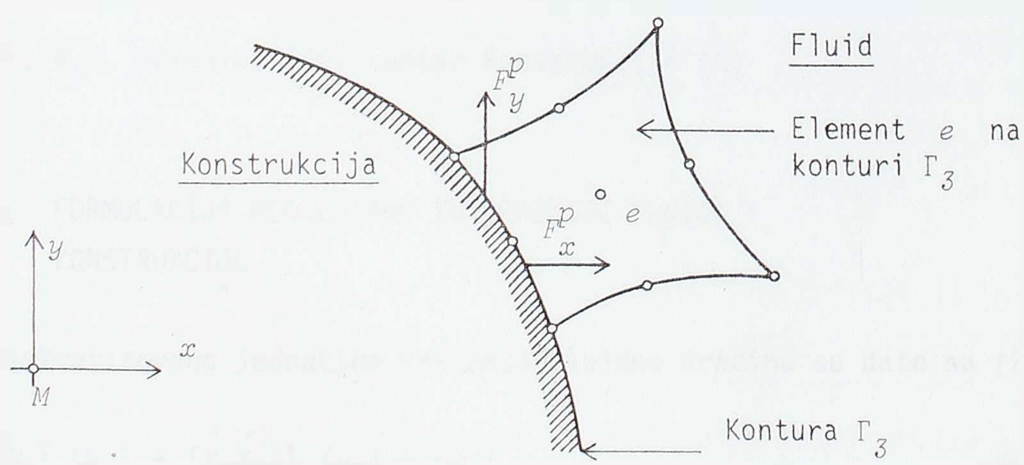
$$F_x^p = -\oint_{\Gamma_3} p\, n_x \, d\Gamma$$
$$F_y^p = -\oint_{\Gamma_3} p\, n_y \, d\Gamma \qquad (4.3)$$

kao i

$$F_x^v = \mu \oint_{\Gamma_3} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_y\right] d\Gamma$$
$$F_y^v = \mu \oint_{\Gamma_3} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y\right] d\Gamma \qquad (4.4)$$

U integralima (4.4) su u i v komponente brzine fluida u pravcima x i y duž stranice elementa fluidne sredine na konturi Γ_3.

Rezultujuće sile kojima fluid deluje na konstrukciju su izrazima (4.3) i (4.4) načelno napisane. Način numeričke integracije ovih izraza će biti detaljnije prikazan kasnije. U ovoj fazi može da se kaže da se duž odgovarajuće stanice svakog elementa na konturi Γ_3 Gausovom integracijom odredjuju rezultante F_x^p, F_y^p, F_x^v, F_y^v, kao i njihov položaj prema izrazima (3.11), sl. 4.1.



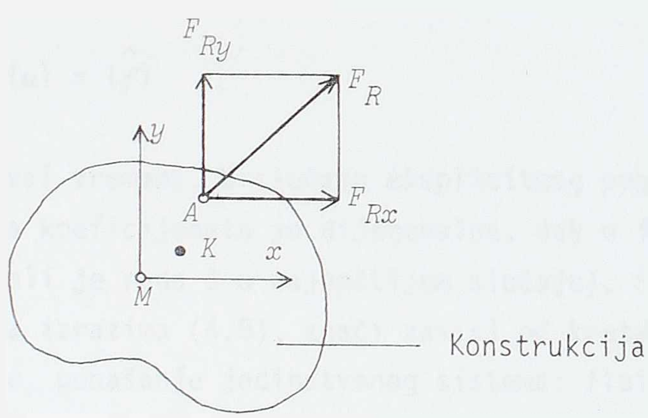
Sl. 4.1. Sile na kontaktu fluida i konstrukcije (usled pritiska fluida; analogno za gradijente brzina fluida).

Redukcijom rezultujućih sila svakog elementa, na konturi Γ_3: F_{xe}^p, F_{ye}^p, F_{xe}^v, F_{ye}^v na tačku M (centar mase ekvivalentnog dvodimenzionalnog računskog modela konstrukcije dolazi do rezultujućeg opterećenja konstrukcije:

$$\vec{F}_R = \sum_e \vec{F}_e = F_{Rx}\,\vec{i} + F_{Ry}\,\vec{j}$$
$$\vec{M}_R = \sum_e \vec{\rho}_e \times \vec{F}_e = M_{RZ}\,\vec{k} \qquad (4.5)$$

Veličine F_x, F_y i M_z predstavljaju vektor opterećenja za dvodimenzionalni računski model konstrukcije.

Osim odredjivanja vektora opterećenja konstrukcije, može da se odredi i tzv. aerodinamički centar konstrukcije u posmatranom trenutku. To je napadna tačka rezultujuće sile kojom fluid deluje na konstrukciju u datom trenutku vremena, sl. 4.2.



Sl. 4.2. Aerodinamički centar konstrukcije (A)

3. FORMULACIJA MEDJUSOBNE INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJE

Diskretizovane jednačine kretanja fluidne sredine su date sa (2.44)

$$[M_1]\{\dot{a}_1\} + [K_1(a)]\{a_1\} = \{d_1\} \qquad (4.6)$$

za slučaj nestacionarnog strujanja, dok je za stacionarno strujanje lokalno ubrzanje fluida jednako nuli, tako da su jednačine kretanja date sa

$$[K_1(a)]\{a_1\} = \{d_1\} \qquad (4.7)$$

U slučaju nestacionarnog strujanja, jednačine (4.6) se svode na rešavanje nelinearnih algebarskih jednačina oblika

$$[\hat{K}(a)]\ \{a_1\} = \{\hat{d}_1\} \tag{4.8}$$

u svakom intervalu vremena. Znači, nestacionarno i stacionarno strujanje fluida se svodi na rešavanje sistema nelinearnih jednačina oblika (4.8) ili (4.7).

Sa druge strane, jednačine kretanja konstrukcije, odnosno ekvivalentnog dvodimenzionalnog računskog modela, su date sa (3.21):

$$[M^*]\ \{\ddot{u}\} + [K^*]\ \{u\} = \{f^*\} \tag{4.9}$$

Ove jednačine se, primenom nekog od postupaka direktne numeričke integracije, svode na rešavanje algebarskih jednačina oblika

$$[\hat{K}]\ \{u\} = \{\hat{f}\} \tag{4.10}$$

za svaki interval vremena. U slučaju eksplicitnog postupka metodom centralnih razlika matrica koeficijenata je dijagonalna, dok u implicitnom postupku integracije nije (ali je reda 3 u najopštijem slučaju). Slobodan član u jednačinama (4.9) je dat sa izrazima (4.5), znači zavisi od kretanja fluidne sredine.

Dakle, ponašanje jedinstvenog sistema: fluida u računskom domenu strujanja Ω i konstrukcije koja se nalazi unutar domena Ω definisana je sa dva skupa jednačina. To je sistem jednačina (4.6) za fluidnu sredinu, u kome broj jednačina zavisi od usvojene mreže i tipa konačnih elemenata, i sistema (4.9) od maksimalno tri jednačine koje se odnose na konstrukciju. Pri tome moraju da budu zadovoljeni granični uslovi po brzinama (4.1) na konturi Γ_3, koja je kontaktna površ fluida i konstrukcije.

Medjusobna interakcija fluida i fleksibilne konstrukcije se ogleda u tome što u svakom trenutku vremena rešenje kretanja fluida odredjuje opterećenje koje deluje na konstrukciju (preko pritisaka i gradijenata brzina fluida na konturi Γ_3), dok sa druge strane odgovarajuće kretanje konstrukcije utiče na ponašanje fluida zbog nametanja graničnih uslova po brzinama (4.1) na kontaktnoj površi Γ_3.

Kao što je rečeno, u slučaju krute konstrukcije, koja ne vrši nikakvo kretanje u struji fluida, konturni uslovi (4.1) se svode na uslove (3.3):

$$\begin{aligned} u_n &= 0 \\ v_s &= 0 \qquad \text{(na konturi } \Gamma_3\text{)} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Za konturne uslove (4.11), kao i za konturne uslove na spoljašnjoj konturi Γ_1 i odgovarajuće početne uslove, jednačine kretanja fluida (4.6) ili (4.7) mogu da se reše. Ukoliko želimo da odredimo statičko pomeranje konstrukcije (jer su i uslovno govoreći krute konstrukcije ipak deformabilne), sa dobijenim pritiscima i gradijentima brzina fluida na konturi Γ_3 se odredi vektor opterećenja konstrukcije $\{f^*\}$, pa se reše jednačine ravnoteže

$$[K^*]\ \{u\} = \{f^*\} \tag{4.12}$$

4. NAČIN NUMERIČKOG REŠAVANJA PROBLEMA INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJE

4.1. Zadovoljavanje graničnih uslova po brzinama

Ovako definisan problem medjusobnog sadejstva fluida i konstrukcije neminovno nameće iterativno naizmenično rešavanje jednog i drugog skupa jednačina, u svakom posmatranom intervalu vremena, sve do postizanja prihvatljivog zadovoljenja graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3.

U posmatranom intervalu vremena se započinje prvo sa rešavanjem jednačina kretanja fluida. Kako su ove jednačine nelinearne, rešavanje se vrši kao što je to prikazano u delu II.6, pri čemu se za polazne vrednosti usvajaju konačne vrednosti brzina i pritisaka dobijene na kraju procesa rešavanja u prethodnom koraku vremena.

Kada se postigne konvergencija u vrednostima brzina i pritisaka fluida na kraju posmatranog intervala vremena, razmatraju se jednačine kretanja konstrukcije (4.9) za *isti* interval vremena. Ako se koristi diferencni postupak onda se formira vektor opterećenja $\{\hat{f}^*_{t_k}\}$, dat sa desnom stranom jednačina (3.36):

$$\{\hat{f}^*_{t_k}\} = \{f^*_{t_k}\} - \left([K^*] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[M^*]\right)\{u_{t_k}\} - \frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{t_k-\Delta t}\} \tag{4.13}$$

Znači, u ovom vektoru figuriše opterećenje na početku posmatranog intervala, $\{f^*_{t_k}\}$, kao i vektori pomeranja na početku intervala vremena, $\{u_{t_k}\}$, a takodje i na početku prethodnog intervala vremena $\{u_{t_k-\Delta t}\}$.

Kada se reše jednačine (3.37):

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}[M^*]\{u_{t_k+\Delta t}\} = \{\hat{f}^*_{t_k}\} \tag{4.14}$$

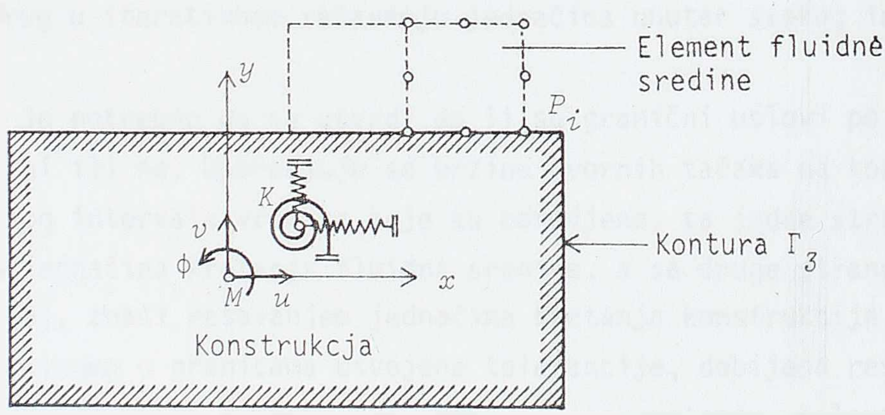
koje se lako rešavaju, jer je matrica mase $[M^*]$ dijagonalna, dobija se vektor pomeranja konstrukcije na kraju posmatranog intervala vremena:

$$\{u_{t_k+\Delta t}\} = (\Delta t)^2\ [M^*]^{-1}\ \{\hat{f}^*_{t_k}\} \tag{4.15}$$

Sa ovim rešenjem se odredi vektor brzine konstrukcije na kraju intervala vremena prema diferencnoj relaciji

$$\{\dot{u}_{t_k+\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t}\ (\{u_{t_k+\Delta t}\} - \{u_{t_k}\}) \tag{4.16}$$

Relacijom (4.16) su date samo brzine generalisanih koordinata $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{\phi}$, tako da je potrebno da se odrede brzine onih tačaka na konturi konstrukcije Γ_3 koje se poklapaju sa čvornim tačkama elemenata fluidne sredine. Ako je P_i neka od čvornih tačaka na konturi Γ_3 sa koordinatama x_{p_i}, y_{p_i}, sl. 4.3,



Sl. 4.3. Pomeranja i brzine konture konstrukcije

onda su komponente pomeranja i brzine tačke P_i, na kraju posmatranog intervala vremena, date sa:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{p_i} \\ 0 & 1 & x_{p_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t} \tag{4.17}$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{p_i} \\ 0 & 1 & x_{p_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t}$$

U slučaju da se jednačine kretanja konstrukcije (4.9) rešavaju implicitnim postupkom Wilson θ, odgovarajuće jednačine su date sa (3.59):

$$[\hat{K}]\ \{u_{t+\theta\Delta t}\} = \{\hat{f}\} \tag{4.19}$$

gde su $[\hat{K}]$ i $\{\hat{f}\}$ dati sa (3.60). Treba uočiti da je za odredjivanje vektora ekvivalentnog opterećenja $\{\hat{f}\}$ potrebno da se odrede opterećenja kako na početku posmatranog intervala vremena, $\{f_t^*\}$, tako i na kraju posmatranog intervala, $\{f^*_{t+\Delta t}\}$. Ovaj vektor ne može da se odredi tačno sve do uspostavljanje konvergencije u posmatranom intervalu vremena, tako da se izračunava na bazi trenutno dobijenog rešenja za pritiske i brzine fluida.

Rešenjem jednačina (4.19), pri čemu matrica $[\hat{K}]$ nije više dijagonalna, jer u njoj figuriše i matrica krutosti konstrukcije, prema relacijama (3.61) se dobijaju vektori pomeranja, brzine i ubrzanja na kraju intervala vremena. Sa vektorima pomeranja i brzina se, prema relacijama (4.17) i (4.18) dobijaju pomeranja i brzine čvornih tačaka na konturi konstrukcije. Sa ovim je završen prvi krug u iterativnom rešavanju jednačina unutar svakog intervala vremena.

Sada je potrebno da se utvrdi da li su granični uslovi po brzinama (4.1) zadovoljeni ili ne. Uporedjuju se brzine čvornih tačaka na konturi Γ_3 na kraju posmatranog intervala vremena koje su odredjene, sa jedne strane iterativnim rešavanjem jednačina kretanja fluidne sredine, a sa druge strane dobijene relacijama (4.18), znači rešavanjem jednačina kretanja konstrukcije. Ukoliko su razlike u brzinama u granicama usvojene tolerancije, dobijena rešenja za fluid i konstrukciju na kraju posmatranog intervala se smatraju, uslovno rečeno, konačnim, pa se prelazi na naredni interval vremena, a u suprotnom slučaju se ponovo posmatra *isti* interval vremena i započinje se naredni ciklus iterativnog rešenja.

Sada se brzine na konturi Γ_3, dobijene rešavanjem jednačina kretanja konstrukcije, unose kao granični uslovi pri rešavanju jednačina fluidne sredine. Jednačine se svode na oblik (2.74)

$$[J_p]\ (\{X\} - \{X_p\}) = \{b\} - [A(X_p)]\ \{X_p\} \tag{4.20}$$

znači Newton-ov postupak u jednom koraku. U jednačini (4.20) je $[J_p]$ Jacobieva matrica zasnovana na dobijenom rešenju u prethodnom ciklusu istog intervala vremena i data je relacijama (2.76)-(2.78). Sa $\{X\}$ je obeležen vektor čvornih nepoznatih, koji se odredjuje rešavanjem jednačina 4.20):

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

dok je $\{X_F\}$ vektor čvornih brzina i pritisaka fluida dobijen u prethodnom ciklusu.

Rešavanjem jednačina (4.20) se dolazi do korigovanih brzina i pritisaka fluida na kraju istog intervala vremena, pa se zatim, na prethodno opisan način, ponovo rešavaju jednačine kretanja konstrukcije i vrši uporedjivanje brzina čvornih tačaka na konturi Γ_3. Rečeno je već da ako su razlike u ovim brzinama u granicama tolerancije, da su dobijena rešenja uslovno rečeno konačna u posmatranom intervalu vremena.

Ovaj termin "uslovno konačna" je upotrebljen zbog toga što ne treba da se zaboravi da se jednačine kretanja fluidne sredine izvode u tzv. prostornim koordinatama (Euler-ova formulacija), dok se jednačine kretanja konstrukcije odnose na materijalne koordinate (Lagrange-ova formulacija).

4.2. Ponovno definisanje mreže konačnih elemenata fluidne sredine

Obzirom na formulaciju u prostornim (Euler-ovim) koordinatama jednačina kretanja fluidne sredine, konačni elementi fluidne sredine se ne kreću zajedno sa česticama fluida, već predstavljaju fiksne oblasti (odnosno tačke) u prostoru u kojima se odredjuju osobine fluida (brzine i pritisci).

Kako se konstrukcija oko koje struji fluid kreće - deformiše, onda je potrebno da se i konačni elementi fluida oko konstrukcije deformišu da bi pratili kretanje konstrukcije, odnosno da bi fluid bio stalno u kontaktu sa konstrukcijom. Znači, jedan deo mreže konačnih elemenata oko konstrukcije se sabija, drugi se izdužuje i ovakva situacija predstavlja veoma ozbiljnu teškoću u praktičnoj numeričkoj simulaciji procesa interakcije fluida i konstrukcije.

Svaka promena oblika konačnih elemenata, što se konstatuje registrovanjem pomeranja čvornih tačaka na konturi Γ_3 - relacije (4.17), neminovno iziskuje ponovno izračunavanje svih matrica vezanih za deformisane konačne elemente fluidne sredine. Zbog toga je i rečeno da su rešanja dobijena posle zadovoljavanja graničnih uslova po brzinama u posmatranom intervalu vremena uslovno konačna. Sve zavisi od toga kolika su dobijena pomeranja konstrukcije, odnosno kolika je promena oblika konačnih elemenata oko konstrukcije u odnosu na njihove prvobitne dimenzije (koje se odnose na konstrukciju u svom ravnotežnom položaju).

Ukoliko je realna konstrukcija korektno koncipirana i konstruisana, ne bi trebalo očekivati da će pomeranja, odnosno oscilovanja konstrukcije u struji fluida da budu sa velikim amplitudama. Sa druge strane, da bi se što potpunije numerički obuhvatile promene u strujnom toku fluida, u bližoj oblasti oko konstrukcije, potrebno je da mreža konačnih elemenata bude gušća. Prema tome, i globalno gledano manja pomeranja konstrukcije mogu da budu značajna u odnosu na prvobitne dimenzije i oblik konačnih elemenata neposredno oko konstrukcije.

Da bi se opisana situacija obuhvatila, potrebno je da se u *istom* posmatranom intervalu vremena započne ponovni ciklus naizmeničnog iterativnog rešavanja oba sistema jednačina (4.6) i (4.9). Razlika u odnosu na proces zadovoljavanja graničnih uslova po brzinama je u tome što je prvo potrebno da se *ponovo* izračunaju sve matrice vezane za deformisane konačne elemente fluidne sredine. Kada se, na prethodno opisan način, postigne prihvatljivo zadovoljenje graničnih uslova po brzinama, potrebno je da se izvrši uporedjivanje novo dobijenog pomeranja konstrukcije sa prethodnim, odnosno da se utvrdi da li se opet dobila prihvatljivo ista deformacija mreže konačnih elemenata. Ukoliko jeste, može da se smatra da su dobijena rešenja za fluid i konstrukciju konačna za posmatrani interval vremena i da se započne analogno rešavanje za naredni interval vremena: prvo se iterativno postigne zadovoljavanje graničnih uslova po brzinama, a zatim kompatibilnost pomeranja.

U slučaju da su novo-dobijena pomeranja konstrukcije neprihvatljivo različita od prethodno dobijenih, potrebno je da se opet, na osnovu novog geometrijskog položaja čvornih tačaka, odrede nove matrice elemenata i postupak ponovi.

Ovo ponovno definisanje mreže odredjenog broja konačnih elemenata u svakom intervalu vremena, kao uostalom i celokupan iterativan proces rešavanja vezan za zadovoljenje graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3, jasno ukazuju da je to, u slučaju trodimenzionalne analize sa veoma velikim brojem jednačina, izuzetno složen numerički posao čak i u slučaju trenutno najmoćnijih računara tipa CRAY-1 ili čak CRAY-2. Pre nego što se i pomisli na trodimenzionalne numeričke simulacije procesa interakcije fluida i konstrukcije, neophodno je, osim velikog računara, posedovanje bogatog iskustva sa dvodimenzionalnim problemima. To se odnosi kako na optimalnu formulaciju problema, jer, kao što je rečeno integrisana "u, v, p formulacija" kretanja fluida nikako nije i jedina, tako i na optimalan izbor tipa elemenata, način rešavanja jednačina, optimalan izbor vremenske integracije jednačina, itd.

V. NUMERIČKA REALIZACIJA INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJA

1. DIFERENCIRANJE BRZINA I PRITISAKA FLUIDA

Za diskretizaciju oblasti strujanja fluida su predvidjena četiri tipa konačnih elemenata (uz mogućnost da se u programski paket unesu i drugi elementi). To su linearni kružno-segmentni element, linearni četvorougaoni element, parabolični četvorougaoni element i Lagrange-ov četvorougaoni element sa 9 tačaka (videti sl. 2.2 do 2.5). Interpolacione funkcije ovih elemenata su zavisne od prirodnih koordinata ξ, η, dok u koeficijentima matrica elemenata figurišu izvodi interpolacionih funkcija po dekartovim koordinatama x, y, tako da će da se ukratko prikažu potrebna diferenciranja.

1.1. Diferenciranje u sistemu polarnih koordinata

Linearni kružno segmentni element (element tipa 1) je definisan u sistemu polarnih koordinata ρ, ϕ (videti relacije (2.16)).

Neka su dati operatori diferenciranja po prirodnim koordinatama ξ, η i polarnim koordinatama ρ, ϕ sa:

$$\{\nabla_\xi\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{Bmatrix} \qquad \{\nabla_p\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\phi} \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

i neka je $[J_p]$ Jacobi-eva matrica koja povezuje izvode po prirodnim i polarnim koordinatama:

$$[J_p] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\phi}{\partial\xi} \\[2ex] \dfrac{\partial\rho}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Tada važe očigledne relacije diferenciranja

$$\{\nabla_\xi\} = [J_p]\,\{\nabla_p\}$$
$$\{\nabla_p\} = [J_p]^{-1}\,\{\nabla_\xi\} \qquad (5.3)$$

koje predstavljaju posredno diferenciranje složenih funkcija.

Obzirom na izraze (2.16):

$$\rho = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\rho_i \qquad \phi = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\phi_i \qquad (5.4)$$

kojima su definisane polarne koordinate bilo koje tačke unutar kružno-segmentnog elementa, elementi Jacobi-eve matrice (5.2) su dati sa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i}{\partial\xi}\rho_i \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i}{\partial\xi}\phi_i$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i}{\partial\eta}\rho_i \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i}{\partial\eta}\phi_i \qquad (5.5)$$

gde je, obzirom na definiciju interpolacionih funkcija $h_i(\xi,\eta)$ datu sa (2.17):

$$\frac{\partial h_1}{\partial\xi} = \frac{1}{4}(1+\eta) \qquad \frac{\partial h_1}{\partial\eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)$$
$$\frac{\partial h_2}{\partial\xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \qquad \frac{\partial h_2}{\partial\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$
$$\frac{\partial h_3}{\partial\xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \qquad \frac{\partial h_3}{\partial\eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)$$
$$\frac{\partial h_4}{\partial\xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) \qquad \frac{\partial h_4}{\partial\eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)$$

Imajući ovo u vidu, Jacobi-eva matrica $[J_p]$, koja povezuje izvode po prirodnim i polarnim koordinatama može da se piše u obliku:

$$[J_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial\xi} & \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\rho}{\partial\eta} & \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial\xi} & \frac{\partial h_2}{\partial\xi} & \frac{\partial h_3}{\partial\xi} & \frac{\partial h_4}{\partial\xi} \\ \frac{\partial h_1}{\partial\eta} & \frac{\partial h_2}{\partial\eta} & \frac{\partial h_3}{\partial\eta} & \frac{\partial h_4}{\partial\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 & \phi_1 \\ \rho_2 & \phi_2 \\ \rho_3 & \phi_3 \\ \rho_4 & \phi_4 \end{bmatrix} \qquad (5.6)$$

1.2. Diferenciranje u sistemu dekartovih koordinata

Neka je operator diferenciranja po dekartovim koordinatama dat sa

$$\{\nabla\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

i neka je $[J_1]$ Jacobi-eva matrica koja povezuje diferenciranje po dekartovim i polarnim koordinatama:

$$[J_1] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Tada važe relacije diferenciranja:

$$\begin{aligned} \{\nabla_p\} &= [J_1]\ \{\nabla\} \\ \{\nabla\} &= [J_1]^{-1}\ \{\nabla_p\} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Obzirom na relacije (2.18):

$$x = \rho \cos \phi \qquad y = \rho \sin \phi \tag{5.11}$$

Jacobi-eva matrica $[J_1]$ je data sa:

$$[J_1] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\rho \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix} \qquad \det[J_1] = \rho \tag{5.12}$$

dok je inverzna matrica data sa:

$$[J_1]^{-1} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \rho \cos \phi & -\sin \phi \\ \rho \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \qquad \det[J_1]^{-1} = \frac{1}{\rho} \tag{5.13}$$

Diferenciranje po dekartovim koordinatama x, y je povezano sa diferenciranjem po prirodnim koordinatama ξ, η na sledeći način:

$$\{\nabla\} = [J_1]^{-1} \{\nabla_p\} = [J_1]^{-1} [J_p]^{-1} \{\nabla_\xi\} \tag{5.14}$$

ili skraćeno

$$\{\nabla\} = [L_1]^{-1} \{\nabla_\xi\} \tag{5.15}$$

gde je

$$[L_1]^{-1} = [J_1]^{-1} [J_p]^{-1} \tag{5.16}$$

Sve ove relacije se odnose na kružno-segmentni element - element tipa 1. U slučaju linearnog četvorougaonog elementa (elementa tipa 2) je geometrija opisana ne više u polarnim, već u dekartovim koordinatama prema relacijama (2.18):

$$x = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta) x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta) y_i \tag{5.17}$$

Ako se sa $[J_2]$ obeleži Jacobi-eva matrica koja povezuje izvode po dekartovim i prirodnim koordinatama

$$[J_2] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

onda važe relacije diferenciranja

$$\begin{aligned} \{\nabla_\xi\} &= [J_2] \{\nabla\} \\ \{\nabla\} &= [J_2]^{-1} \{\nabla_\xi\} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Obzirom na relacije (5.17) Jacobi-eva matrica $[J_2]$ je data sa

$$
[J_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} & \frac{\partial h_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \frac{\partial h_3}{\partial \eta} & \frac{\partial h_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (5.20)
$$

pri čemu su izvodi $\frac{\partial h_i}{\partial \xi}$ i $\frac{\partial h_i}{\partial \eta}$ $(i=1,\ldots,4)$ dati sa (5.6).

U slučaju paraboličnog četvorougaonog elementa (elementa tipa 3) geometrija je opisana sa relacijama (2.20):

$$
x = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)\, y_i \qquad (5.21)
$$

Ako je $|J_3|$ Jacobi-eva matrica

$$
[J_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (5.22)
$$

onda je diferenciranje definisano relacijama

$$
\begin{aligned} \{\nabla_\xi\} &= [J_3]\,\{\nabla\} \\ \{\nabla\} &= [J_3]^{-1}\,\{\nabla_\xi\} \end{aligned} \qquad (5.23)
$$

dok je Jacobi-eva matrica $[J_3]$ data sa

$$
[J_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} & \frac{\partial g_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \eta} & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \qquad (5.24)
$$

Obzirom na definiciju paraboličnih interpolacionih funkcija $g_i(\xi,\eta)$ datu sa (2.21), dobija se:

$$
\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\,(1+\eta) + \frac{1}{2}\,\xi\,(1+\eta) - \frac{1}{4}\,(1-\eta^2)
$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) + \frac{1}{2}\xi(1+\eta) + \frac{1}{4}(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) + \frac{1}{4}(1-\eta^2) + \frac{1}{2}\xi(1-\eta)$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) + \frac{1}{2}\xi(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial g_5}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta)$$

$$\frac{\partial g_6}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial g_7}{\partial \xi} = -\xi(1-\eta)$$

$$\frac{\partial g_8}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2)$$

(5.25)

$$\frac{\partial g_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi) - \frac{1}{4}(1-\xi^2) + \frac{1}{2}\eta(1+\xi)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi) - \frac{1}{4}(1-\xi^2) + \frac{1}{2}\eta(1-\xi)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) + \frac{1}{2}\eta(1-\xi) + \frac{1}{4}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) + \frac{1}{4}(1-\xi^2) + \frac{1}{2}\eta(1+\xi)$$

$$\frac{\partial g_5}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial g_6}{\partial \eta} = -\eta(1-\xi)$$

$$\frac{\partial g_7}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial g_8}{\partial \eta} = -\eta(1+\xi)$$

Kod elemenata tipa 4 (Lagrange-ov element sa 9 čvornih tačaka) je geometrija definisana relacijama (2.20):

$$x = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)y_i \qquad (5.21)'$$

gde su $e_i(\xi,\eta)$ interpolacione funkcije date sa (2.21)´. Ako je $[J_4]$ odgovarajuća Jacobi-eva matrica:

$$[J_4] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial \xi} & \frac{\partial e_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial e_9}{\partial \xi} \\ \frac{\partial e_1}{\partial \eta} & \frac{\partial e_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial e_9}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_9 & y_9 \end{bmatrix} \qquad (5.24)'$$

onda je diferenciranje kod elemenata tipa 4 definisano relacijama

$$\{\nabla_\xi\} = [J_4]\,\{\nabla\}$$
$$(5.23)'$$
$$\{\nabla\} = [J_4]^{-1}\,\{\nabla_\xi\}$$

Obzirom na definiciju interpolacionih funkcija $e_i(\xi,\eta)$ datu sa (2.21)´, dobija se

$$\frac{\partial e_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 1)(\eta^2 + \eta)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 1)(\eta^2 + \eta)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 1)(\eta^2 - \eta)$$

$$\frac{\partial e_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 1)(\eta^2 - \eta)$$

$$\frac{\partial e_5}{\partial \xi} = -\xi(\eta^2 - \eta)$$

$$\frac{\partial e_6}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(2\xi + 1)(1 - \eta^2)$$

$$\frac{\partial e_7}{\partial \xi} = -\xi(\eta^2 + \eta)$$

$$\frac{\partial e_8}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(2\xi - 1)(1 - \eta^2)$$

$$\frac{\partial e_9}{\partial \xi} = -\,2\xi(1 - \eta^2)$$

$$(5.25)'$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\,(\xi^2 + \xi)(2\eta + 1)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\,(\xi^2 - \xi)(2\eta + 1)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\,(\xi^2 - \xi)(2\eta - 1)$$

$$\frac{\partial e_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\,(\xi^2 + \xi)(2\eta - 1)$$

$$\frac{\partial e_5}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\,(1 - \xi^2)(2\eta - 1)$$

$$\frac{\partial e_6}{\partial \eta} = -\,(\xi^2 + \xi)\eta$$

$$\frac{\partial e_7}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\,(1 - \xi^2)(2\eta + 1)$$

$$\frac{\partial e_8}{\partial \eta} = -\,(\xi^2 - \xi)\eta$$

$$\frac{\partial e_9}{\partial \eta} = -\,2(1 - \xi^2)\eta$$

1.3. Diferenciranje brzina po dekartovim koordinatama

Komponente vektora brzina fluida u osnosu na dekartov sistem se za prva tri tipa elemenata izražavaju na isti način - relacijama (2.22):

$$u = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{8} g_i(\xi,\eta)v_i \qquad (5.26)$$

dok je za elemente tipa 4:

$$u = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{9} e_i(\xi,\eta)v_i \qquad (5.26)'$$

Izvodi komponenata brzine fluida u i v po dekartovim koordinatama su dati sa

$$\{\nabla\}u = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \{\nabla_\xi\}u$$

$$\{\nabla\}v = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \{\nabla_\xi\}v \tag{5.27}$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial \xi} & 0 & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} & 0 & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial \xi} & \cdots & 0 & \frac{\partial g_8}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial g_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} & \cdots & 0 & \frac{\partial g_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

ili takodje i kao

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} u_i \\ \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial g_i}{\partial \eta} u_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} v_i \\ \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial g_i}{\partial \eta} v_i \end{Bmatrix} \tag{5.29}$$

gde je $[Z]^{-1}$ odgovarajuća inverzna Jakobijeva matrica. U relacijama (5.27) do (5.29) je sa matricom $[Z]^{-1}$ obeleženo sledeće:

- za elemente tipa 1 (kružno segmentne elemente)

$$[Z]^{-1} = [L_1]^{-1} \tag{5.30a}$$

- za elemente tipa 2 (linearne četvorougaone elemente)

$$[Z]^{-1} = [J_2]^{-1} \tag{5.30b}$$

- za elemente tipa 3 (parabolične četvorougaone elemente)

$$[Z]^{-1} = [J_3]^{-1} \tag{5.30c}$$

- za elemente tipa 4 (Lagrange-ove elemente sa devet tačaka)

$$[Z]^{-1} = [J_4]^{-1} \tag{5.30d}$$

Pri tome su za elemente tipa 4 relacije diferenciranja brzina analogne sa relacijama (5.28) odnosno (5.29), jer ima devet čvornih tačaka i interpolacione funkcije su $e_i(\xi,\eta)$. U daljem tekstu se neće posebno pisati odgovarajući izrazi za elemente tipa 4, već će da se podrazumeva odgovarajuća promena ($g_i \to e_i$; $8 \to 9$). Takodje, u programima je inverzna Jacobi-eva matrica $[Z]^{-1}$ obeležena sa $[Z]$.

1.4. Diferenciranje pritisaka po dekartovim koordinatama

Raspodela pritisaka unutar sva četiri tipa elemenata je data na isti način-relacijama (2.23):

$$p = \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\, p_i \tag{5.31}$$

tako da su izvodi pritiska po dekartovim koordinatama dati sa:

$$\{\nabla\}p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1}\, \{\nabla_\xi\}\, p \tag{5.32}$$

odnosno u razvijenom obliku

$$\{\nabla\}p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} p_i \\ \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} p_i \end{Bmatrix} \qquad (5.33)$$

1.5. Diferenciranje interpolacionih funkcija po dekartovim koordinatama

Imajući u vidu izraze (2.35)-(2.40) za koeficijente pojedinih matrica konačnih elemenata, potrebno je da se izračunaju izvodi po dekartovim koordinatama interpolacionih funkcija $g_i(\xi,\eta)$ i $h_i(\xi,\eta)$. Ovi izvodi se odredjuju na isti način kao i izvodi brzina ili pritisaka.

Tako je za interpolacione fukcije $g_i(\xi,\eta)$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x} \\ \frac{\partial g_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad (i=1,2,\ldots,8) \qquad (5.34)$$

dok je analogno i za funkcije $h_i(\xi,\eta)$:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad (i=1,\ldots,4) \qquad (5.35)$$

gde je $[Z]^{-1}$ odgovarajuća inverzna Jacobi-eva matrica.

2. NUMERIČKA INTEGRACIJA MATRICA I VEKTORA

2.1. Integracija po oblasti elemenata

Matrice konačnih elemenata fluidne sredine su definisane relacijama (2.35) do (2.39). Sve ove matrice su date u obliku

$$[A] = \int_{\Omega_e} [A_{ij}]\, d\Omega \qquad (5.36)$$

gde su elementi matrica zavisni od interpolacionih funkcija i njihovih izvoda po dekartovim koordinatama. Kako su interpolacione funkcije izražene preko prirodnih koordinata ξ,η dok je oblast konačnog elementa Ω_e u x, y ravni, to je potrebno da se izvrši smena promenljivih u integralu (5.36). Dobija se

$$d\Omega = dxdy = |det\ [Z]\ |\ d\xi d\eta \tag{5.37}$$

gde je $[Z]$ odgovarajuća Jacobi-eva matrica. Za elemente tipa 1 je

$$[Z] = [L_1] = [J_p]\ [J_1] \tag{5.38}$$

dok je za elemente tipa 2, 3 i 4:

$$[Z] = [J_2] \tag{5.39}$$

odnosno

$$[Z] = [J_3] \tag{5.40}$$

odnosno

$$[Z] = [J_4] \tag{5.40'}$$

Sa ovom smenom promenljivih integral (5.36) postaje

$$[A] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [A_{ij}(\xi,\eta)]\ |\ det[Z]\ |\ d\xi d\eta \tag{5.41}$$

ili skraćeno

$$[A] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [F_{ij}(\xi,\eta)]\ d\xi d\eta \tag{5.42}$$

gde je

$$[F_{ij}] = [A_{ij}]\ |\ det[Z]\ | \tag{5.43}$$

Integracija naznačena sa (5.42) se vrši numeričkim putem, primenom Gauss-ove integracije sa nxn tačaka, gde je n broj Gauss-ovih tačaka. Za dvodimenzionalne oblasti je dovoljno da je $n=2$ ili $n=3$, dok je u programe uneta mogućnost izbora od $n=1$ do $n=4$. Ako su ξ_p i η_p prirodne koordinate Gauss-ovih tačaka i ako su W_p i W_q odgovarajući težinski brojevi, onda se numerička

(Gauss-ova) integracija integrala (5.42) svodi na

$$[A] = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} W_p W_q \left[F_{ij}(\xi_p, \eta_p)\right] \tag{5.44}$$

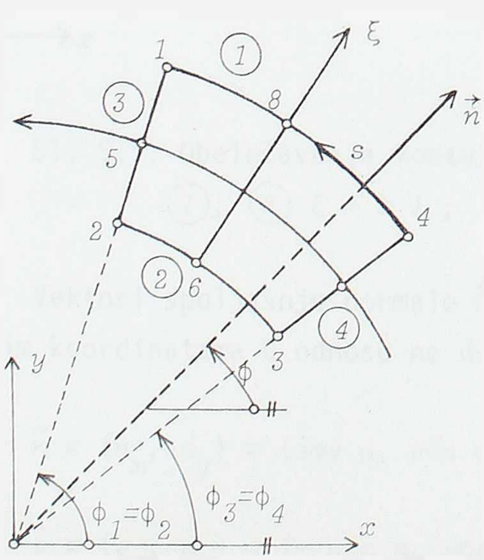
gde je $F_{ij}(\xi_p, \eta_p)$ element matrice $[F_{ij}]$ izračunat u odgovarajućoj Gauss-ovoj tački.

2.2. Integracija po konturi elemenata

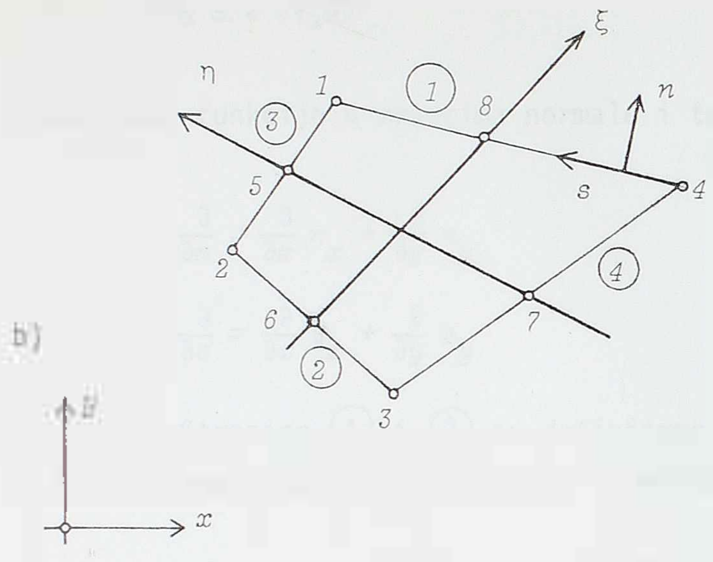
Vektor slobodnih članova u jednačinama kretanja fluidne sredine je definisan preko integrala po konturi elemenata (videti (2.40). Takodje, kada se vrši odredjivanje rezultujućeg opterećenja kojim fluidna sredina deluje na konstrukciju, potrebno je da se izračunaju integrali po konturi elemenata u kontaktu sa konstrukcijom (kontura Γ_3). Pri tome je potrebno i da se odrede izvodi u pravcu spoljašnje normale ili tangente na konturu elementa. Samo odredjivanje integrala duž konture se vrši jednodimenzionalnom Gauss-ovom integracijom.

Na sl. 5.1. su prikazana sva četiri tipa elemenata sa uvedenim oznakama stranica elemenata i naznačenim vektorima spoljašnje normale n i tangente s. Pri tome n i s imaju desnu orjentaciju (koordinata s se meri u smeru suprotnom od kazaljke na časovniku).

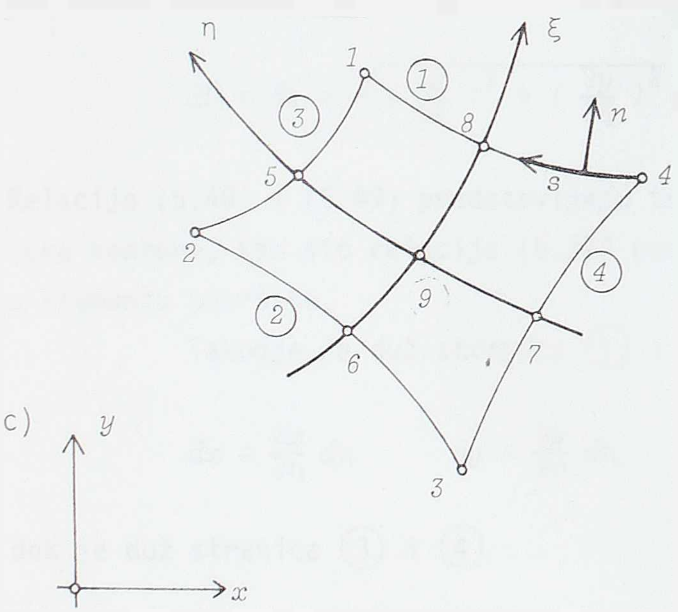
a)



Element tipa 1
(linearni kružno-
segmentni element)



Element tipa 2
(linearni četvorougaoni element)



Element tipa 3 ili 4
(parabolični i Lagrange-ov četvorougaoni element)

Sl. 5.1. Obeležavanje kontura kod konačnih elemenata:
1, 2 $\xi = \pm 1$; 3, 4 $\eta = \pm 1$

Vektori spoljašnje normale $\vec{n}$ i tangente $\vec{s}$ na konturu elementa su dati svojim koordinatama u odnosu na dekartov koordinatni sistem:

$$\vec{n} = \{n_x, n_y\} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$$

$$\vec{s} = \{s_x, s_y\} = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\} \tag{5.45}$$

gde je α ugao izmedju ose x i normale $\vec{n}$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{i},\vec{n}) \tag{5.46}$$

Izvodi neke funkcije u pravcima normale i tangente na konturu su dati sa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \\ \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x} s_x + \frac{\partial}{\partial y} s_y \end{aligned} \tag{5.47}$$

Stranice (1) i (2) su definisane sa $\xi = \pm 1$, odnosno $\xi = const$, tako da je element luka ovih stranica elementa dat sa

$$d\Gamma = ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\, d\eta \tag{5.48}$$

dok je za stranice (3) i (4) $\eta = \pm 1$ (t.j. $\eta = const$), tako da je

$$d\Gamma = ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi \tag{5.49}$$

Relacije (5.48) i (5.49) predstavljaju transformaciju promenljivih u elementu luka konture, kao što relacija (5.37) predstavlja transformaciju koordinata u elementu površine.

Takodje je duž stranica (1) i (2)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \tag{5.50}$$

dok je duž stranica (3) i (4)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \tag{5.51}$$

Imajući u vidu relacije

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds} \qquad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds}$$

dobijaju se sledeći izrazi za dekartove koordinate vektora spoljašnje normale $\vec{n}$, a time i vektora tangente $\vec{s}$ na konturu elementa:

- za konturu (1)

$$n_x = cos\ \alpha = \frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2}} \qquad n_y = sin\ \alpha = \frac{-\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2}} \qquad (5.52a)$$

- za konturu (2)

$$cos\ \alpha = \frac{-\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2}} \qquad sin\ \alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2}} \qquad (5.52b)$$

- za konturu (3)

$$cos\ \alpha = \frac{-\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \xi})^2}} \qquad sin\ \alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \xi})^2}} \qquad (5.52c)$$

- za konturu (4)

$$cos\ \alpha = \frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \xi})^2}} \qquad sin\ \alpha = \frac{-\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \xi})^2}} \qquad (5.52d)$$

Izvodi koji figurišu u relacijama (5.52) su elementi odgovarajuće Jacobi-eve matrice

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (5.53)$$

gde $[J]$ stoji umesto matrica $[J_2]$, $[J_3]$ ili $[J_4]$, u zavisnosti da li se posmatra element tipa 2, 3 ili 4. Relacije (5.52) se odnose na elemente tipa 2, 3 ili 4, dok se kod elemenata tipa 1 vektor spoljašnje normale može i drugačije da odredi (mada i za element tipa 1 važe relacije (5.52)).

Kod kružno-segmentnog elementa je za konturu (1), za koju je $\xi = +1$,

$$\alpha = \phi = h_1(\eta)\phi_1 + h_4(\eta)\phi_4 \tag{5.54}$$

pri čemu je

$$h_1(1,\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta) \quad h_2 = h_3 = 0 \quad h_4(1,\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta) \tag{5.55}$$

tako da je

$$n_x = \cos\alpha = \cos\phi, \quad n_y = \sin\alpha = \sin\phi \tag{5.56}$$

Za konturu (2) je

$$\alpha = \phi + 2\pi \tag{5.57}$$

dok je za konturu (3)

$$\alpha = \phi_1 + \pi/2 = const \tag{5.58}$$

odnosno za konturu (4)

$$\alpha = \phi_3 + \frac{3}{2}\pi = const \tag{5.59}$$

Samo izračunavanje raznih integrala duž konture elementa se vrši Gauss-ovom jednodimenzionalnom numeričkom integracijom. Na primer, neka se odredjuje rezultujuća sila fluida na konstrukciju usled sfernog dela tenzora napona fluida, data sa (4.3):

$$F_x^p = - \oint_{\Gamma_3} p n_x \, d\Gamma \tag{5.60}$$

Oko ukupne konture konstrukcije Γ_3 se nalazi odredjen broj konačnih elemenata fluidne sredine i svaki daje svoj udeo u ukupnom integralu (5.6). Ako je, na primer, za jedan od tih elemenata kontura (1) u kontaktu sa konstrukcijom (predstavlja deo ukupne konture Γ_3), onda je odgovarajući integral dat sa

$$F_x^e = - \int_{\Gamma_e} p n_x \, d\Gamma \tag{5.61}$$

Kada se unesu relacije (5.48), (5.52) i (5.33) za pritisak u bilo kojoj tački elementa, dobija se, simbolično napisano,

$$F_x^e = \int_{-1}^{+1} f(\eta)\, d\eta \tag{5.62}$$

Ako se vrši integracija u n Gauss-ovih tačaka $(n = 2$ ili $3)$ i ako je položaj Gauss-ovih tačaka dat sa η_p (na konturi 1 za koju je $\xi = +1$), onda integral (5.62) postaje

$$F_x^e = \sum_{p=1}^{n} W_p f(\eta_p) \tag{5.63}$$

3. UNOŠENJE GRANIČNIH USLOVA U JEDNAČINE

3.1. Esencijalni granični uslovi

Esencijalni granični uslovi su dati sa zadatim vrednostima brzina na konturama Γ_1 i Γ_3

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n \\ v_s &= \bar{v}_s \qquad \text{(na kontiri } \Gamma_1 \text{ i } \Gamma_3\text{)} \end{aligned}\right. \tag{5.64}$$

Unošenje ovakvih graničnih uslova (zadate vrednosti promenljivih) može da se praktično izvrši na nekoliko načina. Neka se, kao ilustracija, posmatra sistem od, recimo, četiri jednačine:

$$[A_{ij}]\ \{X_j\} = \{b_i\} \qquad (i,j=1,\ldots,4) \tag{5.65}$$

i neka je esencijalni granični uslov dat sa $x_2 = \lambda$. Tada jednačine (5.65) mogu da se napišu kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \lambda \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \tag{5.66}$$

a takodje je moguće i kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 - a_{12}\lambda \\ \lambda \\ b_3 - a_{32}\lambda \\ b_4 - a_{42}\lambda \end{Bmatrix} \tag{5.67}$$

ili u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 - a_{12}\lambda \\ b_3 - a_{32}\lambda \\ b_4 - a_{42}\lambda \end{Bmatrix} \tag{5.68}$$

Alternativno, moguće je da se granični uslov $x_2 = \lambda$ unese u jednačine (5.65) i u obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}\alpha & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \lambda \cdot \alpha \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \tag{5.69}$$

pri čemu je α neki veliki broj, recimo $\alpha = 10^{o}$. Pristupom (5.69) se zadržava isti ukupan broj nepoznatih, bez obzira na broj graničnih uslova.

U ovom radu se koristi pristup naznačen sa (5.66), to znači da se u jednačini koja odgovara nepoznatoj čija je vrednost zadata graničnim uslovom anuliraju svi koeficijenti osim dijagonalnog, koji postaje jedinica, dok se sama zadata granična vrednost unese u slobodan član. Posebnim vektorima se evidentiraju čvorne tačke i čvorne nepoznate koje su zadate graničnim uslovima.

3.2. Prirodni granični uslovi - formiranje slobodnog člana u N.S. jednačinama

Obzirom na tzv. "slabu formulaciju" u Galerkinovom postupku metode težinskih ostataka, odnosno na parcijalnu integraciju viskoznih članova u Navier-Stokes-ovim jednačinama, Neumann-ovi granični uslovi (zadati gradijenti brzina fluida) formiraju vektor slobodnih članova, odnosno "prirodno" se javljaju u jadnačinama kao vektor fluksa. To su integrali dati sa (2.40):

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \nu \oint\limits_{\Gamma_2} g_i \dfrac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma \\ \nu \oint\limits_{\Gamma_2} g_i \dfrac{\partial v}{\partial n}\, d\Gamma \end{Bmatrix} \tag{5.70}$$

gde su gradijenti brzina zadate vrednosti:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma_u \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = \gamma_v \tag{5.71}$$

Ove vrednosti su zadate u čvornim tačkama elemenata na kontiri Γ_2, dok se na poseban način registruje koji su to elementi čija jedna (ili više) stranica predstavlja deo ukupne konture Γ_2, a takodje i koja je to stanica elementa u pitanju (1, 2, 3 ili 4). Kako je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = \gamma_u \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y = \gamma_v \end{aligned} \tag{5.72}$$

to je moguće da umesto $\frac{\partial u}{\partial n}$ i $\frac{\partial v}{\partial n}$ budu zadati gradijenti po dekartovim koordinatama $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y}$, pa da se gradijent po normali formira prema (5.72). Često su konture oblasti Ω u pravcima globalnih koordinata x, y, pa se gradijenti po normali poklapaju sa nekim od gradijenata po dekartovim osama.

Samo izračunavanje integrala (5.70) se, za svaki element na konturi Γ_2, vrši Gausovom numeričkom integracijom, na primer

$$\nu \oint\limits_{\Gamma_{2e}} g_i \gamma_u \, d\Gamma = \sum_{p=1}^{n} W_p f(\eta_p) \tag{5.73}$$

ukoliko je Γ_{2e} kontura data sa $\xi = \pm 1$.

4. REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA FRONTALNIM POSTUPKOM

4.1. Uvod i osnovna ideja frontalnog postupka

Čak i u najjednostavnijem slučaju ustaljenog strujanja oko krute (stacionarne) konstrukcije, zbog nelinearne prirode jednačina kretanja fluidne sredine, potrebno je iterativno (znači ponovljeno) rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. U svim ostalim slučajevima, posebno kod onih fleksibilnih konstrukcija gde je više izložena interakcija sa fluidom, proces numeričkog rešavanja se svodi na višestruko ponovljeno rešavanje jednačina. Očigledno da je u celokupnom procesu bitan, kako optimalan izbor vremenske integracije i postupak tretiranja nelinearnih jednačina, tako i sam način rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina.

Načelno, postoje dva pristupa rešavanju sistema linearnih algebarskih jednačina: direktni postupci i iterativni postupci. Od direktnih postupaka najviše su u primeni postupci na bazi Gausove eliminacije. Frontalni postupak je jedna od takvih metoda. Kada ukupan broj jednačina nije preterano velik, tako da celokupna (globalna) matrica koeficijenata i vektor slobodnih članova mogu da stanu u memoriju centralnog procesora računara, nema posebnih problema. Medjutim, kada to nije slučaj, zbog velikog broja jednačina, rešavanje jednačina postaje priličan praktičan problem.

U slučaju velikog broja jednačina je razvijen priličan broj algoritama za njihovo rešavanje na bazi Gausove eliminacije, posebno u slučaju simetričnih matrica u teoriji konstrukcija i imajući u vidu trakastu strukturu matrica (takozvani "band" i "skyline solvers"). U slučaju kada i manipulisanje samo sa ne-nultim elementima iznad glavne dijagonale globalne matrice koeficijenata prevazilazi centralnu memoriju, vrši se razbijanje globalne matrice na blokove.

Alternativan pristup rešavanju velikog broja jednačina u metodi konačnih elemenata je frontalni postupak, koji je (za simetrične matrice) predložio B. Irons 1970. god. Suština ideje frontalnog postupka je da se posle formiranja samo odredjenog broja jednačina (t.j. sabiranja doprinosa samo izvesnog broja konačnih elemenata) vrši Gausova eliminacija nepoznatih iz onih jednačina koje se neće menjati sabiranjem ostalih konačnih elemenata.

To znači da se nikad i ne formira globalna matrica koeficijenata, jer se, takoreći, paralelno sa formiranjem dela globalne matrice vrši Gausova eliminacija. U zavisnosti od dodeljenog dela memorije centralnog procesora vrši se sabiranje po elementima i formiranje dela globalne matrice. Ukupan broj elemenata čije se matrice mogu da saberu dok se ne popuni predvidjen prostor centralnog procesora se naziva front. Zatim se vrši eliminacija onog broja nepoznatih koje mogu da se eliminišu. Posle eliminacije i smeštanja na disk se oslobadja predvidjen prostor memorije i omogućava se sabiranje naredne grupe elemenata, nakon čega se opet eliminišu nepoznate, sabiraju naredni elementi itd., sve dok se ne iscrpe svi elementi, odnosno ne eliminišu sve nepoznate.

4.2. Osnovne faze frontalnog postupka

Celokupan proces rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina frontalnim postupkom može da se podeli na četiri osnovne faze:

a) prefrontalne operacije
b) sabiranje elemenata
c) eliminacija nepoznatih
d) rekurzija, odnosno nalaženje rešenja.

U frontalnom postupku je evidentiranje elemenata, čvorova, broja nepoznatih u svakom čvoru, brojeva jednačina, položaja nepoznatih u globalnim matricama, itd. znatno složenije nego kod uobičajenog rešavanja Gausovom eliminacijom. Zbog toga je osnovni zadatak u prefrontalnoj fazi, koja se vrši samo jednom (na početku), da se izvrši evidentiranje u kom se to elementu (počevši od prvog) poslednji put javlja svaki od globalnih čvorova date mreže. Time se omogućava odlučivanje da li je u nekom trenutku odgovarajuća jednačina kompletirana ili nije, u odnosu na sabiranje novih elemenata, a time i odlučivanje koje nepoznate iz kojih jednačina mogu da se eliminišu u datom trenutku.

Odgovarajuće matrice svih elemenata su smeštene na spoljašnju memoriju (na trake odnosno odgovarajuće delove diska). U procesu sabiranja elemenata se učitavaju matrice elemenata sa spoljašnje memorije i smeštaju se na odgovarajuće lokacije dela globalne matrice. Ovo se vrši automatski sve dok se ne popuni za to predvidjen prostor centralnog procesora, odnosno dok se ne dostigne tzv. kritična širina fronta koja je programski definisana. Pri tome treba imati u vidu da se jednačine, odnosno delovi globalne matrice, formiraju prema redosledu sabiranja elemenata, a ne prema globalnim brojevima čvornih tačaka elemenata. To praktično znači da je bitno da se elementi numerišu na optimalan način, tako da širina fronta bude manja, dok globalni brojevi čvornih tačaka nisu uopšte od značaja. Ovo je razlika u odnosu na uobičajene postupke gde se globalna matrica u celini formira ("banded type solvers") i gde baš globalni brojevi čvornih tačaka odredjuju širinu tačke, odnosno položaj koeficijenata u globalnoj matrici. Posledica ovoga, a takodje i jedna od prednosti frontalnog postupka je u tome što je moguće da se u slučaju potrebe vrši progušćavanje mreže dodavanjem novih elemenata, a da pri tome ne mora da se vrši renumeracija svih čvornih tačaka (da se ne bi dobila neprihvatljivo velika širina trake).

Da bi se omogućilo pouzdano funkcionisanje frontalnog postupka, neophodan je prilično složen sistem raznih evidentiranja u samom procesu. Tako na primer, veoma su bitni takozvani vodeći vektor ("heading vector") i vektor odredišta ("destination vector"), kao i vektor koji sadrži podatke o broju nepoznatih u svakoj čvornoj tački. U dvodimenzionalnoj diskretizaciji Navier-Stakesovih jednačina čvorne tačke u uglovima elemenata sadrže tri nepoznate (brzine u i v i pritisak p), dok su u čvornim tačkama na sredinama stranica nepoznate samo brzine u i v. Ova činjenica, različit broj nepoznatih u pojedinim čvorovima (u nekim čvorovima tri, a u nekim dve nepoznate), predstavlja jednu od priličnih praktičnih teškoća u frontalnom postupku.

Pomenuti vodeći vektor ("heading vector") služi da evidentira koja jednačina odgovara pojedinom redu ili koloni matrice u kojoj se formira deo globalne matrice koeficijenata, a takodje i da se evidentira kada je kompletirana pojedina jednačina. Vektor odredišta ("destination vector") evidentira redove i kolone matrice u koje se smeštaju matrice elemenata. Postoji još niz pomoćnih vektora koji služe za razna evidentiranja u funkcionisanju frontalnog postupka, no svi ovi vektori su sa celobrojnim elementima, tako da su sve računske operacije brze.

Proces eliminacije se obavlja uobičajenim Gausovim postupkom. Za vodeći koeficijent u eliminaciji ("pivot") može da se bira koeficijent na glavnoj dijagonali, ali i ne mora.

U ovom radu se, zbog nesimetričnih matrica, koje nisu pozitivno definitne i dijagonalno dominantne, koristi tzv. totalna pivotizacija. Naime, saberu se doprinosi odredjenog broja elemenata (u zavisnosti od usvojene veličine fronta) i time se formira dogovarajući deo globalne matrice. Zatim se, u okviru svih kompletiranih jednačina, koje se trenutno nalaze u centralnoj memoriji računara, vrši pretraživanje najvećeg koeficijenta koji postaje pivotni član ("stožerni koeficijent"), a red u kome se pivot nalazi - pivotni red. Ovakva totalna pivotizacija svakako zahteva duži rad računara u odnosu na dijagonalnu ili neku delimičnu pivotizaciju, ali je neophodna zbog toga što matrice koeficijenata nisu simetrične i pozitivno definitne i često su vandijagonalni elementi veći od dijagonalnih.

Posle eliminacije svake od nepoznatih, koja može da se eliminiše, vrši se kontrakcija matrice u koju se smeštaju delovi globalne matrice i time se oslobadja prostor za sabiranje novih elemenata. Paralelno sa tim se vrši upisivanje normalizovanih (eliminisanih) jednačina na disk i proverava se da li može da se eliminiše još neka nepoznata, ili da se vrši sabiranje novih elemenata, ili je eliminacija završena, pa može da se počne rekurzija i time odrede nepoznate.

U slučaju da se rešavaju jednačine sa istim koeficijentima, a sa više različitih vektora slobodnih članova, moguće je da se nadju nova rešenja bez ponovne Gausove eliminacije koeficijenata, jer su sve normalizovane jednačine ("pivotal equation") zabeležene na disk. Na taj način se samo vrše odgovarajuće operacije sa koeficijentima novog vektora slobodnih članova i vrši rekurzija ("resolution"). Ovo je posebno od značaja pri korišćenju modifikovanog Newton-Raphson-ovog postupka.

Svako detaljnije opisivanje primenjenog frontalnog postupka bi iziskivalo neuporedivo više prostora. Na kraju ovog kratkog prikaza će da se kaže da je ceo proces rešavanja linearnih algebarskih jednačina sadržan u tri podprograma: FRONT, BACSUB i RESOL i da predstavlja modifikaciju programa za frontalni postupak rešavanja nesimetričnih jednačina, čiji je autor P. Hood (videti [II.1.1]).

5. OPIS PROGRAMSKOG PAKETA ZA REŠAVANJE INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJE - PROGRAM "VETAR"

5.1. Opšte karakteristike i mogućnosti programa "VETAR"

U skladu sa podelom konstrukcija na krute i fleksibilne, ceo postupak proračuna se sastoji iz dve osnovne grane. U slučaju krutih konstrukcija interakcija sa fluidom ne postoji (u razmatranom smislu), već se problem svodi na rešavanje strujanja fluidne sredine oko nepokretne konture koja ima oblik poprečnog preseka konstrukcije.

Medjusobna interakcija fluida i konstrukcije je izražena kod fleksibilnih konstrukcija i ovo predstavlja drugu osnovnu granu postupka proračuna. U oba slučaja, kako krutih tako i fleksibilnih konstrukcija, strujanje fluida može da bude ustaljeno (stacionarno) ili neustaljeno (nestacionarno). Zbog ovoga se dve osnovne grane proračuna (krute ili fleksibilne konstrukcije) račvaju svaka na po dve grane (stacionarno ili nestacionarno strujanje fluida), tako da postoje četiri osnovne mogućnosti proračuna.

Što se tiče načina rešavanja nelinearnih jednačina kretanja fluidne sredine u slučaju stacionarnog strujanja, u programski paket su ugradjene tri osnovne mogućnosti. To su metod sukcesivne zamene, Newton-Raphson-ov postupak i modifikovan Newton-Raphson-ov postupak kod koga se posle svake treće iteracije odredjuje nova Jacobi-eva matrica. Pri tome je u svakom od ova tri načina iterativnog rešavanja nelinearnih jednačina moguće da se utiče na konvergenciju izborom pominjanog faktora relaksacije. Samo rešavanje algebarskih jednačina u svakom iterativnom koraku se vrši frontalnim postupkom Gausove eliminacije.

Kod rešavanja jednačina nestacionarnog strujanja fluida, u programe su ugradjene dve mogućnosti vremenske integracije. To su prediktor-korektor (eksplicitno-implicitni) postupak ili (implicitni) Wilson θ postupak.

Pri svemu ovome, kao što je rečeno, za diskretizaciju fluidne sredine mogu da se koriste četiri tipa konačnih elemenata.

U slučaju fleksibilne konstrukcije, koja je, zbog dvodimenzionalne formulacije cele problematike, predstavljena sa ekvivalentnim dvodimenzionalnim modelom, rešavanje jednačina kretanja se vrši pomoću implicitnog Wilson θ postupka, ili pomoću eksplicitnog diferencnog postupka (centralna razlika).

Kao što se vidi iz ovog kratkog pregleda, mogućnosti programskog paketa "VETAR" su dosta raznovrsne.

5.2. Opšta struktura programa "VETAR"

5.2.1. Načelna šema organizacije programa

Celokupan programski paket je nazvan "VETAR i sastoji se iz glavnog programa i 51 podprograma koji čine jednu celinu. Ovo je načelno prikazano na sl. 5.2. Program je pisan na jeziku FORTRAN i instaliran je i testiran na računaru DIGITAL DEC 20/40 na Gradjevinskom fakultetu u Beogradu.

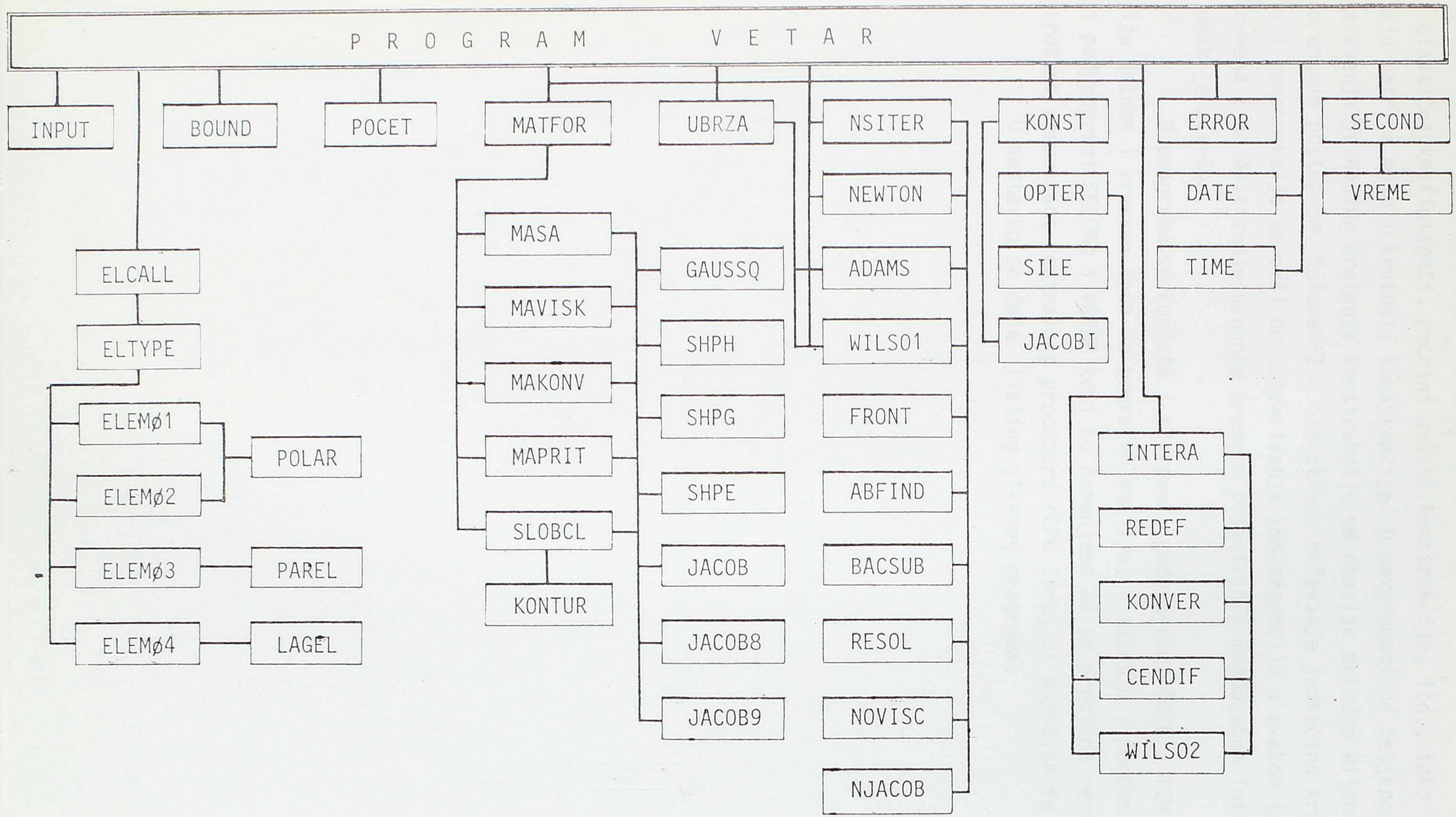
5.2.2. Struktura i listing glavnog programa

U glavnom programu se rukovodi funkcionisanjem celog programskog paketa. Posle učitavanja svih potrebnih kontrolnih parametara i informacija, pozivaju se podprogrami za učitavanje i obradu ulaznih podataka u čvornim tačkama, elementima, kao i graničnim i početnim uslovima fluidne sredine.

Zatim se pozivaju podprogrami kojima se izračunavaju sve potrebne matrice elemenata fluidne sredine. U slučaju ustaljenog strujanja oko krute konstrukcije formiraju se odgovarajuće jednačine kretanja fluida i iterativno rešavaju na željeni način (direktnom iteracijom sukcesivnom zamenom ili Newton-Raphson-ovim postupcima). Po dobijanju konvergentnog rešenja se učitava informacija da li se odredjuje i opterećenje kojim fluid deluje na krutu konstrukciju ili ne. Ako se tako želi, odredi se i opterećenje kojim fluid deluje na konstrukciju i time je završen proračun ustaljenog strujanja oko krute konstrukcije.

U slučaju neustaljenog strujanja oko krute konstrukcije se učitava i informacija o ukupnom vremenu trajanja strujanja, kao i maksimalnom broju intervala na koje se ukupno vreme deli. Pre započinjanja vremenske integracije odgovarajućih jednačina neustaljenog strujanja fluida, formiraju se i rešavaju jednačine (2.67). Time se dobijaju ubrzanja i pritisci fluida u početnom trenutku vremena. U zavisnosti od željenog izbora, integracija jednačina neustaljenog strujanja fluida se vrši ili prediktorkorektor postupkom ili postupkom Wilson θ. Na kraju svakog diskretnog intervala vremena može da se odredi opterećenje na krutu konstrukciju, ukoliko se tako želi. Sa dostizanjem ukupnog vremena posmatranja strujanja završen je proračun neustaljenog strujanja oko krute konstrukcije.

U slučaju fleksibilne konstrukcije učitavaju se sve potrebne informacije o konstrukciji, kao što su položaji centra mase i krutosti, inercioni



Sl. 5.2. Načelna šema programa "VETAR" (glavni program i podprogrami)

i elastični koeficijenti, početni uslovi konstrukcije, itd., tako da se formiraju matrice mase i krutosti konstrukcije. U zavisnosti od željenog izbora, rešavanje jednačina kretanja konstrukcije se obavlja metodom Wilson θ ili diferencnim postupkom. Naizmenično iterativno rešavanje jednačina kretanja fluida i konstrukcije se vrši do ostvarivanja konvergencije u svakom intervalu vremena i po dostizanju ukupnog vremena posmatranja medjusobne interakcije postupak je završen.

U programu se koriste i sistemski podprogrami DATE I TIME za evidenciju datuma i vremena kada se proračun obavlja, a takodje i posebno napravljeni podprogrami SECOND i VREME koji su namenjeni da se precizno registruje utrošeno vreme rada centralnog procesora (CPU time) za pojedine faze proračuna.

U nastavku se daje listing glavnog programa.

GRADJEVINSKI FAKULTET

UNIVERZITETA U BEOGRADU

STANKO BRCIC

DINAMICKO PONASANJE KONSTRUKCIJA U FLUIDNOJ SREDINI

DOKTORSKA DISERTACIJA

PROGRAMSKI PAKET

V E T A R

BEOGRAD, 1987. GODINE

```
      PROGRAM VETAR

****************************************************************************
**                                                                        **
**     DINAMICKO PONASANJE KONSTRUKCIJA U FLUIDNOJ SREDINI                **
**                                                                        **
**     GLAVNI PROGRAM    V E T A R                                        **
**                                                                        **
**     NUMERICKO RESENJE PROBLEMA INTERAKCIJE KONSTRUKCIJE                **
**     I FLUIDA METODOM KONACNIH ELEMENATA                                **
**                                                                        **
**     S.BRCIC - DOKTORSKA DISERTACIJA                                    **
**     GRADJEVINSKI FAKULTET U BEOGRADU, 1986.                            **
**                                                                        **
****************************************************************************

      COMMON /JUNK/ TITLE(16)
      COMMON /CONTRO/ NPAR(10),LPAR(6),IND
      COMMON /ELPAR/ NPU,NPP,NP,NBN,NCN,NFIRST,NLAST,
     1               MIDEST,MAXEST
      COMMON /DIMEN/ MTOT,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,
     1               N10,N11,N12,N13,N14,N15,N16,N17,N18,N19,
     2               N20,N21,N22,N23,N24,N25,N26,N27,N28,N29,
     3               N30,N31,N32,N33,N34,N35
      COMMON A(11500)
      COMMON /FRON1/ ND1,MWGA,NTRA,NELL,ICOUNT,NMOD,NPCVO,NPJED
      COMMON /FRON2/ SK(1[illegible]),ESTIFM(22,22),GISH(200),INTEG(600),
     1               AK1(22,22)
      COMMON /STRU1/ TITKO(16),IVREME,IPOCET,UTIME,NDELTA,DETMAX,
     1               ISILE
      COMMON /STRU2/ XM(25),YM(25),DMAS(3,3),DKRU(3,3),DPRE,
     1               U0(3),B0(3),A0(3),FI0(3),XMA,YMA

      DIMENSION SEC(7),AUV(18),REZUL(500),DAN(2),REZPO(500),
     1          UBRPO(500),REZDEL(500),UBRDEL(500),POU(25),
     2          POV(25),POM(25),BRU(25),BRV(25)

*     NAPOMENA: OVE DIMENZIJE ODGOVARAJU PARAMETRIMA
*     NP(MAX)=500 I NINT(MAX)=25

      EQUIVALENCE (NPAR(1),NH),(NPAR(2),NE),(NPAR(5),LL)
      EQUIVALENCE (NPAR(9),NRESAV),(NPAR(10),NVREME)
      EQUIVALENCE (LPAR(1),NEXT),(LPAR(2),NGRAD),(LPAR(3),NINT)
      EQUIVALENCE (LPAR(6),NINTEL)

      OPEN(UNIT=5,DEVICE='DSK:',FILE='ULAZV.DAT') ! ULAZNI PODACI
      OPEN(UNIT=6,DEVICE='DSK:',FILE='IZLAZV.DAT') ! GLAVNI REZULTATI
      OPEN(UNIT=12,DEVICE='DSK:',FILE='POMOCV.DAT') !POMOCNI REZULTATI
      OPEN(UNIT=2,DEVICE='DSK:')      ! PODACI O ELEMENTIMA
      OPEN(UNIT=15,DEVICE='DSK:')
      OPEN(UNIT=20,DEVICE='DSK:')     ! MATRICE MASA
      OPEN(UNIT=21,DEVICE='DSK:')     ! MATRICE VISKOZNOSTI
      OPEN(UNIT=22,DEVICE='DSK:')     ! MATRICE PRITISAKA
      OPEN(UNIT=23,DEVICE='DSK:')     ! MATRICE KONVEKTIVNOSTI
      OPEN(UNIT=24,DEVICE='DSK:')     ! MATRICE DIVERGENCIJE
      OPEN(UNIT=25,DEVICE='DSK:')     ! FRONTALNI POSTUPAK
      OPEN(UNIT=26,DEVICE='DSK:') ! JACOBI-EVE MATRICE (NEWTON-RAPHSON
      OPEN(UNIT=30,DEVICE='DSK:')     ! MATRICE K1 (NEWTON-RAPHSON)

*     UCITAVANJE KONTROLNIH INFORMACIJA
*     =================================

      MTOT=11[illegible]
      MAXEST=[illegible]
```

```
      CALL DATE(DAN)
      CALL TIME(X,Y)
      READ(5,1000) TITLE
      READ(5,1100) (NPAR(I),I=1,10)
      READ(5,1200) (LPAR(I),I=1,6)
      IF(NH.EQ.0) STOP
      WRITE(6,2000) DAN,X,Y,TITLE
      WRITE(6,2001) (NPAR(I),I=1,10)
      WRITE(6,2002) (LPAR(I),I=1,6)

*     UCITAVANJE PODATAKA O CVORNIM TACKAMA
*     =====================================

      N1=1
      N2=N1+NH*3
      N3=N2+NH
      N4=N3+NH
      N5=N4+NH
      N6=N5+NH
      N7=N6+NH
      IF(N7.GT.MTOT) CALL ERROR(N7-MTOT)
      CALL SECOND(SEC(1))
      CALL INPUT(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N5),
     1           A(N6),NH,NPU,NPP,NP)
      CALL SECOND(SEC(2))

*     UCITAVANJE PODATAKA O ELEMENTIMA
*     ================================

      CALL ELCALL
      CALL SECOND(SEC(3))

*     UCITAVANJE PODATAKA O GRANICNIM USLOVIMA
*     ========================================

      N24=N23+NP
      N25=N24+NP
      N26=N25+NGRAD
      N27=N26+NGRAD*4
      N28=N27+NINT
      N29=N28+NINT*2
      N30=N29+NP
      IF(N30.GT.MTOT) CALL ERROR(N30-MTOT)
      CALL BOUND(A(N1),A(N23),A(N24),A(N25),A(N26),A(N27),A(N28),
     1           NH,NE,NGRAD)

*     UCITAVANJE PODATAKA O POCETNIM USLOVIMA
*     =======================================

      N31=N30 + NH*2
      N32=N31 + NP
      IF(N32.GT.MTOT) CALL ERROR(N32-MTOT)
      CALL POCET(A(N30),NH)

*     DEFINISANJE BROJA GAUSOVIH TACAKA
*     =================================
*     ZA NUMERICKU INTEGRACIJU MATRICA

      NGAUS=3

*     IZRACUNAVANJE POTREBNIH MATRICA ZA SVAKI ELEMENT
*     ================================================

      IKONP=[illegible]
```

```
      CALL MATFOR(A(N7),A(N8),A(N9),A(N10),A(N30),NGAUS,NH,NE)
      IF(IKONPO.EQ.0) CALL SECOND(SEC(4))
      IF(IKONPO.GE.1) GO TO 25
C
**********************************************************************
*                                                                    *
*     USTALJENO STRUJANJE FLUIDNE SREDINE                            *
*                                                                    *
**********************************************************************

*     IZBOR NACINA RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA
*     ========================================

      GO TO (50,60,60) NRESAV

*     DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM (SA RELAKSACIJOM)
*     ======================================================

50    CALL NSITER(A(N1),A(N9),A(N10),A(N23),A(N24),A(N30),
     1            AUV,REZPO,REZUL,NH,NE,NP,NELL,NGAUS,
     2            TUKUP,IDELTA)
      CALL SECOND(SEC(5))
      GO TO 35

*     NEWTON-RAPHSON-OV ILI MODIFIKOVAN NEWTON-RAPHSONOV POSTUPAK
*     =========================================================

60    CALL NEWTON(A(N1),A(N9),A(N10),A(N23),A(N24),A(N30),
     1            AUV,REZPO,REZUL,NH,NE,NP,NELL,NGAUS,
     2            TUKUP,IDELTA)
      CALL SECOND(SEC(5))

*     ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KRUTU KONSTRUKCIJU
*     ==========================================

35    CONTINUE
      TUKUP=
      IDELTA=
      READ(5,12 ) ISILE
      IF(IL.GE.3 .AND. ISILE.EQ.0) ISILE=1
      IF(ISILE.EQ.1) READ(5,1  ) TITKO
      IF(ISILE.EQ.1) READ(5,14 ) XMA,YMA
      IF(LL.EQ.1 .AND. ISILE.EQ. ) GO TO 100
      IF(LL.EQ.1 .AND. ISILE.EQ.1) GO TO 30

**********************************************************************
*                                                                    *
*     NEUSTALJENO STRUJANJE FLUIDNE SREDINE                          *
*                                                                    *
**********************************************************************

      READ(5,13 ) UTIME,NDELTA
      IF(ISILE.EQ.1) GO TO 3

*     ODREDJIVANJE POCETNIH UBRZANJA I PRITISAKA FLUIDA
*     ============================================

15    CONTINUE
      N33=N32+NP
      N34=N33+NP
      N35=N34+NP
      IF(N35.GT.MTOT) CALL ERROR(N35-MTOT)
      CALL UBRZA(A(N1),A(N9),A(N10),A(N29),REZUL,
     1           A(N32),A(N34),NGAUS,NH,NE,NP,NEN,
```

```
*       IZBOR NACINA VREMENSKE INTEGRACIJE
*       ==================================

40      GO TO (80,90) NVREME

*       INTEGRACIJA JEDNACINA METODOM WILSON-TETA
*       =========================================

90      CALL WILSO1(A(N1),A(N9),A(N10),A(N23),A(N24),A(N29),
        1           REZUL,A(N33),A(N34),REZDEL,UBRDEL,
        2           REZPO,UBRPO,NH,NE,NP,NGAUS,TUKUP,IDELTA)

        IF(TUKUP.GE.UTIME .AND. ISILE.EQ.0) GO TO 100
        IF(LL.EQ.2 .AND. ISILE.EQ.0) GO TO 40

*       INTEGRACIJA JEDNACINA METODOM PREDIKTOR-KOREKTOR
*       ================================================

80      CALL ADAMS
        IF(TUKUP.GE.UTIME .AND. ISILE.EQ.0) GO TO 100
        IF(LL.EQ.2 .AND. ISILE.EQ.0) GO TO 40

************************************************************************
*                                                                      *
*       KRUTA ILI FLEKSIBILNA KONSTRUKCIJA (INTERAKCIJA)               *
*                                                                      *
************************************************************************

30      CALL KONST(A(N1),A(N4),A(N5),A(N7),A(N8),A(N14),
        1          A(N17),A(N20),A(N22),A(N27),A(N28),A(N34),
        2          REZUL,REZDEL,FT,NGAUS,TUKUP,NH,NINT,NINTEL,
        3          XMA,YMA)

        IF(LL.EQ.1 .AND. ISILE.EQ.1) GO TO 100
        IF(LL.EQ.2 .AND. TUKUP.EQ.0.) GO TO 45
        IF(LL.EQ.2 .AND. TUKUP.LT.UTIME) GO TO 40
        IF(LL.EQ.2 .AND.TUKUP.GE.UTIME) GO TO 100
        IF(LL.EQ.4 .AND. TUKUP.EQ.0.) GO TO 45

*******************************************************************
*                                                                 *
*       INTERAKCIJA FLUIDA I FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE             *
*       (SLUCAJEVI LL=3,4)                                        *
*                                                                 *
*******************************************************************

250     CONTINUE

        CALL INTERA(A(N1),A(N23),A(N24),A(N27),A(N28),REZPO,
        1           REZUL,REZDEL,POU,POV,POM,BRU,BRV,IKONPO,
        2           ITERPO,IKONBR,ITERB,TUKUP,IDELTA,NH,NE,
        3           NP,NINT,NGAUS)
        IF(IKONPO.EQ.1) GO TO 240

100     CONTINUE
        IF(LL.GT.1) CALL SECOND(SEC(5))
        CALL SECOND(SEC(6))
        CALL SECOND(SEC(7))

*       IZRACUNAVANJE VREMENA RADA CENTRALNOG PROCESORA
*       ===============================================

        SS=0.
        DO 150 I=1,6
```

```
      SEC(I)=SEC(I+1)-SEC(I)
150   SS=SS+SEC(I)
      SPOM=SEC(4)
      DO 155 I=4,7
      SEC(I)=0.0
155   CONTINUE
      GO TO (160,170,180,190) LL
160   SEC(4)=SPOM
      GO TO 200
170   SEC(5)=SPOM
      GO TO 200
180   SEC(6)=SPOM
      GO TO 200
190   SEC(7)=SPOM
200   CONTINUE

      WRITE(6,4000) TITLE,(SEC(I),I=1,7),SS

1042  FORMAT(16A5)
1100  FORMAT(6I5,2F10.0,2I5)
1200  FORMAT(6I5)
1300  FORMAT(F10.0,I5)
1400  FORMAT(2F10.0)
2000  FORMAT(1H1///10X,60(1H*)/10X,2H**,56X,2H**/10X,2H**,15X,
     1     26HP R O G R A M    V E T A R,15X,2H**/10X,2H**,
     2     15X,26(1H=),15X,2H**/10X,2H**,56X,2H**/10X,
     3     2H**,20X,17H(AUTOR: S. BRCIC),19X,2H**/10X,2H**,
     4     56X,2H**/10X,2H**,12X,
     4     32HGRADJEVINSKI FAKULTET U BEOGRADU,12X,2H**/
     5     10X,2H**,9X,15HDATUM I VREME :,2X,2A5,3X,2A6,5X,2H**/
     6     10X,2H**,56X,2H**/10X,60(1H*)//////16A5/80(1H*)///)
2001  FORMAT(12X,42H K O N T R O L N E   I N F O R M A C I J E//
     1     15X,35H-BROJ CVORNIH TACAKA...............= I5/
     1     15X,35H-UKUPAN BROJ ELEMENATA.............= I5/
     2     15X,35H-BROJ TIPOVA ELEMENATA.............= I5/
     3     15X,35H-BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONST....= I5/
     3     15X,35H-VRSTA ANALIZE.....................= I5/
     4     18X,32H.EQ.1...USTALJENO STRUJANJE             /
     5     18X,32H         OKO NEPOKRETNE KONTURE        /
     6     18X,32H.EQ.2...NEUSTALJENO STRUJANJE          /
     7     18X,32H         OKO NEPOKRETNE KONTURE        /
     8     18X,32H.EQ.3...USTALJENO STRUJANJE            /
     9     18X,32H         OKO POKRETNE KONTURE          /
     1     18X,32H.EQ.4...NEUSTALJENO STRUJANJE          /
     2     18X,32H         OKO POKRETNE KONTURE          /
     3     15X,35H-BROJ ITERACIJA ZA N.S. JEDNACINE.= I5/
     4     15X,35H-TOLERANCIJA ZA KONVERGENCIJU.....= F5.2/
     5     15X,35H-FAKTOR RELAKSACIJE...............= F5.2/
     6     15X,35H-RESAVANJE NELINEARNIH JEDNACINA..= I5/
     6     18X,32H.EQ.0...LINEARNE JEDNACINE             /
     7     18X,32H.EQ.1...DIREKTNA ITERACIJA             /
     8     18X,32H.EQ.2...NEWTON-RAPHSON                 /
     9     18X,32H.EQ.3...MODIFIKOVAN NEWTON             /
     1     15X,35H-VREMENSKA INTEGRACIJA JEDNACINA..= I5/
     2     18X,32H.EQ.1...PREDIKTOR-KOREKTOR             /
     3     18X,32H.EQ.2...WILSON-THETA                   /)
2002  FORMAT(//17X,32HINFORMACIJE O GRANICNIM USLOVIMA/17X,32(1H=)//
     1     15X,35HBROJ CVOROVA NA KONTURI G1.......= I5/
     2     15X,35H  (ESENCIJALNI GRAN. USLOVI)      /
     3     15X,35HBROJ CVOROVA NA KONTURI G2.......= I5/
     4     15X,35H  (PRIRODNI GRANICNI USLOVI)      /
     5     15X,35HBROJ CVOROVA NA KONTURI G3.......= I5/
     6     15X,35H  (KONTAKT SA KONSTRUKCIJOM)      /
     7     15X,35HBROJ ELEMENATA NA KONTURI G1.....= I5/
     8     15X,35HBROJ ELEMENATA NA KONTURI G2.....= I5/
     9     15X,35HBROJ ELEMENATA NA KONTURI G3.....= I5/)
```

```
4000    FORMAT(1H1//39H   V R E M E     P R O R A C U N A    U,
      1          10H      S E C//
      1 10X,11HZA PROBLEM://1X,16A5/80(1H=)////5X,
      1  18HVREME UTROSENO ZA://5X,
      2 49H-ULAZ PODATAKA O CVORNIM TACKAMA                    =,
      2  1X,F8.2/5X,
      3 49H-ULAZ PODATAKA O ELEMENTIMA                         =,
      3  1X,F8.2/5X,
      4 49H-FORMIRANJE MATRICA ELEMENATA                       =,
      4  1X,F8.2/5X,
      5 49H-USTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA           =,
      5  1X,F8.2/5X,
      6 49H-NEUSTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA         =,
      6  1X,F8.2/5X,
      7 49H-USTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA                  =,
      7  1X,F8.2/5X,
      8 49H-NEUSTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA                =,
      8  1X,F8.2/5X,//5X,
      9 47HU K U P N O   U T R O S E N O   V R E M E   J E,3X,
      1       F8.2,3X,5HS E C)
2050    FORMAT(//5X,37H*** STOP: PARAMETAR IL LOSE DEFINISAN)
        CALL EXIT
        END
```

5.2.3. Učitavanje i obrada ulaznih podataka

Svi podaci o čvornim tačkama elemenata fluidne sredine se učitavaju podprogramu INPUT. Pri unošenju podataka o čvornim tačkama moguće je automatsko generisanje čvornih tačaka na ekvidistantnim rastojanjima duž prve linije.

Podaci o elementima fluidne sredine se učitavaju i obradjuju u podprogramima ELCALL, ELTYPE, ELEMØ1, ELEMØ2, ELEMØ3, ELEMØ4, POLAR, PAREL, LAGEL. Pri tome se ELEMØ1, ELEMØ2, i POLAR odnose na elemente tipa 1 i 2, dok se ELEMØ3 i PAREL, odnosno ELEMØ4 i LAGELodnose na elemente tipa 3 i 4. Pri unošenju podataka o elementima i materijalnim konstantama (gustini i kinematičkoj viskoznosti), moguće je da se vrši automatsko generisanje elemenata. U podprogramima POLAR, PAREL ili LAGEL se formiraju i globalni brojevi jednačina za čvorne nepoznate u svakom elementu. Takodje se učitavaju i podaci o čvornim tačkama i elementima na konturama Γ_1, Γ_2 i Γ_3.

Podaci o graničnim uslovima se učitavaju i obradjuju u podprogramu BOUND. Unose se podaci o esencijalnim uslovima na konturi Γ_1 (zadate brzine fluida), a takodje i prirodni uslovi na kontiri Γ_2 (zadati gradijenti brzina). U slučaju strujanja fluida oko krute konstrukcije se automatski anuliraju brzine na konturi Γ_3 (kontakt fluida i konstrukcije) i dalje se tretiraju kao esencijalni uslovi na konturi Γ_1. Za slučaj strujanja oko fleksibilne konstrukcije, brzine fluida na konturi Γ_3 su jednake nuli samo u početnom trenutku $t = 0$ (ukoliko su početni uslovi kretanja konstrukcije homogeni).

U podprogramu POCET se učitavaju podaci o početnim brzinama fluida u celoj posmatranoj oblasti Ω, uključujući i granice. Pri unošenju početnih uslova po brzinama fluida moguće je da se automatski generišu isti početni uslovi u više tačaka (ili u svim tačkama). Ovi početni uslovi po brzinama fluida se unose bez obzira da li je strajanje fluida stacionarno ili nestacionarno. U slučaju stacionarnog strujanja su početni uslovi po brzinama matematički gledano nepotrebni, ali predstavljaju početnu iteraciju u rešavanju nelinearnih jednačina kretanja fluida. Zbog brže konvergencije je povoljnije da se unesu što približnije i realnije početne vrednosti, a ne nule kako se čini najpraktičnijim. To znači da se već u provoj iteraciji izračunavaju i uzimaju u obzir i matrice konvektivnih ubrzanja (odredjene sa ovim početnim brzinama). Ovo je svakako povoljnije nego da se u prvoj iteraciji kovektivna ubrzanja zanemare (u slučaju nultih početnih brzina). U slučajevima strujanja gde su konvektivna ubrzanja značajna, rešavanje jednačina može lako da bude divergentno ukoliko se u prvoj iteraciji zanemare konvektivna ubrzanja (kao što su neki radjeni primeri i pokazali).

5.2.4. Formiranje odgovarajućih matrica i vektora

Potrebne matrice za svaki element fluidne sredine se formiraju pozivanjem podprograma MATFOR, odnosno podprograma MASA, MAVISK, MAPRIT, MAKONV, SLOBCL, KONTUR i NJACOB. Ovim podprogramima se izračunavaju matrice mase, matrice viskoznih članova, matrice gradijenata pritisaka, matrice divergencije, matrice konvektivnih ubrzanja, kao i vektori slobodnih članova za sve elemente fluidne sredine. U slučaju korišćenja Newton-Raphson-ovog postupka ili modifikovanog Newton-Raphson-ovog postupka u podprogramu NJACOB se za svaki element odredjuje deo odgovarajuće Jacobi-eve matrice $|K_i^*|$. Podprogram KONTUR je namenjen za izračunavanje vektora spoljašnje normale na odgovarajuću konturu elementa. Ove matrice se smeštaju u spoljašnju memoriju (na disk) za svaki element.

Izračunavanje odgovarajućih integrala po površini ili konturi elemenata se vrši Gausovom numeričkom integracijom sa $3x3$ tačke (odnosno 3 za konturu). U glavnom programu se definiše broj Gausovih tačaka, dok se u podprogramu GAUSSQ formiraju odgovarajuće abscise i težinski brojevi u Gausovoj integraciji. Ostavljena je mogućnost izbora od jedne do četiri Gausove tačke. U podprogramima SHPH, SHPG i SHPE se izračunavaju interpolacione funkcije $h_i(\xi,\eta)$, $g_i(\xi,\eta)$ i $e_i(\xi,\eta)$, kao i njihovi izvodi po prirodnim koordinatama, dok se u podprogramima JACOB, JACOB8 i JACOB9 izračunavaju odgovarajuće Jacobi-eve matrice, njihove inverzne matrice i determinante potrebne za transformaciju koordinata u izračunavanju integrala.

5.2.5. Formiranje i rešavanje jednačina

Samo formiranje i rešavanje odgovarajućih jednačina fluidne sredine se vrši pomoću podprograma ABFIND, FRONT, BACSUB i RESOL. Pri tome se u podprogramu FRONT vrši formiranje jednačina po redosledu elemenata, unošenje esencijalnih graničnih uslova, kao i dekompozicija globalnih jednačina na trougaoni oblik, dok se u podprogramu BACSUB vrši odredjivanje rešenja rekurzijom u nazad. U podprogramu ABFIND se iz spoljašnje memorije, za svaki element posebno, vrši učitavanje odgovarajućih matrica i formiranje jednačina na nivou elementa, dok se u FRONT-u vrši razmeštanje jednačina u globalne pozicije. Pri tome se u ABFIND-u formiraju odgovarajuće matrice na nivou elementa u svim slučajevima koji se razmatraju. U slučaju stacionarnog strujanja to su matrice

$|K_1|$ date sa (2.42), ako se jednačine rešavaju direktnom iteracijom sukcesivnom zamenom. U slučaju Newton-Raphson-ovog postupka formiraju se Jacobi-eve matrice $|J_T|$ date sa (2.58) ili se vrši njihovo ponovno izračuvanje posle svake treće iteracije u slučaju modifikovanog Newton-Raphson-ovog postupka. U ovom slučaju se, za nepromenjenu Jacobi-evu matricu ne vrši ponovna dekompozicija jednačina (koja i oduzima najveći deo vremena rada računara), već se jednačine rešavaju koristeći podprograme RESOL i BACSUB, gde se vrši odgovarajuća transformacija slobodnog člana i rekurzija.

U slučaju nestacionarnog strujanja u podprogramu ABFIND se formiraju odgovarajuće matrice koeficijenata i za prediktor-korektor postupak i za postupak Wilson θ, date sa (2.73) odnosto (2.94), a takodje i matrica koeficijenata (2.67) u slučaju odredjivanja početnih ubrzanja i pritisaka u trenutku $t = 0$.

5.3. Stacionarno strujanje oko krute konstrukcije

5.3.1. Direktna iteracija sukcesivnom zamenom

Jedna od mogućnosti rešavanja nelinearnih algebarskih Navier-Stokes-ovih jednačina (u diskretizovanoj formi) je direktna iteracija sukcesivnom zamenom. Ovo se vrši u podprogramu NSITER. Uzimajući u obzir i matrice konvektivnih ubrzanja, odredjene ranije sa početnim brzinama fluida, formiraju se i reše jednačine. Dobijena rešenja posle prve iteracije se uporedjuju sa prethodnim rešenjem. Pri tome se u prvoj iteraciji pod prethodnim rešenjem podrazumevaju zadate vrednosti početnih brzina, dok su pritisci inicijalno jednaki nuli; jedino je u jednoj čvornoj tački zadat referentan pritisak (kao esencijalan granični uslov). Dobijene brzine u čvornim tačkama posle prve iteracije se direktno (bez ikakve relaksacije) koriste za ponovno izračunavanje matrica konvektivnih ubrzanja, koje se zatim unose u jednačine u narednoj iteraciji.

Postupak ponovnog izračunavanja modifikovanih matrica konvektivnih ubrzanja, formiranja i rešavanja jednačina se zatim ponavlja sve do uspostavljanja željene tolerancije u normiranoj razlici rešenja u dve susedne iteracije, ili do prekoračenja propisanog broja iteracija. Pri tome se u izračunavanju novih matrica konvektivnosti mogu da koriste vrednosti čvornih brzina dobijene u prethodnoj iteraciji, ili njihove relaksirane vrednosti - prema relacijama (2.50), gde je α propisan faktor relaksacije (vrednost definisana ulaznim podacima).

5.3.2. Newton-Raphson-ov i modifikovan Newton-Raphson-ov postupak

Ove dve mogućnosti rešavanja nelinearnih Navier-Stokes-ovih jednačina za stacionarno strujanje fluida su (po izboru) predvidjene u podprogramu NEWTON. Kao i u podprogramu NSITER, u prvoj iteraciji se Jacobi-eve matrice, date sa (2.58), izračunavaju sa učitanim početnim brzinama. Rešavanjem jednačina (2.53) se dobijaju prvo priraštaji na početne vrednosti nepoznatih, a zatim i nova rešenja prema relaciji (2.52). U Newton-Raphson-ovom postupku se sa dobijenim novim brzinama izračunavaju nelinearne matrice konvektivnih ubrzanja, odn. Jacobi-eve matrice, kao i novi korigovan slobodan član, dat sa (2.57), pozivanjem podprograma NOVISC. U modifikovanom Newton-Raphson-ovom postupku se zadržavaju, početne Jacobi-eve matrice, ali se odredjuje korekcija slobodnog člana.

Postupak rešavanja jednačina, dobijanja priraštaja na prethodna rešenja, odnosno dobijanja novih rešenja se zatim ponavlja sve do postizanja željene tolerancije u normiranoj razlici rešenja u dve susedne iteracije, ili do prekoračenja propisanog broja iteracija. Pri tome se u modifikovanom Newton-Raphson-ovom postupku posle svake treće iteracije vrši novo odredjivanje Jacobi-evih matrica. Kao i u direktnoj iteraciji sukcesivnom zamenom, u odredjivanju novog rešenja, dodavanjem dobijenih priraštaja nepoznatih na prethodna rešenja, uveden je faktor relaksacije α prema relaciji (2.63).

5.4. Nestacionarno strujanje oko krute konstrukcije

5.4.1. Prediktor-korektor postupak

Rešavanje jednačina nestacionarnog strujanja fluida, datih sa (2.64), postupkom prediktor-korektor se obavlja u podprogramu ADAMS. Pre pozivanja podprograma ADAMS (ili WILSO1 - videti 5.4.2.), u glavnom programu se pozove podprogram UBRZA, kojim se formiraju i reše jednačine (2.67). Time se dobijaju ubrzanja i pritisci fluida u početnom trenutku vremena $t = 0$.

Prediktorski korak za brzine u prvom intervalu vremena ne može da se obavi, jer su, prema relaciji (2.69), potrebna i ubrzanja iz prethodna dva koraka. Zato se u prvom intervalu vremena odmah prelazi na korektorski korak: prvo se formira slobodan član, dat sa desnom stranom jednačina (2.73), u kome figurišu brzine i ubrzanja fluida u trenutku $t = 0$. Zatim se formiraju i koeficijenti uz nepoznate u nelinearnim jednačinama (2.73), pri čemu su nelinearne matrice konvektivnih ubrzanja odredjene sa početnim brzinama fluida. Same jednačine (2.73), u posmatranom prvom intervalu vremena, se iterativno rešavaju sukcesivnom zamenom ili Newton-Raphsonovim postupkom. Po dobijanju konvergentnog rešenja za brzine i pritiske na kraju prvog intervala vremena, odredjuju se i ubrzanja fluida na kraju prvog intervala, prema relacijama (2.71).

Tek pošto je dobijeno rešenje za brzine, pritiske i ubrzanja na kraju prvog intervala vremena, može da se koristi prediktor-korektor postupak. Prema relacijama (2.69) se formiraju prediktorske vrednosti za brzine na kraju drugog intervala vremena. Sa prediktorskim brzinama se odrede nove matrice konvektivnih ubrzanja, formiraju korektorske jednačine (2.73) i reše postupkom sukcesivne zamene. U slučaju rešavanja jednačina Newton-Raphson-ovim postupkom, sa prediktorskim brzinama se odrede Jacobi-eve matrice date relacijama (2.76)-(2.78) i formiraju i reše korektorske jednačine u obliku (2.74). Pri tome se koristi Newton-Raphson-ov postupak samo u jednom koraku, jer su prediktorske vrednosti brzina (na kraju posmatranog intervala) znatno bliže rešenju na kraju intervala vremena nego rešenja za brzine na početku posmatranog intervala. Sa dobijenim konačnim rešenjem za brzine i pritiske se odrede ubrzanja na kraju intervala prema relacijama 2.71). Zatim se odredjuje normirana razlika izmedju korektorskih i prediktorskih brzina na kraju intervala vremena, pa se, prema relaciji (2.85) izračunava dužina narednog intervala vremena Δt_{n+1} zasnovana na lokalnoj proceni greške u intervalu Δt_n. Ako se dobije da je $\Delta t_{n+1} > \Delta t_n$ onda se u narednom koraku računa sa povećanim intervalom vremena. Ako se dobije da je $\Delta t_{n+1} = \alpha \cdot \Delta t_n$, pri čemu je $\alpha \in |0.75, 1.0|$ onda se prihvata prethodno dobijeno rešenje (na kraju intervala vremena Δt_n), ali se u narednom intervalu zadržava isti interval vremena: $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n$. U slučaju kada je $\alpha < 0.75$, prethodni interval vremena Δt_n se smanji na vrednost $\alpha \cdot \Delta t_n$ i ponovi se proračun za prethodno posmatrani interval. Ceo postupak se rekurzivno obavlja dok se ne iscrpi ukupno posmatrano vreme trajanja neustaljenog strujanja fluida.

5.4.2. Wilson θ postupak

Druga od mogućnosti rešavanja jednačina nestacionarnog strujanja fluida je Wilson θ postupak. Ovo se vrši pozivanjem podprograma WILSO1. Prvo se formira odgovarajući slobodan član, dat sa (2.96). Kako je on zavistan od brzina i ubrzanja na početku posmatranog intervala vremena, u prvom intervalu vremena se koriste učitane početne brzine fluida i izračunata početna ubrzanja (prethodnim pozivanjem podprograma UBRZA i rešavanjem jednačina (2.67)).

Sa izračunatim slobodnim članom u posmatranom intervalu vremena, izračunavaju se nelinearne matrice konvektivnih ubrzanja i formiraju jednačine (2.93) čijim rešavanjem se dobijaju rešenja u trenutku $t_n+\theta\Delta t$. Kako su ove jednačine nelinearne, njihovo rešavanje se, za sada, vrši direktnom iteracijom sukcesivnom zamenom, ali je ostavljena mogućnost i korišćenja Newton-Raphson-ovog postupka.

U slučaju da se u predvidjenom maksimalnom broju iterativnog rešavanja dobije konvergentno rešenje za nepoznate u trenutku $t_n+\theta\Delta t$, prelazi se na odredjivanje brzina, pritisaka i ubrzanja fluida na kraju posmatranog intervala u trenutku $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ (prema relacijama (2.98) i (2.99). Postupak se zatim ponavlja, prelaskom na naredni interval vremena, sve dok se ne dostigne ukupno vreme trajanja neustaljenog strujanja. Pri tome se konačna rešanja dobijena na kraju prethodnog intervala vremena koriste u narednom intervalu: brzine: ubrzanja za odredjivanje novog slobodnog člana, a brzine još i za početnu iteraciju u rešavanju nelinearnih jednačina (2.93).

5.5. Stacionarno strujanje oko fleksibilne konstrukcije

5.5.1. Osnovne informacije o fleksibilnoj konstrukciji

U slučaju razmatranja strujanja oko fleksibilne konstrukcije poziva se prvo podprogram KONST u kome se učitavaju i obradjuju sve osnovne informacije o konstrukciji (odnosno o dvodimenzionalnom modelu konstrukcije). Unose se prvo početni uslovi kretanja konstrukcije - početni položaj centra mase i početne brzine. Pri tome se homogeni početni uslovi automatski generišu, dok se učitavaju samo nehomogeni uslovi.

Zatim se unose podaci o globalnim položajima centra mase i krutosti (u ravnotežnoj konfiguraciji konstrukcije), kao i potrebni inercioni koeficijenti (ekvivalentna masa i momenat inercije mase dvodimenzionalnog modela konstrukcije), a takodje i elastični koeficijenti (ekvivalentne krutosti dvodimenzionalne konstrukcije). Sa ovim informacijama se formiraju matrice mase i krutosti konstrukcije.

Unose se takodje i informacije o željenom načinu integracije diferencijalnih jednačina kretanja konstrukcije. Moguć je izbor izmedju eksplicitnog diferencnog postupka (centralne razlike) i implicitnog postupka Wilson θ. U slučaju izbora diferencnog postupka, poziva se podprogram JACOBI kojim se odredjuju svojstveni oblici i frekvencije dvodimenzionalnog modela konstrukcije.

Time se odredjuje kritični (t.j. maksimalni) interval vremena Δt_{cr}, dat sa (3.46), koji može da se koristi u diferencnom postupku sa stanovišta stabilnosti numeričke integracije jednačina.

Takodje se u podprogramu KONST poziva podprogram OPTER kojim se odredjuje vektor opterećenja konstrukcije u početnom trenutku vremena.

5.5.2. Odredjivanje opterećenja na konstrukciju

Odredjivanje vektora opterećenja konstrukcije usled strujanja fluidne sredine, u bilo kom trenutku vremena, obavlja se u podprogramima OPTER I SILE. U podprogramu SILE se, za jedan konačni element fluidne sredine, koji je u kontaktu sa konstrukcijom, vrši integracija pritisaka i gradijenata brzina prema relacijama (3.7)-(3.12) odnosno (4.3)-(4.4). Izračunavanje pomenutih integrala se vrši Gausovom numeričkom integracijom po konturi i time se dobija rezultujuće opterećenje na konturi jednog elementa u kontaktu sa konstrukcijom.

U podprogramu OPTER se vrše pomenuta izračunavanja rezultujućih sila za sve elemente fluidne sredine koji okružuju konstrukciju. Zatim se vrši odredjivanje ukupnih rezultanti, posebno usled pritisaka fluida, a posebno usled gradijenata brzina, kao i sumarno. Najzad, redukcijom ukupne rezultujuće sile, koja deluje u tzv. aerodinamičkom centru u datom trenutku, na centar mase konstrukcije, dobija se vektor opterećenja konstrukcije u posmatranom trenutku vremena.

5.5.3. Rešavanje jednačina kretanja konstrukcije diferencnim postupkom

Od mogućih diferencnih postupaka koristi se eksplicitni metod centralnih razlika pozivanjem podprograma CENDIF. Obzirom da je matrica mase konstrukcije dijagonalna matrica i da ona čini matricu koeficijenata uz nepoznate u posmatranom intervalu vremena, samo rešavanje algebarskih jednačina i ceo postupak vremenske integracije diferencijalnih jednačina je veoma brz i "jeftin".

U prvom intervalu vremena se iz jednačina (3.44) ili (3.45) odredi vektor pomeranja $\{u_{\Delta t}\}$ na kraju prvog intervala. U drugom i dalje narednim intervalima vremena, vektor pomeranja na kraju posmatranog intervala $\{u_{t+\Delta t}\}$ se dobija rešavanjem rekurentnih jednačina (3.36).

Medjutim, problem u vezi primene ovog jednostavnog postupka centralnih razlika je vezan za odredjivanje brzina konstrukcije, koje su opet neophodne u celom procesu interakcije fluida i konstrukcije. Problem se sastoji u tome što se vektor brzina konstrukcije u trenutku t izražava preko vektora pomeranja u trenutku $t+\Delta t$ - relacije (3.35):

$$\{\dot{u}_t\} = \frac{1}{2\Delta t} (\{u_{t+\Delta t}\} - \{u_{t-\Delta t}\}) \tag{5.74}$$

O ovome će biti reči u prikazu medjusobne interakcije fluida i konstrukcije i zadovoljavanju graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3.

5.5.4. Rešavanje jednačina kretanja konstrukcije postupkom Wilson θ

Ukoliko se želi rešavanje jednačina kretanja konstrukcije postupkom Wilson θ, koristi se podprogram WILSO2. Prvo se formiraju matrica koeficijenata i slobodan član dati relacijama (3.60). U slobodnom članu figurišu i vektori pomeranja, brzina i ubrzanja konstrukcije na početku posmatranog intervala. Znači, nema nekih posebnih postupaka započinjanja integracije, osim što je potrebno da se iz jednačina kretanja konstrukcije napisanih za početni trenutak $t=0$ odredi vektor ubrzanja u početnom trenutku, dok su vektori pomeranja i brzina u $t = 0$ zadati početnim uslovima.

Rešavanjem jednačina (3.59) se dobija vektor pomeranja u trenutku $t+\theta\Delta t$. Prema relacijama (3.55) se odredjuju i vektori ubrzanja i brzine u trenutku $t+\theta\Delta t$, dok se zatim, prema izrazima (3.61), dobijaju vektori pomeranja, brzine i ubrzanja na kraju posmatranog intervala, u trenutku $t+\Delta t$.

5.5.5. Zadovoljavanje graničnih uslova po brzinama i medjusobna interakcija fluida i konstrukcije

Na završetku proračuna u posmatranom intervalu vremena, kako za fluid tako i za konstrukciju poziva se podprogram KONVER. U ovom podprogramu se prvo sa vektorom brzina konstrukcije, na kraju posmatranog intervala vremena izračunavaju brzine u i v, prema relacijama (4.18), onih tačaka na konturi konstrukcije Γ_3 koje se poklapaju sa čvornim tačkama elemenata fluidne sredine koji su oko konstrukcije. Zatim se ove brzine tačaka na konturi konstrukcije uporedjuju sa dobijenim brzinama tih istih tačaka elemenata fluidne sredine.

Ukoliko je normirana razlika u brzinama čvornih tačaka na konturi Γ_3

u granicama usvojene tolerancije, koja je ista kao i u slučaju iterativnog rešavanja Navier-Stokes-ovih jednačina, smatra se da su zadovoljeni granični uslovi po brzinama na konturi Γ_3 u posmatranom intervalu vremena. Ukoliko brzine zajedničkih tačaka na konturi Γ_3 nisu prihvatljivo iste za fluid i za konstrukciju, pristupa se iterativnom zadovoljenju graničnih uslova po brzinama. Ovo se odvija u okviru podprograma INTERA.

Kako je reč o ustaljenom strujanju fluida oko fleksibilne konstrukcije, to samo vreme, odnosno intervali vremena, nisu od značaja za fluidnu sredinu. U zavisnosti od željenog načina, jednačine ustaljenog strujanja fluidne sredine se reše pozivanjem podprograma NSITER (sukcesivna zamena) ili NEWTON (Newton-Raphson-ovi postupci). Pri tome su, u zavisnosti od početnih uslova kretanja konstrukcije (početnih brzina), uneti odgovarajući granični uslovi po brzinama fluidne sredine na konturi Γ_3. Rešavanjem jednačina kretanja konstrukcije, postupkom Wilson θ, dobija se rešenje na kraju prvog intervala vremena.

Dobijene brzine konstrukcije u čvornim tačkama na konturi Γ_3 se uporedjuju sa brzinama tih tačaka fluidne sredine (u podprogramu KONVER). Kako su brzine čvorova fluidne sredine na konturi Γ_3 odredjene na bazi početnih brzina konstrukcije i unete kao granični uslovi za fluidnu sredinu, uporedjuju se, u stvari, vektor početnih brzina konstrukcije i vektor brzina konstrukcije na kraju prvog intervala vremena. U slučaju neprihvatljive razlike, vektor brzina konstrukcije na kraju prvog intervala vremena se sada koristi da bi se odredili novi (korigovani) granični uslovi po brzinama za fluidnu sredinu. Sa izmenjenim graničnim uslovima na konturi Γ_3 fluidne sredine ponovo se iterativno rešavaju jednačine ustaljenog strujanja fluidne sredine. Pri tome su, u odnosu na prethodno rešavanje Navier-Stokes-ovih jednačina, izmenjeni granični uslovi na konturi Γ_3, a takodje i matrice konvektivnih ubrzanja onih elemenata fluidne sredine koji su u kontaktu sa konstrukcijom.

Po dobijanju rešenja kretanja fluidne sredine ponovo se odredi korigovan vektor opterećenja konstrukcije i reše se jednačine kretanja konstrukcije za isti (prvi) interval vremena. Postupak uporedjivanja brzina na konturi Γ_3 se ponavlja i, po potrebi, opet se fluidnoj sredini nameću novi (korigovani) granični uslovi po brzinama. Suština iterativnog naizmeničnog rešavanja jednih i drugih jednačina je da se fluidnoj sredini nametnu kao granični uslovi po brzinama na konturi Γ_3 one vrednosti koje se dobijaju rešavanjem jednačina kretanja konstrukcije na kraju posmatranog intervala vremena. Po postizanju prihvatljive konvergencije, prelazi se na naredni interval vremena.

U slučaju rešavanja jednačina kretanja konstrukcije metodom centralnih razlika, brzine konstrukcije na kraju prvog intervala vremena se dobijaju tek pošto su rešene jednačine kretanja u drugom intervalu vremena (relacije

(5.74)). Zbog toga se postupak iterativnog zadovoljavanja graničnih uslova na konturi Γ_3 na kraju posmatranog intervala vremena, u slučaju diferencnog postupka vrši ponovljenim rešavanjem jednačina kretanja konstrukcije u narednom intervalu vremena.

5.6. Nestacionarno strujanje oko fleksibilne konstrukcije

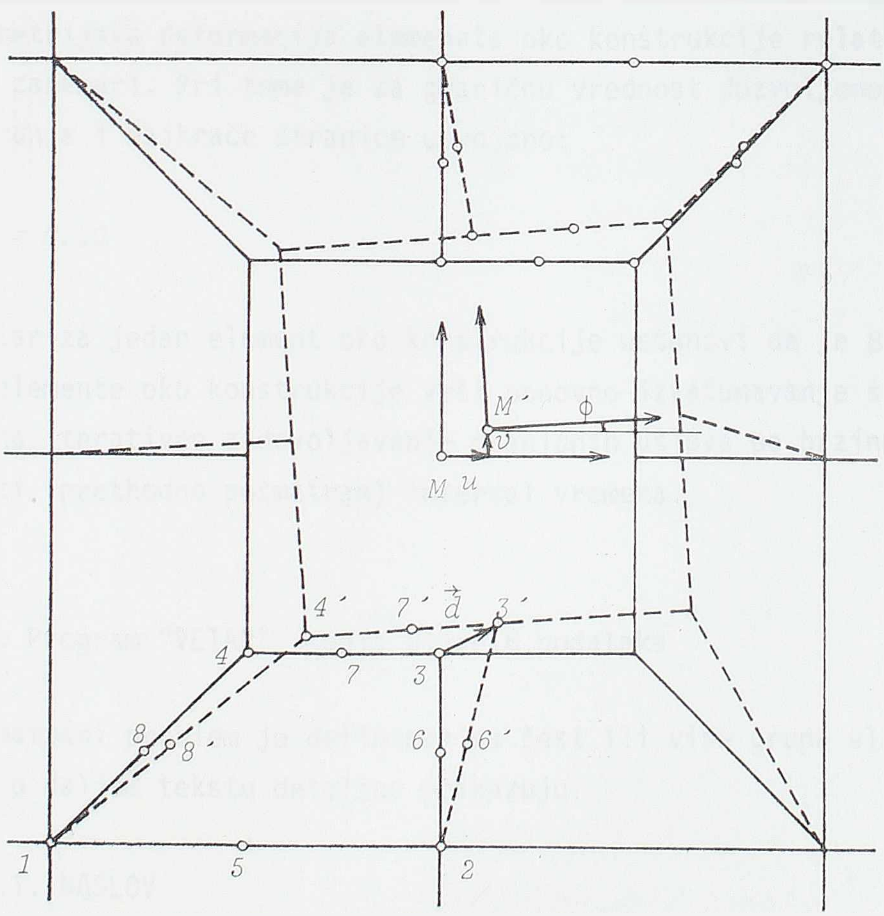
Postupak rešavanja je isti kao i u slučaju ustaljenog strujanja fluida. Razlika je u tome što se rešavaju jednačine neustaljenog strujanja fluidne sredine. Pri tome se koristi postupak Wilson θ, podprogram WILSO1, a ne prediktor-korektor postupak (podprogram ADAMS), jer je zbog interakcije sa konstrukcijom pogodnije da svi intervali vremena budu iste dužine.

5.7. Ponovno definisanje mreže konačnih elemenata fluidne sredine

Kada je dostignuta prihvatljiva konvergencija po pitanju graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3 na kraju posmatranog intervala vremena, u okviru podprograma KONVER se prema relacijama (4.17) odredjuju i pomeranja onih tačaka konstrukcije koje se na konturi Γ_3 inicijalno poklapaju sa čvornim tačkama elemenata fluidne sredine. Ukoliko su ova pomeranja relativno mala, dobijena rešenja na kraju posmatranog intervala vremena, kako za konstrukciju, tako i za fluid, smatraju se kao konačna i prelazi se na naredni interval vremena.

Ukoliko dobijena pomeranja nisu dovoljno mala onda se pomeranja konstrukcije koriste za korekciju koordinata odgovarajućih čvornih tačaka okolnih elemenata fluidne sredine. Sa izmednjenim koordinatama čvornih tačaka elemenata fluidne sredine koji se nalaze oko konstrukcije, ponovo se odredjuju matrice elemenata. Za razliku od prethodne situacije iterativnog zadovoljavanja graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3, gde su se izračunavale samo matrice konvektivnih ubrzanja, jer su one zavisne od brzina, sada se, sa novom geometrijom okolnih elemenata, izračunavaju sve matrice fluidne sredine, naravno samo onih elemenata kojima se geometrija izmenila. Ovo se obavlja u okviru podprograma REDEF. Sa novim matricama elemenata, ponovo se posmatra *isti*, prethodno razmatran, interval vremena i ponovo se, naizmeničnim rešavanjem jednačina kretanja fluida i konstrukcije, iterativno nameće zadovoljavanje graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3 u okviru istog intervala vremena. Kao što je rečeno, tek kada se postigne da su granični uslovi po brzinama na konturi Γ_3 prihvatljivo zadovoljeni, a da se pri tome konstrukcija ne pomeri toliko da bitno remeti prethodnu geometrijsku konfiguraciju elemenata fluidne sredine, prelazi se na naredni interval vremena.

Ostaje još da se objasni što se podrazumeva pod neprihvatljivo velikom promenom prethodne geometrije elemenata fluidne sredine u okolini konstrukcije. Na sl. 5.3. je prikazana konstrukcija, na primer, kvadratnog poprečnog preseka i moguća okolna mreža konačnih elemenata fluidne sredine. Punom linijom je prikazana referentna ravnotežna konfiguracija konstrukcije, a isprekidanom linojom mogući trenutni položaj konstrukcije na kraju posmatranog intervala vremena, kao i nova (deformisana) geometrijska konfiguracija elemenata fluidne sredine.



Sl. 5.3. Ravnotežna i deformisana konfiguracija konstrukcije i konačnih elemenata fluidne sredine

Za svaki element koji je u kontaktu sa konstrukcijom (konturom Γ_3) se odrede pomeranja čvorova u odnosu na konačno stanje na kraju prethodnog intervala vremena (vektor $\vec{d}$ na sl. 5.3.). Zatim se intenzitet pomeranja čvornih tačaka uporedjuju sa najkraćom stranicom elementa kome pripada posmatrani čvor. U slučaju krivolinijskih stranica (za elemente tipa *1*, *3* i *4*) uporedjivanje se vrši sa tetivom koja povezuje ugaone tačke elementa. Neka je l_{min} najkraća stranica (ili tetiva) elementa, a d_{max} najveće pomeranje čvora posmatranog elementa i neka je

$$\beta = \frac{d_{max}}{l_{min}}$$

Ukoliko je za sve elemente koji okružuju konstrukciju odnos najvećeg pomeranja čvora i najkraće stranice manji od granične vrednosti:

$$\beta_i < \beta_{gr} \qquad (i=1,2,\ldots,NINTEL) \qquad (5.76)$$

(gde je NINTEL ukupan broj elemenata koji okružuju konstrukciju), onda se smatra da je geometrijska deformacija elemenata oko konstrukcije relativno mala i da može da se zanemari. Pri tome je za graničnu vrednost dozvoljenog odnosa najvećeg pomeranja i najkraće stranice usvojeno:

$$\beta_{gr} = 0.10 \qquad (5.77)$$

Ukoliko se makar za jedan element oko konstrukcije ustanovi da je $\beta > \beta_{gr}$, onda se za sve elemente oko konstrukcije vrši ponovno izračunavanje svih matrica i prelazi se na iterativno zadovoljavanje graničnih uslova po brzinama na konturi Γ_3 za isti (prethodno posmatran) interval vremena.

5.8. Program "VETAR" - opis ulaznih podataka

Posmatrani problem je definisan sa šest ili više grupa ulaznih podataka, koje se u daljem tekstu detaljno prikazuju.

5.8.1. NASLOV

Jedna kartica, FORMAT (16A5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-80	TITLE	- Naziv problema

5.8.2. KONTROLNE INFORMACIJE

1. Prva kartica: opšte informacije,

FORMAT (6I5, 2F10.0, 2I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	NPAR(1)=NH	- Ukupan broj čvornih tačaka
6-10	NPAR(2)=NE	- Ukupan broj elemenata
11-15	NPAR(3)=NELTYP	- Broj različitih grupa elemenata
16-20	NPAR(4)=NUMAT	- Broj različitih grupa materijala
21-25	NPAR(5)=LL	- Indikator vrste analize: LL=1 - Ustaljeno strujanje oko krute konstrukcije LL=2 - Neustaljeno strujanje oko krute konstrukcije LL=3 - Ustaljeno strujanje oko fleksibilne konstrukcije (interakcija) LL=4 - Neustaljeno strujanje oko fleksibilne konstrukcije (interakcija)
26-30	NPAR(6)=NITER	- Max broj iteracija u rešavanju NS jednačina
31-40	NPAR(7)=TOLER	- Tolerancija za konvergenciju u rešavanju NS jednačina
41-50	NPAR(8)=RELAX	- Faktor relaksacije u iterativnom rešavanju
51-55	NPAR(9)=NRESAV	- Indikator načina rešavanja nelinearnih jednačina: =1 - Direktna iteracija sukcesivnom zamenom sa relaksacijom =2 - Newton-Raphson-ov postupak =3 - Modifikovan Newton-Raphson-ov postupak
56-60	NPAR(10)=NVREME	- Indikator za način vremenske integracije diferencijalnih jednačina fluidne sredine =1 - Prediktor-korektor (eksplicitno--implicitni) postupak

=2 - Wilson θ (implicitni) postupak

2. Druga kartica: informacije o graničnim uslovima, FORMAT (6I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	LPAR(1)=NEXT	- Broj čvornih tačaka na konturi Γ_1 (esencijalni uslovi)
6-10	LPAR(2)=NGRAD	- Broj čvornih tačaka na konturi Γ_2 (prirodni uslovi)
11-15	LPAR(3)=NINT	- Broj čvornih tačaka na konturi Γ_3 (kontakt sa konstrukcijom)
16-20	LPAR(4)=NEXTEL	- Broj elemenata na konturi Γ_1
21-25	LPAR(5)=NELGRD	- Broj elemenata na konturi Γ_2
26-30	LPAR(6)=NINTEL	- Broj elemenata na konturi Γ_3,

5.8.3. PODACI O ČVORNIM TAČKAMA

Potreban broj kartica.

1. Jedna kartica, FORMAT (A5)

1- 5	IT	- Indikator vrste koordinata: = DEK - dekartove koordinate = POL - polarne koordinate

2. Potreban broj kartica, FORMAT (4I5, 2F10.0, I5).

Za svaki čvor se daje po jedna kartica.

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	N	- Broj čvorne tačke
6-10	ID(N,1)	- Indikator za definisanje stepena slobode čvorne tačke:
11-15	ID(N,2)	ID(N,J)=0 - postoji stepen slobode ID(N,J)=1 - sprečen stepen slobode
16-20	ID(N,3)	J=1 - brzina u (x osa) J=2 - brzina v (y osa) J=3 - pritisak p

21-30	RO(N) ili X(N)	- Koordinata čvora ρ ili x
31-40	FI(N) ili Y(N)	- Koordinata čvora ϕ ili y
41-45	KN	- Parametar za automatsko generisanje podataka

Napomene

1. Koordinate ϕ se unose u decimalnim stepenima
2. Pomoću parametra *KN* mogu da se generišu čvorne tačke na ekvidistantnim rastojanjima na prvoj liniji. Parametar *KN* se unosi na *drugoj* kartici. Pri tome svi generisani čvorovi imaju iste stepene slobode kao prvi i poslednji u grupi. Parametar *KN* predstavlja priraštaj u broju čvorne tačke pri generisanju. Ukoliko je *KN=1*, ne mora da se unosi.

5.8.4. PODACI O ELEMENTIMA

Potreban broj kartica.

1. Jedna kartica sa oznakom tipa elementa,
FORMAT(I5)

1- 5	IND	- Indikator tipa elementa: IND=1 - kružno segmentni element IND=2 - linearni četvorougaoni element IND=3 - parabolični četvorougaoni element IND=4 - Lagrange-ov četvorougaoni element sa 9 tačaka

2. Podaci o materijalnim konstantama. Broj kartica jednak broju NUMAT,
FORMAT (I5, F10.0, E15.0)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	N	- Broj grupe materijalnih konstanti
6-15	GUST(N)	- Gustina mase fluida ρ
16-25	VISK(N)	- Kinematička viskoznost fluida ν

3. Podaci o elementima, FORMAT (12I5). Za svaki element se daje po jedna kartica

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	NELL	- Broj posmatranog elementa
6-10	NNP(1)	- Globalni brojevi čvornih tačaka elementa: I=1,...,4 - ugaone tačke; I=5,...,8 - tačke na sredinama strana; I=9 - tačke u središtu elementa (za elemente tipa 4).
11-15	NNP(2)	
⋮	⋮	
41-45	NNP(8)	
46-50	NNP(9)	
51-55	MTYP	- Broj grupe materijalnih konstanti
56-60	KG	- Patametar za automatsko generisanje elemenata

Napomene

1. Čvorne tačke elemenata se unose u smeru suprotnom od kazaljke na satu.
2. Ako se indikator grupe materijala ne unese (MTYP=0), automatski se uzima MTYP=1
3. Parametar za generisanje elemenata *KG* se unosi na *prvoj* kartici u grupi elemenata. Pri tome se brojevi generisanih elemenata povećavaju za jedan, dok se brojevi čvornih tačaka generisanih elemenata dobijaju dodavanjem parametra *KG*. Ukoliko se parametar za generisanje ne unese *(KG=0)*, uzima se da je *KG=1*. Podaci o zadnjem elementu se unose bez obzira na mogućnost generisanja.
4. Samo za kružno-segmentne elemente (IND=1) se unose dve kartice za korekciju koordinate ϕ. Naime, za elemente u četvrtom kvadrantu čija se jedna stranica poklapa sa x osom, potrebno je da se izvrši korekcija koordinate ϕ: treba da bude $\phi=360^o$, a ne $\phi=0^o$ kao što je to za naspramne elemente u prvom kvadrantu.

Prva kartica, FORMAT (I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	IVICA	- Ukupan broj elemenata za korekciju koordinate ϕ *(max 10)*

Druga kartica, FORMAT (10I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	NIZ(1)	- Brojevi elemenata kod kojih se vrši automatska korekcija koordinate ϕ
6-10	NIZ(2)	
⋮		
46-50	NIZ(10)	

5. Brojevi elemenata na konturi Γ_1, gde su zadati esencijalni granični uslovi, FORMAT(16I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	MLEXT(1)	- Brojevi elemenata na kontiri Γ_1. Ukupan broj ovih elemenata je NEXTEL. Ako je ovaj broj veći od 16, unose se podaci na narednim karticama.
6-10	MLEXT(2)	
⋮		
76-80	MLEXT(16)	

6. Brojevi elemenata na konturi Γ_2, gde su zadati prirodni granični uslovi, FORMAT (2I5)

Za svaki element se unosi po jedna kartica.
Ukupan broj kartica je jednak NELGRD

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	MGRAD(N)	- Broj posmatranog elementa na konturi Γ_2
6-10	ISIDE(N)	- Indikator za stranicu elementa koja čini konturu Γ_2 =1 - stranica broj 1 =2 - " 2 =3 - " 3 =4 - " 4

Napomena

Za oznake stranica elemenata videti sl.5.1.

7. Brojevi elemenata na konturi Γ_{3}, koja predstavlja kontakt sa konstrukcijom, FORMAT (2I5).

Za svaki element na konturi Γ_{3} se unosi po jedna kartica. Ukupan broj kartica je NINTEL.

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	MLINT(N)	- Broj posmatranog elementa na konturi Γ_{3}
6-10	ISTRA(N)	- Indikator za stranicu elementa na konturi Γ_{3}. Oznake stranica su prema sl.5.1.

5.8.5. PODACI O GRANIČNIM USLOVIMA

Potreban broj kartica

1. Granični uslovi na konturi Γ_{1} (esencijalni granični uslovi), FORMAT (4I5, 3F10.0). Za svaki čvor u kome je zadat esencijalan granični uslov se daje po jedna kartica. Ukupan broj kartica je NEXT.

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	NODE	- Globalni broj čvora u kome je zadat granični uslov
6-10 11-15 16-20	IID(NODE,1) IID(NODE,2) IID(NODE,3)	- Indikator da li je zadat granični uslov ili ne: IID=1 - Zadat uslov IID=0 - Nije zadat uslov Pri tome je za IID(NODE,J): J=1 - uslov za brzinu u J=2 - uslov za brzinu v J=3 - Uslov za pritisak p
21-30 31-40 41-50	BBC(NODE,1) BBC(NODE,2) BBC(NODE,3)	- Vrednost zadatog graničkog uslova: J=1 - za brzinu u (x osa) J=2 - za brzinu v (y osa) J=3 - za pritisak p

2. Granični uslovi na konturi Γ_2 (prirodni granični uslovi), potreban broj kartica
   Prva kartica, FORMAT (I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	NIGRAD	- Ukupan broj zadatih gradijanata brzina u čvorovima na konturi Γ_2

Potreban broj kartica, FORMAT (2I5, F10.0).

Za svaki čvor i svaki zadat gradijent brzine (prema broju NIGRAD) po jedna kartica.

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	NODE	- Čvor u kome je zadat uslov
6-10	IGRAD	- Indikator koji je gradijent zadat u čvoru: = 1 - zadato $\frac{\partial u}{\partial x}$ = 2 - zadato $\frac{\partial u}{\partial y}$ = 3 - zadato $\frac{\partial v}{\partial x}$ = 4 - zadato $\frac{\partial v}{\partial y}$
11-20	GRADBC(NODE,IGRAD)	- Vrednost zadatog gradijenta brzine

3. Granični uslovi na konturi Γ_3, koja je kontakt sa konstrukcijom.
   Potreban broj kartica, FORMAT (16I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1 - 5	INTER(1)	- Broj čvorova na konturi Γ_3, ukupno ih ima NINT. Ako je NINT>16, podaci se unose na sledećoj kartici.
6-10	INTER(2)	
⋮		
76-80	INTER(16)	

5.8.6. PODACI O POČETNIM USLOVIMA

Potreban broj kartica, FORMAT (I5, 2F10.0, I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	N	- Broj čvora u kome se zadaju početne brzine
6-15	POBRZ(N,1)	- Početna brzina u_o u čvoru N
16-25	POBRZ(N,2)	- Početna brzina v_o u čvoru N
26-30	KN	- Parametar za automatsko generisanje podataka

Napomene

1. Pomoću parametra *KN* mogu da se generišu iste vrednosti početnih brzina u_o i v_o u narednim čvorovima. Parametar *KN* se unosi na *drugoj* kartici u grupi čvorova sa istim početnim brzinama i predstavlja priraštaj u broju čvorne tačke pri generisanju. Ukoliko je *KN=1*, ne mora da se unosi (ostavlja se blanko polje).

2. Početnim uslovima se definiše početno polje brzine fluida u celoj posmatranoj oblasti. Znači, ukoliko se ne vrši generisanje (u slučaju svuda različitih početnih brzina), moraju da se unesu podaci za svaku od čvornih tačaka.

3. U slučaju ustaljenog strujanja fluida (LL=1 i LL=3), opet se unose podaci o "početnim uslovima", ali sa drugačijim značenjem, jer jednačine ustaljenog strujanja ne zahtevaju nikakve početne uslove. U ovom slučaju se uneti podaci o "početnim brzinama" koriste da se već u nultoj iteraciji u rešavanju jednačina izračunaju i unesu u jednačine i članovi matrica konvektivnih ubrzanja (nelinearni članovi). Ovo je u cilju poboljšanja konvergencije: da se definiše "bolje" polazno rešenje u iterativnom rešavanju jednačina.

U slučaju ustaljenog strujanja oko krute konstrukcije (LL=1), unosi se informacija o odredjivanju opterećenja na konstrukciju.

5.8.7. PODACI O ODREDJIVANJU OPTEREĆENJA NA KRUTU KONSTRUKCIJU (SLUČAJEVI LL=1 ILI LL=2)

Jedna kartica, FORMAT (I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	ISILE	- Indikator da li se odredjuje opterećenje na krutu konstrukciju ili ne: ISILE=ø: ne odredjuje se opterećenje na konstrukciju ISILE=1: odredjuje se opterećenje na konstrukciju

U slučaju da se odredjuje opterećenje u slučaju ustaljenog strujanja oko krute konstrukcije (ISILE=1), unose se sledeći podaci o konstrukciji.

5.8.8. PODACI O KRUTOJ KONSTRUKCIJI (SLUČAJEVI LL=1 ILI LL=2)

1. Jedna kartica sa naslovom, FORMAT (16A5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-80	TITKO	- Tekst sa opisom konstrukcije

2. Jedna kartica sa podacima o položaju centra mase krute konstrukcije, FORMAT (2F10.0)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	XMA	- Globalni položaj centra mase konstrukcije--koordinata x
11-20	YMA	- Globalni položaj centra mase konstrukcije--koordinata y

Sa ovim je završeno unošenje podataka u slučaju ustaljenog strujanja oko krute konstrukcije (LL=1). Pri tome treba imati u vidu da se podaci iz grupe 5.8.8. ne unose ukoliko se ne želi odredjivanje opterećenja na konstrukciju (ISILE=0). U slučaju neustaljenog strujanja oko krute konstrukcije (LL=2), unosi se podatak o vremenu trajanja strujanja.

5.8.9. PODACI O TRAJANJU NEUSTALJENOG STRUJANJA FLUIDA (SLUČAJEVI LL=2 ILI LL=4)

1. Jedna kartica, FORMAT (F10.0, I5)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	UTIME	- Ukupno vreme trajanja neustaljenog strujanja fluida (u sekundama)
11-15	NDELTA	- Ukupan broj vremenskih intervala u kojima se vrši integracija jednačina

Sa ovim je završeno unošenje podataka u slučaju neustaljenog strujanja oko krute konstrukcije (LL=2).

U slučaju fleksibilne konstrukcije (LL=3 ILI LL=4), unose se podaci o konstrukciji.

5.8.10. PODACI O FLEKSIBILNOJ KONSTRUKCIJI (SLUČAJEVI LL=3 ILI LL=4)

1. Kontrolne informacije, FORMAT (2I5, F10.0)

Kolona	Promenljiva	Opis
1- 5	IVREME	- Indikator za način vremenske integracije jednačina kretanja konstrukcije: =1 - diferencni postupak =2 - Wilson θ postupak
6-10	IPOCET	- Indikator za početne uslove =0 - homogeni početni uslovi =1 - nehomogeni početni uslovi
11-20	UTIMEK	- Ukupni vremenski period razmatranja interakcije (u sekundama)

2. Dve kartice sa podacima o početnim uslovima konstrukcije (samo za nehomogene uslove, IPOCET=1), FORMAT (3F10.0)

a) Prva kartica sa početnim pomeranjem (u odnosu na centar mase u ravnotežnoj konfiguraciji)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	UØ(1)	- Početna translacija centra mase u pravcu x
11-20	UØ(2)	- Početna translacija centra mase u pravcu y
21-30	UØ(3)	- Početna rotacija centra mase oko ose z

b) Druga kartica sa početnim brzinama konstrukcije

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	BØ(1)	- Početna brzina translacije centra mase u pravcu ose x
11-20	BØ(2)	- Početna brzina translacije centra mase u pravcu ose y
21-30	BØ(3)	- Početna brzina rotacija centra mase oko ose z

3. Jedna kartica sa koordinatama centra krutosti (u odnosu na globalni koordinatni sistem), FORMAT (2F10.0)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	XKR	- x koordinata centra krutosti
11-20	YKR	- y - " -

4. Jedna kartica sa inercionim koeficijentima FORMAT (2F10.0)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	ZM	- Ekvivalentna masa konstrukcije (m^*)
11-20	ZI	- Ekvivalentan momenat inercije mase oko ose z (J^*_z)

5. Jedna kartica sa koeficijentima elstičnosti, FORMAT (3F10.0)

Kolona	Promenljiva	Opis
1-10	ZKX	- Ekvivalentna krutost za translaciju u pravcu ose x (k_x)

11-20 ZKY - Ekvivalentna krutost za translaciju u pravcu ose y (k_y)

21-30 ZKFI - Ekvivalentna krutost za rotaciju oko ose z u centru krutosti (k_ϕ)

Sa ovim je završeno unošenje svih ulaznih podataka.

5.9. Organizacija ulaza i izlaza i način prenošenja informacija kroz program

Svi ulazni podaci su smešteni u datoteku ULAZV.DAT na način prikazan u 5.8. Izlazni podaci se smeštaju u dve datoteke: IZLAZV.DAT i POMOCV.DAT. U prvoj datoteci su reprodukovane i obradjene ulazne informacije i dati su samo glavniji rezultati proračuna, na primer brzine i pritisci fluida tek posle ostvarene konvergencije u rešavanju nelinearnih jednačina. Datoteka POMOCV.DAT služi za registrovanje svih pomoćnih informacija (u cilju kontrole funkcionisanja programa), kao i svih željenih medjurezultata, na primer matrica odredjenog broja elemenata, dobijena rešenja u svakoj iteraciji itd.

Prenos informacija iz glavnog programa u podprograme, kao i iz jednog podprograma u drugi, obavlja se na razne (praktično sve) načine: preko liste argumenata, preko zajedničkih područja (COMMON BLOCKS) i preko jedinica spoljašnje memorije računara. Zbog racionalnijeg korišćenja memorije računara koristi se tzv. dinamičko dimenzionisanje praktično svih nizova. To znači da nisu eksplicitno definisane dimenzije pojedinih nizova, već se pojedine matrice i vektori smeštaju u jedan zajednički jednodimenzionalni niz (niz A(MTOT)). Pri tome su dimenzije pojedinih nizova problemski definisane, znači u zavisnosti od usvojene diskretizacije (broja čvornih tačaka, tipova elemenata itd.), dok se preko odgovarajućih registara (N1 do N35) definiše koji deo zajedničkog (globalnog) vektora zauzima neki posmatrani niz. U glavnom programu je definisana ukupna dužina tog globalnog vektora (MTOT) i posle unošenja pojedinačnih nizova u taj zajednički vektor, pozivanjem podprograma ERROR se proverava da li je prekoračena definisana dužina MTOT. Ovaj globalni vektor je definisan kao jedno od zajedničkih područja (COMMON) u glavnom programu i odgovarajućim podprogramima. Osim ovog neimenovanog zajedničkog područja koristi se još osam imenovanih zajedničkih područja (COMMON BLOCKS), kao i trinaest definisanih jedinica spoljašnje memorije (DISK).

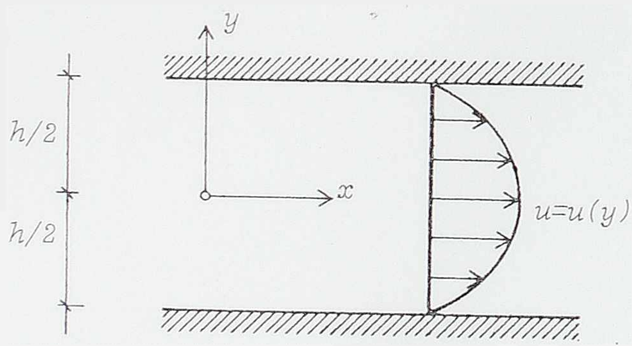
U svakom kompleksnijem programskom paketu, pa i u programu "VETAR", znatno je složeniji problem organizovanja odgovarajuće zajedničke celine programa, nego formulisanje samih algoritama za pojedinačna izračunavanja.

VI. NUMERIČKI PRIMERI

1. STRUJANJE FLUIDA IZMEDJU DVE PARALELNE PLOČE

1.1. Analitičko rešenje ustaljenog strujanja fluida izmedju dve paralelne ploče

Kao prvi primer se posmatra ustaljeno laminarno strujanje fluida izmedju dve beskonačne paralelne ploče, sl. 6.1.



Sl. 6.1. Strujanje fluida izmedju dve paralelne ploče

Strujanje fluida se odvija samo u pravcu ose x, tako da je $v = 0$, pa iz jednačine kontinuiteta

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.1}$$

sledi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{6.2}$$

odnosno

$$u = u(y) \tag{6.3}$$

jer je strujanje ustaljeno (nezavisno od vremena). Navier-Stokes-ove jednačine se svode samo na jednačinu u pravcu ose x u obliku

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6.4}$$

dok iz druge Navier-Stokes-ove jednačine sledi

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{odn.} \qquad p = p(x) \tag{6.5}$$

Kako su granični uslovi strujanja dati sa

$$u(y = \pm\frac{h}{2}) = 0 \tag{6.6}$$

to se integracijom jednačine (6.4) dolazi do rešenja u obliku:

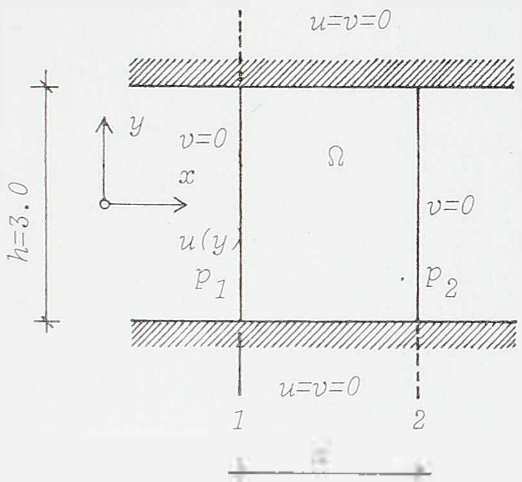
$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{6.7}$$

gde je $\mu=\rho\nu$ koeficijent dinamičke viskoznosti fluida. Znači, u ovom slučaju jednodimenzionog strujanja fluida izmedju dve paralelne ploče, brzine fluida su u svim presecima iste i menjaju se po paraboličnom zakonu, sa najvećom ordinatom u sredini izmedju ploča.

Ovo je klasičan i jedan od retkih primera integracije Navier-Stokes-ovih jednačina u zatvorenom obliku. Vidi se iz rešanja (6.7) da se za negativan gradijent pritiska strujanja odvija u pozitivnom smeru ose x, $u(y) > 0$, kao na sl. 6.1.

1.2. Numeričko rešenje ustaljenog strujanja fluida izmedju dve paralelne ploče

Razmatrani problem ustaljenog strujanja izmedju dve paralelne ploče je rešen korišćenjem programa "VETAR, iako u posmatranom primeru nema strujanja fluida oko konstrukcije. Na sl.6.2. je prikazan računski domen strujanja i granični uslovi.



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{a} = -0.25$$

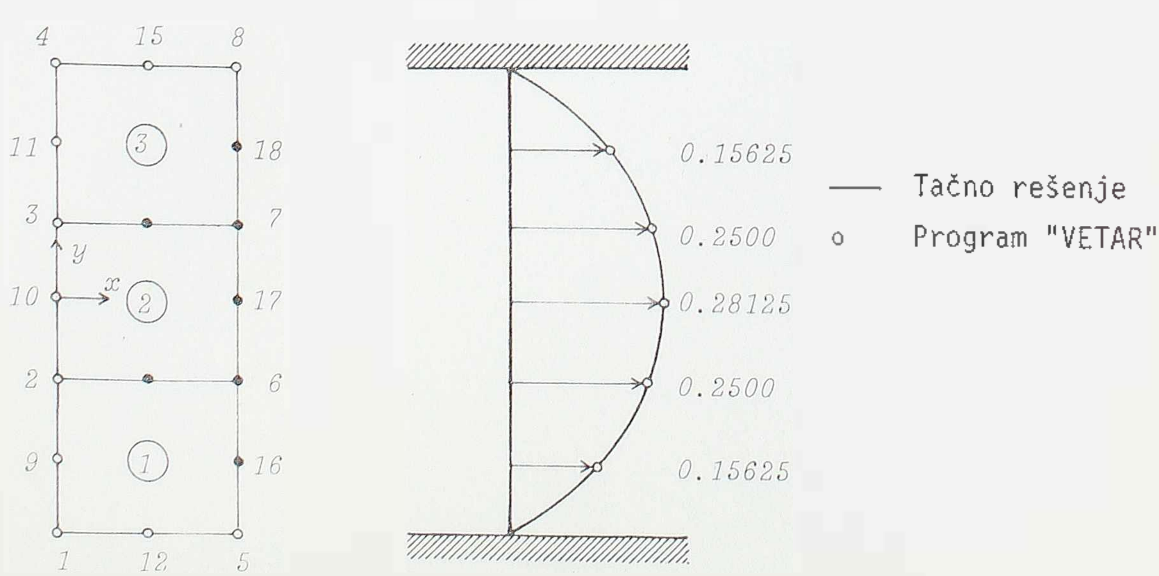
$\rho = 1.0 \quad \nu = 1.0$

$(\mu = \rho\nu = 1.0)$

Sl. 6.2. Računski domen strujanja i granični uslovi

U celoj razmatranoj oblasti su brzine v jednake nuli. Gradijent pritiska je definisan unošenjem zadatih pritisaka u presecima 1 i 2, a u preseku 1 su unete i vrednosti brzina u prema relaciji (6.7). Nepoznate su brzine u u preseku 2. Kao početne vrednosti brzina u i v u celoj oblasti su unete nulte vrednosti.

Prvo je formiran model sa tri parabolična elementa (tipa 3), pokazan na sl. 6.3. Čvorne tačke u kojima se odredjuju brzina u (nije zadato gra-



Sl. 6.3. Model sa tri parabolična elementa

ničnim uslovima) su prikazane zatamnjeno. Dobijene diskretne vrednosti brzina u čvornim tačkama se u potpunosti slažu sa analitičkim rešenjem (6.7). U nastavku se prikazuju ulazna i izlazna datoteka za razmatran primer.

```
** PRIMER 1: STRUJANJE IZMEDJU DVE PARALELNE PLOCE (3 ELEMENTA) **
 18      3     1     1     1    1Ø    Ø.1        1.Ø       1    Ø
 18      Ø     Ø     3     Ø     Ø
DEK
  1                                -1.5
  4                                 1.5
  5                      1.        -1.5
  8                      1.         1.5
  9                1               -1.
 11                1                1.
 12                1    Ø.5        -1.5
 15                1    Ø.5         1.5
 16                1    1.         -1.
 18                1    1.          1.
  3
  1     1.Ø        1.Ø
  1     1     5     6     2    12    16    13     9
  2     2     6     7     3    13    17    14    1Ø
  3     3     7     8     4    14    18    15    11
  1     2     3
  1     1     1     1                            1.
  2     1     1     1   Ø.25                     1.
  3     1     1     1   Ø.25                     1.
  4     1     1     1                            1.
  5     1     1     1                           .75
  6           1     1                            .75
  7           1     1                            Ø.75
  8     1     1     1                            Ø.75
  9     1     1       Ø.15625
 1Ø     1     1       Ø.28125
 11     1     1       Ø.15625
 12     1     1
 13           1
 14           1
 15     1     1
 16           1
 17           1
 18           1
  1
 18
```

```
**********************************************************************
**                                                                  **
**                   P R O G R A M     V E T A R                    **
**                   ===========================                    **
**                                                                  **
**                        (AUTOR: S. BRCIC)                         **
**                                                                  **
**              GRADJEVINSKI FAKULTET U BEOGRADU                    **
**         DATUM I VREME :    9-APR-87        13:11   5604          **
**                                                                  **
**********************************************************************




** PRIMER 1: STRUJANJE IZMEDJU DVE PARALELNE PLOCE (3 ELEMENTA) **
*************************************************************************


       K O N T R O L N E   I N F O R M A C I J E

          -BROJ CVORNIH TACAKA....................=   18
          -UKUPAN BROJ ELEMENATA..................=    3
          -BROJ TIPOVA ELEMENATA..................=    1
          -BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONST..........=    1
          -VRSTA ANALIZE..........................=    1
             .EQ.1....USTALJENO STRUJANJE
                      OKO NEPOKRETNE KONTURE
             .EQ.2....NEUSTALJENO STRUJANJE
                      OKO NEPOKRETNE KONTURE
             .EQ.3....USTALJENO STRUJANJE
                      OKO POKRETNE KONTURE
             .EQ.4....NEUSTALJENO STRUJANJE
                      OKO POKRETNE KONTURE
          -BROJ ITERACIJA ZA N.S. JEDNACINE.......=   10
          -TOLERANCIJA ZA KONVERGENCIJU...........= 0.10
          -FAKTOR RELAKSACIJE.....................= 1.00
          -RESAVANJE NELINEARNIH JEDNACINA........=    1
             .EQ.0....LINEARNE JEDNACINE
             .EQ.1....DIREKTNA ITERACIJA
             .EQ.2....NEWTON-RAPHSON
             .EQ.3....MODIFIKOVAN NEWTON
          -VREMENSKA INTEGRACIJA JEDNACINA........=    0
             .EQ.1....PREDIKTOR-KOREKTOR
             .EQ.2....WILSON-THETA


             INFORMACIJE O GRANICNIM USLOVIMA
             ================================

          BROJ CVOROVA NA KONTURI G1..............=   18
            (ESENCIJALNI GRAN. USLOVI)
          BROJ CVOROVA NA KONTURI G2..............=    0
            (PRIRODNI GRANICNI USLOVI)
          BROJ CVOROVA NA KONTURI G3..............=    0
            (KONTAKT SA KONSTRUKCIJOM)
          BROJ ELEMENATA NA KONTURI G1............=    3
          BROJ ELEMENATA NA KONTURI G2............=    0
          BROJ ELEMENATA NA KONTURI G3............=    0
```

P O D A C I   O   C V O R N I M   T A C K A M A

ULAZNI PODACI O CVOROVIMA

CVOR BROJ	STEP.SLOBODE U	STEP.SLOBODE V	STEP.SLOBODE P	POLARNE KOORDINATE RO	POLARNE KOORDINATE FI	KN	DEKARTOVE KOORDINATE X	DEKARTOVE KOORDINATE Y	KN
1	0	0	0				0.0000	-1.5000	1
4	0	0	0				0.0000	1.5000	1
5	0	0	0				1.0000	-1.5000	1
8	0	0	0				1.0000	1.5000	1
9	0	0	1				0.0000	-1.0000	1
11	0	0	1				0.0000	1.0000	1
12	0	0	1				0.5000	-1.5000	1
15	0	0	1				0.5000	1.5000	1
16	0	0	1				1.0000	-1.0000	1
18	0	0	1				1.0000	1.0000	1

GENERISANI PODACI O CVOROVIMA

CVOR BROJ	STEP.SLOBODE U	STEP.SLOBODE V	STEP.SLOBODE P	POLARNE KOORDINATE RO	POLARNE KOORDINATE FI	DEKARTOVE KOORDINATE X	DEKARTOVE KOORDINATE Y
1	0	0	0			0.0000	-1.5000
2	0	0	0			0.0000	-0.5000
3	0	0	0			0.0000	0.5000
4	0	0	0			0.0000	1.5000
5	0	0	0			1.0000	-1.5000
6	0	0	0			1.0000	-0.5000
7	0	0	0			1.0000	0.5000
8	0	0	0			1.0000	1.5000
9	0	0	1			0.0000	-1.0000
10	0	0	1			0.0000	0.0000
11	0	0	1			0.0000	1.0000
12	0	0	1			0.5000	-1.5000
13	0	0	1			0.5000	-0.5000
14	0	0	1			0.5000	0.5000
15	0	0	1			0.5000	1.5000
16	0	0	1			1.0000	-1.0000
17	0	0	1			1.0000	0.0000
18	0	0	1			1.0000	1.0000

UKUPAN BROJ JEDNACINA = 44

OD TOGA JE NEPOZNATO:
- CVORNIH BRZINA : 36
- CVORNIH PRITISAKA: 8

P O D A C I   O   E L E M E N T I M A

PARABOLICNI ELEMENT

OZNAKA TIPA ELEMENTA..................= 3
UKUPAN BROJ ELEMENATA U GRUPI.........= 3
BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONSTANATA....= 1
BROJ CVORNIH TACAKA ELEMENTA..........= 8
BROJ STEPENI SLOBODE ELEMENTA.........= 20

MATERIJALNE KONSTANTE

BROJ GRUPE	GUSTINA MASE	KINEMATICKA VISKOZNOST
1	1.0000	0.1000E+01

DEFINISANJE ELEMENATA

ELEMENT BROJ	LOKALNI CVOROVI ELEMENTA 1	2	3	4	5	6	7	8	BROJ GRUPE MAT.KONST.
1	1	5	6	2	12	16	13	9	1
2	2	6	7	3	13	17	14	10	1
3	3	7	8	4	14	18	15	11	1

BROJEVI JEDNACINA CVOR	U	V	P	BR.STEPENI SLOB.CVORA
1	1	2	17	3
2	7	8	20	3
3	23	24	32	3
4	35	36	44	3
5	3	4	18	3
6	5	6	19	3
7	21	22	31	3
8	33	34	43	3
9	15	16	0	2
10	29	30	0	2
11	41	42	0	2
12	9	10	0	2
13	13	14	0	2
14	27	28	0	2
15	39	40	0	2
16	11	12	0	2
17	25	26	0	2
18	37	38	0	2

UKUPAN BROJ JEDNACINA JE 44

ELEMENTI SPOLJASNJE KONTURE (KONTURA G1):

1 2 3

G R A N I C N I   I   P O C E T N I   U S L O V I

SPOLJASNJA KONTURA G1 - ESENCIJALNI USLOVI

CVOR N	1=ZADAT USLOV; 0=NIJE ZADAT U	V	P	VREDNOST GRANICNIH USLOVA U	V	P
1	1	1	1	0.000	0.000	1.000
2	1	1	1	0.250	0.000	1.000
3	1	1	1	0.250	0.000	1.000
4	1	1	1	0.000	0.000	1.000
5	1	1	1	0.000	0.000	0.750
6	1	1	1	0.000	0.000	0.750
7	1	1	1	0.000	0.000	0.750
8	1	1	1	0.000	0.000	0.750
9	1	1	0	0.156	0.000	0.000
10	1	1	0	0.281	0.000	0.000
11	1	1	0	0.156	0.000	0.000
12	1	1	0	0.000	0.000	0.000
13	1	1	0	0.000	0.000	0.000
14	1	1	0	0.000	0.000	0.000
15	1	1	0	0.000	0.000	0.000
16	1	1	0	0.000	0.000	0.000
17	1	1	0	0.000	0.000	0.000
18	1	1	0	0.000	0.000	0.000

SPECIFICIRANI GRANICNI USLOVI

JEDNACINA BROJ	INDIKATOR NIZ NCOD	GRAN.USLOV VEKTOR BC
1	1	0.000
2	1	0.000
3	1	0.000
4	1	0.000
6	1	0.000
7	1	0.250
8	1	0.000
9	1	0.000
10	1	0.000
12	1	0.000
14	1	0.000
15	1	0.156
16	1	0.000
17	1	1.000
18	1	0.752
19	1	0.750
20	1	1.000
22	1	0.000
23	1	0.256
24	1	0.000
26	1	0.000
28	1	0.000
29	1	0.281
30	1	0.000
31	1	0.750
32	1	1.000
33	1	0.000
34	1	0.000
35	1	0.000

36	1	0.000
38	1	0.000
39	1	0.000
40	1	0.000
41	1	0.156
42	1	0.000
43	1	0.750
44	1	1.000

REFERENTNI PRITISAK
JE ZADAT U CVORU BROJ 8
(JEDNACINA BROJ: 43)

UKUPAN BROJ JEDNACINA JE : 44

OD TOGA JE ZADATO :
ESENCIJALNIM USLOVIMA
NA KONTURI G1 - 37
NA KONTURI G3 - 0

UKUPNO ZADATO - 37

PREOSTAJE NEPOZNATIH : 7

ZADATI POCETNI USLOVI PO BRZINAMA
****

CVOR:	BRZINA U	BRZINA V	KN
1	0.00000	0.00000	0
18	0.00000	0.00000	0

GENERISANI POCETNI USLOVI
****

CVOR:	BRZINA U	BRZINA V	KN
1	0.00000	0.00000	
2	0.00000	0.00000	
3	0.00000	0.00000	
4	0.00000	0.00000	
5	0.00000	0.00000	
6	-0.00000	0.00000	
7	0.00000	0.00000	
8	0.00000	0.00000	
9	0.00000	0.00000	
10	0.00000	0.00000	
11	0.00000	0.00000	
12	0.00000	0.00000	
13	0.00000	0.00000	
14	0.00000	0.00000	
15	0.00000	0.00000	
16	0.00000	0.00000	
17	0.00000	0.00000	
18	0.00000	0.00000	

SVI ELEMENTI VEKTORA F1
SU JEDNAKI NULI

USTALJENO STRUJANJE OKO KRUTE KONSTRUKCIJE
****

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
======================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = 1.00

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 2

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.250000E+00	0.000000E+00
3	0.250000E+00	0.000000E+00
4	0.000000E+00	0.000000E+00
5	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.250000E+00	0.000000E+00
7	0.250000E+00	0.000000E+00
8	0.000000E+00	0.000000E+00
9	0.156250E+00	0.000000E+00
10	0.281250E+00	0.000000E+00
11	0.156250E+00	0.000000E+00
12	0.000000E+00	0.000000E+00
13	0.250000E+00	0.000000E+00
14	0.250000E+00	0.000000E+00
15	0.000000E+00	0.000000E+00
16	0.156250E+00	0.000000E+00
17	0.281250E+00	0.000000E+00
18	0.156250E+00	0.000000E+00

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	0.100000E+01
2	0.100000E+01
3	0.100000E+01
4	0.100000E+01
5	0.750000E+00
6	0.750000E+00
7	0.750000E+00
8	0.750000E+00

V R E M E   P R O R A C U N A   U   S E C

ZA PROBLEM:

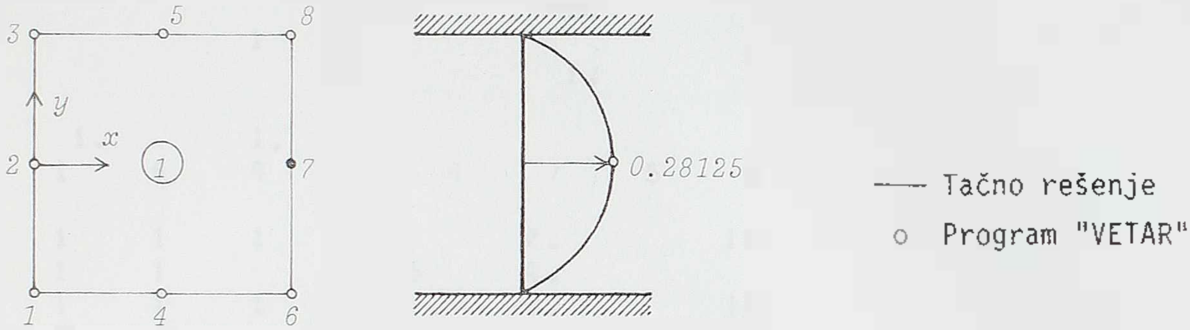
*** PRIMER 1: STRUJANJE IZMEDJU DVE PARALELNE PLOCE (3 ELEMENTA) **

VREME UTROSENO ZA:

-ULAZ PODATAKA O CVORNIM TACKAMA	=	0.30
-ULAZ PODATAKA O ELEMENTIMA	=	0.89
-FORMIRANJE MATRICA ELEMENATA	=	5.74
-USTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA	=	16.46
-NEUSTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA	=	0.00
-USTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA	=	0.00
-NEUSTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA	=	0.00

U K U P N O   U T R O S E N O   V R E M E   J E   23.39   S E C

Isti primer strujanja fluida izmedju dve paralelne ploče je rešen i samo sa jednim paraboličnim elementom, sl. 6.4, kod koga je nepoznata samo brzina u čvoru 7. Dobijeno rešenje se u potpunosti poklapa sa analitičkim.



Sl. 6.4. Model sa jednim paraboličnim elementom

U nastavku se prikazuju ulazna i izlazna datoteka i za ovaj primer sa jednim elementom. Razmatrano ustaljeno strujanje izmedju dve paralelne ploče nikako nije reprezentativan primer u problemu interakcije fluida i konstrukcije, jer je to u suštini jednodimenzionalan zadatak bez nelinearnih članova (konvektivna ubrzanja su jednaka nuli). Medjutim, zbog svoje jednostavnosti, malog broja nepoznatih i poznatog analitičkog rešenja, ovaj primer je i posmatran samo kao delimična kontrola funkcionisanja programa "VETAR".

```
*** PRIMER 1: STRUJANJE IZMEDJU DVE PARALELNE PLOCE (1 ELEMENT) ***
  6     1     1     1     1     5    0.1        1.0        1     0
  8     0     0     1     0     0
DEK
  1     0     0     0     0.              -1.
  2                 1     0.
  3                                        1.
  4                 1     1.              -1.
  5                 1     1.               1.
  6                       2.              -1.
  7                 1     2.
  8                       2.               1.
  3
  1      1.         1.
  1     1     6     8     3     4     7     5     2
  1
  1     1     1     1     0.5         0.         1.
  2     1     1           0.125       0.
  3     1     1     1     0.          0.         1.
  4     1     1
  5     1     1
  6     1     1     1     0.          0.          0.5
  7           1
  8     1     1     1                             0.5
  1
  8
```

```
*****************************************************************
**                                                             **
**              P R O G R A M     V E T A R                    **
**              ==========================                     **
**                                                             **
**                    (AUTOR: S. BRCIC)                        **
**                                                             **
**          GRADJEVINSKI FAKULTET U BEOGRADU                   **
**      DATUM I VREME :   9-APR-87      13:07  18.9            **
**                                                             **
*****************************************************************
```

```
*** PRIMER 1: STRUJANJE IZMEDJU DVE PARALELNE PLOCE (1 ELEMENT) ***
************************************************************************
```

```
K O N T R O L N E   I N F O R M A C I J E

  -BROJ CVORNIH TACAKA.....................=     8
  -UKUPAN BROJ ELEMENATA...................=     1
  -BROJ TIPOVA ELEMENATA...................=     1
  -BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONST...........=     1
  -VRSTA ANALIZE...........................=     1
     .EQ.1....USTALJENO STRUJANJE
              OKO NEPOKRETNE KONTURE
     .EQ.2....NEUSTALJENO STRUJANJE
              OKO NEPOKRETNE KONTURE
     .EQ.3....USTALJENO STRUJANJE
              OKO POKRETNE KONTURE
     .EQ.4....NEUSTALJENO STRUJANJE
              OKO POKRETNE KONTURE
  -BROJ ITERACIJA ZA N.S. JEDNACINE........=     5
  -TOLERANCIJA ZA KONVERGENCIJU............= 0.10
  -FAKTOR RELAKSACIJE......................= 1.00
  -RESAVANJE NELINEARNIH JEDNACINA.........=     1
     .EQ.0....LINEARNE JEDNACINE
     .EQ.1....DIREKTNA ITERACIJA
     .EQ.2....NEWTON-RAPHSON
     .EQ.3....MODIFIKOVAN NEWTON
  -VREMENSKA INTEGRACIJA JEDNACINA.........=     0
     .EQ.1....PREDIKTOR-KOREKTOR
     .EQ.2....WILSON-THETA


    INFORMACIJE O GRANICNIM USLOVIMA
    ================================

  BROJ CVOROVA NA KONTURI G1...............=     8
    (ESENCIJALNI GRAN. USLOVI)
  BROJ CVOROVA NA KONTURI G2...............=     0
    (PRIRODNI GRANICNI USLOVI)
  BROJ CVOROVA NA KONTURI G3...............=     0
    (KONTAKT SA KONSTRUKCIJOM)
  BROJ ELEMENATA NA KONTURI G1.............=     1
  BROJ ELEMENATA NA KONTURI G2.............=     0
  BROJ ELEMENATA NA KONTURI G3.............=     0
```

P O D A C I   O   C V O R N I M   T A C K A M A

ULAZNI PODACI O CVOROVIMA

CVOR BROJ	STEP.SLOBODE U	V	P	POLARNE KOORDINATE RO	FI	KN	DEKARTOVE KOORDINATE X	Y	KN
1	0	0	0				0.0000	-1.0000	1
2	0	0	1				0.0000	0.0000	1
3	0	0	0				0.0000	1.0000	1
4	0	0	1				1.0000	-1.0000	1
5	0	0	1				1.0000	1.0000	1
6	0	0	0				2.0000	-1.0000	1
7	0	0	1				2.0000	0.0000	1
8	0	0	0				2.0000	1.0000	1

GENERISANI PODACI O CVOROVIMA

CVOR BROJ	STEP.SLOBODE U	V	P	POLARNE KOORDINATE RO	FI	DEKARTOVE KOORDINATE X	Y
1	0	0	0			0.0000	-1.0000
2	0	0	1			0.0000	0.0000
3	0	0	0			0.0000	1.0000
4	0	0	1			1.0000	-1.0000
5	0	0	1			1.0000	1.0000
6	0	0	0			2.0000	-1.0000
7	0	0	1			2.0000	0.0000
8	0	0	0			2.0000	1.0000

UKUPAN BROJ JEDNACINA = 20

OD TOGA JE NEPOZNATO:
- -CVORNIH BRZINA : 16
- -CVORNIH PRITISAKA: 4

P O D A C I   O   E L E M E N T I M A

PARABOLICNI ELEMENT

```
OZNAKA TIPA ELEMENTA.....................=    3
UKUPAN BROJ ELEMENATA U GRUPI............=    1
BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONSTANATA.......=    1
BROJ CVORNIH TACAKA ELEMENTA.............=    8
BROJ STEPENI SLOBODE ELEMENTA............=   20
```

MATERIJALNE KONSTANTE

BROJ GRUPE	GUSTINA MASE	KINEMATICKA VISKOZNOST
1	1.0000	0.1000E+01

DEFINISANJE ELEMENATA

ELEMENT BROJ	LOKALNI CVOROVI ELEMENTA 1	2	3	4	5	6	7	8	BROJ GRUPE MAT.KONST.
1	1	6	8	3	4	7	5	2	1

CVOR	BROJEVI JEDNACINA U	V	P	BR.STEPENI SLOB.CVORA
1	1	2	17	3
2	15	16	0	2
3	7	8	20	3
4	9	10	0	2
5	13	14	0	2
6	3	4	18	3
7	11	12	0	2
8	5	6	19	3

UKUPAN BROJ JEDNACINA JE   20

ELEMENTI SPOLJASNJE KONTURE (KONTURA G1):

1

G R A N I C N I   I   P O C E T N I   U S L O V I

SPOLJASNJA KONTURA G1 - ESENCIJALNI USLOVI

CVOR N	1=ZADAT USLOV; 0=NIJE ZADAT U	V	P	VREDNOST GRANICNIH USLOVA U	V	P
1	1	1	1	0.000	0.000	1.000
2	1	1	0	0.125	0.000	0.000
3	1	1	1	0.000	0.000	1.000
4	1	1	0	0.000	0.000	0.000
5	1	1	0	0.000	0.000	0.000
6	1	1	1	0.000	0.000	0.000
7	0	1	0	0.000	0.000	0.500
8	1	1	1	0.000	0.000	0.500

SPECIFICIRANI GRANICNI USLOVI

JEDNACINA BROJ	INDIKATOR NIZ NCOO	GRAN.USLOV VEKTOR BC
1	1	0.000
2	1	0.000
3	1	0.000
4	1	0.000
5	1	0.000
6	1	0.000
7	1	0.000
8	1	0.000
9	1	0.000
10	1	0.000
12	1	0.000
13	1	0.000
14	1	0.000
15	1	0.125
16	1	0.000
17	1	1.000
18	1	0.500
19	1	0.500
20	1	1.000

REFERENTNI PRITISAK
JE ZADAT U CVORU BROJ 8
(JEDNACINA BROJ: 19)

UKUPAN BROJ JEDNACINA JE : 20

OD TOGA JE ZADATO :
ESENCIJALNIM USLOVIMA
NA KONTURI G1 - 19
NA KONTURI G3 - 0

UKUPNO ZADATO - 19

PREOSTAJE NEPOZNATIH : 1

ZADATI POCETNI USLOVI PO BRZINAMA
****

CVOR:	BRZINA U	BRZINA V	KN
1	0.00000	0.00000	0
8	0.00000	0.00000	0

GENERISANI POCETNI USLOVI
****

CVOR:	BRZINA U	BRZINA V	KN
1	0.00000	0.00000	
2	0.00000	0.00000	
3	0.00000	0.00000	
4	0.00000	0.00000	
5	0.00000	0.00000	
6	0.00000	0.00000	
7	0.00000	0.00000	
8	0.00000	0.00000	

SVI ELEMENTI VEKTORA R1
SU JEDNAKI NULI

USTALJENO STRUJANJE OKO KRUTE KONSTRUKCIJE
****

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
====================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = 1.00

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 2

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.125000E+00	0.64[illegible]000E+00
3	0.000000E+00	0.6[illegible]0000E+00
4	0.000000E+00	0.000000E+00
5	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	0.000000E+00
7	0.125000E+00	0.000000E+00
8	0.000000E+00	0.000000E+00

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	0.100000E+01
3	0.100000E+01
6	0.500000E+00
8	0.500000E+00

V R E M E   P R O R A C U N A   U   S E C

ZA PROBLEM:

*** PRIMER 1: STRUJANJE IZMEDJU DVE PARALELNE PLOCE (1 ELEMENT) ***
===

VREME UTROSENO ZA:

-ULAZ PODATAKA O CVORNIM TACKAMA	=	0.22
-ULAZ PODATAKA O ELEMENTIMA	=	0.70
-FORMIRANJE MATRICA ELEMENATA	=	2.39
-USTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA	=	5.89
-NEUSTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA	=	0.00
-USTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA	=	0.00
-NEUSTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA	=	0.00

U K U P N O   U T R O S E N O   V R E M E   J E   9.22   S E C

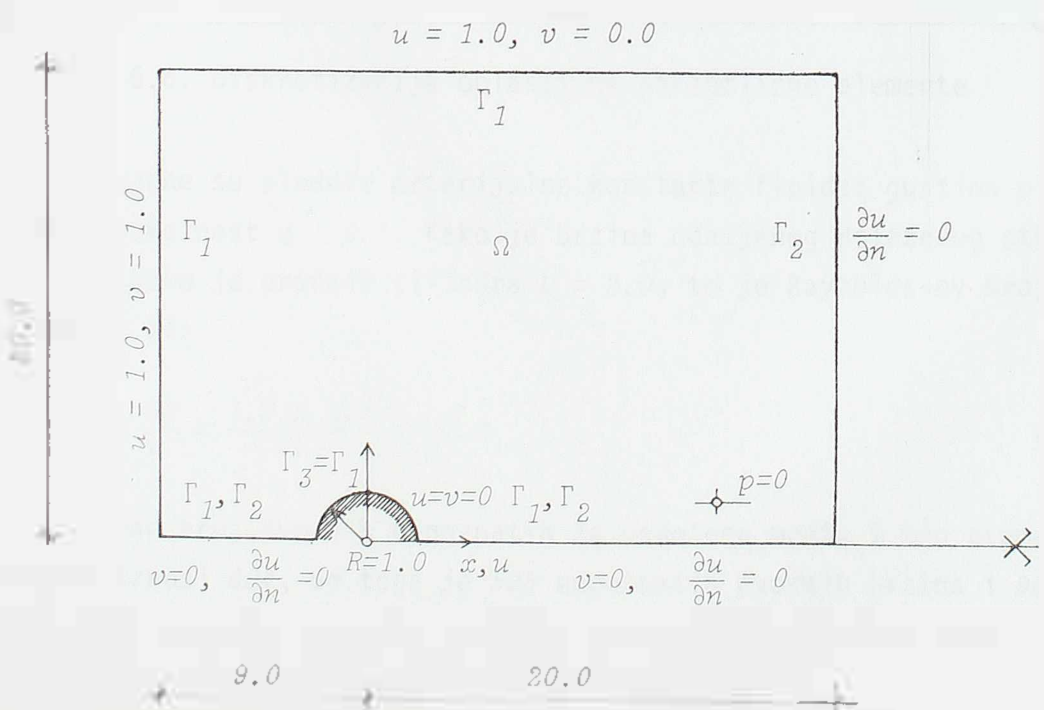
2. STRUJANJE FLUIDA OKO KRUTOG KRUŽNOG CILINDRA

2.1. Uvodne napomene

Drugi primer koji se razmatra je laminarno strujanje oko krutog cilindra. Obzirom da je strujanje fluida oko dugačkog kružnog cilindra izučavano od strane mnogih istraživača, kako eksperimentalno, tako i numerički, ovaj problem se razmatra kao dalja verifikacija i kontrola funkcionisanja programa "VETAR". Pri tome je ovaj primer znatno kompletnija kontrola programa nego slučaj strujanja izmedju dve paralelne ploče, jer je problem dvodimenzionalan i formiraju se i rešavaju kompletne jednačine ustaljenog strujanja oko krute konstrukcije. Da bi kontrolisanje programa "VETAR" bilo što potpunije, barem u nekim od mogućnosti programa, razmatra se isti primer koji je prikazan u knjizi |I.2.1.|.

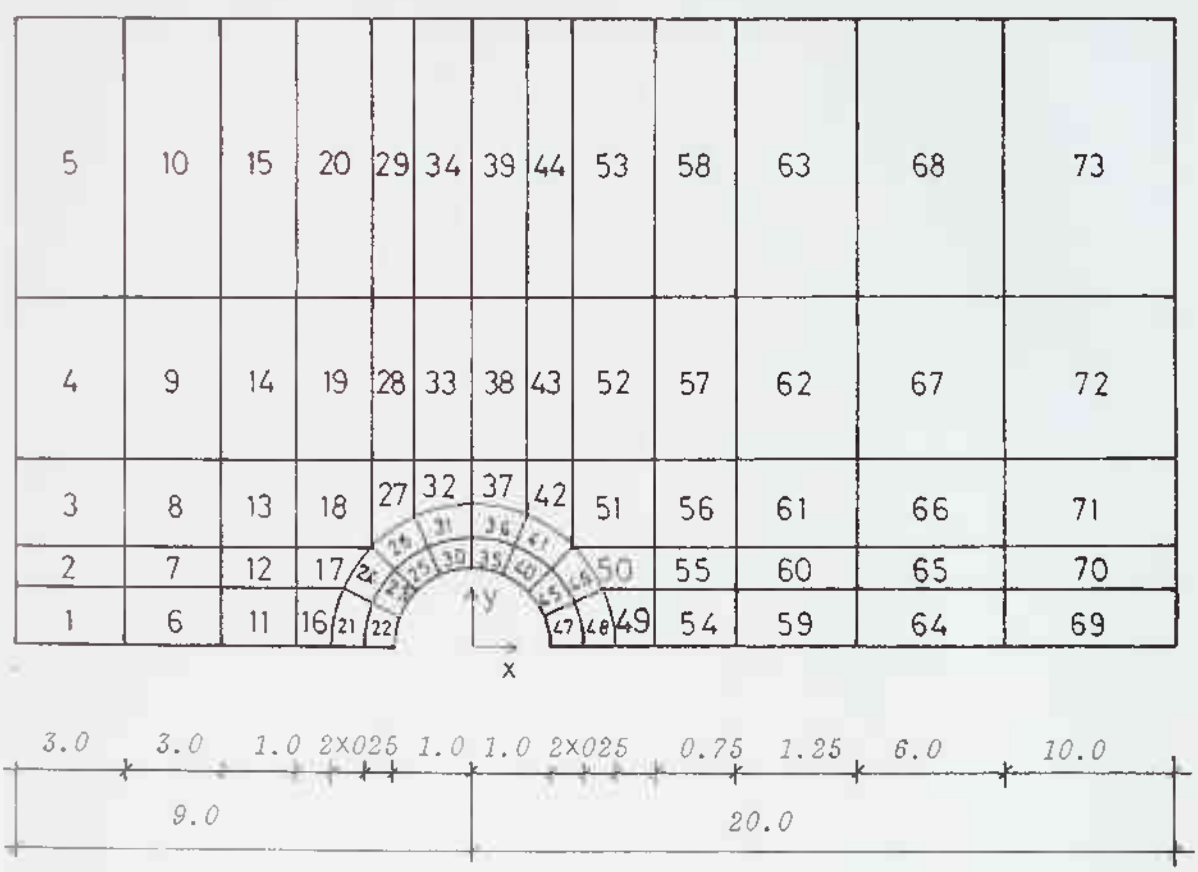
2.2. Računski model ustaljenog strujanja oko krutog kružnog cilindra

Kako se razmatra opstrujavanje fluida oko kružnog cilindra pri malim brzinama strujanja (laminaran režim strujanja), to se, zbog simetrije, posmatra samo jedna polovina. Na sl. 6.5 je prikazana razmatrana oblast strujanja sa graničnim uslovima.



Sl. 6.5. Oblast ustaljenog strujanja fluida oko krutog cilindra i granični uslovi

Oblast strujanja i granični uslovi su usvojeni isti kao u knjizi |I.2.1|, a takodje je izvršena i ista diskretizacija oblasti Ω na 73 parabolična elementa (elementi tipa 3), sa 264 čvornih tačaka, sl. 6.6. Mreža konačnih elemenata prikazana na sl. 6.6 je, zbog bolje preglednosti, nacrtana u deformisanoj razmeri.



Sl. 6.6. Diskretizacija oblasti na parabolične elemente

Usvojene su sledeće materijalne konstante fluida: gustina $\rho = 1.0$ i kinematička viskoznost $\nu = 0.1$. Kako je brzina udaljenog dolazećeg strujanja jednaka 1.0 i kako je prečnik cilindra $D = 2.0$, to je Raynolds-ov broj u ovom slučaju jednak 20:

$$R_e = \frac{UD}{\nu} = \frac{1.0 \times 2.0}{0.1} = 20.0 \tag{6.8}$$

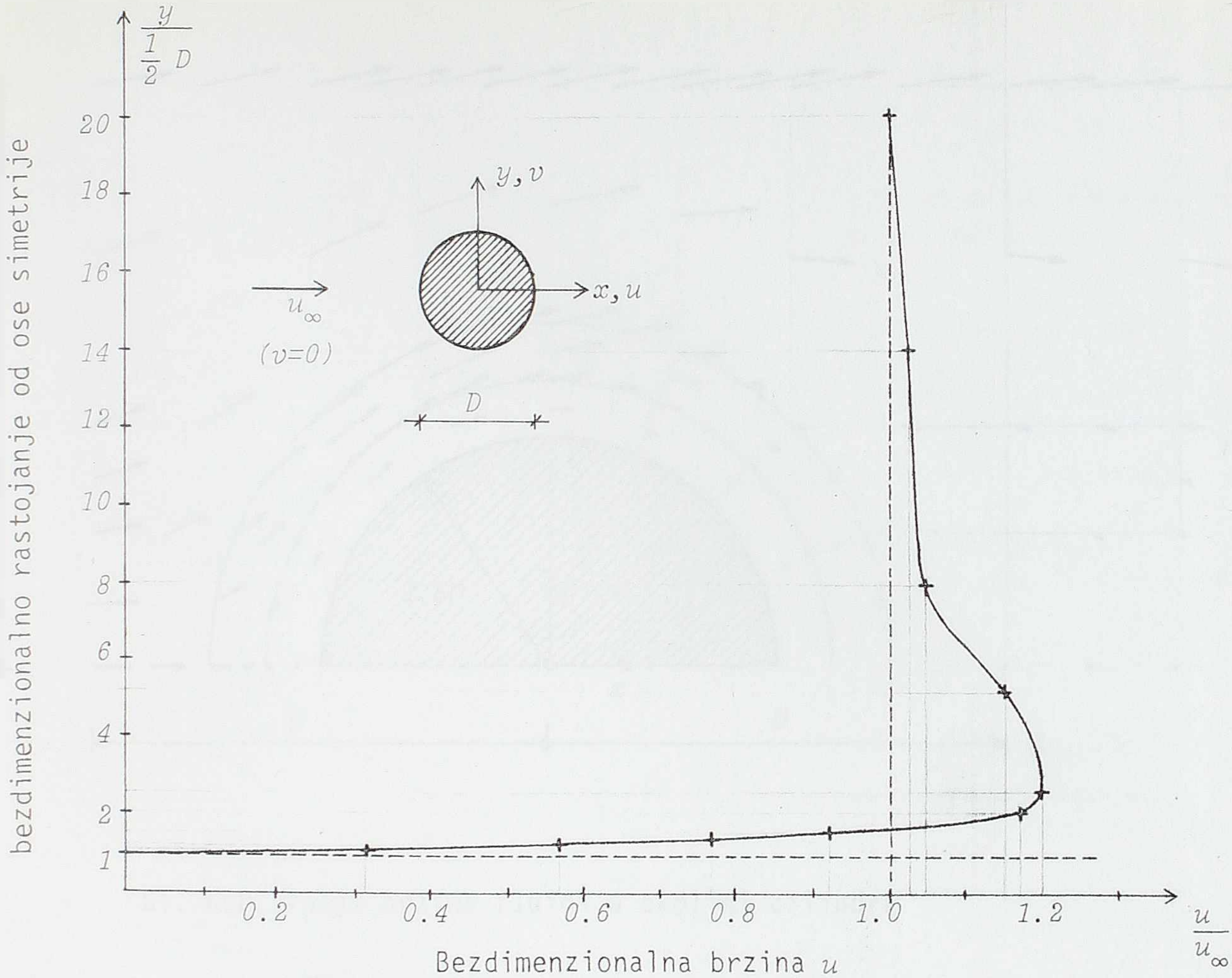
Ukupan broj čvornih nepoznatih za usvojenu mrežu i tip elemenata u ovom primeru iznosi *624*, od toga je *528* nepoznatih čvornih brzina i *96* čvornih pritisaka. Kada se uzmu u obzir i zadati esencijalni granični uslovi, preostaje ukupno *490* nepoznatih čvornih brzina i pritisaka.

2.3. Prikaz nekih dobijenih rezultata

Kao što je rečeno, ovaj primer ustaljenog strujanja oko krutog kružnog cilindra je radjen prevashodno zbog kontrole funkcionisanja programa "VETAR". U pomenutoj knjizi |I.2.1|, "Finite Element Programming of the Navier Stokes Equations", dat je i listing programa za rešavanje Navier-Stokes-ovih jednačina u slučaju ustaljenog strujanja, a takodje i ulazna datoteka i delimična izlazna datoteka za primer na sl. 6.6 (što je i osnovni primer razmatran u toj knjizi). Programi su implementirani na računar Gradjevinskog fakulteta u Beogradu i korišćeni su za komparativnu analizu sa programom "VETAR".

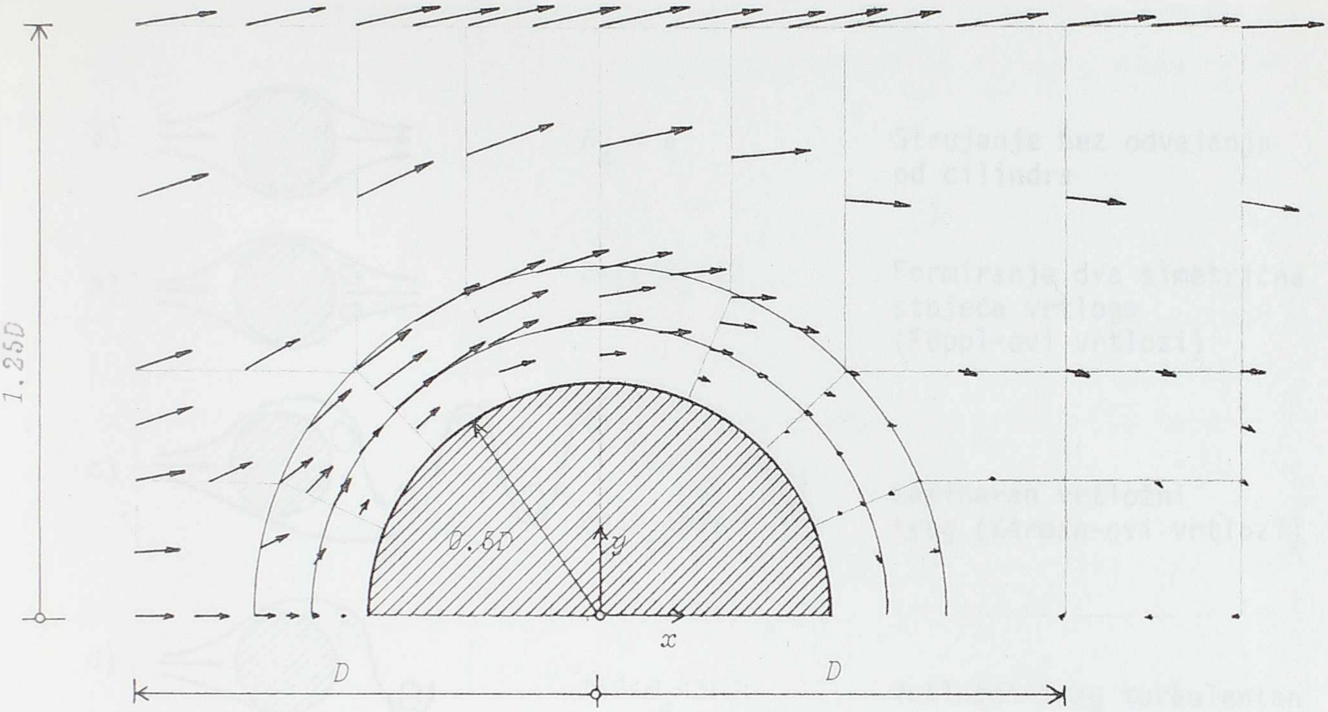
Alternativnim rešavanjem primera sa sl.6.6. pomoću programa "VETAR" i pomoću programa preuzetih iz knjige |I.2.1| dobijaju se isti rezultati. Zbog velikog obima se ne prilažu dobijeni rezultati u obliku izlazne datoteke. Kao orjentacija, konvergentno rešenje se dobija posle četvrte iteracije u rešavanju nelinearnih jednačina sukcesivnom zamenom, uz utrošak vremena rada centralnog procesora od oko 35 minuta. Pri tome, kao ilustracija numeričke osetljivosti samih jednačina, ako se kao početne vrednosti brzina u celoj oblasti strujanja, pomoću kojih se izračunavaju konvektivni članovi, unesu nulte vrednosti, to znači da ako se na početku zanemare matrice konvektivnih ubrzanja u jednačinama, uopšte se ne dobija konvergentno rešenje - posle svake iteracije je divergencija sve veća. Potpuno zanemarivanje kovektivnih ubrzanja je "drastičan" primer lošeg započinjanja rešavanja nelinearnih jednačina. U razmatranom primeru kružnog cilindra, ako se za početne vrednosti brzina, sa kojima se već u prvoj iteraciji formiraju matrice konvektivnih ubrzanja, unesu vrednosti koje se od konačnih (tačnih) vrednosti razlikuju za više od nekoliko procenata, dolazi do divergencije. Znači, potrebno je da se unapred prilično precizno poznaje početno polje brzina fluida, dok se, kao što je rečeno, samo u jednoj čvornoj tački oblasti zadaje referentan pritisak kao esencijalan granični uslov. Pri tome se odmah posle prve iteracije rešavanja jednačina dolazi i do polja pritisaka fluida i do korigovanog polja brzina. U narednim iteracijama se madjusobno uskladjuju i brzine i pritisci do konačne konvergencije.

Kao ilustracija nekih od dobijenih rezultata, na sl. 6.7. se prikazuje konačan profil brzina u (u pravcu strujanja) u preseku $x = 0$.

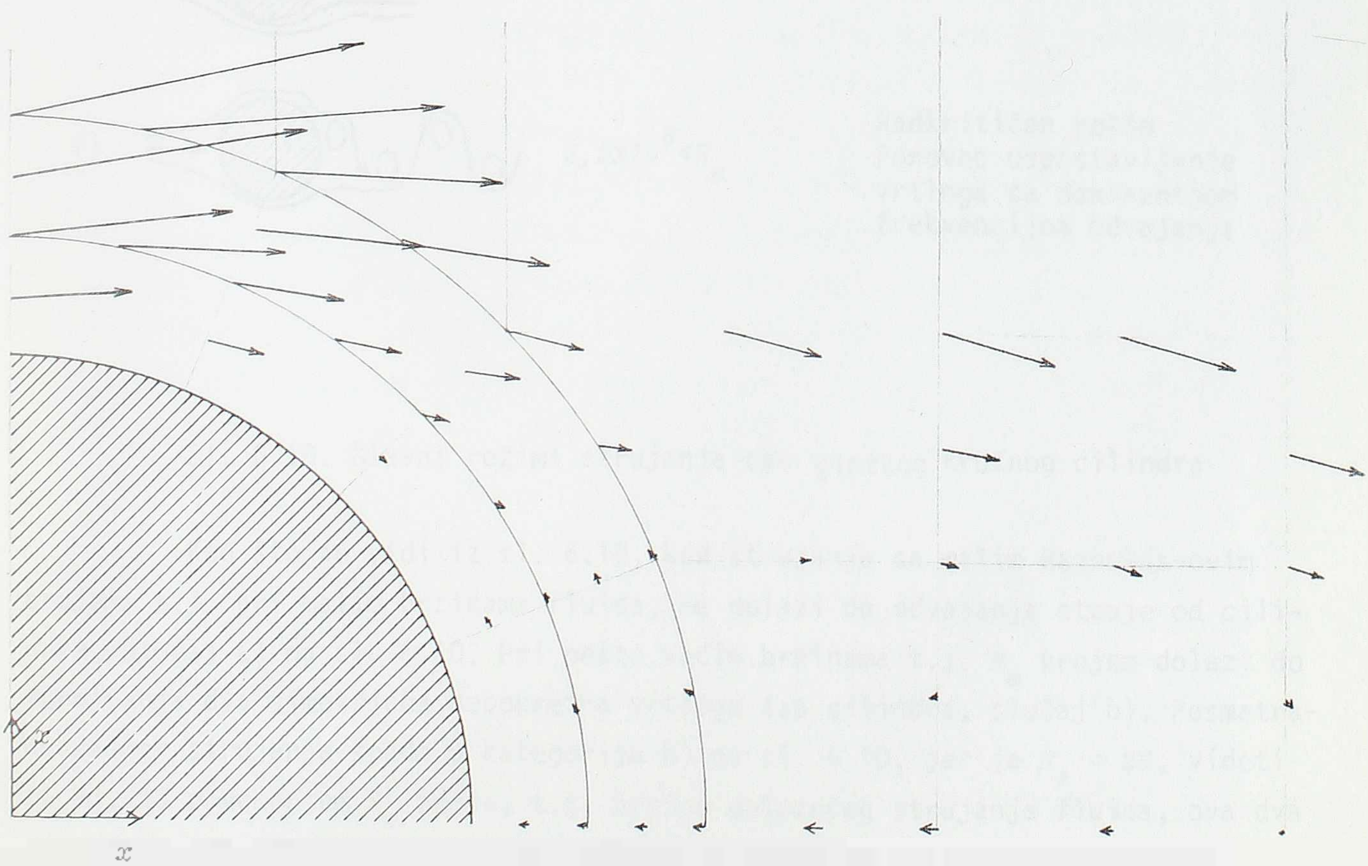


Sl. 6.7. Profil brzina u u preseku $x = 0$

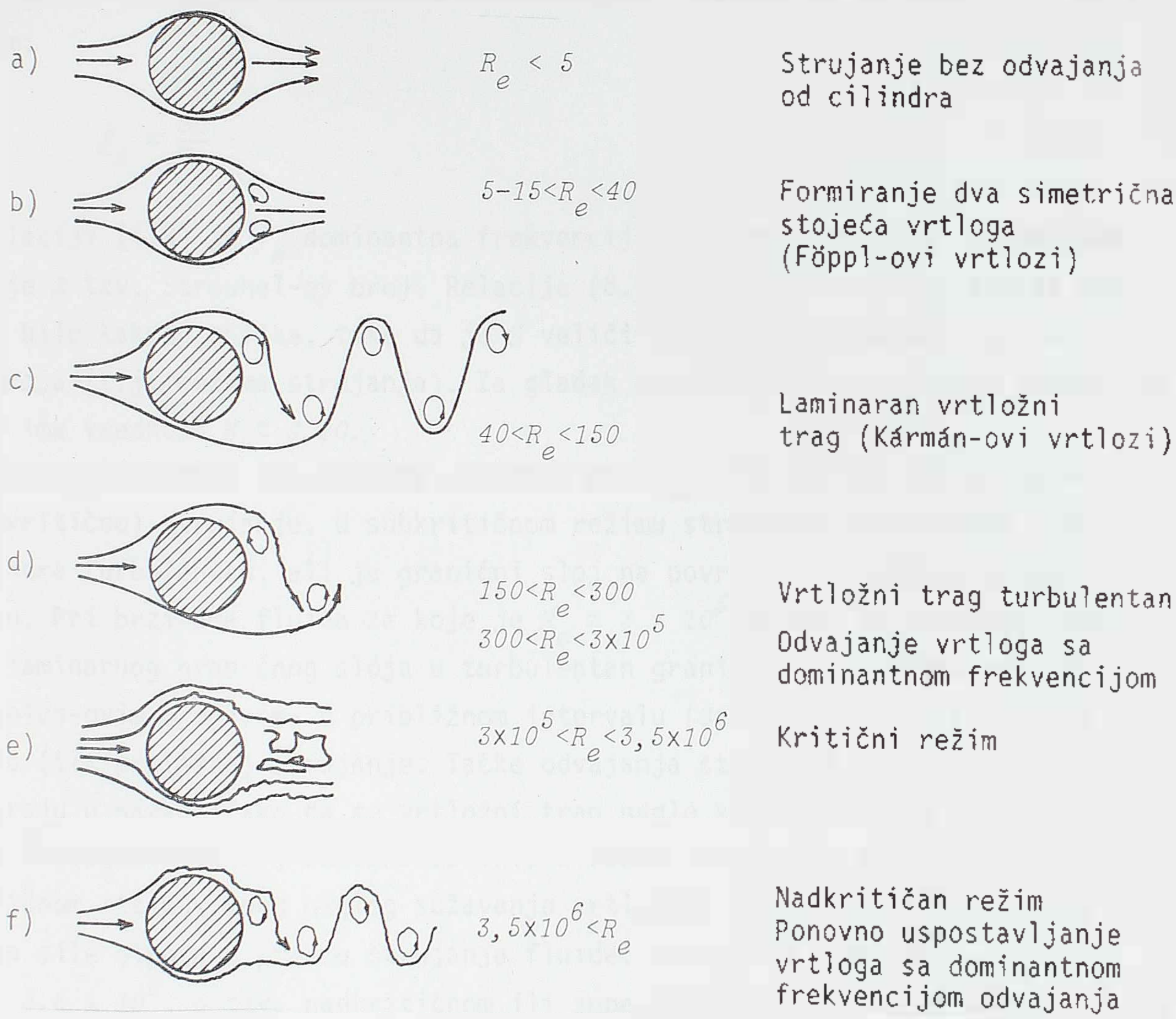
Na sl. 6.8. je prikazano dobijeno polje brzina u okolini cilindra (brzine su prikazane vektorima nacrtanim u razmeri), dok je na sl. 6.9. data uveličana razmera polja brzina neposredno iza cilindra. Na sl. 6.9. se uočava formiranje dva simetrična vrtloga (simetričan deo u odnosu na osu x nije prikazan), što je karakteristika ustaljenog strujanja fluida oko cilindra pri malim Raynolds-ovim brojevima. Na sl. 6.10. su šematski prikazani karakteristični režimi strujanja fluida oko cilindra u zavisnosti od Raynolds-ovog broja.



Sl. 6.8. Polje brzina fluida u okolini cilindra



Sl. 6.9. Polje brzina neposredno iza cilindra (uvelicana razmera za brzine 5 puta u odnosu na sl. 6.8.)



Sl. 6.10. Glavni režimi strujanja oko glatkog kružnog cilindra

Kao što se vidi iz sl. 6.10, kod strujanja sa malim Raynolds-ovim brojem, t.j. pri malim brzinama fluida, ne dolazi do odvajanja struje od cilindra, slučaj a) na sl. 6.10. Pri nešto većim brzinama t.j. R_e brojem dolazi do formiranja dva simetrična nepokretna vrtloga iza cilindra, slučaj b). Posmatrani primer strujanja spada u kategoriju b) na sl. 6.10, jer je $R_e = 20$, videti (6.8). Sa povećanjem R_e broja, t.j. brzine dolazećeg strujanja fluida, ova dva prvobitno stacionarna vrtloga se izdužuju i jedan od vrtloga se odvaja od cilindra. Zatim dolazi do periodičnog alternativnog odvajanja jednog i drugog vrtloga i njihovog transporta niz struju uz istovremeno formiranje novih vrtloga iza cilindra. Time se formira laminaran Von Kármán-ov vrtložni trag. Pri brzinama fluida za koje je $R_e \in (150,300)$, vrtložni trag postaje turbulentan i dalje, sve do $R_e \approx 3 \times 10^5$ dolazi do alternativnog (periodičnog) odvajanja vrtloga sa izraženom dominantnom frekvencijom u skladu sa Strouhal-ovom relacijom:

$$f_s = \frac{Su}{D} \tag{6.9}$$

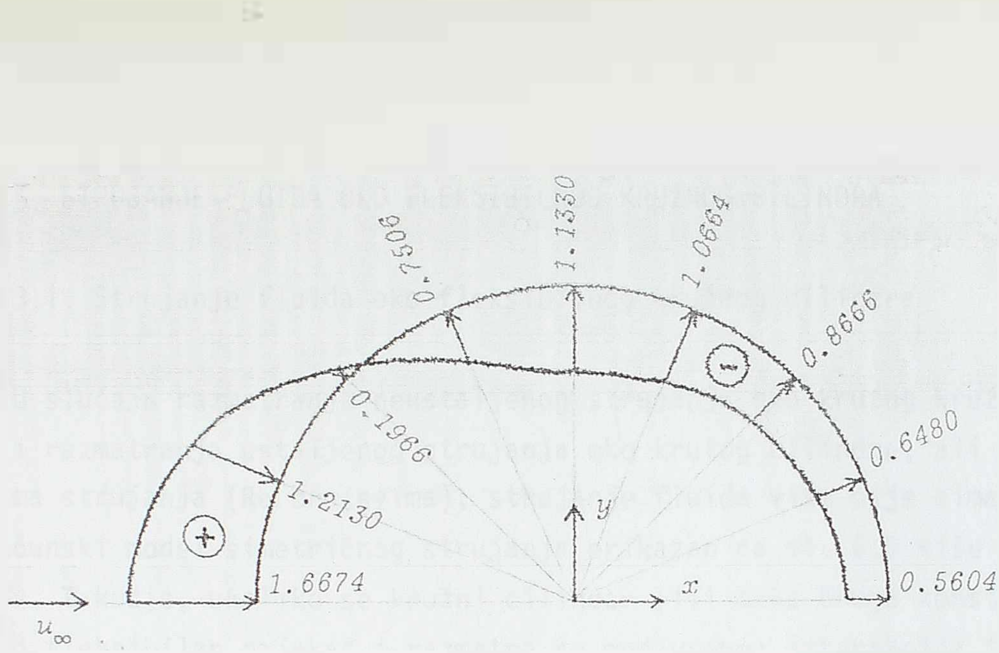
U relaciji (6.9) je f_s dominantna frekvencija odvajanja vrtloga (u hercima), dok je S tzv. Strouhal-ov broj. Relacija (6.9) važi za strujanje fluida oko tela bilo kakvog oblika, tako da je S veličina zavisna od geometrije tela i R_e broja (t.j. režima strujanja). Za gladak dugačak kružni cilindar Stouhal-ov broj ima vrednost $S \approx 0.20$.

Strujanje oko kružnog cilindra pri $R_e \leq 3 \times 10^5$ se naziva subkritično (podkritično) strujanje. U subkritičnom režimu strujanja je vrtložni trag iza cilindra turbulentan, ali je granični sloj na površini cilindra i dalje laminaran. Pri brzinama fluida za koje je $R_e \approx 3 \times 10^5$ dolazi do prelaska prethodno laminarnog graničnog sloja u turbulentan granični sloj i strujanje pri Raynolds-ovim brojevima u približnom intervalu $(3 \times 10^5,\ 3.5 \times 10^6)$ se naziva kritično (ili prelazno) strujanje. Tačke odvajanja strujanja od fluida se naglo pomeraju u nazad, tako da se vrtložni trag naglo sužava, dok je odvajanje vrtloga "neorganizovano", odnosno sa vrlo širokim intervalom frekvencija. U ovom kritičnom režimu, zbog naglog sužavanja vrtložnog traga, dolazi do naglog opadanja sile otpora u pravcu strujanja fluida. Pri većim vrednostima R_e broja. $R_e > 3.5 \times 10^6$, u tzv. nadkritičnom ili superkritičnom režimu strujanja, dolazi opet do periodičnog odvajanja vrtloga sa dominantnom frekvencijom

Od dobijenih rezultata proračuna ustaljenog strujanja oko kružnog cilindra, pomoću programa "VETAR", prikazaće se još raspodela dobijenih pritisaka na površini cilindra. Pri tome će pritisci da se prikažu preko tzv. koeficijenta pritiska C_p:

$$C_p = \frac{p}{q} = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} \tag{6.10}$$

gde je p dobijeni pritisak, dok je $q = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2$ tzv. zaustavni (ili dinamički) pritisak. U posmatranom primeru je usvojeno da je $\rho = 1.0$ i $u_\infty = 1.0$, tako da je dinamički pritisak jednak: $q = 0.5$. Na sl. 6.11 je prikazana dobijena raspodela koeficijenta pritiska C_p po površini cilindra.



Sl. 6.11. Koeficijent pritisaka C_p na površini cilindra

Kao što je bilo rečeno, ukoliko se želi, može da se, u okviru programa "VETAR", odredi opterećenje kojim fluid deluje i na krutu konstrukciju. Ovo je uradjeno u posmatranom primeru i umesto same sile prikazuje se dobijena vrednost bezdimenzionalnog koeficijenta sile otpora:

$$C_D = \frac{F_{RX}}{qD} \tag{6.11}$$

U izrazu (6.11) je F_{RX} ukupna sila u pravcu strujanja izračunata za ceo presek cilindra, znači dvostruka vrednost ukupne sile dobijene integracijom pritisaka i gradijenata brzine po površini polovine cilindra na sl. 6.6, dok je q dinamički pritisak, a D prečnik cilindra. Dobijen koeficijent sile otpora C_D je prikazan u tabeli 6.1 zajedno sa nekim drugim numeričkim i eksperimentalno odredjenim vrednostima koeficijenta otpora C_D, prema podacima iz literature ([I.2.2], Chap. 2, P.Gresho et al, pp.27-81), za Rajnoldsov broj manji od 100:

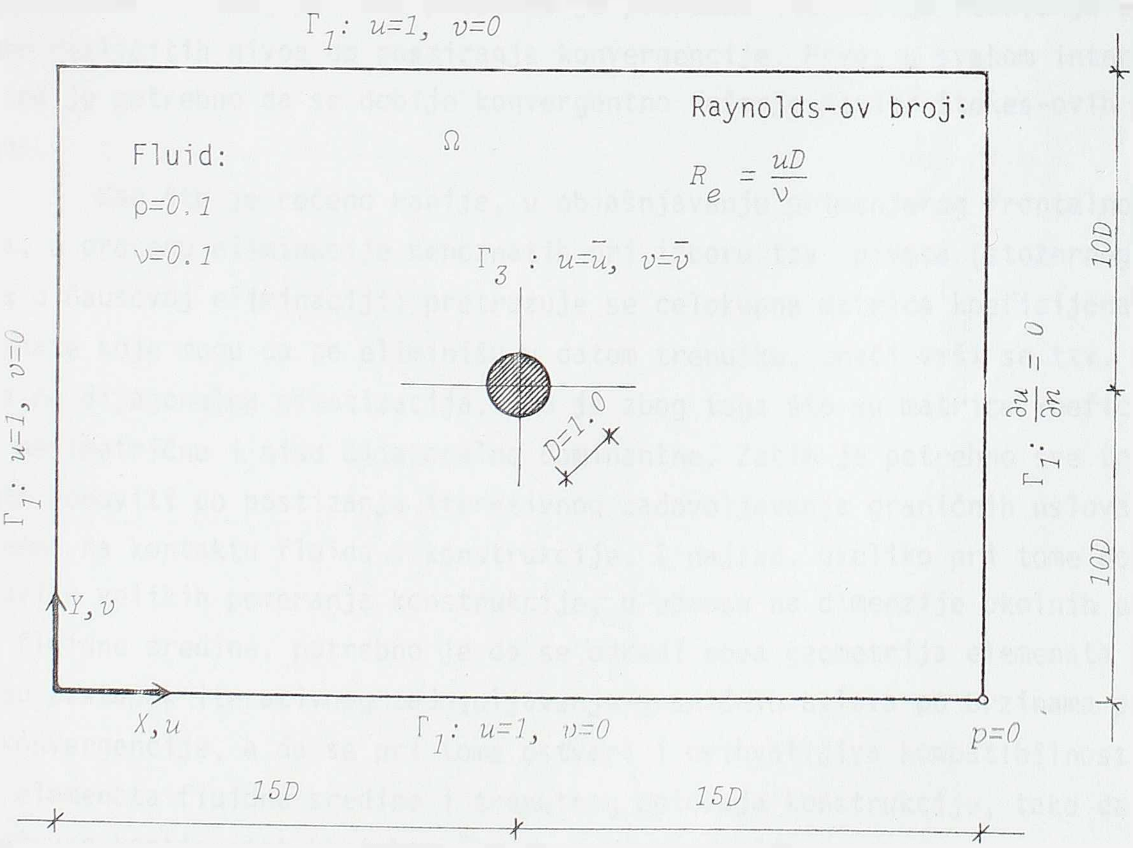
Tabela 6.1. Numeričke i eksperimentalne vrednosti koeficijenta sile otpora za kružni cilindar.

	Referenca	Koeficijent sile otpora C_D
Numerički pristup	Program "VETAR" (73 elem.)	1.31
	P. Gresho (1980)	1.27
	Jordan i Framm (1972)	1.28
	Swanson i Spaulding (1978)	1.33
	Smith i Brebbia (1978)	1.43
Eksperiment	Tritton (1959)	1.27
	Tritton (1977)	1.33

3. STRUJANJE FLUIDA OKO FLEKSIBILNOG KRUŽNOG CILINDRA

3.1. Strujanje fluida oko fleksibilnog kružnog cilincra

U slučaju razmatranja neustaljenog strujanja oko krutog kružnog cilindra, ili razmatranja ustaljenog strujanja oko krutog cilindra, ali pri većim brzinama strujanja (Re brojevima), strujanje fluida više nije simetrično, tako da računski model simetričnog strujanja prikazan na sl. 6.5 više nije prihvatljiv. Takodje, ukoliko se kružni cilindar (ili neka druga konstrukcija) tretira kao fleksibilan objekat i razmatra se medjusobna interakcija fluida i konstrukcije, neophodno je da se posmatra cela oblast strujanja oko konstrukcije, a ne samo simetrična polovina. Na sl. 6.12. je prikazana posmatrana oblast strujanja oko kružnog cilindra sa odgovarajućim graničnim uslovima.



Sl. 6.12. Oblast strujanja fluida oko kružnog cilindra i granični uslovi

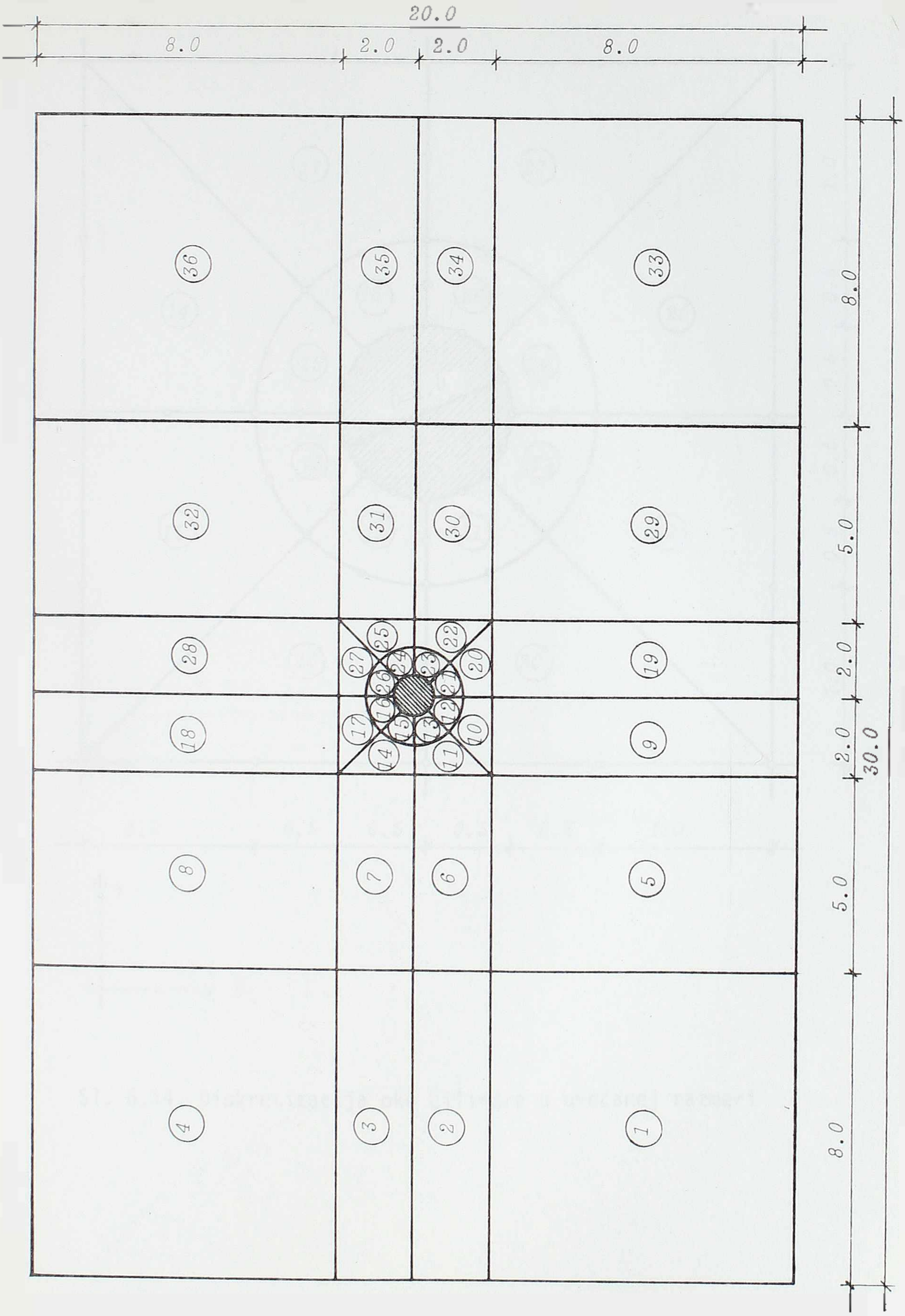
Imajući u vidu prethodno razmatranje ustaljenog strujanja diskretizacijom simetrične polovine oblasti na 73 konačna elementa (videti sl. 6.6), uz prihvatljive dobijene rezultate, nameće se kao prirodno da se oblast strujanja prikazana na sl. 6.12. diskretizuje pomoću 2x73=146 konačnih elemenata. Medjutim, imajući u vidu da je u slučaju neustaljenog strujanja fluida i interakcije potrebno višestruko iterativno rešenje jednačina u više različitih nivoa iteracije, kao i obzirom na mogućnosti raspoloživog računara, usvojena je znatno skromnija diskretizacija prikazana na slikama 6.13. i 6.14.

Kao što se vidi na sl. 6.13., oblast strujanja je predstavljena pomoću 36 paraboličnih elemenata (elementi tipa 3) sa ukupno 136 čvornih tačaka i 322 čvornih nepoznatih (od toga 272 čvornih brzina i 50 čvornih pritisaka). Ovakva diskretizacija oblasti strujanja je suviše gruba da bi se dobili dovoljno precizni rezultati, medjutim može da posluži za prikazivanje numeričke simulacije iterakcije fluida i konstrukcije. Medjutim, kao što će da se prikaže kasnije, i ovako skromna mreža i relativno mali broj nepoznatih predstavljaju "krupan zalogaj" za raspoloživ računar DIGITAL DEC 20/40.

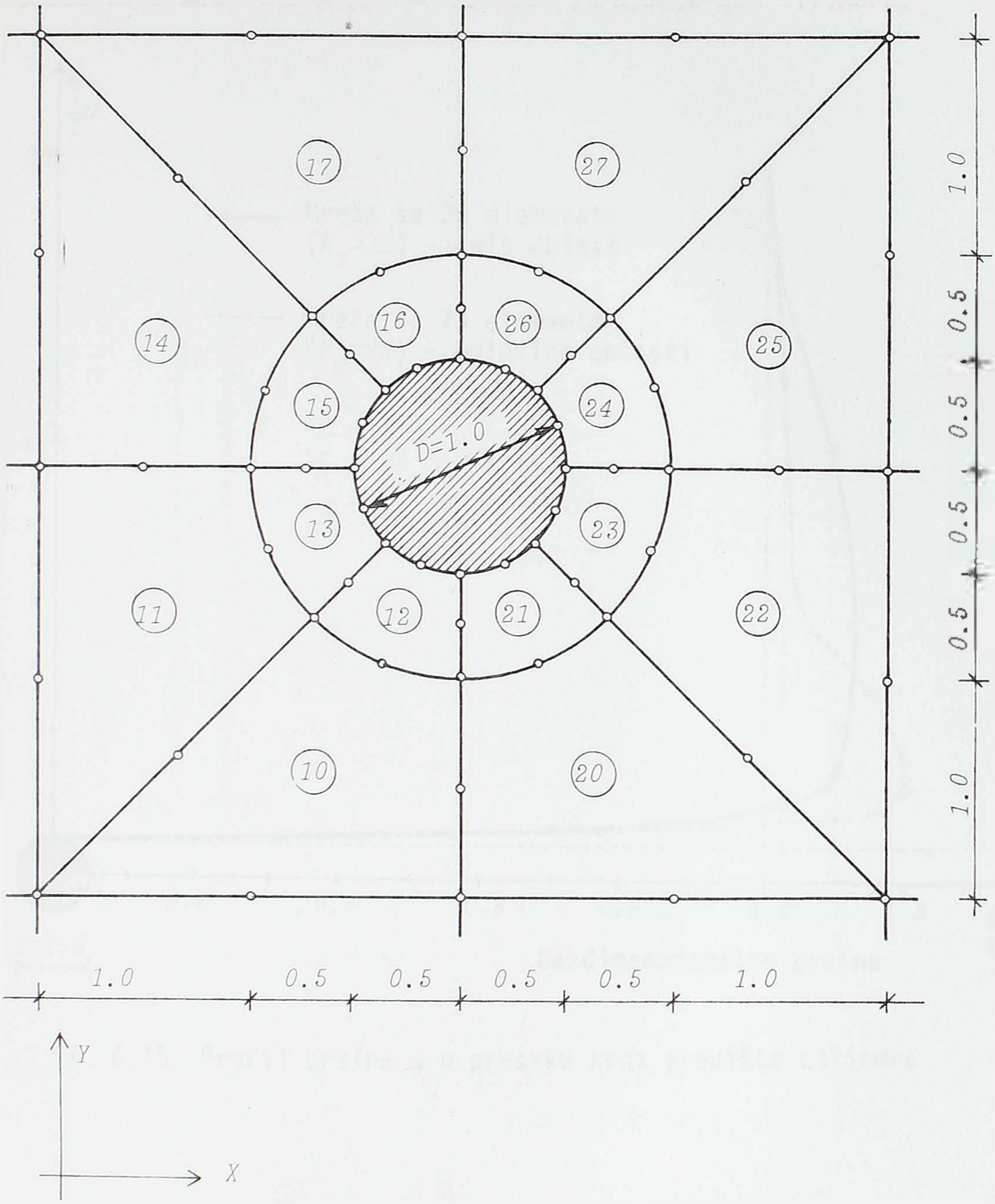
Ovo je zbog toga što su jednačine nelinearne, nesimetrične i numerički osetljive, a zbog prirode problema je potrebno iterativno rešavanje u nekoliko različitih nivoa do postizanja konvergencije. Prvo, u svakom intervalu vremena je potrebno da se dobije konvergentno rešenje Navier-Stokes-ovih jednačina.

Kao što je rečeno ranije, u objašnjavanju primenjenog frontalnog postupka, u procesu eliminacije nepoznatih pri izboru tzv. pivota (stožernog elementa u Gausovoj eliminaciji) pretražuje se celokupna matrica koeficijenata uz nepoznate koje mogu da se eliminišu u datom trenutku, znači vrši se tzv. totalna, a ne dijagonalna pivotizacija. Ovo je zbog toga što su matrice koeficijenata nesimetrične i nisu dijagonalno dominantne. Zatim je potrebno sve to višestruko ponoviti do postizanja iterativnog zadovoljavanja graničnih uslova po brzinama na kontaktu fluida i konstrukcije. I najzad, ukoliko pri tome dolazi do suviše velikih pomeranja konstrukcije, u odnosu na dimenzije okolnih elemenata fluidne sredine, potrebno je da se odredi nova geometrija elemenata i da se ceo postupak iterativnog zadovoljavanja graničnih uslova po brzinama ponavlja do konvergencije, a da se pri tome ostvari i prihvatljiva kompatibilnost oblika elemenata fluidne sredine i trenutnog položaja konstrukcije, tako da bude sačuvan kontinuitet kontakta fluida i konstrukcije.

Kao ilustracija nekih dobijenih rezultata sa prikazanom mrežom od 36 konačnih elemenata, za slučaj ustaljenog strujanja oko nepokretnog (kružnog) cilindra, na sl. 6.15 je prikazan profil raspodele brzina u pravcu strujanja (komponente u) u preseku kroz središte cilindra, dok je na sl. 6.16 prikazana raspodela koeficijenta pritiska C_p, datog sa izrazom (6.10). Na obe slike su punom linijom prikazani rezultati dobijeni sa mrežom od 36 elemenata oko celog cilindra, a sa isprekidanom linijom prethodno dobijeni rezultati sa mrežom od

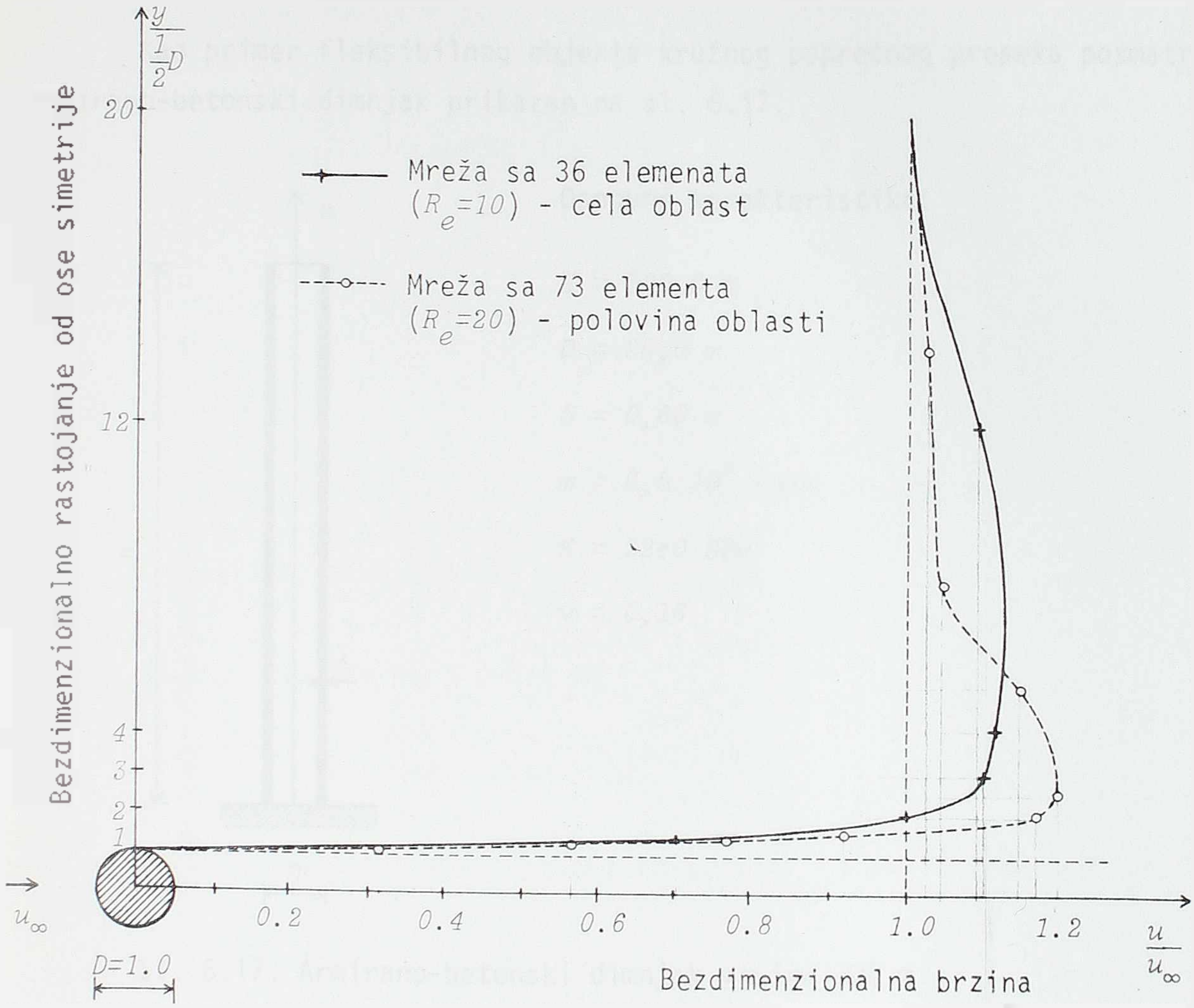


Sl. 6.13. Diskretizacija oblasti sa 36 paraboličnih elemenata

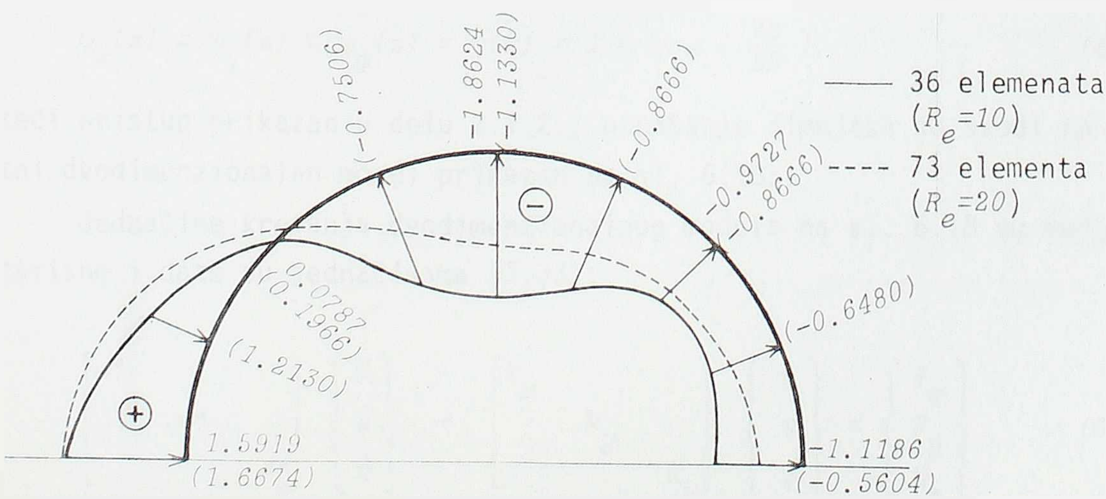


Sl. 6.14. Diskretizacija oko cilindra u uvećanoj razmeri

73 elemenata za simetričnu polovinu oblasti strujanja oko cilindra.



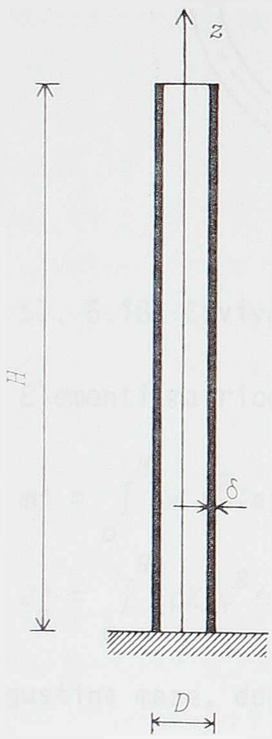
Sl. 6.15. Profil brzina u u preseku kroz središte cilindra



Sl. 6.16. Raspodela koeficijenta pritiska oko cilindra
(brojevi u zagradi - mreža sa 73 elementa)

3.2. Dvodimenzionalan model fleksibilnog dimnjaka

Kao primer fleksibilnog objekta kružnog poprečnog preseka posmatra se armirano-betonski dimnjak prikazan na sl. 6.17.



Osnovne karakteristike:

$H = 300{,}0\ m$

$D = 20{,}0\ m$

$\delta = 0{,}60\ m$

$m = 6{,}5\ 10^4\ kg/m$

$E = 32{,}0\ GPa$

$\nu = 0{,}16$

Sl. 6.17. Armirano-betonski dimnjak visine 300 m

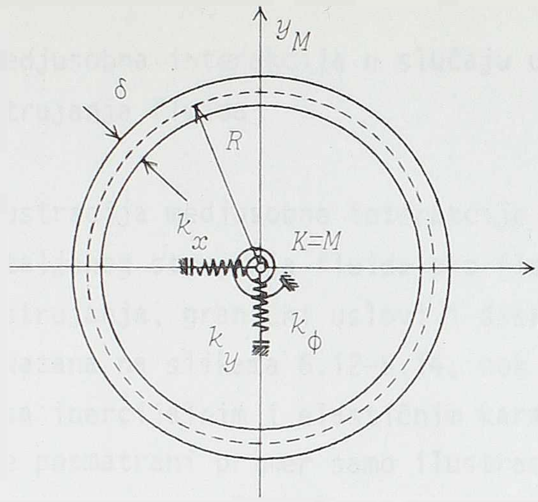
U većini slučajeva je dovoljno da se posmatra učešće samo prvog tona u ukupnom odgovoru konstrukcije. Takodje je usvojeno da su svojstveni oblici poprečnih i torzionih vibracija dati sa prihvatljivom aproksimacijom:

$$\psi_x(z) = \psi_y(z) = \psi_\varphi(z) = \psi(z) = 1 - cos\ (\frac{\pi z}{2H}) \qquad (6.12)$$

Koristeći pristup prikazan u delu 2.1.2., ponašanje dimnjaka se svodi na ekvivalentni dvodimenzionalan model prikazan na sl. 6.18:

Jednačine kretanja dvodimenzionalnog modela na sl. 6.18 su medjusobno nezavisne i date su jednačinama (3.33):

$$\begin{bmatrix} m^* & & \\ & m^* & \\ & & I_z^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & & \\ & k_y & \\ & & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix} \qquad (6.13)$$



Sl. 6.18. Ekvivalentan dvodimenzionalan model dimnjaka

Elementi matrice mase su dati sa (3.34):

$$
\begin{aligned}
m^* &= \int_o^H m\,\psi^2(z)dz = 0.228\ mH \\
J_z^* &= \int_o^H \rho K\,\psi^2(z)dz = 0.228\ \rho KH
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

gde je ρ gustina mase, dok je K torziona konstanta. Elementi matrice krutosti su dati sa

$$
\begin{aligned}
k_x = k_y &= \int_o^H E'J\,\psi''^2(z)dz = E'J\,\frac{\pi^4}{32H^3} \\
k_\phi &= \int_o^H GK\,\psi'^2(z)dz = GK\,\frac{\pi^2}{8H}
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

gde je $J = J_{xx} = J_{yy}$ momenat inercije poprečnog preseka, dok je

$$
E' = \frac{E}{1-\nu^2}\ , \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.16}
$$

Unoseći numeričke vrednosti usvojene na sl. 6.17, dobijaju se sledeći koeficijenti matrice mase i matrice krutosti dvodimenzionalnog modela prikazanog na sl. 6.18:

$$
\begin{aligned}
m^* &= 4.446\ MN/m\ sec^{-2} \\
J_z^* &= 51.751\ MNm\ sec^2 \\
k_x = k_y &= 6.376\ MN/m \\
k_\phi &= 195111.23\ MN/m
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

3.3. Medjusobna interakcija u slučaju ustaljenog strujanja fluida

Kao ilustracija medjusobne interakcije fluida i konstrukcije posmatra se slučaj ustaljenog strujanja fluida oko fleksibilnog kružnog cilindra. Računska oblast strujanja, granični uslovi i diskretizacija pomoću 36 konačnih elemenata je prikazana na slikama 6.12-6.14, dok je model fleksibilnog cilindra dat na sl. 6.18 sa inercijalnim i elastičnim karakteristikama datim sa (6.17).

Kako je posmatrani primer samo ilustracija funkcionisanja medjusobne interakcije, odnosno programa "VETAR", a ne simulacija i realnog inženjerskog problema, usvojeno je da se medjusobna interakcija posmatra u trajanju od 0.30 sekundi. Predvidjeno je da se jednačine kretanja konstrukcije rešavaju diferencnim postupkom sa podelom ukupnog vremena medjusobne interakcije na 5 jednakih intervala, znači sa intervalom vremena od $\Delta t = 0.06\ sec$.

Kao što će da se vidi iz dobijenih rezultata, predvidjen interval vremena $\Delta t = 0.06\ sec$ je veći od odgovarajućeg kritičnog intervala datog sa (3.46). U ovakvom slučaju je u programima predvidjen (u podprogramu CENDIF) automatski izbor novog intervala vremena, tako da bude zadovoljen uslov $\Delta t < \Delta t_{cr}$. U konkretnom primeru posmatranog fleksibilnog cilindra dobilo se da je potrebno da se ukupno vreme interakcije od $0.30\ sec$ podeli na 10 jednakih intervala vremena u cilju obezbedjenja numeričke stabilnosti u integraljenju jednačina kretanja konstrukcije.

U nastavku se prikazuju ulazni podaci za ovaj primer, kao i deo izlazne datoteke - konačni rezultati za prva dva i poslednja dva intervala vremena. Kao što može da se vidi iz dobijenih rezultata, fleksibilna konstrukcija je u ovom slučaju dovoljno kruta, tako da su dobijena pomeranja konstrukcije dovoljno mala i nije bilo potrebe za ponovnim definisanjem mreže konačnih elemenata fluidne sredine u okolini konstrukcije.

Ukupno vreme rada centralnog procesora (CPU time) za ovih deset intervala vremena je iznosilo oko 2,5 sata. Pri tome je još bilo potrebno da se svakih 10-20 min zaustavlja izvršenje programa, brišu nepotrebni medjurezultati i zatim nastavlja sa izvršenjem programa. Inače, u programe je ugradjeno da se na terminalu prati funkcionisanje programa u smislu prikaza trenutne konvergencije rezultata, trenutnog broja intervala vremena i sl.

Kao što je rečeno, razmatran primer je samo ilustracija numeričke simulacije medjusobne interakcije fluida i konstrukcije, tako da se ne vrši analiza dobijenih rezultata u ovom primeru.

```
** USTALJENO STRUJANJE OKO CILINDRA - INTERAKCIJA (LL=3) 36 ELEMENATA **
136    36     1     1     3    10    0.10        0.50       1     0
 33     9    16    14     4     8
DEK
  1     0     0     0    0.0        0.0
  2                      0.         8.
  3                      0.        10.
  4                      0.        12.
  5                      0.        20.
  6                 1    0.         4.
  7                 1    0.         9.
  8                 1    0.        11.
  9                 1    0.        16.
 10                 1    4.         0.
 11                 1    4.         8.
 12                 1    4.        10.
 13                 1    4.        12.
 14                 1    4.        20.
 15                      8.         0.
 16                      8.         8.
 17                      8.        10.
 18                      8.        12.
 19                      8.        20.
 20                 1    8.         4.
 21                 1    8.         9.
 22                 1    8.        11.
 23                 1    8.        16.
 24                 1   10.5        0.
 25                 1   10.5        8.
 26                 1   10.5       10.
 27                 1   10.5       12.
 28                 1   10.5       20.
 29                     13.         0.
 30                     13.         8.
 31                     13.        10.
 32                     13.        12.
 33                     13.        20.
 34                 1   13.         4.
 35                 1   13.         9.
 36                 1   13.        11.
 37                 1   13.        16.
 38                 1   14.         0.
 39                 1   14.         8.
 40                 1 13.64645   8.64645
 41                 1   13.5       10.
 42                 1 13.64645  11.35356
 43                 1   14.        12.
 44                 1   14.        20.
 45                     15.         0.
 46                     15.         8.
 47                     15.         9.
 48                   14.29289   9.29289
 49                     14.        10.
 50                   14.29289  10.70711
 51                     15.        11.
 52                     15.        12.
 53                     15.        20.
 54                 1   15.         4.
 55                 1   15.         8.5
 56                 1 14.61723   9.07612
 57                 1 14.07612   9.61732
 58                 1 14.07612  10.38268
 59                 1 14.61732  10.92388
 60                 1   15.        11.5
 61                 1   15.        16.
```

62		15.	9.5
63		14.64645	9.64645
64		14.5	10.
65		14.64645	10.35355
66		15.	10.5
67	1	15.	9.25
68	1	14.80866	9.53806
69	1	14.53806	9.80866
70	1	14.53806	10.19134
71	1	14.80866	10.46194
72	1	15.	10.75
73	1	14.46967	9.46967
74	1	14.25	10.
75	1	14.46967	10.53033
76	1	16.	0.
77	1	16.	8.
78	1	15.38268	9.07612
79	1	15.19134	9.53806
80		15.70711	9.29289
81		15.35355	9.64645
82	1	16.35355	8.64645
83	1	15.53033	9.46967
84	1	15.92388	9.61732
85	1	15.46194	9.80866
86	1	16.5	10.
87		16.	10.
88	1	15.75	10.
89		15.5	10.
90	1	15.92388	10.38268
91	1	15.46194	10.19134
92	1	16.35355	11.35355
93		15.70711	10.70711
94	1	15.53033	10.53033
95		15.35355	10.35355
96	1	15.19134	10.46194
97	1	15.38268	10.92388
98	1	16.	12.
99	1	16.	20.
100		17.	0.
101		17.	8.
102		17.	10.
103		17.	12.
104		17.	20.
105	1	17.	4.
106	1	17.	9.
107	1	17.	11.
108	1	17.	16.
109	1	19.5	0.
110	1	19.5	9.
111	1	19.5	10.
112	1	19.5	12.
113	1	19.5	20.
114		22.	0.
115		22.	8.
116		22.	10.
117		22.	12.
118		22.	20.
119	1	22.	4.
120	1	22.	9.
121	1	22.	11.
122	1	22.	16.
123	1	26.	0.
124	1	26.	8.
125	1	26.	10.
126	1	26.	12.
127	1	26.	20.

```
128                30.        0.
129                30.        8.
130                30.       10.
131                36.       12.
132                30.       20.
133             1  30.        4.
134             1  30.        9.
135             1  30.       11.
136             1  30.       16.
  3
  1    1.0          0.1
  1    1   15   16    2   10   20   11    6
  5   15   29   30   16   24   34   25   20
  9   29   45   46   30   38   54   39   34
 10   30   46   47   48   39   55   56   40
 11   30   48   49   31   40   57   41   35
 12   48   47   62   63   56   67   68   73
 13   48   63   64   49   73   69   74   57
 14   31   49   50   32   41   58   42   36
 15   49   64   65   50   74   70   75   58
 16   65   66   51   50   71   72   59   75
 17   50   51   52   32   59   60   43   42
 18   32   52   53   33   43   61   44   37
 19   45  100  101   46   76  105   77   54
 20   46  101   80   47   77   82   78   55
 21   47   60   81   62   78   83   79   67
 22   80  101  102   87   82  106   86   84
 23   81   80   87   89   83   84   88   85
 24   89   87   93   95   88   90   94   91
 25   87  102  103   93   86  107   92   90
 26   66   95   93   51   96   94   97   72
 27   51   93  103   52   97   92   98   60
 28   52  103  104   53   98  108   99   61
 29  100  114  115  101  109  119  110  105
 33  114  128  129  115  123  133  124  119
 36  117  131  132  118  126  136  127  122
  1    2    3    4    5    8    9   10   19   28   29   32   33   36
 33    2
 34    2
 35    2
 36    2
 12    4
 13    2
 15    2
 16    3
 21    4
 23    1
 24    1
 26    3
  1    1    1         10
  2    1    1         1
  3    1    1         10
  4    1    1         1
  5    1    1         1
  6    1    1         1
  7    1    1         10
  8    1    1         1
  9    1    1         1
 10    1    1         1
 14    1    1         10
 15    1    1         1
 19    1    1         10
 24    1    1         10
 28    1    1         1
 29    1    1         1
 33    1    1         1
```

38	1	1		1.	
44	1	1		1.	
45	1	1		1.	
53	1	1		1.	
76	1	1		1.	
99	1	1		1.	
100	1	1		1.	
104	1	1		1.	
109	1	1		1.	
113	1	1		1.	
114	1	1		1.	
118	1	1		1.	
123	1	1		1.	
127	1	1		1.	
128	1	1	1	1.	0.0
132	1	1		1.	
9					
128	1				
129	1				
130	1				
131	1				
132	1				
133	1				
134	1				
135	1				
136	1				

62 63 64 65 66 68 69 70 71 79 81 85 89 91 95

1	1.	0.
10	1.	0.
11	0.9889	0.0102
12	1.0340	-0.00051
13	0.9884	-0.0078
14	1.	0.
16	0.9914	0.004896
17	0.9578	0.002142
18	0.9910	-0.001539
19	1.	0.
20	1.0069	-0.01474
21	0.9762	-0.002348
22	0.9763	0.003375
23	1.007	0.01379
24	1.	0.
25	0.9634	-0.02094
26	0.9796	0.00673
27	0.9642	0.02233
28	1.	0.
30	0.9542	-0.07066
31	0.8502	0.001314
32	0.9566	0.06985
33	1.	0.
34	1.0430	-0.01725
35	0.9107	-0.08907
36	0.9114	0.09203
37	1.0440	0.05011
38	1.	0.
39	1.0340	-0.09195
40	0.8949	-0.1930
41	0.59[illegible]	0.001190
42	0.8955	0.1959
43	1.034	0.09842
44	1.	0.
46	1.1170	-0.1097
47	1.0078	-0.2329
48	0.6913	-0.4174
49	0.140[illegible]	0.001318
50	0.6918	0.4206

51	1.0060	0.2374
52	1.1150	0.1165
53	1.	0.
54	1.0893	-0.05281
55	1.1090	-0.2674
56	0.9223	-0.4531
57	0.5323	-0.3135
58	0.5328	0.3165
59	0.9222	0.4557
60	1.1090	0.2700
61	1.0930	0.05257
62	0.	0.
67	0.7092	-0.0345
68	0.	0.
72	0.7073	0.03532
73	0.5962	-0.4708
74	0.1581	0.001512
75	0.5976	0.4721
76	1.	0.
77	1.1230	-0.[illegible]9043
78	0.7626	0.008901
79	0.	0.
80	0.4698	0.06850
81	0.	0.
82	0.9383	0.2597[illegible]
83	0.1924	0.05968
84	0.1509	0.04219
85	0.	0.
86	0.06439	0.002628
87	0.03179	0.000322
88	0.007159	-0.000342
89	0.	0.
90	0.1500	-0.04137
91	0.	0.
92	0.9341	-0.05488
93	0.4668	-0.06766
94	0.1906	-0.05767
95	0.	0.
97	0.7598	-0.007956
98	1.1230	0.09367
99	1.	0.
101	1.1290	-0.06451
102	[illegible].209[illegible]	0.005226
103	1.1320	0.06288
104	1.	0.
105	1.1130	-0.01093
106	0.5997	0.08481
107	0.5957	-0.[illegible]8223
108	1.1170	0.01739
109	1.	0.
110	1.0160	0.01311
111	0.4343	0.007324
112	1.0120	-[illegible]5309
113	1.	0.
115	0.9197	0.[illegible]3976
116	0.5428	0.01149
117	0.9099	-0.02466
118	1.	0.
119	1.1190	0.003037
120	0.6790	0.041[illegible]6
121	0.6655	-0.0[illegible]58
122	1.1360	0.004187
123	1.	0.
124	0.9361	0.03339
125	0.7220	0.02665
126	0.9197	-0.004266

```
127   1.        0.
129   0.9643    0.09234
130   0.8231    0.04818
131   0.9399   -0.02192
132   1.        0.
133   1.0270    0.1037
134   0.8774    0.08265
135   0.8531    0.03956
136   1.1070   -0.02668
  1
      DVODIMENZIONALNI MODEL FLEKSIBILNOG DIMNJAKA
 15.0      10.0
 0.3        5
  2    0    0.3
 15.0      10.0
4.446    51.751
6.376    6.376    195111.23
```

```
***************************************************************
**                                                           **
**                  P R O G R A M   V E T A R                **
**                  =========================                **
**                                                           **
**                    (AUTOR: S. BRCIC)                      **
**                                                           **
**            GRADJEVINSKI FAKULTET U BEOGRADU               **
**        DATUM I VREME :   9-APR-87      09:03  03.0        **
**                                                           **
***************************************************************



** USTALJENO STRUJANJE OKO CILINDRA - INTERAKCIJA (LL=3) 36 ELEMENATA **
*************************************************************************


   K O N T R O L N E   I N F O R M A C I J E

     -BROJ CVORNIH TACAKA.....................=  136
     -UKUPAN BROJ ELEMENATA...................=   36
     -BROJ TIPOVA ELEMENATA...................=    1
     -BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONST...........=    1
     -VRSTA ANALIZE...........................=    3
        .EQ.1...USTALJENO STRUJANJE
                OKO NEPOKRETNE KONTURE
        .EQ.2...NEUSTALJENO STRUJANJE
                OKO NEPOKRETNE KONTURE
        .EQ.3...USTALJENO STRUJANJE
                OKO POKRETNE KONTURE
        .EQ.4...NEUSTALJENO STRUJANJE
                OKO POKRETNE KONTURE
     -BROJ ITERACIJA ZA N.S. JEDNACINE........=   13
     -TOLERANCIJA ZA KONVERGENCIJU............= 0.10
     -FAKTOR RELAKSACIJE......................= 0.50
     -RESAVANJE NELINEARNIH JEDNACINA.........=    1
        .EQ.0...LINEARNE JEDNACINE
        .EQ.1...DIREKTNA ITERACIJA
        .EQ.2...NEWTON-RAPHSON
        .EQ.3...MODIFIKOVAN NEWTON
     -VREMENSKA INTEGRACIJA JEDNACINA.........=    0
        .EQ.1...PREDIKTOR-KOREKTOR
        .EQ.2...WILSON-THETA


        INFORMACIJE O GRANICNIM USLOVIMA
        ================================

     BROJ CVOROVA NA KONTURI G1...........=   33
        (PRIRODNI GRAN. USLOVI)
     BROJ CVOROVA NA KONTURI G2...........=    9
        (PRIRODNI GRANICNI USLOVI)
     BROJ CVOROVA NA KONTURI G3...........=   16
        (KONTAKT SA KONSTRUKCIJOM)
     BROJ ELEMENATA NA KONTURI G1.........=   14
     BROJ ELEMENATA NA KONTURI G2.........=    4
     BROJ ELEMENATA NA KONTURI G3.........=    8
```

P O D A C I   O   C V O R N I M   T A C K A M A

ULAZNI PODACI U CVOROVIMA

CVOR BROJ	STEP.SLOBODE U	V	P	POLARNE KOORDINATE RO	FI	KN	DEKARTOVE KOORDINATE X	Y	KN
1	0	0	0				0.0000	0.0000	1
2	0	0	0				0.0000	8.0000	1
3	0	0	0				0.0000	10.0000	1
4	0	0	0				0.0000	12.0000	1
5	0	0	0				0.0000	20.0000	1
6	0	0	1				0.0000	4.0000	1
7	0	0	1				0.0000	9.0000	1
8	0	0	1				0.0000	11.0000	1
9	0	0	1				0.0000	16.0000	1
10	0	0	1				4.0000	0.0000	1
11	0	0	1				4.0000	8.0000	1
12	0	0	1				4.0000	10.0000	1
13	0	0	1				4.0000	12.0000	1
14	0	0	1				4.0000	20.0000	1
15	0	0	0				8.0000	0.0000	1
16	0	0	0				8.0000	8.0000	1
17	0	0	0				8.0000	10.0000	1
18	0	0	0				8.0000	12.0000	1
19	0	0	0				8.0000	20.0000	1
20	0	0	1				8.0000	4.0000	1
21	0	0	1				8.0000	9.0000	1
22	0	0	1				8.0000	11.0000	1
23	0	0	1				8.0000	16.0000	1
24	0	0	1				10.5000	0.0000	1
25	0	0	1				10.5000	8.0000	1
26	0	0	1				10.5000	10.0000	1
27	0	0	1				10.5000	12.0000	1
28	0	0	1				10.5000	20.0000	1
29	0	0	0				13.0000	[illegible].0000	1
30	0	0	0				13.0000	8.0000	1
31	0	0	0				13.0000	10.0000	1
32	0	0	0				13.0000	12.0000	1
33	0	0	0				13.0000	20.0000	1
34	0	0	1				13.0000	4.0000	1
35	0	0	1				13.0000	9.0000	1
36	0	0	1				13.0000	11.0000	1
37	0	0	1				13.0000	16.0000	1
38	0	0	1				14.0000	0.0000	1
39	0	0	1				14.0000	8.0000	1
40	0	0	1				13.6465	8.6465	1
41	0	0	1				13.5000	10.0000	1
42	0	0	1				13.6465	11.3536	1
43	0	0	1				14.0000	12.0000	1
44	0	0	1				14.0000	20.0000	1
45	0	0	0				15.0000	0.0000	1
46	0	0	0				15.0000	8.0000	1
47	0	0	0				15.0000	9.0000	1
48	0	0	0				14.2929	9.2929	1
49	0	0	0				14.0000	10.0000	1
50	0	0	0				14.2929	10.7071	1
51	0	0	0				15.0000	11.0000	1
52	0	0	0				15.0000	12.0000	1
53	0	0	0				15.0000	20.0000	1

54	[illegible]	[illegible]	1	15.0000	4.0000	1
55	[illegible]	[illegible]	1	15.0000	8.5000	1
56	[illegible]	[illegible]	1	14.6172	9.0761	1
57	[illegible]	[illegible]	1	14.0761	9.6173	1
58	[illegible]	[illegible]	1	14.0761	10.3827	1
59	[illegible]	[illegible]	1	14.6173	10.9239	1
60	[illegible]	[illegible]	1	15.0000	11.5000	1
61	[illegible]	[illegible]	1	15.0000	16.0000	1
62	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.0000	9.5000	1
63	[illegible]	[illegible]	[illegible]	14.6465	9.6465	1
64	[illegible]	[illegible]	[illegible]	14.5000	10.0000	1
65	[illegible]	[illegible]	[illegible]	14.6465	10.3535	1
66	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.0000	10.5000	1
67	[illegible]	[illegible]	1	15.0000	9.2500	1
68	[illegible]	[illegible]	1	14.8087	9.5381	1
69	[illegible]	[illegible]	1	14.5381	9.8087	1
70	[illegible]	[illegible]	1	14.5381	10.1913	1
71	[illegible]	[illegible]	1	14.8087	10.4619	1
72	[illegible]	[illegible]	1	15.0000	10.7500	1
73	[illegible]	[illegible]	1	14.4697	9.4697	1
74	[illegible]	[illegible]	1	14.2500	10.0000	1
75	[illegible]	[illegible]	1	14.4697	10.5303	1
76	[illegible]	[illegible]	1	16.0000	[illegible]	1
77	[illegible]	[illegible]	1	16.0000	8.0000	1
78	[illegible]	[illegible]	1	15.3827	9.0761	1
79	[illegible]	[illegible]	1	15.1913	9.5381	1
80	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.7071	9.2929	1
81	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.3535	9.6465	1
82	[illegible]	[illegible]	1	16.3535	8.6465	1
83	[illegible]	[illegible]	1	15.5303	9.4697	1
84	[illegible]	[illegible]	1	15.9239	9.6173	1
85	[illegible]	[illegible]	1	15.4619	9.8087	1
86	[illegible]	[illegible]	1	16.5000	10.0000	1
87	[illegible]	[illegible]	[illegible]	16.0000	10.0000	1
88	[illegible]	[illegible]	1	15.7500	10.0000	1
89	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.5000	10.0000	1
90	[illegible]	[illegible]	1	15.9239	10.3827	1
91	[illegible]	[illegible]	1	15.4619	10.1913	1
92	[illegible]	[illegible]	1	16.3535	11.3535	1
93	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.7071	10.7071	1
94	[illegible]	[illegible]	1	15.5303	10.5303	1
95	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.3535	10.3535	1
96	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15.1913	10.4619	1
97	[illegible]	[illegible]	1	15.3827	10.9239	1
98	[illegible]	[illegible]	1	16.0000	12.0000	1
99	[illegible]	[illegible]	1	16.0000	20.0000	1
100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17.0000	[illegible]	1
101	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17.0000	8.0000	1
102	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17.0000	10.0000	1
103	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17.0000	12.0000	1
104	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17.0000	[illegible]	1
105	[illegible]	[illegible]	1	17.0000	4.0000	1
106	[illegible]	[illegible]	1	17.0000	9.0000	1
107	[illegible]	[illegible]	1	17.0000	11.0000	1
108	[illegible]	[illegible]	1	17.0000	16.0000	1
109	[illegible]	[illegible]	1	19.5000	[illegible]	1
110	[illegible]	[illegible]	1	19.5000	8.0000	1
111	[illegible]	[illegible]	1	19.5000	[illegible]	1
112	[illegible]	[illegible]	1	19.5000	12.0000	1
113	[illegible]	[illegible]	1	19.5000	20.0000	1
114	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22.0000	[illegible]	1
115	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22.0000	8.0000	1
116	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22.0000	[illegible]	1
117	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22.0000	12.0000	1
118	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22.0000	20.0000	1
119	[illegible]	[illegible]	1	22.0000	4.0000	1

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22.0000	9.0000	1
121	0	0	1	22.0000	11.0000	1
122	0	[illegible]	1	22.0000	16.0000	1
123	0	0	1	26.0000	0.0000	1
124	0	0	1	26.0000	8.0000	1
125	0	0	1	26.0000	10.0000	1
126	0	[illegible]	1	26.0000	12.0000	1
127	0	0	1	26.0000	20.0000	1
128	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30.0000	0.0000	1
129	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30.0000	8.0000	1
130	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30.0000	10.0000	1
131	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30.0000	12.0000	1
132	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30.0000	20.0000	1
133	1	[illegible]	1	30.0000	4.0000	1
134	[illegible]	[illegible]	1	30.0000	9.0000	1
135	[illegible]	[illegible]	1	30.0000	11.0000	1
136	[illegible]	[illegible]	1	30.0000	16.0000	1

GENERISANI PODACI O CVOROVIMA
****

CVOR BROJ	STEP. SLOBODE U	V	P	POLARNE KOORDINATE RO	FI	DEKARTOVE KOORDINATE X	Y
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]			.0000	0.0000
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]			0.0000	8.0000
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]			0.0000	10.0000
4	0	0	[illegible]			0.2000	12.0000
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]			.0000	20.0000
6	0	[illegible]	1			0.0000	4.0000
7	0	[illegible]	1			0.0000	9.0000
8	0	[illegible]	1			.2000	11.0000
9	0	[illegible]	1			.0000	16.0000
10	0	[illegible]	1			4.0000	.0000
11	[illegible]	[illegible]	1			4.0000	8.0000
12	[illegible]	[illegible]	1			4.0000	10.0000
13	[illegible]	[illegible]	1			4.0000	12.0000
14	[illegible]	[illegible]	1			4.0000	20.0000
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]			8.0000	0.0000
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]			8.0000	8.0000
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]			8.0000	10.0000
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]			8.0000	12.0000
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]			8.0000	20.0000
20	[illegible]	[illegible]	1			8.0000	4.0000
21	[illegible]	[illegible]	1			8.0000	9.0000
22	[illegible]	[illegible]	1			8.0000	11.0000
23	[illegible]	[illegible]	1			8.0000	16.0000
24	[illegible]	[illegible]	1			10.5000	.0000
25	[illegible]	[illegible]	1			10.5000	8.0000
26	[illegible]	[illegible]	1			10.5000	10.0000
27	[illegible]	[illegible]	1			10.5000	12.0000
28	[illegible]	[illegible]	1			10.5000	20.0000
29	[illegible]	[illegible]	[illegible]			13.0000	.0000
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]			13.0000	8.0000
31	[illegible]	[illegible]	[illegible]			13.0000	10.0000
32	[illegible]	[illegible]	[illegible]			13.0000	12.0000
33	[illegible]	[illegible]	[illegible]			13.0000	20.0000
34	[illegible]	[illegible]	1			13.0000	4.0000
35	[illegible]	[illegible]	1			13.0000	9.0000
36	[illegible]	[illegible]	1			13.0000	11.0000
37	1	[illegible]	1			13.0000	16.0000
38	[illegible]	[illegible]	1			14.0000	.0000
39	[illegible]	[illegible]	1			14.0000	8.0000
40	[illegible]	[illegible]	1			13.6465	8.6465
41	[illegible]	[illegible]	1			11.5000	[illegible]

42	1	13.6465	11.3536
43	1	14.0000	12.0000
44	1	14.0000	20.0000
45		15.0000	[illegible]
46		15.0000	8.0000
47		15.0000	9.0000
48		14.2929	9.2929
49		14.0000	10.0000
50		14.2929	10.7071
51		15.0000	11.0000
52		15.0000	12.0000
53		15.0000	20.0000
54	1	15.0000	4.0000
55	1	15.0000	8.5000
56	1	14.6172	9.0761
57	1	14.0761	9.6173
58	1	14.0761	10.3827
59	1	14.6173	10.9239
60	1	15.0000	11.5000
61	1	15.0000	16.0000
62		15.0000	9.5000
63		14.6465	9.6465
64		14.5000	10.0000
65		14.6465	10.3535
66		15.0000	10.5000
67	1	15.0000	9.2500
68	1	14.8087	9.5381
69	1	14.5381	9.8087
70	1	14.5381	10.1913
71	1	14.8087	10.4619
72	1	15.0000	10.7500
73	1	14.4697	9.4697
74	1	14.2500	10.0000
75	1	14.4697	10.5303
76		16.0000	[illegible]
77	1	16.0000	8.5000
78	1	15.3827	9.0761
79	1	15.1913	9.5381
80		15.7071	9.2929
81		15.3535	9.6465
82	1	16.3535	8.6465
83	1	15.5303	9.4697
84	1	15.9239	9.6173
85	1	15.4619	9.8087
86	1	16.5000	10.0000
87		16.0000	10.0000
88	1	15.7500	10.0000
89		15.5000	10.0000
90	1	15.9239	10.3827
91	1	15.4619	10.1913
92	1	16.3535	11.3535
93		15.7071	10.7071
94	1	15.5303	10.5303
95		15.3535	10.3535
96	1	15.1913	10.4619
97	1	15.3827	10.9239
98	1	16.0000	12.0000
99		16.0000	20.0000
100		17.0000	[illegible]
101		17.0000	8.0000
102		17.0000	10.0000
103		17.0000	12.0000
104		17.0000	20.0000
105	1	17.0000	4.0000
106	1	17.0000	9.0000
107		17.0000	11.0000

108	0	[illegible]	1	17.0000	16.0000
109	0	[illegible]	1	19.5000	0.0000
110	0	0	1	19.5000	8.0000
111	0	[illegible]	1	19.5000	10.0000
112	[illegible]	0	1	19.5000	12.0000
113	0	[illegible]	1	19.5000	20.0000
114	0	[illegible]	[illegible]	22.0000	0.0000
115	0	2	[illegible]	22.0000	8.0000
116	0	[illegible]	[illegible]	22.0000	10.0000
117	0	[illegible]	[illegible]	22.0000	12.0000
118	0	[illegible]	1	22.0000	20.0000
119	0	[illegible]	1	22.0000	4.0000
120	0	[illegible]	1	22.0000	9.0000
121	0	[illegible]	1	22.0000	11.0000
122	[illegible]	[illegible]	1	22.0000	16.0000
123	0	[illegible]	1	26.0000	0.0000
124	0	[illegible]	1	26.0000	8.0000
125	0	[illegible]	1	26.0000	10.0000
126	0	[illegible]	1	26.0000	12.0000
127	0	[illegible]	1	26.0000	20.0000
128	0	[illegible]	[illegible]	30.0000	0.0000
129	0	[illegible]	[illegible]	30.0000	8.0000
130	0	[illegible]	[illegible]	30.0000	10.0000
131	0	[illegible]	[illegible]	30.0000	12.0000
132	[illegible]	[illegible]	0	30.0000	20.0000
133	[illegible]	[illegible]	1	30.0000	4.0000
134	[illegible]	[illegible]	1	30.0000	9.0000
135	0	[illegible]	1	30.0000	11.0000
136	0	[illegible]	1	30.0000	16.0000

UKUPAN BROJ JEDNACINA = 322
============================

OD TOGA JE NEPOZNATO:
- CVORNIH BRZINA : 272
- CVORNIH PRITISAKA: 50

P O D A C I   O   E L E M E N T I M A

PARABOLICNI ELEMENT

OZNAKA TIPA ELEMENTA......................= 3
UKUPAN BROJ ELEMENATA U GRUPI.............= 36
BROJ GRUPA MATERIJALNIH KONSTANATA........= 1
BROJ CVORNIH TACAKA ELEMENTA..............= 8
BROJ STEPENI SLOBODE ELEMENTA.............= 24

MATERIJALNE KONSTANTE

BROJ GRUPE	GUSTINA MASE	KINEMATICKA VISKOZNOST
1	1.[illegible]	[illegible].1[illegible]E+00

DEFINISANJE ELEMENATA

ELEMENT BROJ	LOKALNI CVOROVI ELEMENTA 1	2	3	4	5	6	7	8	BROJ GRUPE MAT.KONST.
1	1	15	16	2	10	20	11	6	1
2	2	16	17	3	11	21	12	7	1
3	3	17	18	4	12	22	13	8	1
4	4	18	19	5	13	23	14	9	1
5	15	29	30	16	24	34	25	20	1
6	16	30	31	17	25	35	26	21	1
7	17	31	32	18	26	36	27	22	1
8	18	32	33	19	27	37	28	23	1
9	29	45	46	30	38	54	39	34	1
10	30	46	47	48	39	55	50	40	1
11	3[illegible]	48	49	31	4[illegible]	57	41	35	1
12	49	47	62	63	56	67	68	73	1
13	48	63	64	49	73	69	74	57	1
14	31	49	50	32	41	58	42	36	1
15	49	64	65	50	74	70	75	58	1
16	65	66	51	50	71	72	59	75	1
17	50	51	52	32	59	60	43	42	1
18	32	52	53	33	43	61	44	37	1
19	45	1[illegible]	1[illegible]1	46	76	1[illegible]5	77	54	1
20	46	1[illegible]1	6[illegible]	47	77	82	78	55	1
21	47	[illegible]	81	62	78	83	79	67	1
22	8[illegible]	1[illegible]1	1[illegible]2	87	82	1[illegible]6	86	84	1
23	81	[illegible]	87	89	83	84	88	85	1
24	89	27	93	95	88	92	94	91	1
25	87	1[illegible]	1[illegible]3	93	80	1[illegible]7	92	96	1
26	65	95	93	51	76	94	97	72	1
27	51	93	1[illegible]3	52	97	92	98	66	1
28	[illegible]	1[illegible]3	1[illegible]1	53	98	1[illegible]8	99	61	1
29	1[illegible]	113	115	1[illegible]3	1[illegible]9	119	11[illegible]	105	1
30	101	115	116	102	11[illegible]	12[illegible]	111	106	1
31	1[illegible]2	116	117	1[illegible]3	111	121	112	107	1
32	1[illegible]3	117	118	1[illegible]4	112	122	113	108	1
33	113	1[illegible]	129	115	123	133	124	119	1

34	115	129	130	116	124	134	125	120	1
35	116	130	131	117	125	135	126	121	1
36	117	131	132	118	126	136	127	122	1

BROJEVI JEDNACINA				BR.STEPENI
CVOR	U	V	P	SLOB.CVORA
1	1	[illegible]	17	3
2	7	8	2	3
3	23	24	32	3
4	35	36	44	3
5	47	48	56	3
6	15	16		2
7	29	3		2
8	41	42		2
9	53	54		2
10	9	1		2
11	13	14		2
12	27	28		2
13	39	4		2
14	51	52		2
15	3	[illegible]	18	3
16	5	6	19	3
17	21	22	31	3
18	33	34	43	3
19	45	46	55	3
20	11	12		2
21	25	26		2
22	37	38		2
23	49	50		2
24	61	62		2
25	65	66		2
26	73	74		2
27	80	81		2
28	87	88		2
29	57	58	67	3
30	59	60	68	3
31	69	7	75	3
32	76	77	82	3
33	83	84	89	3
34	63	64		2
35	71	72		2
36	78	79		2
37	85	86		2
38	94	95		[illegible]
39	98	99		[illegible]
40	110	111		2
41	118	119		2
42	144	145		2
43	17[illegible]	171		2
44	177	178		2
45	[illegible]	91	1[illegible]	3
46	92	93	1[illegible]1	3
47	102	103	112	3
48	104	105	113	3
49	114	115	12[illegible]	[illegible]
50	14[illegible]	1[illegible]2	14[illegible]	3
51	156	157	165	3
52	166	167	172	[illegible]
53	173	171	179	3
54	96	97		2
55	106	107		2
56	108	109		2
57	116	117		2
58	112	113		2

59	162	163	0	2
60	168	169	0	2
61	175	176	0	2
62	121	122	131	3
63	123	124	132	3
64	133	134	139	3
65	147	148	153	3
66	154	155	164	3
67	125	126	0	2
68	127	128	0	2
69	135	136	0	2
70	149	150	0	2
71	158	159	0	2
72	160	161	0	2
73	129	130	0	2
74	137	138	0	2
75	151	152	0	2
76	184	185	0	2
77	188	189	0	2
78	196	197	0	2
79	203	204	0	2
80	192	193	198	3
81	199	200	205	3
82	194	195	0	2
83	201	202	0	2
84	214	215	0	2
85	222	223	0	2
86	212	213	0	2
87	208	209	217	3
88	220	221	0	2
89	218	219	224	3
90	229	230	0	2
91	233	234	0	2
92	241	242	0	2
93	225	226	235	3
94	231	232	0	2
95	227	228	236	3
96	244	245	0	2
97	246	247	0	2
98	248	249	0	2
99	254	255	0	2
100	180	181	190	3
101	182	183	191	3
102	206	207	216	3
103	237	238	243	3
104	250	251	256	3
105	186	187	0	2
106	210	211	0	2
107	239	240	0	2
108	252	253	0	2
109	261	262	0	2
110	265	266	0	2
111	273	274	0	2
112	280	281	0	2
113	287	288	0	2
114	257	258	267	3
115	259	260	268	3
116	269	270	275	3
117	276	277	282	3
118	283	284	289	3
119	263	264		2
120	271	272		2
121	278	279		2
122	285	286		2
123	294	295		2
124	[illegible]	[illegible]		2

125	306	307		2
126	313	314		2
127	320	321		2
128	290	291	3[illegible]	3
129	292	293	3[illegible]1	3
130	322	3[illegible]	3[illegible]	3
131	309	31[illegible]	315	3
132	316	317	322	3
133	296	297		2
134	3[illegible]4	3[illegible]		2
135	311	31[illegible]		[illegible]
136	318	319		2

UKUPAN BROJ JEDNACINA JE 322

ELEMENTI SPOLJASNJE KONTURE (KONTURA G1):

1	2	3	4	5	8	9	18
19	28	29	32	33	36		

ELEMENTI SPOLJASNJE KONTURE (KONTURA G2):

ELEM.	STRANA
33	2
34	2
35	2
36	2

ELEMENTI UNUTRASNJE KONTURE (KONTURA G3):

ELEM.	STRANA
12	[illegible]
13	[illegible]
15	[illegible]
16	[illegible]
21	[illegible]
23	[illegible]
24	[illegible]
25	[illegible]

G R A N I C N I   I   P O C E T N I   U S L O V I

SPOLJASNJA KONTURA G1 - ESENCIJALNI USLOVI

CVOR N	1=ZADAT USLOV; 0=NIJE ZADAT U	V	P	VREDNOST GRANICNIH USLOVA U	V	P
1	1	1	0	1.000	0.000	0.000
2	1	1	0	1.000	0.000	0.000
3	1	1	0	1.000	0.000	0.000
4	1	1	0	1.000	0.000	0.000
5	1	1	0	1.000	0.000	0.000
6	1	1	0	1.000	0.000	0.000
7	1	1	0	1.000	0.000	0.000
8	1	1	0	1.000	0.000	0.000
9	1	1	0	1.000	0.000	0.000
10	1	1	0	1.000	0.000	0.000
14	1	1	0	1.000	0.000	0.000
15	1	1	0	1.000	0.000	0.000
19	1	1	0	1.000	0.000	0.000
24	1	1	0	1.000	0.000	0.000
28	1	1	0	1.000	0.000	0.000
29	1	1	0	1.000	0.000	0.000
33	1	1	0	1.000	0.000	0.000
38	1	1	0	1.000	0.000	0.000
44	1	1	0	1.000	0.000	0.000
45	1	1	0	1.000	0.000	0.000
53	1	1	0	1.000	0.000	0.000
76	1	1	0	1.000	0.000	0.000
99	1	1	0	1.000	0.000	0.000
1[illegible]	1	1	0	1.000	0.000	0.000
104	1	1	0	1.000	0.000	0.000
109	1	1	0	1.000	0.000	0.000
113	1	1	0	1.000	0.000	0.000
114	1	1	0	1.000	0.000	0.000
118	1	1	0	1.000	0.000	0.000
123	1	1	0	1.000	0.000	0.000
127	1	1	0	1.000	0.000	0.000
128	1	1	1	1.000	0.000	0.000
13[illegible]	1	1	0	1.000	0.000	0.000

SPOLJASNJA KONTURA G2 - PRIRODNI USLOVI

CVOR	DU/DX	DU/DY	DV/DX	DV/DY
128	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
129	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
130	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
131	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
132	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
133	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
134	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
135	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
136	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

UNUTRASNJA KONTURA G3 - KONTAKT SA KONSTRUKCIJOM

CVOROVI TACKE UNUTRASNJE KONTURE
I ODGOVARAJUCI [illegible] (ZA BRZINE):

CVOROVI:

62	63	64	65	66
68	69	70	71	79
81	85	89	91	95
96				

JEDNACINE:

121	122	123	124	133	134	147	148	154	155
127	128	135	136	149	150	158	159	203	204
199	[illegible]	222	223	218	219	233	234	227	228
214	245								

SPECIFICIRANI GRANICNI USLOVI

JEDNACINA BROJ	INDIKATOR NIZ NCOD	GRAN USLOV VEKTOR BC
1	1	1.[illegible]
2	1	[illegible]
3	1	1.[illegible]
4	1	[illegible]
7	1	1.[illegible]
8	1	[illegible]
9	1	1.[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
15	1	1.[illegible]
16	1	[illegible]
23	1	1.[illegible]
24	1	[illegible]
29	1	1.[illegible]
3[illegible]	1	[illegible]
35	1	1.[illegible]
36	1	[illegible]
41	1	1.[illegible]
42	1	[illegible]
45	1	1.[illegible]
16	1	[illegible]
47	1	1.[illegible]
48	1	[illegible]
51	1	1.[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
53	1	1.[illegible]
54	1	[illegible]
57	1	1.[illegible]
58	1	[illegible]
61	1	1.[illegible]
62	1	[illegible]
83	1	1.[illegible]
84	1	[illegible]
[illegible]	1	1.[illegible]
88	1	[illegible]
[illegible]	1	1.[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
94	1	1.[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
[illegible]	1	[illegible]
124	1	[illegible]
127	1	[illegible]
129	1	[illegible]
133	1	[illegible]
134	1	[illegible]

135	1	[illegible]
136	1	[illegible]
147	1	[illegible]
148	1	[illegible]
149	1	[illegible]
15[illegible]	1	[illegible]
154	1	[illegible]
155	1	[illegible]
158	1	[illegible]
159	1	[illegible]
173	1	1.[illegible]
174	1	[illegible]
177	1	1.[illegible]
178	1	[illegible]
18[illegible]	1	[illegible]
181	1	[illegible]
184	1	1.[illegible]
185	1	[illegible]
199	1	[illegible]
2[illegible]	1	[illegible]
2[illegible]3	1	[illegible]
2[illegible]4	1	[illegible]
218	1	[illegible]
219	1	[illegible]
222	1	[illegible]
223	1	[illegible]
227	1	[illegible]
228	1	[illegible]
233	1	[illegible]
234	1	[illegible]
244	1	[illegible]
245	1	[illegible]
25[illegible]	1	1.[illegible]
251	1	[illegible]
254	1	1.[illegible]
255	1	[illegible]
257	1	1.[illegible]
258	1	[illegible]
261	1	1.[illegible]
262	1	[illegible]
283	1	1.[illegible]
284	1	[illegible]
287	1	1.[illegible]
288	1	[illegible]
29[illegible]	1	1.[illegible]
291	1	[illegible]
294	1	1.[illegible]
295	1	[illegible]
3[illegible]	1	[illegible]
316	1	1.[illegible]
317	1	[illegible]
32[illegible]	1	1.[illegible]
321	1	[illegible]

REFERENTNI PRITISAK
JE ZADAT U CVORU BROJ 128
(JEDNACINA BROJ: 3 [illegible])

UKUPAN BROJ JEDNACINA JE : 322

OD TOGA JE ZADATO :
ESENCIJALNIH USLOVA
NA KONTURI G1 - 67
NA KONTURI [illegible] - 37

```
--------------------------------------
UKUPNO ZADATO          -    99

PREOSTAJE NEPOZNATIH      :       223
```

ZADATI POCETNI USLOVI PO BRZINAMA
****

CVOR:	BRZINA U	BRZINA V	KN
1	1.[illegible]	0.[illegible]	0
10	1.[illegible]	0.[illegible]	0
11	0.9889	0.01020	0
12	1.034	-0.00251	0
13	0.9884	-0.0078	0
14	1.[illegible]	0.[illegible]	0
16	0.9914	0.0249	0
17	0.9578	0.00014	0
18	0.991	-0.0154	0
19	1.000	0.[illegible]	0
20	1.006	-0.01474	0
21	0.9762	-0.00235	0
22	0.9763	0.0033	0
23	1.007	0.01379	0
24	1.006	0.[illegible]	0
25	0.9634	-0.02294	0
26	0.9796	0.0167	0
27	0.9642	0.02233	0
28	1.[illegible]	0.[illegible]	0
30	0.9542	-0.07866	0
31	0.8522	0.0131	0
32	0.9566	0.06985	0
33	1.[illegible]	0.[illegible]	0
34	1.043	-0.04725	0
35	0.917	-0.0897	0
36	0.9114	0.092 3	0
37	1.44	0.0511	0
38	1.[illegible]	0.[illegible]	0
39	1.034	-0.09495	0
40	0.8949	-0.193	0
41	0.694	0.012	0
42	0.6955	0.1959	0
43	1.034	0.09942	0
44	1.[illegible]	0.[illegible]	0
46	1.117	-0.1 97	0
47	1.07	-0.2329	0
48	0.6913	-0.4174	0
49	0.14	0.0132	0
50	0.6918	0.426	0
51	1.06	0.2374	0
52	1.115	0.1165	0
53	1.[illegible]	0.[illegible]	0
54	1.489	-0.05281	0
55	1.109	-0.2671	0
56	0.9223	-0.4531	0
57	0.5323	-0.3135	0
58	0.5328	0.3165	0
59	0.9222	0.4557	0
60	1.109	0.270	0
61	1.093	0.5257	0
62	0.[illegible]	0.[illegible]	0
67	.7 92	-0. 345	0

68	0.000[illegible]	0.[illegible]	0
72	0.7073[illegible]	0.03532	0
73	0.5962[illegible]	-0.4768[illegible]	0
74	0.1581[illegible]	0.00151	0
75	0.5976[illegible]	0.4721[illegible]	0
76	1.000[illegible]	0.[illegible]	0
77	1.123[illegible]	-0.09043	0
78	0.7626	0.0[illegible]89[illegible]	0
79	[illegible]	0.[illegible]	0
80	0.4698[illegible]	0.0685[illegible]	0
81	[illegible]	0.[illegible]	0
82	0.9383[illegible]	0.[illegible]597[illegible]	0
83	0.1924[illegible]	0.05868	0
84	0.1569[illegible]	0.04219	0
85	0.00[illegible]	0.[illegible]	0
86	0.[illegible]6439	0.0[illegible]263	0
87	0.03179	0.00[illegible]32	0
88	0.04716	-0.00034	0
89	0.[illegible]	0.[illegible]	0
90	0.150[illegible]	-0.[illegible]4137	0
91	0.[illegible]	0.[illegible]	0
92	0.9341[illegible]	-0.05498	0
93	0.4668[illegible]	-0.06766	0
94	0.1996[illegible]	-0.05767	0
95	0.00[illegible]	0.0000[illegible]	0
97	0.7598[illegible]	-0.0[illegible]796	[illegible]
98	1.1230[illegible]	0.09367	0
99	1.[illegible]	0.[illegible]	0
101	1.129[illegible]	-0.06451	0
102	[illegible].2099[illegible]	0.0[illegible]523	0
103	1.132[illegible]	0.06288	0
104	1.[illegible]	0.[illegible]	0
105	1.113[illegible]	-0.01093	0
106	0.5997[illegible]	0.08481	0
107	0.5957[illegible]	-0.08223	0
108	1.117[illegible]	0.01739	0
109	1.[illegible]	0.[illegible]	0
110	1.[illegible]16[illegible]	0.01311	0
111	0.4343[illegible]	0.0[illegible]732	0
112	1.[illegible]12[illegible]	-0.0[illegible]531	0
113	1.[illegible]	0.[illegible]	0
115	0.9197[illegible]	0.[illegible]3976	0
116	0.5428[illegible]	0.01149	0
117	0.[illegible]99	-0.[illegible]2166	0
118	1.[illegible]	0.[illegible]	0
119	1.119[illegible]	0.0[illegible]3[illegible]4	0
120	0.6795[illegible]	0.[illegible]41[illegible]6	0
121	0.6655[illegible]	-0.02[illegible]58	0
122	1.136[illegible]	0.0[illegible]419	0
123	1.00[illegible]	0.00[illegible]	0
124	0.9361[illegible]	0.03339	0
125	0.722[illegible]	0.02665	0
126	0.9197[illegible]	-0.00427	0
127	1.0[illegible]	0.[illegible]	0
129	0.9643[illegible]	0.[illegible]9234	0
130	0.8231[illegible]	0.[illegible]4818	0
131	0.9399[illegible]	-0.[illegible]2192	0
132	1.[illegible]	0.[illegible]	0
133	1.[illegible]27[illegible]	0.1[illegible]37[illegible]	0
134	0.8771[illegible]	0.[illegible]82[illegible]5	0
135	0.9531[illegible]	0.[illegible]396	0
136	1.1[illegible]7[illegible]	-0.02[illegible]	0

GENERISANI POCETNI USLOVI
****

CVOR:	BRZINA U	BRZINA V	KN
1	1.[illegible]	0.[illegible]	
2	1.[illegible]	0.[illegible]	
3	1.[illegible]	0.[illegible]	
4	1.[illegible]	0.[illegible]	
5	1.[illegible]	[illegible]	
6	1.[illegible]	0.[illegible]	
7	1.[illegible]	0.[illegible]	
8	1.[illegible]	0.[illegible]	
9	1.[illegible]	[illegible]	
10	1.[illegible]	[illegible]	
11	[illegible].9889	0.[illegible]	
12	1.[illegible]34	-[illegible].[illegible]51	
13	[illegible].9864	-[illegible].[illegible]78[illegible]	
14	1.[illegible]	0.[illegible]	
15	1.[illegible]	[illegible]	
16	[illegible].9913	0.[illegible]19[illegible]	
17	[illegible].9578	[illegible]14	
18	[illegible].991	-[illegible].[illegible]154	
19	1.[illegible]	[illegible]	
20	1.[illegible]6	-0.[illegible]1471	
21	[illegible].976[illegible]	-0.[illegible]235	
22	[illegible].9763	[illegible]331	
23	1.[illegible]7	0.[illegible]1379	
24	1.[illegible]	0.[illegible]	
25	[illegible].9631	-0.[illegible]2[illegible]94	
26	[illegible].9796	[illegible]67	
27	[illegible].9642	0.[illegible]2233	
28	1.[illegible]	[illegible]	
29	1.[illegible]	[illegible]	
30	[illegible].9542	-[illegible].[illegible]7[illegible]66	
31	[illegible].85[illegible]2	[illegible]131	
32	[illegible].9566	[illegible]6985	
33	1.[illegible]	[illegible]	
34	1.[illegible]43	-[illegible].[illegible]4725	
35	[illegible].91[illegible]7	-[illegible].[illegible]89[illegible]7	
36	[illegible].9114	[illegible]92[illegible]3	
37	1.[illegible]44	[illegible]5[illegible]11	
38	1.[illegible]	[illegible]	
39	1.[illegible]34	-[illegible]9495	
40	[illegible].8949	-[illegible].193	
41	[illegible].69[illegible]1	[illegible]12	
42	[illegible].8955	[illegible].1959	
43	1.[illegible]34	[illegible]9842	
44	1.[illegible]	[illegible]	
45	1.[illegible]	0.[illegible]	
46	1.117	-[illegible].1[illegible]97	
47	1.[illegible]7	-[illegible].2329	
48	[illegible].691[illegible]	-[illegible].1174	
49	[illegible].44[illegible]	[illegible]132	
50	[illegible].6918	[illegible].42[illegible]6	
51	1.[illegible]	[illegible].2374	
52	1.115	[illegible].1165	
53	1.[illegible]	[illegible]	
54	1.[illegible]89	-[illegible].5231	
55	1.1[illegible]9	-[illegible].2671	
56	[illegible].9223	-[illegible].4531	
57	[illegible].5323	-[illegible].3135	
58	[illegible].5326	[illegible].3165	
59	[illegible].9222	[illegible].4557[illegible]	
60	1.1[illegible]	[illegible].27[illegible]	
61	1.[illegible]93	[illegible]5257	
62	[illegible]	[illegible]	

63	[illegible]	0.0[illegible]
64	[illegible]	0.[illegible]
65	[illegible]	[illegible]
66	[illegible]	[illegible]
67	[illegible].7[illegible]92[illegible]	-0.0345[illegible]
68	[illegible]	0.000[illegible]
69	[illegible]	[illegible]
70	[illegible]	0.00[illegible]
71	[illegible]	[illegible]
72	[illegible].7[illegible]73[illegible]	0.03532
73	[illegible].5962[illegible]	-0.47[illegible]8[illegible]
74	0.1581[illegible]	0.00151
75	[illegible].5976[illegible]	0.4721[illegible]
76	1.[illegible]	0.[illegible]
77	1.123[illegible]	-0.[illegible]9043
78	0.7626[illegible]	0.0089[illegible]
79	0.0[illegible]	[illegible]
80	[illegible].4698[illegible]	[illegible].0685[illegible]
81	[illegible]	[illegible]
82	0.9383[illegible]	0.0597[illegible]
83	[illegible].1924[illegible]	0.05868
84	[illegible].1509[illegible]	0.04219
85	0.00[illegible]	0.[illegible]
86	0.06439	0.00263
87	0.03179	0.0[illegible]032
88	[illegible].[illegible]716	-[illegible].0[illegible]034
89	0.00[illegible]	0.[illegible]
90	[illegible].15[illegible]	-0.04137
91	[illegible]	0.[illegible]
92	[illegible].9341[illegible]	-0.[illegible]5488
93	[illegible].1669[illegible]	-0.[illegible]6766
94	[illegible].19[illegible]6[illegible]	-0.[illegible]5767
95	[illegible]	0.[illegible]
96	[illegible]	[illegible]
97	[illegible].7598[illegible]	-[illegible]796
98	1.123[illegible]	[illegible]9367
99	1.[illegible]	[illegible]
100	1.[illegible]	[illegible]
101	1.129[illegible]	-[illegible].[illegible]6451
102	[illegible].2[illegible]9[illegible]	[illegible].[illegible]523
103	1.132[illegible]	[illegible].[illegible]6288
104	1.[illegible]	0.[illegible]
105	1.113[illegible]	-[illegible].[illegible]93
106	[illegible].5997[illegible]	[illegible].[illegible]8481
107	[illegible].5957	-[illegible].[illegible]8223
108	1.117[illegible]	[illegible].[illegible]1739
109	1.[illegible]	[illegible]
110	1.[illegible]16[illegible]	[illegible].01311
111	[illegible].4343[illegible]	[illegible].[illegible]732
112	1.[illegible]12[illegible]	-[illegible].[illegible]2531
113	1.[illegible]	0.[illegible]
114	1.[illegible]	0.[illegible]
115	[illegible].9197	[illegible].[illegible]3976
116	[illegible].5428	[illegible]1149
117	[illegible].9[illegible]99	-[illegible].[illegible]2466
118	1.[illegible]	[illegible]
119	1.119[illegible]	[illegible].[illegible]3[illegible]4
120	[illegible].679[illegible]	[illegible]41[illegible]
121	[illegible].6655	-[illegible].[illegible]2[illegible]58
122	1.13[illegible]	[illegible]419
123	1.[illegible]	[illegible]
124	[illegible].9361	[illegible]3339
125	[illegible].722[illegible]	[illegible]2665
126	[illegible].9197	-[illegible]427
127	1.[illegible]	[illegible]
128	1.[illegible]	[illegible]

129	0.9643[illegible]	0.09234
130	0.8231[illegible]	0.04818
131	0.9399[illegible]	-0.02192
132	1.[illegible]	0.[illegible]
133	1.027[illegible]	0.1037[illegible]
134	0.8774[illegible]	0.08205
135	0.8531[illegible]	0.00396
136	1.1[illegible]	-0.02668

SVI ELEMENTI VEKTORA R1
SU JEDNAKI NULI

USTALJENO STRUJANJE OKO FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE
****

INTERVAL VREMENA BROJ [illegible]
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible] SEC

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
======================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = [illegible].5[illegible]

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 2

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
2	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
3	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
4	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+0[illegible]
5	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+0[illegible]
6	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
7	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+0[illegible]
8	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
9	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
1[illegible]	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
11	[illegible].988853E+[illegible]	[illegible]1[illegible]2113E-[illegible]1
12	[illegible].1[illegible]3418E+[illegible]1	-[illegible].5[illegible]7315E-[illegible]3
13	[illegible].98839[illegible]	-[illegible]781339E-02
14	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
15	[illegible].1[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
16	[illegible].991361[illegible]+[illegible]	[illegible]492274E-[illegible]2
17	[illegible].957839[illegible]	[illegible]141900[illegible]-[illegible]3
18	[illegible].99[illegible]981E+[illegible]	-[illegible].1569[illegible]5E-02
19	[illegible].1[illegible]F+[illegible]1	[illegible]E+0[illegible]
2[illegible]	[illegible].1[illegible]582E+[illegible]1	-[illegible]147414E-[illegible]1
21	[illegible].976197E+[illegible]	-[illegible].234751E-[illegible]2
22	[illegible].976271F+[illegible]	[illegible]33[illegible]449E-[illegible]2
23	[illegible].1[illegible]664E+[illegible]1	[illegible]137947E-[illegible]1
24	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
25	[illegible].96335[illegible]	-[illegible].2[illegible]9675E-[illegible]1
26	[illegible].979639E+[illegible]	[illegible]6744[illegible]2E-[illegible]3
27	[illegible].9641[illegible]E+[illegible]	[illegible]22354[illegible]E-[illegible]1
28	[illegible].1[illegible]F+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
29	[illegible].1[illegible]F+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
3[illegible]	[illegible].954133E+[illegible]	-[illegible].7[illegible]6651E-[illegible]1
31	[illegible].85[illegible]244[illegible]+[illegible]	[illegible]13[illegible]68[illegible]E-[illegible]2
32	[illegible].956528[illegible]+[illegible]	[illegible].69[illegible]611[illegible]-[illegible]1
33	[illegible].1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]
[illegible]	[illegible].1[illegible]42[illegible]1	-[illegible]17[illegible]47[illegible]-[illegible]1

35	0.91[illegible]683E+[illegible]	-0.89[illegible]488E-01
36	0.911357E+0[illegible]	-0.92[illegible]28E-01
37	0.1[illegible]44175E+01	-0.5[illegible]1[illegible]34E-01
38	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
39	0.1[illegible]3427[illegible]E+01	-0.9[illegible]158E-01
40	0.894831E+0[illegible]	-0.193[illegible]95E+[illegible]
41	0.69[illegible]446E+[illegible]	0.1189[illegible]1E-02
42	0.895398E+[illegible]	0.19[illegible]23E+[illegible]
43	0.1[illegible]3398E+01	0.984819E-01
44	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
45	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
46	0.111666E+01	-0.1[illegible]986[illegible]E+[illegible]
47	0.1[illegible]691E+01	-0.2328[illegible]E+[illegible]
48	0.691325E+[illegible]	-0.417175E+[illegible]
49	0.439959E+[illegible]	0.128148E-02
50	0.691736E+[illegible]	0.4[illegible]627E+[illegible]
51	0.1[illegible]593E+01	0.234647E+[illegible]
52	0.111461E+01	0.116613E+[illegible]
53	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
54	0.1[illegible]988[illegible]E+01	-0.528292E-01
55	0.1[illegible]863E+01	-0.267593E+[illegible]
56	0.922123E+[illegible]	-0.453183E+[illegible]
57	0.532233E+[illegible]	-0.313549E+[illegible]
58	0.53272[illegible]E+[illegible]	0.31618[illegible]E+[illegible]
59	0.922[illegible]46E+[illegible]	0.455723E+[illegible]
60	0.1[illegible]884E+01	0.27[illegible]15[illegible]E+[illegible]
61	0.1[illegible]9327E+01	0.525915E-01
62	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
63	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
64	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
65	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
66	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
67	0.7[illegible]8735E+[illegible]	-0.345469E-01
68	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
69	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
70	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
71	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
72	0.7[illegible]694[illegible]E+[illegible]	0.353587E-01
73	0.596[illegible]68E+[illegible]	-0.47[illegible]712E+[illegible]
74	0.158[illegible]17E+[illegible]	0.146561E-02
75	0.59747[illegible]E+[illegible]	0.471998E+[illegible]
76	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
77	0.112277E+01	-0.9[illegible]5824E-01
78	0.762251E+[illegible]	0.9[illegible]6365E-02
79	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
80	0.469528E+[illegible]	0.685137E-01
81	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
82	0.938[illegible]39E+[illegible]	0.599526E-01
83	0.19243[illegible]E+[illegible]	0.586326E-01
84	0.15[illegible]875E+[illegible]	0.421653E-01
85	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
86	0.64521[illegible]E-01	0.264[illegible]3[illegible]E-02
87	0.317639E-01	0.342216E-03
88	0.7[illegible]8826E-02	-0.327962E-03
89	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
90	0.149967E+[illegible]	-0.413212E-01
91	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
92	0.9338[illegible]7E+[illegible]	-0.551[illegible]56E-01
93	0.4665[illegible]5E+[illegible]	-0.676448E-01
94	0.19[illegible]48E+[illegible]	-0.576114E-01
95	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
96	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
97	0.759462E+[illegible]	-0.8[illegible]9639E-02
98	0.11226[illegible]E+01	0.938[illegible]E-01
99	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
100	0.1[illegible]E+01	[illegible]

101	0.112943E+01	-0.645747E-01
102	0.209[illegible]97E+01	0.523401E-02
103	0.113181E+01	[illegible].629334E-01
104	0.14[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
105	0.111318E+01	-0.1[illegible]9466E-01
106	0.599578E+[illegible]	0.848176E-01
107	0.595624E+[illegible]	-0.822[illegible]65E-01
108	0.111741E+01	0.173917E-01
109	0.1[illegible]E+01	[illegible]00E+00
110	0.101566E+01	0.131208E-01
111	0.434421E+[illegible]	[illegible].730931E-02
112	0.111226E+01	-0.532045E-02
113	0.100[illegible]E+01	[illegible]000E+00
114	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]000E+00
115	0.919434E+00	0.397822E-01
116	0.54289[illegible]E+00	0.114781E-01
117	0.909726E+00	-0.246768E-01
118	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]000E+00
119	[illegible].111893E+01	[illegible].3[illegible]3732E-02
120	[illegible].678948E+00	[illegible].410665E-01
121	[illegible].665537E+[illegible]	-0.2[illegible]5901E-01
122	[illegible].113569E+01	0.416216E-02
123	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]000E+00
124	[illegible].935874E+[illegible]	[illegible].333993E-01
125	[illegible].722[illegible]64E+[illegible]	[illegible].266251E-01
126	[illegible].91967[illegible]E+00	-0.427[illegible]08E-02
127	0.1[illegible]E+01	[illegible]00E+00
128	0.10[illegible]E+01	[illegible]00E+00
129	[illegible].96421[illegible]E+[illegible]	0.923628E-01
130	[illegible].823[illegible]6[illegible]E+00	[illegible].48[illegible]764E-01
131	[illegible].94[illegible]9E+00	-0.219633E-01
132	0.14[illegible]E+01	0.[illegible]000E+00
133	[illegible].102670E+01	[illegible].1[illegible]3627E+00
134	0.877267E+00	0.819757E-01
135	[illegible].853127E+[illegible]	0.391253E-02
136	0.110692E+01	-0.267733E-01

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	-[illegible].3[illegible]2462E-01
2	-0.751994E-01
3	-[illegible].525759E-01
4	-0.7456[illegible]2E-01
5	-0.323574E-01
15	-[illegible].82469[illegible]E-01
16	-[illegible].46232[illegible]E-01
17	-0.473394E-01
18	-[illegible].4659[illegible]E-01
19	-0.83[illegible]224E-01
29	-[illegible].128[illegible]6E+[illegible]
30	-[illegible].377653E-01
31	[illegible].491997E-[illegible]1
32	-[illegible].39[illegible]963E-[illegible]
33	-[illegible].132[illegible]E+[illegible]
45	-[illegible].114[illegible]4[illegible]E+[illegible]
46	-[illegible].19339[illegible]E+[illegible]
47	-[illegible].378767E+[illegible]
48	[illegible].567[illegible]54E-[illegible]1
49	[illegible].412982E+[illegible]
50	[illegible].552357E-[illegible]1
51	-[illegible].38[illegible]441E+[illegible]
[illegible]	-[illegible].1911[illegible]
[illegible]	[illegible].1196[illegible]

62	-0.929681E+00
63	0.441627E-01
64	0.795926E+00
65	0.393428E-01
66	-0.931218E+00
80	-0.453924E+00
81	-0.488523E+00
87	-0.416[illegible]58E+00
89	-0.5593[illegible]8E+00
93	-0.452663E+00
95	-0.486374E+00
100	-0.9[illegible]4661E-01
101	-0.244[illegible]97E+00
102	-0.296[illegible]66E+00
103	-0.246324E+00
104	-0.991573E-01
114	-0.171[illegible]77E+00
115	-0.15[illegible]931E+00
116	-0.1441[illegible]4E+00
117	-0.155573E+00
118	-0.194649E+00
128	0.000000E+00
129	-0.189[illegible]44E+00
130	-0.219987E+00
131	-0.211[illegible]49E+00
132	-0.129851E+00

PODACI O KONSTRUKCIJI
****

DVODIMENZIONALNI MODEL FLEKSIBILNOG DIMNJAKA

VREMENSKA INTEGRACIJA........ = 1
.EQ.1 - DIFERENCNI POSTUPAK
.EQ.2 - WILSON-THETA

UKUPNO VREME: OD T= 0.0 DO T= 0.3 SEC

POCETNI USLOVI KRETANJA:
========================

HOMOGENI

CENTRI MASE I KRUTOSTI
======================

CENTAR MASE:
XM = 15.[illegible]
YM = [illegible]

CENTAR KRUTOSTI:
XK = 15.[illegible]
YK = 1[illegible]

EKSCENTRICITET CENTRA KRUTOSTI:
EX = [illegible]
EY = [illegible]

EKVIVALENTNA MATRICA MASE

4.446	[illegible]	[illegible]
[illegible]	4.446	[illegible]
[illegible]	[illegible]	51.751

EKVIVALENTNA MATRICA KRUTOSTI

6.376	[illegible]	[illegible]
[illegible]	6.376	[illegible]
[illegible]	[illegible]	195111.23[illegible]

CVORNE TACKE NA KONTURI G3
==========================

CVOR	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	- .3[illegible]	[illegible].354
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible].167

69	-0.462	-0.191
70	-0.462	0.191
71	-0.191	0.462
79	0.191	-0.462
81	0.354	-0.354
85	0.462	-0.191
89	0.5[illegible]	[illegible]
91	0.462	0.191
95	0.354	0.354
96	0.191	0.462

PRECNIK KONSTRUKCIJE:
D = 1.[illegible]

ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU
=====================================

INTERVAL VREMENA BROJ [illegible]
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible] SEC

REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE
=================================

USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-1.223	14.915	9.566	[illegible].227	14.601	9.507

USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
0.785	15.1[illegible]5	9.999	[illegible].001	14.551	340.329

UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE
==============================

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-[illegible].439	14.574	8.79[illegible]	[illegible].229	14.600	11.356

POLOZAJ AERODINAMICKOG CENTRA:
============================

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

X = 14.6[illegible]3 Y = 8.79[illegible]

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

X = -[illegible].39[illegible] Y = -1.21[illegible]

VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE
===============================

U TRENUTKU T = [illegible] SEC

SILA FX	SILA FY	MOMENAT MZ
-[illegible].1386	[illegible].2285	-[illegible].622[illegible]

DINAMICKE KARAKTERISTIKE KONSTRUKCIJE
====================================

SVOJSTVENI OBLICI

.4743	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible].4743	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible].1396

SVOJSTVENE FREKVENCIJE

1.1975	1.1975	61.4019

NAJVECA SVOJSTVENA FREKVENCIJA: 61.4019

SVOJSTVENI OBLIK BROJ: 3

KRITICAN INTERVAL VREMENA: 0.0326 SEC

(NAPOMENA: KRITICAN INTERVAL VREMENA
JE POTREBAN ZA DIFERENCNI POSTUPAK)

```
**********************************************
*                                            *
*     INTERAKCIJA FLUIDA I KONSTRUKCIJE      *
*                                            *
**********************************************


UKUPNO VREME INTERAKCIJE:  0.3[illegible] SEC
UKUPAN BROJ INTERVALA VREMENA:     5

UGLALJENO STRUJANJE OKO FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE
================================================
(SLUCAJ LL=3)


INTERVAL VREMENA BROJ:      1
UKUPNO PROTEKLO VREME:  0.06[illegible] SEC



RESAVANJE JEDNACINA KRETANJA KONSTRUKCIJE
=========================================


NACIN RESAVANJA JEDNACINA:
DIFERENCNI POSTUPAK (CENTRALNE RAZLIKE)



** PAZNJA:

INTERVAL VREMENA SUVISE VELIK !
**  POVECATI BROJ INTERVALA  **


IZBOR NOVOG INTERVALA VREMENA


KRITICAN INTERVAL VREMENA JE:     0.03257 SEC
UKUPNO VREME PODELJENO SA TCP:     9.210

USVOJEN BROJ INTERVALA VREMENA    10
ODGOVARAJUCA DUZINA INTERVALA     0.03[illegible] SEC



DUZINA INTERVALA VREMENA :  0.03[illegible]    SEC
KRITICAN INTERVAL VREMENA:  0.0326    SEC


REZULTATI ZA INTERVAL VREMENA BROJ     1
========================================

(UKUPNO PROTEKLO VREME JE  0.03[illegible]   SEC)


POMERANJA NA KRAJU INTERVALA
============================

[illegible]
```

```
POMERANJE  V=   0.231314E-04
ROTACIJA  FI=  -0.548873E-05

BRZINE NA KRAJU INTERVALA
=========================

BRZINA TRANSLACIJE  U=  -0.147964E-02
BRZINA TRANSLACIJE  V=   0.771032E-03
BRZINA ROTACIJE    FI=  -0.118291E-03


POMERANJA CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
============================================

 CVOR  POMERANJE U     POMERANJE V
===================================
   62 -0.476935E-04   0.231314E-04
   63 -0.463014E-04   0.252432E-04
   64 -0.443891E-04   0.258353E-04
   65 -0.424769E-04   0.252432E-04
   66 -0.416648E-04   0.231314E-04
   68 -0.468876E-04   0.241659E-04
   69 -0.454244E-04   0.256295E-04
   70 -0.433542E-04   0.256295E-04
   71 -0.418976E-04   0.241659E-04
   79 -0.468876E-04   0.223961E-04
   81 -0.463014E-04   0.212187E-04
   85 -0.454244E-04   0.206325E-04
   89 -0.443891E-04   0.204266E-04
   91 -0.433542E-04   0.206325E-04
   95 -0.424769E-04   0.212187E-04
   96 -0.418976E-04   0.223961E-04


BRZINE CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
=========================================

 CVOR   BRZINA  U       BRZINA  V
===================================
   62 -0.156978E-02   0.771032E-03
   63 -0.154338E-02   0.834774E-03
   64 -0.147964E-02   0.861178E-03
   65 -0.141592E-02   0.834774E-03
   66 -0.138949E-02   0.771032E-03
   68 -0.156292E-02   0.805529E-03
   69 -0.151413E-02   0.854316E-03
   70 -0.144514E-02   0.854316E-03
   71 -0.139635E-02   0.805529E-03
   79 -0.156292E-02   0.736535E-03
   81 -0.154338E-02   0.707290E-03
   85 -0.151413E-02   0.687749E-03
   89 -0.147964E-02   0.680887E-03
   91 -0.144514E-02   0.687749E-03
   95 -0.141592E-02   0.707290E-03
   96 -0.139635E-02   0.736535E-03
```

INTERVAL VREMENA BROJ 1
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible] SEC

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
======================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = [illegible]

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 3

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
2	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
3	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
4	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
5	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
6	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
7	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
8	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
9	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
10	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]E+00
11	[illegible].988813E+0[illegible]	[illegible] 1[illegible]1944E-01
12	[illegible].103427E+01	-0.523541E-03
13	[illegible].988391E+0[illegible]	-[illegible].785794E-02
14	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
15	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
16	0.991352E+0[illegible]	[illegible].491463E-02
17	[illegible].957774E+[illegible]	[illegible].6[illegible]7199E-04
18	0.99[illegible]949E+0[illegible]	-[illegible].164259E-02
19	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]E+00
20	[illegible].100588E+01	-[illegible].147972E-01
21	0.976128E+[illegible]	-[illegible].242204E-02
22	[illegible].976245E+[illegible]	[illegible].323188E-02
23	[illegible].10[illegible]66[illegible]E+01	[illegible].137842E-01
24	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]E+00
25	[illegible].963335E+[illegible]	-[illegible].211[illegible]37[illegible]E-01
26	[illegible].979577E+[illegible]	[illegible].51[illegible]41[illegible]E-03
27	[illegible].96[illegible]7E+[illegible]	[illegible].223227E-01
28	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
29	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
30	[illegible].9[illegible]1279E+[illegible]	-[illegible]7[illegible]9274E-01
31	[illegible].[illegible]495[illegible]E+[illegible]	[illegible]1[illegible]2375E-02
32	[illegible].956276E+[illegible]	[illegible].6984[illegible]E-01
33	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
34	[illegible].1[illegible]E+01	-[illegible].171124E-01

35	.91[illegible]648E+[illegible]	-[illegible].894817E-01
36	.911[illegible]76E+[illegible]	[illegible].918443E-01
37	.1[illegible]4444E+[illegible]1	[illegible]1625E-01
38	.10[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
39	.1[illegible]346[illegible]E+[illegible]1	-[illegible]952563E-01
40	.895[illegible]78E+[illegible]	-[illegible].193826E+00
41	.689839E+[illegible]	[illegible]798259E-03
42	.894787E+[illegible]	[illegible]196178E+00
43	.1[illegible]308[illegible]E+[illegible]1	[illegible]985753E-01
44	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
45	.10[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
46	.111723E+[illegible]1	-[illegible]1[illegible]9982E+00
47	.1[illegible]7335+[illegible]1	-[illegible]2328[illegible]1E+01
48	.59147[illegible]E+[illegible]	-[illegible].418675E+00
49	.438847E+[illegible]	[illegible]717398E-03
50	.696437E+[illegible]	[illegible]42[illegible]849E+00
51	.1[illegible]49[illegible]E+[illegible]1	[illegible]2352[illegible]E+00
52	.111449E+[illegible]1	[illegible]116824E+00
53	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
54	.1[illegible]89[illegible]E+[illegible]	-[illegible]528[illegible]62E-[illegible]1
55	.11[illegible]923E+[illegible]1	-[illegible]2677[illegible]E+00
56	.9225[illegible]E+[illegible]	-[illegible]453934E+00
57	.531899E+[illegible]	-[illegible]314761E+00
58	.5313[illegible]1E+[illegible]	[illegible]316321E+00
59	.92[illegible]984E+[illegible]	[illegible]45[illegible]381E+00
60	.11[illegible]638[illegible]E+[illegible]1	[illegible]27[illegible]751E+00
61	.1[illegible]9333E+[illegible]1	[illegible]527351E-01
62	-[illegible].156978E-[illegible]2	[illegible]771[illegible]32E-03
63	-[illegible].154338E-[illegible]2	[illegible]834774E-03
64	-[illegible].147964E-[illegible]2	[illegible].861178E-03
65	-[illegible].14159[illegible]E-[illegible]2	[illegible]834774E-03
66	-[illegible].138919E-[illegible]2	[illegible].771[illegible]32E-03
67	.7[illegible]9563E+[illegible]	-[illegible]338611E-01
68	-[illegible].156292E-[illegible]2	[illegible]8[illegible]5529E-03
69	-[illegible].151413E-[illegible]2	[illegible].854316E-03
70	-[illegible].144514E-[illegible]2	[illegible].854316E-03
71	-[illegible].139635E-[illegible]2	[illegible]8[illegible]5529E-03
72	.70555[illegible]E+[illegible]	[illegible]3[illegible]688E-01
73	.596[illegible]67E+[illegible]	-[illegible]471313E+00
74	.15665[illegible]E+[illegible]	[illegible]827644E-03
75	.595637E+[illegible]	[illegible]472[illegible]86E+00
76	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
77	.112318E+[illegible]1	-[illegible]9[illegible]5742E-01
78	.76199[illegible]E+[illegible]	[illegible]96[illegible]724E-02
79	-[illegible].156292E-[illegible]2	[illegible]736535E-03
80	.468761E+[illegible]	[illegible]69[illegible]533E-01
81	-[illegible].154339E-[illegible]2	[illegible]7[illegible]729[illegible]E-03
82	.937948E+[illegible]	[illegible]292[illegible]E-[illegible]1
[illegible]	.1911[illegible]E+[illegible]	[illegible]592675E-01
[illegible]	.1[illegible]E+[illegible]	[illegible]E-[illegible]1
[illegible]	-[illegible].1514[illegible]3E-[illegible]2	[illegible]7719E-03
[illegible]	.632[illegible]E-[illegible]1	[illegible]12E-02
87	-[illegible].[illegible]386[illegible]E-[illegible]1	[illegible]982[illegible]55E-03
88	.563377E-[illegible]2	-[illegible]8[illegible]16E-04
89	-[illegible].1479[illegible]E-[illegible]2	[illegible]6[illegible]887E-03
90	.1487[illegible]E+[illegible]	-[illegible]411242E-01
91	-[illegible].14451[illegible]E-[illegible]2	[illegible]877749E-03
92	.9333[illegible]2E+[illegible]	-[illegible]5[illegible]15[illegible]7E-[illegible]1
93	.16539[illegible]E+[illegible]	-[illegible]67361[illegible]E-01
94	.189459E+[illegible]	-[illegible]571819E-01
95	-[illegible].1115[illegible]E-[illegible]2	[illegible]7[illegible]729[illegible]E-03
96	-[illegible].13263[illegible]E-[illegible]2	[illegible]736535E-03
97	.759434E+[illegible]	-[illegible]7754[illegible]7E-[illegible]2
98	.112255E+[illegible]1	[illegible]94[illegible]482E-[illegible]1
99	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+[illegible]
[illegible]	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]1

101	0.112965E+01	-0.644844E-01
102	0.2[illegible]8163E+01	0.538307E-02
103	0.113186E+01	0.631333E-01
104	0.10[illegible]F+01	0.[illegible]E+00
105	0.111345E+01	-0.[illegible]8896E-01
106	0.599212E+00	0.851096E-01
107	0.5[illegible]7282E+0[illegible]	-0.822267E-01
108	0.111754E+01	0.174462E-01
109	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
110	0.1[illegible]1576E+01	0.132859E-01
111	0.4338[illegible]2E+00	0.742625E-02
112	0.1012[illegible]5E+01	-0.53[illegible]596E-02
113	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
114	0.10[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
115	0.919431E+00	0.399517E-01
116	0.542324E+00	0.115526E-01
117	0.9[illegible]9286E+0[illegible]	-0.247[illegible]29E-01
118	[illegible]E+01	[illegible]E+00
119	0.119[illegible]E+01	0.3[illegible]31E-02
120	0.678716E+00	0.411782E-01
121	0.6649[illegible]8E+00	-0.2[illegible]5767E-01
122	0.11359[illegible]E+01	0.418422E-02
123	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
124	0.935972E+00	0.335344E-01
125	0.721877E+0[illegible]	0.267166E-01
126	0.9[illegible]937E+00	-0.423723E-02
127	0.10[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
128	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
129	0.9641[illegible]E+0[illegible]	0.926485E-01
130	0.823[illegible]77E+00	0.4627[illegible]6E-01
131	0.939879E+00	-0.219897E-01
132	0.10[illegible]5E+01	0.[illegible]E+00
133	0.1[illegible]265BE+01	0.1[illegible]3918E+00
134	0.87740BE+00	0.822444E-01
135	0.853[illegible]8E+00	0.398747E-02
136	0.11[illegible]7[illegible]E+01	-0.268652E-01

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	-0.305524E-01
2	-0.755458E-01
3	-0.528763E-01
4	-0.7492[illegible]5E-01
5	-0.325138E-01
15	-0.828636E-01
16	-0.4656[illegible]5E-01
17	-0.4763[illegible]E-01
18	-0.468325E-01
19	-0.833517E-01
29	-0.122177E+0[illegible]
30	-0.39[illegible]E-01
31	0.49[illegible]723E-01
32	-0.394141E-01
33	-0.132299E+0[illegible]
45	-0.1143[illegible]E+0[illegible]
46	-0.194433E+0[illegible]
47	-0.3[illegible]E+0[illegible]
48	0.554951E-01
49	0.41[illegible]36[illegible]E+0[illegible]
50	0.5569[illegible]E-01
51	-0.38[illegible]7921E+0[illegible]
52	-0.19[illegible]39E+0[illegible]
53	-0.1[illegible]E+0[illegible]

62	-0.932896E+[illegible]
63	0.417254E-01
64	0.796257E+[illegible]
65	0.9[illegible]43[illegible]6E-01
66	-0.93[illegible]989E+[illegible]
80	-0.455258E+[illegible]
81	-0.49[illegible]171E+[illegible]
87	-0.417[illegible]42E+[illegible]
89	-0.56[illegible]64[illegible]E+[illegible]
93	-0.453572E+[illegible]
95	-0.487[illegible]31E+[illegible]
100	-0.9[illegible]9675E-01
101	-0.244811E+[illegible]
102	-0.296782E+[illegible]
103	-0.246959E+[illegible]
104	-0.993[illegible]54E-01
114	-0.171568E+[illegible]
115	-0.151355E+[illegible]
116	-0.144573E+[illegible]
117	-0.155962E+[illegible]
118	-0.195168E+[illegible]
128	0.0[illegible]E+[illegible]
129	-0.189549E+[illegible]
130	-0.22[illegible]585E+[illegible]
131	-0.21165[illegible]E+[illegible]
132	-0.129155E+[illegible]

ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU
==

INTERVAL VREMENA BROJ 1
UKUPNO PROTEKLO VREME 0.030[illegible] SEC

REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE
====================================

USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-1.226	1[illegible].915	9.566	[illegible].228	14.601	9.508

USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
[illegible].785	15.1[illegible]6	10.[illegible]	-[illegible].[illegible]01	15.303	-343.036

UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE
==============================

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-[illegible].44[illegible]	14.574	8.791	[illegible].227	14.597	11.368

POLOZAJ AERODINAMICKOG CENTRA:
==============================

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

X = 14.5972 Y = 8.7913

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

X = -[illegible].1[illegible]28 Y = -1.2087

VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE
===============================

U TRENUTKU T = [illegible].300 SEC

SILA FX	SILA FY	MOMENAT MZ
-[illegible].44[illegible]	.227[illegible]	-[illegible].6235

NAJKRACA STRANICA OD SVIH
ELEMENATA NA KONTURI G3 : .382682E+00
(ELEMENT BROJ 12)
NAJVECE POMERANJE CVORA : .527488E-04
(CVORNA TACKA BROJ 68)
ODNOS POMERANJA I STRANE: [illegible]1

POMERANJA KONSTRUKCIJE DOVOLJNO MALA

INTERVAL VREMENA BROJ: 2
UKUPNO PROTEKLO VREME: 0.06[illegible] SEC

DUZINA INTERVALA VREMENA : 0.[illegible] SEC
KRITICAN INTERVAL VREMENA: [illegible]326 SEC

REZULTATI ZA INTERVAL VREMENA BROJ 2
=======================================

(UKUPNO PROTEKLO VREME JE 0.06[illegible] SEC)

POMERANJA NA KRAJU INTERVALA
============================

POMERANJE U= -0.177819E-03
POMERANJE V= 0.921894E-04
ROTACIJA FI= -0.330764E-05

BRZINE NA KRAJU INTERVALA
=========================

BRZINA TRANSLACIJE U= -0.444768E-02
BRZINA TRANSLACIJE V= 0.23[illegible]193E-02
BRZINA ROTACIJE FI= 0.7[illegible]365E-04

POMERANJA CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
==

CVOR	POMERANJE U	POMERANJE V
62	-0.179473E-03	0.921894E-04
63	-0.178989E-03	0.933584E-04
64	-0.177819E-03	0.938428E-04
65	-0.17665[illegible]E-03	0.933584E-04
66	-0.176166E-03	0.92189[illegible]E-04
68	-0.179347E-03	0.928219E-04
69	-0.178452E-03	0.937169E-04
70	-0.177187E-03	0.937169E-04
71	-0.176292E-03	0.928219E-04
7[illegible]	-0.179347E-03	0.915561E-04
81	-0.178989E-03	0.911966E-04
85	-0.178452E-03	0.9[illegible]661[illegible]E-04
89	-0.177819E-03	0.905352E-04
91	-0.177187E-03	0.9[illegible]661[illegible]E-04
95	-0.17665[illegible]E-03	0.911966E-04
96	-0.176292E-03	0.915561E-04

BRZINE CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
===

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
62	-0.441266E-02	0.23[illegible]193E-02
63	-0.442292E-02	0.227717E-02
64	-0.444768E-02	0.226692E-02

65	-0.447244E-02	0.227717E-02
66	-0.44827[illegible]E-02	0.230193E-02
68	-0.441533E-02	0.228853E-02
69	-0.443428E-02	0.226958E-02
70	-0.446108E-02	0.226958E-02
71	-0.448[illegible]3E-02	0.228853E-02
79	-0.441533E-02	0.231533E-02
81	-0.442292E-02	0.232669E-02
85	-0.443428E-02	0.233429E-02
89	-0.444768E-02	0.233695E-02
91	-0.4461[illegible]8E-02	0.233429E-02
95	-0.447244E-02	0.232669E-02
96	-0.448[illegible]3E-02	0.231533E-02

USTALJENO STRUJANJE OKO FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE
****

INTERVAL VREMENA BROJ 2
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible]

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
======================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = 0.50

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 5

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	0.1000[illegible]E+01	[illegible]E+00
2	[illegible]E+01	[illegible]E+00
3	[illegible]E+01	[illegible]E+00
4	[illegible]E+01	[illegible]E+00
5	[illegible]E+01	[illegible]E+00
6	[illegible]E+01	[illegible]E+00
7	[illegible]E+01	[illegible]E+00
8	[illegible]E+01	[illegible]E+00
9	[illegible]E+01	[illegible]E+00
10	[illegible]E+01	[illegible]E+00
11	.988726E+[illegible]	[illegible]1560E-01
12	.1[illegible]3428E+01	-.550105E-03
13	.988397E+[illegible]	-.794227E-02
14	[illegible]E+01	[illegible]E+00
15	[illegible]E+01	[illegible]E+00
16	.991295E+[illegible]	.488919E-02
17	.957642E+[illegible]	-.117717E-03
18	.99[illegible]894E+[illegible]	-.179566E-02
19	[illegible]E+01	[illegible]E+00
20	.10[illegible]6[illegible]3E+01	-.149145E-01
21	.975984E+[illegible]	-.258175E-02
22	.976196E+[illegible]	3[illegible]7296E-02
23	.10[illegible]653E+[illegible]	-.13755[illegible]E-01
24	[illegible]E+01	[illegible]E+00
25	.9[illegible]3316E+[illegible]	-.2[illegible]779[illegible]-01
26	.979443[illegible]	.173476[illegible]-03
27	.963743[illegible]	[illegible]225458-01
28	[illegible]E+01	[illegible]E+00
29	[illegible]E+01	[illegible]E+00
30	.9542[illegible]E+[illegible]	-.711685E-01
31	.819469[illegible]	[illegible]402484E-03
32	.955761[illegible]	.69774[illegible]E-01
33	[illegible]E+01	[illegible]E+00
34	[illegible]E+01	-[illegible]E-01

35	.910596E+[illegible]	-.9[illegible]3828E-01
36	.910512E+[illegible]	.914864E-01
37	.104435E+01	.5[illegible]277[illegible]E-01
38	.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
39	.10353[illegible]E+01	-.957166E-01
40	.895659E+[illegible]	-.195272E+00
41	.688628E+[illegible]	-.319853E-04
42	.893538E+[illegible]	.19649[illegible]E+00
43	.1[illegible]3316E+[illegible]1	.98749[illegible]E-01
44	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
45	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
46	.11184[illegible]+[illegible]1	-.11[illegible]196E+00
47	.1[illegible]645E+[illegible]1	-.232828E+00
48	.691873E+[illegible]	-.421172E+[illegible]
49	.436583E+[illegible]	-.577369E-03
50	.987718E+[illegible]	.421219E+00
51	.1[illegible]262E+01	.236227E+0[illegible]
52	.111423E+[illegible]1	.117237E+00
53	.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]
54	.1[illegible]8955E+[illegible]1	-.5[illegible]793E-01
55	.111[illegible]55E+01	-.26798[illegible]E+00
56	.923498E+[illegible]	-.455498E+00
57	.531299E+[illegible]	-.317324E+00
58	.528[illegible]2E+00	.31589[illegible]E+00
59	.9187[illegible]6E+[illegible]	.457639E+00
60	.11[illegible]736E+[illegible]1	.2719[illegible]7E+00
61	.1[illegible]9343E+01	.53[illegible]219E-01
62	-.441266E-[illegible]2	.23[illegible]193E-02
63	-.442292E-02	.227717E-02
64	-.441763E-02	.226692E-02
65	-.447244E-02	.227717E-02
66	-.44827[illegible]E-02	.23[illegible]193E-02
67	.7[illegible]8599E+[illegible]	-.321973E-01
68	-.441533E-[illegible]2	.228853E-02
69	-.443428E-[illegible]2	.226958E-02
70	-.44[illegible]8E-[illegible]2	.22695[illegible]E-02
71	-.44[illegible]3E-02	.228853E-02
72	.7[illegible]2535E+[illegible]	.373[illegible]26E-01
73	.596767E+[illegible]	-.472718E+00
74	.153916E+[illegible]	-.573486E-03
75	.591814[illegible]+[illegible]	.472[illegible]6[illegible]E+00
76	.1[illegible]E+[illegible]1	[illegible]E+00
77	.1124[illegible]1E+01	-.[illegible]5078E-01
78	.761742E+[illegible]	.1[illegible]7183E-01
79	-.441533E-02	.231533E-02
80	.16746[illegible]E+[illegible]	.7[illegible]22[illegible]5E-[illegible]1
81	-.412297E-02	.232069E-02
82	.937963E+[illegible]	.612688E-01
83	.18[illegible]797E+[illegible]	.6[illegible]768E-01
84	.147189E+[illegible]	.433322E-01
85	-.443428E-02	.233429E-02
86	.608322E-[illegible]1	.31721[illegible]E-02
87	.276493E-01	.873175E-03
88	.265455E-[illegible]2	.548244E-03
89	-.444768E-02	.233695E-02
90	.146135E+[illegible]	-.4[illegible]6529E-01
91	-.4461[illegible]8E-02	.233429E-02
92	.93716[illegible]E+[illegible]	-.559[illegible]6E-01
93	.4[illegible]E+[illegible]	-.[illegible]7799E-01
94	.137197E+[illegible]	-.5[illegible]252[illegible]E-01
95	-.417244E-02	.232669E-02
96	-.448[illegible]3E-02	.231533E-02
97	.756238E+[illegible]	-.71[illegible]E-02
98	.112252E+01	.945286E-01
99	.1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
[illegible]	.1[illegible]E+01	[illegible]E+[illegible]

101	0.113[illegible]11E+01	-0.642617E-01
102	0.206274E+0[illegible]	0.569860E-02
103	0.113192E+01	0.635186E-01
104	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
105	0.111399E+01	-0.1[illegible]7578E-01
106	0.59861[illegible]E+00	0.856985E-01
107	0.592971E+00	-0.822556E-01
108	0.111778E+01	0.175505E-01
109	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
110	0.1[illegible]16[illegible]4E+01	0.136239E-01
111	0.432584E+00	0.769905E-02
112	0.101159E+01	-0.526803E-02
113	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
114	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
115	0.919554E+00	0.4[illegible]2883E-01
116	0.541238E+00	0.117195E-01
117	0.9[illegible]839[illegible]E+00	-0.247553E-01
118	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
119	0.111926E+01	0.317319E-02
120	0.678339E+00	0.414045E-01
121	0.663674E+0[illegible]	-0.2[illegible]5314E-01
122	0.11363[illegible]E+01	0.423414E-02
123	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
124	0.936265E+[illegible]	0.338274E-01
125	0.721511E+0[illegible]	0.269123E-01
126	0.918[illegible]5E+0[illegible]	-0.415842E-02
127	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
128	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
129	0.964849E+00	0.932176E-01
130	0.823122E+00	0.487185E-01
131	0.939643E+00	-0.22[illegible]265E-01
132	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
133	0.1[illegible]263[illegible]E+01	0.1[illegible]4508E+00
134	0.877739E+[illegible]	0.828254E-01
135	0.852783E+00	0.417450E-02
136	0.11[illegible]735E+01	-0.27[illegible]421E-01

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	-0.312213E-01
2	-0.7623[illegible]2E-01
3	-0.5351[illegible]7E-01
4	-0.756341E-01
5	-0.328472E-01
15	-0.836463E-01
16	-0.4724[illegible]9E-01
17	-0.492186E-01
18	-0.473286E-01
19	-0.84[illegible]65E-01
29	-0.130357E+00
30	-0.391118E-01
31	[illegible].48[illegible]36E-01
32	-[illegible].3964[illegible]6E-01
33	-[illegible].132878E+[illegible]
45	-[illegible].114969E+[illegible]
46	-[illegible].196298E+00
47	-[illegible].384572E+[illegible]
48	[illegible].529422E-[illegible]
49	[illegible].414[illegible]48E+[illegible]
50	[illegible].571921E-[illegible]
51	-[illegible].3[illegible]1443E+[illegible]
52	-[illegible].1951[illegible]E+[illegible]
[illegible]	[illegible]

62	-[illegible].9397[illegible]1E+[illegible]
63	.367272E-[illegible]1
64	[illegible].79669[illegible]E+[illegible]
65	[illegible].42644[illegible]E-[illegible]1
66	-[illegible].93[illegible]21E+[illegible]
[illegible]	-[illegible].45794[illegible]E+[illegible]
[illegible]	-[illegible].493656E+[illegible]
87	-[illegible].418995E+[illegible]
89	-[illegible].563746E+[illegible]
93	-[illegible].15538[illegible]E+[illegible]
95	-[illegible].488437E+[illegible]
1[illegible]	-[illegible].92[illegible]238E-[illegible]1
1[illegible]1	-[illegible].24[illegible]2[illegible]3E+[illegible]
1[illegible]2	-[illegible].298177E+[illegible]
1[illegible]3	-[illegible].248215E+[illegible]
1[illegible]4	-[illegible].995979E-[illegible]1
114	-[illegible].172525E+[illegible]
115	-[illegible].152195E+[illegible]
116	-[illegible].14533[illegible]E+[illegible]
117	-[illegible].156714E+[illegible]
118	-[illegible].1962[illegible]3E+[illegible]
128	[illegible]E+[illegible]
129	-[illegible].19[illegible]523E+[illegible]
13[illegible]	-[illegible].221785E+[illegible]
131	-[illegible].212866E+[illegible]
132	-[illegible].129768E+[illegible]

ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU
==

INTERVAL VREMENA BROJ 2
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible].26[illegible] SEC

REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE
====================================

USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-1.231	14.915	9.565	[illegible].23[illegible]	14.602	9.510

USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
0.787	15.1[illegible]7	1[illegible].[illegible]	-[illegible].[illegible]7	14.990	-54.598

UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE
==============================

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-0.443	14.573	8.794	[illegible].224	14.592	11.396

POLOZAJ AERODINAMICKOG CENTRA:
==============================

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

X = 14.59[illegible]2   Y = 8.7941

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

X = -[illegible].[illegible]96   Y = -1.2[illegible]59

VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE
===============================

U TRENUTKU T = [illegible] SEC

SILA FX	SILA FY	MOMENAT MZ
-[illegible].4435	[illegible].2236	-[illegible].6264

NAJKRACA STRANICA OD SVIH
ELEMENATA NA KONTURI G3 : 3826821+[illegible]
(ELEMENT BROJ 12)
NAJVECE POMERANJE CVORA : .2[illegible]19445-03
(CVORNA TACKA BROJ [illegible])
ODNOS POMERANJA I STRANE : [illegible].[illegible]5

POMERANJA [illegible] DOVOLJNO MALA

** ZANEMARLJIVA PROMENA GEOMETRIJE ELEMENATA **

INTERVAL VREMENA BROJ: 3
UKUPNO PROTEKLO VREME: [illegible] SEC

DUZINA INTERVALA VREMENA : [illegible].3[illegible] SEC
KRITICAN INTERVAL VREMENA: [illegible].[illegible]326 SEC

REZULTATI ZA INTERVAL VREMENA BROJ 3
=====================================

(UKUPNO PROTEKLO VREME JE [illegible].[illegible]9[illegible] SEC)

POMERANJA NA KRAJU INTERVALA
============================

POMERANJE U= -[illegible].4[illegible]793E-3
POMERANJE V= [illegible]2[illegible]6397E-03
ROTACIJA FI= -[illegible].877388E-06

BRZINE NA KRAJU INTERVALA
=========================

BRZINA TRANSLACIJE U= -[illegible].743248E-02
BRZINA TRANSLACIJE V= [illegible].38[illegible]695E-02
BRZINA ROTACIJE FI= [illegible].81[illegible]83E-04

POMERANJA CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
==

CVOR	POMERANJE U	POMERANJE V
62	-[illegible].4[illegible]1231E-3	[illegible].2[illegible]6397E-3
63	-[illegible].4[illegible]11[illegible]3E-3	[illegible].2[illegible]67[illegible]8E-3
64	-[illegible].40[illegible]793E-3	[illegible].2[illegible]6836E-3
65	-[illegible].4[illegible]483E-3	[illegible].2[illegible]67[illegible]8E-3
66	-[illegible].4[illegible]354E-3	[illegible].2[illegible]6397E-3
68	-[illegible].4[illegible]1198E-3	[illegible].2[illegible]6565E-3
69	-[illegible].4[illegible]961E-3	[illegible].2[illegible]68[illegible]3E-3
70	-[illegible].4[illegible]625E-3	[illegible].2[illegible]68[illegible]3E-3
71	-[illegible].4[illegible]387E-3	[illegible].2[illegible]6565E-3
79	-[illegible].4[illegible]1198E-3	[illegible].2[illegible]623[illegible]E-3
81	-[illegible].4[illegible]11[illegible]3E-3	[illegible].2[illegible]6087E-3
85	-[illegible].4[illegible]961E-3	[illegible].2[illegible]5992E-3
89	-[illegible].4[illegible]793E-3	[illegible].2[illegible]5959E-3
91	-[illegible].4[illegible]625E-3	[illegible].2[illegible]5992E-3
95	-[illegible].4[illegible]483E-3	[illegible].2[illegible]6[illegible]87E-3
96	-[illegible].4[illegible]387E-3	[illegible].2[illegible]623[illegible]E-3

BRZINE CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
===

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
62	-.73[illegible]194[illegible]E-2	.38[illegible]695[illegible]E-2
63	-.74[illegible]E-2	.377831E-2
64	-.73[illegible]E-2	.37[illegible]E-2

65	-0.746108E-02	0.377831E-02
66	-0.747295E-02	0.384695E-02
68	-0.739502E-02	0.379145E-02
69	-0.741694E-02	0.376953E-02
70	-0.744794E-02	0.376953E-02
71	-0.746986E-02	0.379145E-02
79	-0.739502E-02	0.382245E-02
81	-0.740380E-02	0.383559E-02
85	-0.741694E-02	0.384437E-02
89	-0.743244E-02	0.384745E-02
91	-0.744794E-02	0.384437E-02
95	-0.746108E-02	0.383559E-02
96	-0.746986E-02	0.382245E-02

ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU

INTERVAL VREMENA BROJ 7
UKUPNO PROTEKLO VREME 0.2100 SEC

REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE

USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-1.255	14.914	9.565	0.239	14.604	9.520

USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
0.796	15.114	10.003	-0.031	14.934	-4.047

UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-0.460	14.569	8.808	0.208	14.555	11.534

POLOZAJ AERODINAMICKOG CENTRA:

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

X = 14.5550 Y = 8.8275

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

X = -0.4450 Y = -1.1925

VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE

U TRENUTKU T = 0.2100 SEC

SILA FX	SILA FY	MOMENAT MZ
-0.4597	0.2784	-0.6409

NAJKRACA STRANICA OD SVIH
ELEMENATA NA KONTURI G3 : 0.382682E+00
(ELEMENT BROJ 12)
NAJVECE POMERANJE CVORA : 0.245639E-02
(CVORNA TACKA BROJ 68)
ODNOS POMERANJA I STRANE: 0.0064

POMERANJA KONSTRUKCIJE DOVOLJNO MALA

```
INTERVAL VREMENA BROJ:       [illegible]
UKUPNO PROTEKLO VREME:  [illegible] SEC



DUZINA INTERVALA VREMENA :  [illegible].03[illegible]   SEC
KRITICAN INTERVAL VREMENA:  [illegible]326    SEC


REZULTATI ZA INTERVAL VREMENA BROJ     8
=============================================

(UKUPNO PROTEKLO VREME JE  [illegible].24[illegible]  SEC)


POMERANJA NA KRAJU INTERVALA
================================

POMERANJE  U=  -.286786E-[illegible]2
POMERANJE  V=   .142569E- 2
ROTACIJA  FI=  -.146232E-[illegible]6

BRZINE NA KRAJU INTERVALA
============================

BRZINA TRANSLACIJE  U=  -.224648E-[illegible]1
BRZINA TRANSLACIJE  V=   .1[illegible]9[illegible]99E-[illegible]1
BRZINA ROTACIJE    FI=   .187267E-[illegible]3


POMERANJA CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
==================================================

 CVOR  POMERANJE U     POMERANJE V
========================================
   62 -.286793E- 2    .142569E- 2
   63 -.286791E- 2    .142574E- 2
   64 -.286786E- 2    .142576E- 2
   65 -.286783E- 2    .142574E- 2
   66 -.286779E- 2    .142569E- 2
   68 -.286793E- 2    .142572E- 2
   69 -.286789E- 2    .142576E- 2
   70 -.286783E- 2    .142576E- 2
   71 -.28678[illegible]E- 2    .142572E- 2
   79 -.286793E- 2    .142567E- 2
   81 -.286791E- 2    .142561E- 2
   85 -.286789E- 2    .142563E- 2
   89 -.286780E- 2    .142562E- 2
   91 -.286783E- 2    .142563E- 2
   95 -.286781E- 2    .142564E- 2
   96 -.2867[illegible]E- 2    .142567E- 2


BRZINE CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
===============================================

 CVOR    BRZINA U         BRZINA V
========================================
   62 - .223712[illegible]- 1     .1[illegible]99E- 1
   63 - .[illegible]- 1     .1[illegible]843[illegible]- 1
   6[illegible] - .[illegible]- 1     .1[illegible]163[illegible]- 1
```

65	-0.22531[illegible]E-01	0.108437E-01
66	-0.225584E-01	0.109[illegible]99E-01
68	-0.223783E-01	0.108741E-01
69	-0.22429[illegible]E-01	0.10[illegible]234E-01
70	-0.2250[illegible]6E-01	0.108234E-01
71	-0.225513E-01	0.108741E-01
79	-0.223783E-01	0.109457E-01
81	-0.223986E-01	0.109761E-01
85	-0.22429[illegible]E-01	0.109964E-01
89	-0.224648E-01	0.110035E-01
91	-0.2250[illegible]6E-01	0.109964E-01
95	-0.22531[illegible]E-01	0.109761E-01
96	-0.225513E-01	0.109457E-01

USTALJENO STRUJANJE OKO FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE
****

INTERVAL VREMENA BROJ [illegible]
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible] SEC

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
==================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = [illegible]
RELAX = [illegible].5[illegible]

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 4

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
======================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	0.100[illegible]E+01	0.000000E+00
2	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
3	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
4	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
5	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
6	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
7	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
8	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
9	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
10	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
11	0.98823[illegible]E+00	0.996372E-02
12	0.10347[illegible]E+01	-0.7[illegible]8329E-03
13	0.98[illegible]E+00	-0.841264E-02
14	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
15	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
16	0.99[illegible]949E+00	0.48[illegible]166E-02
17	0.956847E+00	-0.1[illegible]8799E-02
18	0.99[illegible]538E+00	-0.266[illegible]56E-02
19	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
20	0.10[illegible]684E+01	-0.155589E-01
21	0.97514[illegible]E+00	-0.3449[illegible]9E-02
22	0.975869E+00	0.22[illegible]882E-02
23	0.10[illegible]618E+01	0.136185E-01
24	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
25	0.963129E+00	-0.229483E-01
26	0.978624E+00	-0.1682[illegible]3E-02
27	0.962[illegible]2E+00	0.219411E-01
28	[illegible]E+01	[illegible]E+00
29	0.1[illegible]E+01	[illegible]
30	0.954965E+00	-0.745783E-01
31	0.816325E+00	-0.262356E-02
32	0.95285[illegible]E+00	0.695563E-01
33	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
34	0.1[illegible]457[illegible]E+01	-0.48388[illegible]E-01

35	0.913129E+00	-.954899E-01
36	0.957212E+00	.896915E-01
37	0.104390E+01	0.9964E-01
38	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
39	0.103922E+01	-.984472E-01
40	0.89871[illegible]E+00	-2.3789E+00
41	0.681221E+00	-.461726E-02
42	0.886447E+00	.198703E+00
43	0.103158E+01	.998963E-01
44	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
45	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
46	0.117512E+01	-.111197E+00
47	0.101406E+01	-.233178E+00
48	0.093416E+00	-.435675E+00
49	0.42279[illegible]E+00	-.764259E-02
50	0.672726E+00	.424168E+00
51	0.989856E+00	.242305E+00
52	0.1113[illegible]5E+01	.119691E+00
53	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
54	0.109249E+01	-.536104E-01
55	0.11179[illegible]E+01	-.269673E+00
56	0.928[illegible]4E+00	-.464779E+00
57	0.526902E+00	-.331976E+00
58	0.511[illegible]95E+00	.314115E+00
59	0.9[illegible]5812E+00	.465442E+00
60	0.11[illegible]17[illegible]E+01	.278676E+00
61	0.109418E+01	.547152E-01
62	-.223712E-01	.1.9[illegible]99E-01
63	-.223986E-01	.1[illegible]8437E-01
64	-.224648E-01	.108163E-01
65	-.22531[illegible]E-01	.1[illegible]8437E-01
66	-.225594E-01	.1.9[illegible]99E-01
67	0.707613E+00	-.247862E-01
68	-.223783E-01	.108741E-01
69	-.22429[illegible]E-01	.1-8234E-01
70	-.225[illegible]6E-01	.1[illegible]8234E-01
71	-.225513E-01	.108741E-01
72	.685368E+00	.445545E-01
73	.596148E+00	-.48[illegible]477E+00
74	.137313E+00	-.858[illegible]9E-02
75	.569816E+00	.472588E+00
76	.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
77	.112883E+01	-.9[illegible]2647E-01
78	.759465E+00	.169875E-01
79	-.22378[illegible]E-01	.1[illegible]9457E-01
80	.159[illegible]45E+00	.76756[illegible]E-01
81	-.223986E-01	.1[illegible]9761E-01
82	.937531E+00	.663833E-01
83	.171153E+00	.684482E-01
84	.122356E+00	.477872E-01
85	-.22429[illegible]E-01	.1[illegible]9964E-01
86	.1[illegible]9518E-01	.518938E-02
87	.311[illegible]5[illegible]3E-01	.285947E-02
88	-.15[illegible]911E-01	.379924E-02
89	-.22469[illegible]E-01	.11[illegible]35E-01
90	.13[illegible]7[illegible]4E+00	-.3829[illegible]2E-01
91	-.225[illegible]6E-02	.1[illegible]9964E-01
92	.925[illegible]29E+00	-.56334[illegible]E-01
93	.169812E+00	-.637877E-01
94	.1730[illegible]2E+00	-.513054E-01
95	-.225311E-01	.1[illegible]9761E-01
96	-.225513E-01	.1[illegible]9457E-01
97	.743651E+00	-.456967E-02
98	.111223E+01	.972711E-01
99	.1[illegible]	[illegible]
100	.1[illegible]E+01	[illegible]

101	0.113276E+01	-0.636993E-01
102	0.194898E+01	0.743806E-02
103	0.113238E+01	0.656519E-01
104	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
105	0.111716E+01	-0.1[illegible]227E-01
106	0.594475E+00	0.891154E-01
107	0.582624E+00	-0.826[illegible]07E-01
108	0.111934E+01	0.181349E-01
109	0.11[illegible]E+01	[illegible]E+00
110	0.101751E+01	0.155899E-01
111	0.425231E+00	0.921923E-02
112	0.1[illegible]E+01	-0.528150E-02
113	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
114	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
115	0.919941E+00	0.422875E-01
116	0.534636E+00	0.126878E-01
117	0.9[illegible]3217E+00	-0.251338E-01
118	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
119	0.112[illegible]53E+01	0.37[illegible]696E-02
120	0.675787E+00	0.427431E-01
121	0.656379E+00	-0.2[illegible]29[illegible]7E-01
122	0.113868E+01	0.451051E-02
123	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
124	0.937756E+00	0.354361E-01
125	0.719313E+00	0.281161E-01
126	0.915529E+00	-0.372585E-02
127	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
128	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
129	0.967313E+00	0.966948E-01
130	0.82342[illegible]E+00	0.511091E-01
131	0.938355E+00	-0.222463E-01
132	0.1[illegible]E+01	0.[illegible]E+00
133	0.102459E+01	0.108142E+00
134	0.8796[illegible]3E+00	0.863327E-01
135	0.851515E+00	0.529120E-02
136	0.11[illegible]913E+01	-0.28[illegible]585E-01

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	-0.352664E-01
2	-0.8[illegible]5252E-01
3	-0.574561E-01
4	-0.8[illegible]63[illegible]E-01
5	-0.35[illegible]915E-01
15	-0.8849[illegible]9E-01
16	-0.514274E-01
17	-0.519119E-01
18	-0.565110E-01
19	-0.881356E-01
29	-0.137438E+00
30	-0.445364E-01
31	0.47[illegible]613E-01
32	-0.413355E-01
33	-0.136715E+00
45	-0.118058E+00
46	-0.2[illegible]7836E+00
47	-0.4[illegible]75[illegible]1E+00
48	0.382939E-01
49	0.418126E+00
50	0.638945E-01
51	-0.386643E+00
52	-0.1955[illegible]E+00
53	-0.12679[illegible]E+00

62	-0.9794[illegible]E+[illegible]
63	[illegible].81[illegible]6[illegible]9E-[illegible]2
64	[illegible].799[illegible]8[illegible]E+[illegible]
65	[illegible].536121E-[illegible]1
66	-0.927267E+[illegible]
80	-[illegible].474[illegible]46E+[illegible]
81	-[illegible].514292E+[illegible]
87	-[illegible].43[illegible]941E+[illegible]
89	-0.579267E+[illegible]
93	-[illegible].466862E+[illegible]
95	-0.497753E+[illegible]
100	-0.982945E-[illegible]1
101	-[illegible].254744E+[illegible]
102	-[illegible].3[illegible]6772E+[illegible]
103	-[illegible].256[illegible]23E+[illegible]
104	-[illegible].1[illegible]1683E+[illegible]
114	-[illegible].178426E+[illegible]
115	-[illegible].157383E+[illegible]
116	-[illegible].15[illegible]47E+[illegible]
117	-[illegible].161446E+[illegible]
118	-[illegible].2[illegible]2647E+[illegible]
128	[illegible].[illegible]E+[illegible]
129	-[illegible].196596E+[illegible]
130	-[illegible].229192E+[illegible]
131	-[illegible].22[illegible]348E+[illegible]
132	-[illegible].133733E+[illegible]

ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU

INTERVAL VREMENA BROJ 8
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible].24[illegible] SEC

REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE

USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-1.26[illegible]	14.914	9.565	[illegible].241	14.6[illegible]5	9.522

USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
[illegible].797	15.116	1[illegible].[illegible]3	-[illegible]36	14.933	-2.193

UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-[illegible].463	14.568	8.81[illegible]	[illegible]2[illegible]5	14.547	11.565

POLOZAJ AERODINAMICKOG CENTRA:

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

X = 14.[illegible]47[illegible] Y = 8.81[illegible]

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

X = -[illegible].4527 Y = -1.1899

VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE

U TRENUTKU T = [illegible] SEC

SILA FX	SILA FY	MOMENAT MZ
-[illegible].4629	[illegible].2[illegible]53	-[illegible].6437

NAJKRACA STRANICA OD SVIH
ELEMENATA NA KONTURI G3 : .38[illegible]E+[illegible]
(ELEMENT BROJ 12)
NAJVECE POMERANJE CVORA : .32[illegible]276E-[illegible]
(CVORNA TACKA BROJ [illegible])
ODNOS POMERANJA I STRANE: [illegible]84

[illegible] DOVOLJNO MALA

** ZANEMARLJIVA PROMENA GEOMETRIJE ELEMENATA **

INTERVAL VREMENA BROJ: 9
UKUPNO PROTEKLO VREME: [illegible] SEC

DUZINA INTERVALA VREMENA : [illegible]3 SEC
KRITICAN INTERVAL VREMENA: [illegible]326 SEC

REZULTATI ZA INTERVAL VREMENA BROJ 9
======================================

(UKUPNO PROTEKLO VREME JE [illegible].27[illegible] SEC)

POMERANJA NA KRAJU INTERVALA
============================

POMERANJE U= -0.363189E-02
POMERANJE V= 0.179271E-02
ROTACIJA FI= -0.524[illegible]63E-05

BRZINE NA KRAJU INTERVALA
=========================

BRZINA TRANSLACIJE U= -0.254646E-01
BRZINA TRANSLACIJE V= 0.122337E-01
BRZINA ROTACIJE FI= -0.17[illegible]13E-03

POMERANJA CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
==

CVOR	POMERANJE U	POMERANJE V
62	-0.363442E-02	0.179271E-02
63	-0.363365E-02	0.179456E-02
64	-0.36318[illegible]E-02	0.179532E-02
65	-0.362995E-02	0.179456E-02
66	-0.362938E-02	0.17927[illegible]E-02
68	-0.363422E-02	0.179371E-02
69	-0.36328[illegible]E-02	0.179512E-02
70	-0.3630[illegible]8[illegible]E-02	0.179512E-02
71	-0.362938E-02	0.179371E-02
79	-0.363422E-02	0.17917[illegible]E-02
81	-0.363365E-02	0.179[illegible]85E-02
85	-0.36328[illegible]E-02	0.179[illegible]28E-02
89	-0.36318[illegible]E-02	0.179[illegible]28E-02
91	-0.363[illegible]8[illegible]E-02	0.179[illegible]28E-02
95	-0.362995E-02	0.179[illegible]85E-02
96	-0.362938E-02	0.17917[illegible]E-02

BRZINE CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
===

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
62	-0.255490E-01	0.122337E-01
63	-0.25[illegible]37E-01	0.122338E-01
64	[illegible]	0.123117E-01

65	-0.254[illegible]45E-01	0.122938E-01
66	-0.253796E-01	0.122337E-01
68	-0.255431E-01	0.122662E-01
69	-0.254971E-01	0.123122E-01
7[illegible]	-0.254321E-01	0.123122E-01
71	-0.25386[illegible]E-01	0.122662E-01
79	-0.255431E-01	0.122011E-01
81	-0.255247E-01	0.121736E-01
[illegible]	-0.254971E-01	0.121551E-01
89	-0.254646E-01	0.121487E-01
91	-0.254321E-01	0.121551E-01
95	-0.254[illegible]45E-01	0.121736E-01
96	-0.25386[illegible]E-01	0.122011E-01

USTALJENO STRUJANJE OKO FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE
****

INTERVAL VREMENA BROJ 9
UKUPNO PROTEKLO VREME 0.27[illegible] SEC

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
======================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = [illegible].5[illegible]

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 5

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	0.100[illegible]E+01	0.000000E+00
2	0.100[illegible]E+01	0.000000E+00
3	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]E+00
4	[illegible].100[illegible]E+01	[illegible]E+00
5	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
6	0.100[illegible]E+01	[illegible]000000E+00
7	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
8	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]E+00
9	[illegible].10[illegible]E+01	[illegible]E+00
10	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
11	0.988153E+00	[illegible]993640E-02
12	[illegible].103476E+01	-[illegible].733214E-03
13	[illegible].988317E+00	-[illegible].848140E-02
14	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
15	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
16	0.99[illegible]892E+00	[illegible].479765E-02
17	[illegible].956713E+00	-[illegible].123[illegible]46E-02
18	[illegible].99[illegible]48[illegible]E+[illegible]	-[illegible].2795[illegible]6E-02
19	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
20	[illegible]96E+01	-[illegible].156588E-01
21	[illegible].975[illegible]5E[illegible]	-[illegible]357585E-02
22	[illegible].9758[illegible]5E+[illegible]	[illegible].2[illegible]8[illegible]61E-02
23	[illegible].1[illegible]613E+01	[illegible].136[illegible]4E-01
24	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
25	[illegible].963[illegible]E+[illegible]	-[illegible].231924E-01
26	[illegible].97848[illegible]E+[illegible]	-[illegible]195697E-02
27	[illegible].961958E+[illegible]	[illegible].219[illegible]72E-01
28	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
29	[illegible].1[illegible]E+01	[illegible]E+00
30	[illegible].954932E+[illegible]	-[illegible].75[illegible]657E-01
31	[illegible].845799E+[illegible]	-[illegible]329975E-02
32	[illegible].952398E+[illegible]	[illegible]695475E-01
33	[illegible]E+[illegible]	[illegible]E+[illegible]
34	[illegible].1[illegible]E+[illegible]	-[illegible]4[illegible]124E-01

35	0.91[illegible]25E+[illegible]	-0.962743E-01
36	0.966686E+[illegible]	0.894551E-01
37	0.1[illegible]4395E+01	0.511197E-01
38	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
39	0.1[illegible]3983E+01	-0.988822E-01
40	0.899178E+[illegible]	-0.2[illegible]5145E+00
41	0.679982E+[illegible]	-0.529468E-02
42	0.885352E+[illegible]	0.199146E+[illegible]
43	0.1[illegible]3133E+01	0.1[illegible]1[illegible]4E+0[illegible]
44	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
45	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
46	0.11261[illegible]E+01	-0.111709E+0[illegible]
47	0.1[illegible]E+01	-0.233253E+0[illegible]
48	0.6935[illegible]E+[illegible]	-0.437957E+0[illegible]
49	0.12[illegible]466[illegible]	-0.867512E-02
50	0.669554E+[illegible]	0.424682E+0[illegible]
51	0.987899E+[illegible]	0.243279E+0[illegible]
52	0.111293E+01	0.12[illegible]93E+0[illegible]
53	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
54	0.1[illegible]9295E+01	-0.537196E-01
55	0.1119[illegible]E+01	-0.269964E+0[illegible]
56	0.929[illegible]45E+0[illegible]	-0.466269E+0[illegible]
57	0.526119E+[illegible]	-0.334245E+0[illegible]
58	0.5[illegible]83[illegible]7E+0[illegible]	0.313993E+0[illegible]
59	0.903826E+0[illegible]	0.466796E+0[illegible]
60	0.11[illegible]95E+01	0.279756E+00
61	0.1[illegible]9433E+01	0.54988[illegible]E-01
62	-0.255496E-01	0.122337E-01
63	-0.255247E-01	0.122938E-01
64	-0.254646E-01	0.123187E-01
65	-0.254[illegible]45E-01	0.122938E-01
66	-0.253796E-01	0.122337E-01
67	0.797266E+0[illegible]	-0.235944E-01
68	-0.255431E-01	0.122662E-01
69	-0.254971E-01	0.123122E-01
70	-0.254321E-01	0.123122E-01
71	-0.25386[illegible]E-01	0.122662E-01
72	0.682711E+[illegible]	0.456666E-01
73	0.5959[illegible]E+[illegible]	-0.48162[illegible]E+[illegible]
74	0.1345[illegible]E+[illegible]	-0.966724E-02
75	0.56[illegible]E+[illegible]	0.472797E+[illegible]
76	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+0[illegible]
77	0.1[illegible]E+[illegible]	-0.9[illegible]2361E-01
78	0.75[illegible]E+[illegible]	0.17[illegible]995E-01
79	-0.255[illegible]31E-01	0.122[illegible]11E-01
80	0.457577E+[illegible]	0.777468E-01
81	-0.255217E-01	0.121736E-01
82	0.9379[illegible]E+[illegible]	0.671924E-01
83	0.17166[illegible]E+[illegible]	0.695939E-01
84	0.12986[illegible]E+[illegible]	0.484381E-01
85	-0.254971E-01	0.121551E-01
86	0.434792E-01	0.5478[illegible]9E-02
87	0.82951[illegible]E-02	0.311825E-02
88	-0.182835E-01	0.416565E-02
89	-0.25464[illegible]E-01	0.121487E-01
90	0.129186E+[illegible]	-0.379928E-01
91	-0.254321E-01	0.121551E-01
92	0.974623E+[illegible]	-0.505829E-01
93	0.4477[illegible]3E+[illegible]	-0.6341[illegible]7E-01
94	0.171517[illegible]E+[illegible]	-0.5[illegible]7387E-01
95	-0.254[illegible]65E-01	0.121736E-01
96	-0.253[illegible]E-01	0.122[illegible]11E-01
97	0.741683[illegible]E+[illegible]	-0.3[illegible]8948E-02
98	0.1122[illegible]E+01	0.97[illegible]733E-01
99	[illegible]	[illegible]
1[illegible]	[illegible]	[illegible]

101	0.113317E+01	-0.629259E-01
102	0.193[illegible]11E+[illegible]	[illegible]76858[illegible]E-02
103	0.113247E+01	0.659622E-01
104	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
105	0.111766E+01	-0.99[illegible]456E-02
106	0.593745E+0[illegible]	0.896445E-01
107	0.58[illegible]E+00	-0.826961E-01
108	0.111962E+01	0.182195E-01
109	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
110	0.101773E+01	0.159[illegible]15E-01
111	0.424[illegible]22E+0[illegible]	0.946138E-02
112	0.10[illegible]861E+01	-0.53[illegible]751E-02
113	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
114	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
115	0.[illegible]1999[illegible]E+00	0.126[illegible]76E-01
116	0.533557E+00	0.128477E-01
117	0.9[illegible]24[illegible]4E+00	-0.252121E-01
118	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
119	0.112[illegible]73E+01	0.379536E-02
120	0.675352E+00	0.429587E-01
121	0.6552[illegible]2E+0[illegible]	-0.2[illegible]2536E-01
122	0.1139[illegible]6E+01	0.45549[illegible]E-02
123	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
124	0.937992E+00	0.357014E-01
125	0.718959E+00	0.283237E-01
126	0.915[illegible]28E+00	-0.36594[illegible]E-02
127	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
128	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
129	0.967751E+0[illegible]	0.972791E-01
130	0.673484E+0[illegible]	0.518828E-01
131	0.938177E+00	-0.222762E-01
132	0.10[illegible]E+01	[illegible]E+00
133	0.102429E+01	0.1[illegible]8763E+00
134	0.879919E+0[illegible]	0.869348E-01
135	0.851362E+0[illegible]	0.549315E-02
136	0.115943E+01	-0.282125E-01

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	-0.359674E-01
2	-0.812676E-01
3	-0.[illegible]6154[illegible]E-01
4	-0.808484E-01
5	-0.355249E-01
15	-0.893169E-01
16	-0.521509E-01
17	-0.525584E-01
18	-0.510857E-01
19	-0.888578E-01
29	-0.138622E+00
30	-0.454393E-01
31	0.467365E-01
32	-0.416816E-01
33	-0.137423E+00
45	-0.119534E+00
46	-0.2[illegible]9725E+0[illegible]
47	-0.4112[illegible]5E+[illegible]
48	0.359[illegible]6[illegible]E-01
49	0.419731E+[illegible]
[illegible]	0.[illegible]47[illegible]E-01
51	-0.3[illegible]77[illegible]E+[illegible]
[illegible]	-0.1[illegible]
[illegible]	-0.[illegible]777[illegible]

62	-0.985654E+00
63	0.366139E-02
64	0.799334E+00
65	0.549438E-01
66	-0.927188E+00
80	-0.4767[illegible]2E+00
81	-0.517669E+00
87	-0.432963E+01
89	-0.581961E+00
93	-0.46889[illegible]E+00
95	-0.499521E+00
100	-0.993366E-01
101	-0.256175E+00
102	-0.3[illegible]822[illegible]E+00
103	-0.2[illegible]73[illegible]2E+00
104	-0.1[illegible]21[illegible]5E+00
114	-0.179421E+00
115	-0.150267E+00
116	-0.15[illegible]855E+00
117	-0.162259E+00
118	-0.203757E+00
128	[illegible]
129	-0.197625E+00
130	-0.232455E+00
131	-0.221628E+00
132	-0.134448E+00

ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU
==

INTERVAL VREMENA BROJ 9
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible].27[illegible] SEC

REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE
====================================

USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-1.265	14.914	9.565	[illegible].243	14.605	9.523

USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
[illegible].799	15.117	1[illegible].[illegible]3	-[illegible]4[illegible]	14.931	-0.933

UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE
==============================

SILA FX	KOOR. X	KOOR. Y	SILA FY	KOOR. X	KOOR. Y
-[illegible].466	[illegible]4.567	8.81[illegible]	[illegible].2[illegible]3	14.540	11.594

POLOZAJ AEROEDINAMICKOG CENTRA:
==============================

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

X = 14.54[illegible]1 Y = 8.8128

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

X = -[illegible].4599 Y = -1.1872

VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE
===============================

U TRENUTKU T = [illegible].27[illegible] SEC

SILA FX	SILA FY	MOMENAT MZ
-[illegible].16[illegible]1	[illegible].2[illegible]26	-[illegible].6465

NAJKRACA STRANICA OD SVIH
ELEMENATA NA KONTURI G3 : [illegible].3876821+0[illegible]
(ELEMENT BROJ 12)
NAJVECE POMERANJE CVORA : [illegible]4[illegible]5277E-[illegible]2
(CVORNA TACKA BROJ 68)
ODNOS POMERANJA I STRANE: [illegible].[illegible]16[illegible]

POMERANJE [illegible] [illegible]

** ZANEMARLJIVA PROMENA GEOMETRIJE ELEMENATA **

INTERVAL VREMENA BROJ: 10
UKUPNO PROTEKLO VREME: 0.3000 SEC

DUZINA INTERVALA VREMENA : 0.0300 SEC
KRITICAN INTERVAL VREMENA: 0.0326 SEC

REZULTATI ZA INTERVAL VREMENA BROJ 10
=======================================

(UKUPNO PROTEKLO VREME JE 0.3000 SEC)

POMERANJA NA KRAJU INTERVALA
============================

POMERANJE U= -0.448541E-02
POMERANJE V= 0.219841E-02
ROTACIJA FI= -0.38[illegible]257E-05

BRZINE NA KRAJU INTERVALA
=========================

BRZINA TRANSLACIJE U= -0.284536E-01
BRZINA TRANSLACIJE V= 0.135236E-01
BRZINA ROTACIJE FI= 0.479352E-04

POMERANJA CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
==

CVOR	POMERANJE U	POMERANJE V
62	-0.448731E-02	0.219841E-02
63	-0.448675E-02	0.219976E-02
64	-0.448541E-02	0.220031E-02
65	-0.4484[illegible]6E-02	0.219976E-02
66	-0.448351E-02	0.219841E-02
68	-0.448716E-02	0.219914E-02
69	-0.448613E-02	0.220017E-02
70	-0.448468E-02	0.220017E-02
71	-0.448365E-02	0.219911E-02
79	-0.448716E-02	0.219766E-02
81	-0.448675E-02	0.2197[illegible]7E-02
85	-0.448613E-02	0.219665E-02
89	-0.448541E-02	0.219651E-02
91	-0.448468E-02	0.219665E-02
95	-0.4484[illegible]6E-02	0.2197[illegible]7E-02
96	-0.448365E-02	0.219768E-02

BRZINE CVOROVA KONSTRUKCIJE NA KONTURI G3
===

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
62	-0.284296E-01	0.135236E-01
63	-0.28[illegible]E-01	0.135[illegible]66E-01
64	-0.2845[illegible]E-01	0.1349[illegible]E-01

65	-0.284705E-01	0.135066E-01
66	-0.284776E-01	0.135236E-01
68	-0.284314E-01	0.135144E-01
69	-0.284444E-01	0.135014E-01
70	-0.284628E-01	0.135014E-01
71	-0.284757E-01	0.135144E-01
79	-0.284314E-01	0.135327E-01
81	-0.284366E-01	0.135405E-01
85	-0.284444E-01	0.135457E-01
89	-0.284536E-01	0.135475E-01
91	-0.284628E-01	0.135457E-01
95	-0.284705E-01	0.135405E-01
96	-0.284757E-01	0.135327E-01

USTALJENO STRUJANJE OKO FLEKSIBILNE KONSTRUKCIJE
****

INTERVAL VREMENA BROJ [illegible]
UKUPNO PROTEKLO VREME [illegible] SEC

RESAVANJE NAVIER-STOKES-OVIH JEDNACINA
======================================

NACIN RESAVANJA NELINEARNIH JEDNACINA:

DIREKTNA ITERACIJA SUKCESIVNOM ZAMENOM
(SA RELAKSACIJOM)

NRESAV = 1
RELAX = [illegible]

KONVERGENCIJA REZULTATA POSLE ITERACIJE BROJ 7

KONACNO RESENJE:

BRZINE U CVORNIM TACKAMA
========================

CVOR	BRZINA U	BRZINA V
1	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]
21	[illegible]	[illegible]
22	[illegible]	194697E-[illegible]2
23	[illegible]	[illegible].135797E-01
24	[illegible]	[illegible]
25	[illegible]	[illegible]
26	[illegible]	[illegible]
27	[illegible]	[illegible]
28	[illegible]	[illegible]
29	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]
31	[illegible]	[illegible]
32	[illegible]	[illegible]
33	[illegible]	[illegible]
34	[illegible]	[illegible]

35	0.969931E+00	-0.970781E-01
36	0.966154E+00	0.891978E-01
37	0.104391E+01	0.512413E-01
38	0.10[illegible]E+01	0.000000E+00
39	0.104[illegible]44E+01	-0.993285E-01
40	0.89964[illegible]E+00	-0.216512E+00
41	0.678744E+00	-0.599681E-02
42	0.884237E+00	0.199575E+00
43	0.1031[illegible]6E+01	0.102307E+00
44	0.10[illegible]E+01	0.000000E+00
45	0.1[illegible]E+01	0.000000E+00
46	0.112723E+01	-0.111918E+00
47	0.101566E+01	-0.233356E+00
48	0.693652E+00	-0.440289E+00
49	0.418146E+00	-0.976653E-02
50	0.667037E+00	0.425233E+00
51	0.985842E+00	0.244220E+00
52	0.111279E+01	0.120496E+00
53	0.10[illegible]E+01	0.000000E+00
54	0.149342E+01	-0.538256E-01
55	0.112014E+01	-0.274255E+00
56	0.929756E+00	-0.467803E+00
57	0.5253[illegible]5E+00	-0.336569E+00
58	0.505496E+00	0.313806E+00
59	0.90177[illegible]E+00	0.468096E+00
60	0.11[illegible]7E+01	0.280830E+00
61	0.109447E+01	0.552619E-01
62	-0.284296E-01	0.135236E-01
63	-0.284366E-01	0.135066E-01
64	-0.284536E-01	0.134996E-01
65	-0.2847[illegible]5E-01	0.135066E-01
66	-0.284776E-01	0.135236E-01
67	0.707681E+00	-0.224272E-01
68	-0.284314E-01	0.135144E-01
69	-0.284444E-01	0.135[illegible]14E-01
70	-0.284628E-01	0.135014E-01
71	-0.284757E-01	0.135144E-01
72	0.679896E+00	0.467528E-01
73	0.595744E+00	-0.482873E+00
74	0.131793E+01	-0.1[illegible]8722E-01
75	0.562895E+00	0.472885E+00
76	0.10[illegible]E+01	0.000000E+00
77	0.112[illegible]34E+01	-0.9[illegible]1982E-01
78	0.758578E+00	0.189284E-01
79	-0.284314E-01	0.135327E-01
80	0.4562[illegible]E+00	0.787754E-01
81	-0.284366E-01	0.1354[illegible]5E-01
82	0.93736[illegible]E+00	0.680106E-01
83	0.169291E+00	0.7[illegible]8226E-01
84	0.127434E+01	0.4914[illegible]E-01
85	-0.284444E-01	0.135457E-01
86	0.410187E-01	0.579242E-02
87	0.555[illegible]63E-02	0.343[illegible]42E-02
88	-0.212619E-01	0.466925E-02
89	-0.284536E-01	0.135475E-01
90	0.1256[illegible]4E+00	-0.376444E-01
91	-0.284628E-01	-0.135457E-01
92	0.9235[illegible]5E+00	-0.568217E-01
93	0.4455[illegible]1E+00	-0.629928E-01
94	0.169243E+01	-0.5[illegible]73E-01
95	-0.2847[illegible]5E-01	0.1354[illegible]5E-01
96	-0.284757E-01	0.135327E-01
97	0.739614E+00	-0.259978E-02
98	0.11224[illegible]E+01	0.981224E-01
99	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
100	[illegible]	[illegible]

101	0.113362E+01	-.627413E-01
102	0.191136E+00	0.795030E-02
103	0.113254E+01	0.662811E-01
104	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
105	0.111816E+01	-.978453E-02
106	0.593[illegible]62E+00	0.9[illegible]183[illegible]E-01
107	0.579315E+00	-0.827827E-01
108	0.11199[illegible]E+01	0.183[illegible]65E-01
109	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
110	0.1[illegible]1796E+01	0.162189E-01
111	0.422822E+00	0.971245E-02
112	0.1[illegible]819E+01	-.532815E-02
113	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
114	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
115	0.92[illegible]58E+00	0.429313E-01
116	0.532485E+00	0.13[illegible]1[illegible]3E-01
117	0.9[illegible]1567E+00	-.252876E-01
118	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
119	0.112[illegible]93E+01	0.388439E-02
120	0.67494[illegible]E+00	0.431773E-01
121	0.654[illegible]3[illegible]E+00	-0.2[illegible]2135E-01
122	0.113945E+01	0.459981E-02
123	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
124	0.938244E+00	0.359694E-01
125	0.718611E+00	0.285317E-01
126	0.9145[illegible]8E+00	-0.359[illegible]88E-02
127	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
128	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
129	0.968169E+00	0.978626E-01
130	0.823551E+00	0.523571E-01
131	0.937984E+00	-0.223[illegible]59E-01
132	0.1[illegible]E+01	[illegible]E+00
133	0.1[illegible]2398E+01	0.1[illegible]938E+00
134	0.88[illegible]246E+00	0.87537[illegible]E-01
135	0.851175E+00	0.569575E-02
136	0.11[illegible]973E+01	-.283[illegible]91E-01

PRITISCI U CVORNIM TACKAMA
==========================

CVOR	PRITISAK
1	-0.366[illegible]1E-01
2	-0.8[illegible]27E-01
3	-0.5[illegible]4E-01
4	-0.81[illegible]E-01
5	-0.359455E-01
15	-0.9[illegible]137[illegible]E-01
16	-0.5287[illegible]4E-01
17	-0.531981E-01
18	-0.5165[illegible]E-01
19	-0.895713E-01
29	-0.1298[illegible]9E+00
30	-0.46344[illegible]E-01
31	0.461174E-01
32	-0.12[illegible]129E-01
33	-0.133115E+00
45	-0.1[illegible]198E+00
46	-0.211629E+00
47	-0.41196[illegible]E+00
48	0.335944E-01
49	0.119348E-01
50	0.656827E-01
51	-0.398791E+00
[illegible]	-0.[illegible]99[illegible]E+00
[illegible]	-0.1[illegible]72[illegible]E+00

62	-[illegible].992[illegible]85E+[illegible]
63	-[illegible].9[illegible]5517E-[illegible]3
64	[illegible].79958[illegible]E+[illegible]
65	[illegible].563886E-[illegible]1
66	-[illegible].92692[illegible]E+[illegible]
68	-[illegible].479381E+[illegible]
81	-[illegible].521117E+[illegible]
87	-[illegible].434977E+[illegible]
89	-[illegible].584646E+[illegible]
93	-[illegible].47[illegible]977E+[illegible]
95	-[illegible].5[illegible]1197E+[illegible]
1[illegible]	-[illegible].1[illegible]384E+[illegible]
1[illegible]1	-[illegible].2576[illegible]E+[illegible]
1[illegible]2	-[illegible].3[illegible]9659E+[illegible]
1[illegible]3	-[illegible].[illegible]58[illegible]9[illegible]E+[illegible]
1[illegible]4	-[illegible].1[illegible]251[illegible]E+[illegible]
114	-[illegible].[illegible]8[illegible]41[illegible]E+[illegible]
115	-[illegible].159[illegible]4[illegible]E+[illegible]
116	-[illegible].[illegible]516[illegible]5[illegible]E+[illegible]
117	-[illegible].163[illegible]63E+[illegible]
118	-[illegible].2[illegible]4857E+[illegible]
128	[illegible].[illegible]E+[illegible]
129	-[illegible].198645E+[illegible]
13[illegible]	-[illegible].2317[illegible]9E+[illegible]
131	-[illegible].2229[illegible]E+[illegible]
132	-[illegible].135151E+[illegible]

```
ODREDJIVANJE OPTERECENJA NA KONSTRUKCIJU
========================================


INTERVAL VREMENA BROJ   10
UKUPNO PROTEKLO VREME  0.34[illegible] SEC



REZULTUJUCE OPTERECENJE KONSTRUKCIJE
====================================

        USLED GRADIJENATA BRZINA:

SILA FX     KOOR. X     KOOR. Y     SILA FY     KOOR. X     KOOR. Y
=====================================================================
 -1.270     14.914       9.565       0.244      14.605       9.525

        USLED PRITISAKA FLUIDA:

SILA FX     KOOR. X     KOOR. Y     SILA FY     KOOR. X     KOOR. Y
=====================================================================
  0.801     15.119      12.[illegible]04      -0.045      14.932       0.135


UKUPNO REZULTUJUCE OPTERECENJE
==============================

SILA FX     KOOR. X     KOOR. Y     SILA FY     KOOR. X     KOOR. Y
=====================================================================
 -0.469     14.566       8.815       0.202      14.532      11.626

POLOZAJ AERODINAMICKOG CENTRA:
==============================

U ODNOSU NA GLOBALNI SISTEM

     X =    14.5324          Y =     8.8152

U ODNOSU NA CENTAR MASE KONSTRUKCIJE

     X =   -0.4670           Y =    -1.1848


VEKTOR OPTERECENJA KONSTRUKCIJE
===============================

U TRENUTKU T =  [illegible] SEC

   SILA FX         SILA FY        MOMENAT MZ
=============================================
   -0.4692         0.1996         -0.6492

NAJKRACA STRANICA OD SVIH
ELEMENATA NA KONTURI G3 :          0.3826E+0[illegible]
(ELEMENT BROJ    12         )
NAJVECE POMERANJE CVORA :          .4997E-02
(CVORNA TACKA BROJ    58 )
ODNOS POMERANJA I STRANE:            0.0131
```

V R E M E   P R O R A C U N A   U   S E C

ZA PROBLEM:

** USTALJENO STRUJANJE OKO CILINDRA - INTERAKCIJA (LL=3) 36 ELEMENATA **

==

VREME UTROSENO ZA:

-ULAZ PODATAKA O CVORNIM TACKAMA	=	2.42
-ULAZ PODATAKA O ELEMENTIMA	=	5.51
-FORMIRANJE MATRICA ELEMENATA	=	36.29
-USTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA	=	0.00
-NEUSTALJENO STRUJANJE - NEPOKRETNA KONTURA	=	0.00
-USTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA	=	8793.11
-NEUSTALJENO STRUJANJE - INTERAKCIJA	=	0.00

U K U P N O   U T R O S E N O   V R E M E   J E   8837.33   S E C

VII. ZAVRŠNA RAZMATRANJA O INTERAKCIJI FLUIDA I KONSTRUKCIJE

1. NAPOMENE U VEZI SA TEŠKOĆAMA U NUMERIČKOJ SIMULACIJI INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJE

Ovaj rad se odnosi samo na jedan od aspekata medjusobne interakcije fluida i konstrukcije. Naime, reč je o problematici opstrujavanja fluida oko konstrukcije, pri čemu je kretanje fluidne sredine opisano kompletnim Navier-Stokes-ovim jednačinama i jednačinom kontinuiteta za nestišljiv fluid. Osim ovog vida medjusobne interakcije fluida i konstrukcije postoje i drugi oblici medjusobne interakcije, na primer problemi vezani za dinamičko ponašanje rezervoara i vodotornjeva u uslovima zemljotresa, interakcija brane i akumulacije (uz pojavu kavitacije) itd. Od posebnog značaja je uticaj realnog vetra na razne konstrukcije, medjutim, ovaj vid interakcije fluida i konstrukcije je za sada najudaljeniji od uspešne numeričke simulacije metodom konačnih elemenata.

Praktično u svim radovima vezanim za interakciju fluida i konstrukcija korišćenjem metode konačnih elemenata, fluidna sredina (najčešće voda) se modelira simplifikovano (zanemaruju se konvektivna ubrzanja, viskoznost itd), tako da je najčešće samo pritisak fluida nepoznata koja definiše fluid (na primer: $\Delta p = 0$ za nestišljiv fluid).

Ovo, naravno, nije slučajno, jer je rešavanje kompletnih Navier-Stokes-ovih jednačina povezano sa nizom teškoća o kojima je već bilo reči. Jednačine ustaljenog strujanja su nelinearne, nesimetrične, nisu pozitivno definitne niti dijagonalno dominantne i numerički su vrlo osetljive. U slučaju neustaljenog strujanja, kako u jednačinama ne postoje izvodi pritisaka fluida po vremenu, javljaju se singularne matrice uz izvod po vremenu vektora nepoznatih brzina i pritisaka. Kako je i samo strujanje fluida fizički gledano često veoma nestabilno, potrebno je da diskretizacija domena strujanja, posebno u zoni oko konstrukcije i iza nje, bude dovoljno fina. Ovo neminovno nameće veliki broj nepoznatih, tako da je od vitalnog značaja optimalan izbor kako načina rešavanja nelinearnih nesimetričnih jednačina, tako i načina vremenske integracije jednačina. Naravno, od značaja je i pravi izbor tipa konačnih elemenata i interpolacionih funkcija, integracije potrebnih matrica itd.

Rečeno je već da je izbor brzina i pritisaka fluida kao osnovnih nepoznatih samo jedna od mogućnosti posmatranja jednačina kretanja fluida. Moguće je da se iz jednačina kretanja eliminišu pritisci, tako da se dobiju samo jednačine sa nepoznatim brzinama, dok se pritisci dobijaju posebnim rešavanjem odgovarajuće Poasonove jednačine. Ovo je tzv. razdvojena u,v,p formulacija ("segregated formulation") gde se iterativno i alternativno rešavaju jednačine po nepoznatim brzinama, pa jednačine po pritiscima. U svakom koraku odredjivanja brzina pritisci se smatraju poznatim iz prethodnog koraka, a slično se kod odredjivanja pritisaka brzine smatraju poznatim. Umesto jednačina sa brzinama fluida mogu da se uvedu strujna i vrtložna funkcija ili čak i samo strujna funkcija (uz povećavanje reda diferencijalnih jednačina na biharmonijsku jednačinu), pri čemu se pritisak odredjuje posebno iz odgovarajućih jednačina Poasonovog tipa.

Ovakvi pristupi imaju svoje prednosti ali i mane. Osnovna prednost je što se eliminišu sve teškoće vezane za pritisak - jednačine više nisu nepozitivno definitne, interpolacione funkcije za pritisak ne moraju da budu jedan stepen niže od interpolacionih funkcija za brzine. Medjutim, brzine i pritisci su osnovne nepoznate u strujanju fluida i obično je od interesa poznavanje baš brzina, a ne strujne funkcije (iz koje se numeričkim diferenciranjem dolazi do brzina). Takodje, što je u isto vreme i bitna poteškoća u formulaciji kretanja fluida putem strujne i vrtložne funkcije, ili samo strujne funkcije, je pitanje adekvatnog formulisanja odgovarajućih graničnih uslova. Čak šta više, granični uslovi po vrtložnoj funkciji se unapred i ne poznaju, tako da se u ovakvoj formulaciji alternativno i separatno odredjuju strujna funkcija i vrtložna funkcija. Imajući u vidu još i prisustvo fleksibilne (pokretne) konstrukcije u struji fluida, pitanje graničnih uslova bi stvaralo ozbiljne probleme. U svakom slučaju, za sada se još ne zna definitivan odgovor koja je formulacija jednačina kretanja fluida najpogodnija.

2. MOGUĆNOSTI DALJEG RAZVOJA U IZUČAVANJU INTERAKCIJE FLUIDA I KONSTRUKCIJE

Pre svega, ukoliko je reč o interakciji fluida i konstrukcije u prikazanom smislu, znači posmatranje čitavog domena strujanja fluida i istovremeno rešavanje jednačina kretanja fluida i konstrukcije, osnovna stvar je optimalan izbor formulacije jednačina kretanja fluida i sa tim u vezi i način rešavanja jednačina. Znači, potreban je znatno prethodno iskustvo i znanje, a takodje i odgovarajući programski paketi koji omogućuju sticanje praktičnog iskustva. Sa tim u vezi definitivno je potreban moćniji računar. Na primer, u referenci |II.2.7| se navodi numerička simulacija neustaljenog dvodimenzionalnog strujanja oko nepokretnog kružnog cilindra pri $R_e \leq 400$ i praćenje pojave odvajanja vrtloga. Za tu svrhu je formirana vrlo fina mreža od 1760 elemenata sa 1852 čvorne tačke sa vremenskim korakom od 0.05 *sec*, ali je korišćen jedan od najmoćnijih računara na svetu - CRAY-1.

Ako se posmatra interakcija fluida i konstrukcija u smislu opstrujavanja fluida oko konstrukcije pri većim brzinama (pri većim R_e brojevima), znači ako je krajnji cilj pokušaj numeričke simulacije uticaja vetra na konstrukcije, onda je put do takvog cilja još veoma dugačak i neizvestan. Pre svega, strujanje fluida pri većim brzinama je turbulentno. Analitički tretman turbulentnog kretanja fluida je veoma razvijen (postoji čitav niz raznih modela turbulencije), ali nikako nije do kraja i zadovoljavajuće definisan, dok je numerički pristup turbulentnom strujanju, primenom metode konačnih elemenata, praktično tek u začetku. U svakom slučaju, bilo sa eksperimentalnog, bilo teoretskog ili numeričkog aspekta, razni problemi medjusobne interakcije fluida i konstrukcija su u sadašnjem trenutku otvoreno polje i aktuelni, obzirom na nesumnjiv praktičan značaj poznavanja fenomena interakcije fluida i konstrukcije.

LITERATURA

I. KNJIGE

1. METODA KONAČNIH ELEMENATA - KONSTRUKCIJE

1.1 Hinton,E., Owen,D.R.J.: "Finite Element Programming", Academic Press, 1977.

1.2. Owen,D.R.J., Hinton,E.: "Finite Elements in Placticity - Theory and Practice", Pineridge Press, 1980.

1.3. Owen,D.R.J., Hinton,E.: "Introduction to Finite Element Computations", Pineridge Press, 1980.

1.4. Bathe,K.J., Wilson,E.: "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.

1.5. Zienkiewicz,O.C.: "The Finite Element Method", Third ed., McGraw-Hill, 1977.

1.6. Cheung,Y.K., Yeo,M.F.: "Practical Introduction to Finite Element Analysis", Pitman Publishing, 1979.

1.7. Irons,B., Ahmad,S.: "Techniques of Finite Elements", Ellis Horwood Ltd., 1980.

1.8. Sekulović,M.: Metod konačnih elemenata", Gradjevinska knjiga, 1984.

1.9. Huebner,K.H.: "The Finite Element Method for Engineers", Wiley, 1975.

1.10. Zienkiewicz,O.C., Lewis,R.W., Stagg,K.G.(editors): "Numerical Methods in Offshore Engineering", Wiley, 1978.

2. METODA KONAČNIH ELEMENATA - FLUIDI

2.1. Taylor,C., Hughes,T.G.: "Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations", Pineridge Press, 1981.

2.2. Taylor,C., Morgan,K. (editors): "Recent Advances in Numerical Methods in Fluids", Vol.1, Pineridge Press, 1980.

2.3. Taylor,C., Morgan,K. (editors): "Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow", Pineridge Press, 1981.

2.4. Chung,T.J.: "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw-Hill, 1978.

2.5. Gallagher,R.H., Oden,T.J., Taylor,C., Zienkiewicz,O.C. (editors): "Finite Elements in Fluids", Vol.1, Vol.2, Vol.3, Wiley, 1975.

2.6. Connor,J.J., Brebbia,C.A.: "Finite Element Techniques for Fluid Flow", Butterworths, 1977.

2.7. Girault,V., Raviart,P.A.: "Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations", Lecture Notes in Mathematics No 749, Springer-Verlag, 1979.

3. METODA GRANIČNIH ELEMENATA

3.1. Liggett,J.A., Lin,P.L.F.: "The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow", George Allen & Unwin, 1983.

3.2. Jaswon,M.A., Symm,G.T.: "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics", Academic Press, 1977.

3.3. Brebbia,C.A.: "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, 1978.

3.4. Cruse,T.A., Rizzo,F.J. (editors): "Boundary Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics", ASME, 1975.

3.5. Brebbia,C.A. (editor): "Recent Advances in Boundary Element Methods", Pentech Press, 1978.

3.6. Brebbia,C.A. (editor): "Topics in Boundary Element Research", Volume 1: Basic Principles and Applicationa, Springer-Verlag, 1984.

3.7. Brebbia,C.A. (editor): "Topics in Boundary Element Research", Volume 2: Time-Dependent and Vibration Problems, Springer-Verlag, 1985.

4. MEHANIKA FLUIDA

4.1. Goldstein,S.: "Modern Developments in Fluid Dynamics", Vol.1, Vol.2, Dover Publications, 1965.

4.2. Temam,R.: "Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis", North-Holland Publishing Company, 1979.

4.3. Hajdin,G.: "Mehanika fluida", Gradjevinski fakultet, Beograd, 1977.

4.4. Bradshaw,P.: "An Introduction to Turbulence and its Measurement", Pergamon Press, 1975.

4.5. Launder,B.E., Spalding,D.B.: "Mathematical Models of Turbulence", Academic Press, 1972.

4.6. Cebeci,T., Bradshaw,P.: "Momentum Transfer in Boundary Layers", McGraw-Hill, 1977.

4.7. Chang,P.K.: "Separation of Flow", Pergamon Press, 1970.

5. UTICAJ VETRA NA KONSTRUKCIJE

5.1. Simiu,E., Scanlan,R.: "Wind Effects on Structures: an Introduction to Wind Engineering", Wiley, 1978.

5.2. Blevins,R.: "Flow-Induced Vibration", Van Nostrand, 1977.

5.3. Sachs,P.: "Wind Forces in Engineering", Pregamon Press, 1978.

5.4. Houghton,E.L., Carruthers,N.B.: "Wind Forces on Buildings and Structures", Arnold, 1976.

5.5. Lawson,T.V.: "Wind Effects on Buildings", Vol.1, Vol.2, Applied Science Publishers, 1980.

5.6. Rosemeier,G.: "Wniddruck-probleme bei Bauwerken", Springer-Verlag, 1976.

5.7. Diver,M.: "Calcul pratique des tours en béton armé", Dunod, 1972.

5.8. Brčić,S.: "Uticaj vetra na konstrukcije", Savremeni problemi dinamike inženjerskih konstrukcija, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1982. (str. 581-699)

5.9. Fung,Y.C.: "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity", Dover Publications, 1969.

5.10. Bisplinghoff,R., Ashley,H.: "Principles of Aeroelasticity", Dover Publications, 1975.

5.11. Kuethe,A.M., Schetzer,J.D.: "Foundations of Aerodynamics", Wiley, 1959.

5.12. Eaton,K. (editor): "Wind Effects on Buildings and Structures", Proc. 4th Int. Conf., Cambridge University Press, 1977.

5.13. Holand,I. et.al. (editors): "Safety of Structures Under Dynamic Loading", Vol.1, Vol.2, Tapir, 1978.

6. NUMERIČKA ANALIZA

6.1. Nakamura,S.: "Computational Methods in Engineering and Science With Applications to Fluid Dynamics and Nuclear Systems", Wiley, 1977.

6.2. Jennings,A.: "Matrix Computations for Engineers and Scientists", Wiley, 1980.

6.3. Crandall,S.H.: "Engineering Analysis - a Survey of Numerical Procedures", McGraw-Hill, 1956.

6.4. Tošić,D.: "Uvod u numeričku analizu", Naučna knjiga, 1978.

II. ČASOPISI I SIMPOZIJUMI

(Navodi se samo manji broj radova)

1. NUMERIČKI POSTUPCI U REŠAVANJU JEDNAČINA

1.1. P.Hood: "Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol.10, pp379-399, 1976.

1.2. C.Meyer: "Solution of Linear Equations - State-of-the-Art", ASCE, No ST7, pp. 1507-1526, 1973.

1.3. A.K.Noor: "Recent Advances in Reduction Methods for Nonlinear Problems", Comp.&Struc., Vol. 13, No 1-3, pp. 31-45, 1981.

1.4. M.Geradin et. al.: "Computational Strategies for the Solution of Large Nonlinear Problems Via Qasi-Newton Methods", Comp. & Struc., Vol. 13, No 1-3, pp. 73-83, 1981.

1.5. D.C.Krinke, R.L.Huston: "An Analysis of Algorithms for Solving Differential

Equations", Comp. & Struc., Vol. 11, No 1-2, pp.69-75, 1980.

1.6. H.A.Kamel, M.W.McCabe: "Direct Numerical Solution of Large Sets of Simultaneous Equations", Comp. & Struc., Vol. 9, No 2, pp. 113-125, 1978.

1.7. K,J.Bathe, E.Wilson: "Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods", Earthqu. Eng. & Struc. Dyna., Vol. 1, pp.283-291, 1973.

2. METODA KONAČNIH ELEMENATA U REŠAVANJU NAVIER-STOKES-OVIH JEDNAČINA

2.1. M.Kawahara et. al.: "Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 437-456, 1976.

2.2. T.Bratanow, T.Spehert: "Numerical Modeling of Unsteady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", Applied Numerical Modeling, 2nd Int. Conf., Spain, 1978.

2.3. C.A.Brebbia, S.Smith: "Solution of Navier-Stokes Equation for Transient Incompressible Flow", Finite Elements in Water Resources, 2nd Int. Conf., London, 1978.

2.4. P.Gresho, R.Lee, T.Stullich: "Solution of the Time-Dependent Navier-Stokes Equations Via FEM", Finite Elements in Water Resources, 2nd Int. Conf., London, 1978.

2.5. M.Olson: "Comparison of Various Finite Element Solution Methods for the Navier-Stokes Equations", Finite Elements in Water Resources, 2nd Int. Conf., London, 1978.

2.6. P.Gresho et. al.: "A Modified Finite Element Method for Solving Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations. Patr 1: Theory", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, pp. 557-598, 1984.

2.7. P.Gresho et. al.: "A Modified Finite Element Method for Solving Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations. Part 2: Applications", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, pp. 619-640, 1984.

2.8. C.Bosman et. al.: "General Considerations of Numerical Stability and Accuracy in Inviscid Compressible Flow Calculations Employing Primitive Variables", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 2, No 2, pp.123-151, 1982.

2.9. A.C.Benim, W.Zinser: "A Segregated Formulation of Navier-Stokes Equations With Finite Elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering pp. 223-237, 1986.

2.10. P.F.Galpin, G.D.Raithby: "Treatment of Nonlinearities in the Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 6, pp. 409-426, 1986.

.11. F.N.Van de Vosse et. al.: "A Finite Element Approximation of the Unsteady Two-Dimensional Naveir-Stokes Equations", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 6, pp. 427-443, 1986.

3 INTERAKCIJA FLUIDA I KONSTRUKCIJA

3.1. R.Dungar: "An Efficient Method of Fluid-Structure Coupling in the Dynamic Analysis of Structures", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Special Issue on Flui-Structure Interaction, Vol. 13, No 1, pp. 93-109, 1978.

3.2. C.I.Yang, T.J.Moran: "Finite Element Solution of Added Mass and Damping of Oscillation Rods in Viscous Fluids", Jour. Applied Mech., Vol. 46, pp. 519-523, 1979.

3.3. W.C.Muller: "Simplified Analysis of Linear Fluid-Structure Interaction", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 17, pp. 113-121, 1981.

3.4. H.Neishols et. al.: "Stability of Some Explicit Difference Schemes for Fluid-Structure Interaction Problems", Comp. & Struc., Vol. 13, No 1-3, pp. 97-103, 1981.

3.5. W.H.McMaster et. al.: "Fluid-Structure Coupling Algorithm", Comp. & Struc. Vol. 13, No 1-3, pp. 163-167, 1981.

3.6. J.E.Jackson Jr., T.L.Cost: "Finite Element Solution of Nonlinear Fluid-Structure Interaction Problem Under Hydrodynamic Schock Conditions", Comp. & Struc., Vol. 13, No 1-3, pp.167-171, 1981.

3.7. T.Hanson et. al.: "Numerical Modeling of Wind Flow Over Buildins in Two Dimensions", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, pp.25-42, 1984.

3.8. T.Hanson et. al.: "A Three-Dimensional Simulation of Wind Flow Around Buildings", Int. Jour. Num. Meth. Fluids, Vol. 6, pp.113-127, 1986.

3.9. H.N.Abramson: "Dynamic Behaviour of Liquid in Moving Container", Appl. Mech. Reviews, Vol. 16, No 7, pp.501-506, 1963.

3.10. W.K.Liu, H.G.Chang: "A Method of Computation for Fluid-Structure Interactions" Comp. & Struc., Vol. 20, pp. 311-320, 1985.

3.11. W.K.Liu, H.G.Chang: "On a Numerical Method for Liquid Filled Systems", Comp. & Struc., Vol. 23, pp. 671-677, 1986.

3.12. D.Fisher: "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks", Earthqu. Eng. & Struc. Dynam., Vol. 7, No 6, pp.587-603, 1979.

3.13. G.S.Portez, A.K.Chopra: "Dynamic Analysis of Simple Arch Dams Including Hydrodynamic Interaction", Earthq. Eng. & Struc. Dynam., Vol. 9, No 6, pp. 573-599, 1981.

3.14. S.Brčić: "Three-dimensional Time Response of Thin-Walled Circular Cylinder to Fluid Flow", Int. Conf. Num. Meth. for Coupled Problems, Swansea, 1981.

3.15. S.Brčić: "Uticaj horizontalnog turbulentnog vetra na zgrade sa zidnim platnima", 16. Jug. kong. prim. i teor. mehanike, Bečići, 1984., "naše gradjevinarstvo", br. 5/1985.

3.16. S.Brčić: "Finite Element Simulation of Fluid-Structure Interaction Problem - Tall Building Response to Wind", Euromech 188, Leeds, 1984.

3.17. S.Brčić: "Proračun uticaja vetra na visoke zgrade", Simp. Nova tehnička regulativa u gradjevinarstvu, Skoplje, 1986.

3.18. S.Brčić: "Flutter Analysis of Cable-Stayed Bridges", Int. Conf. on Steel Structures, Budva, 1986.