



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

**Aalborg Universitet**

## **Noter vedr. spændbeton**

Kloch, Søren

*Publication date:*  
2001

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Kloch, S. (2001). *Noter vedr. spændbeton*. Department of Mechanical Engineering, Aalborg University. U : Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet Nr. U2001

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

**B-Sektoren 6. semester 2001**

**NOTER VEDR. SPÆNDBETON**

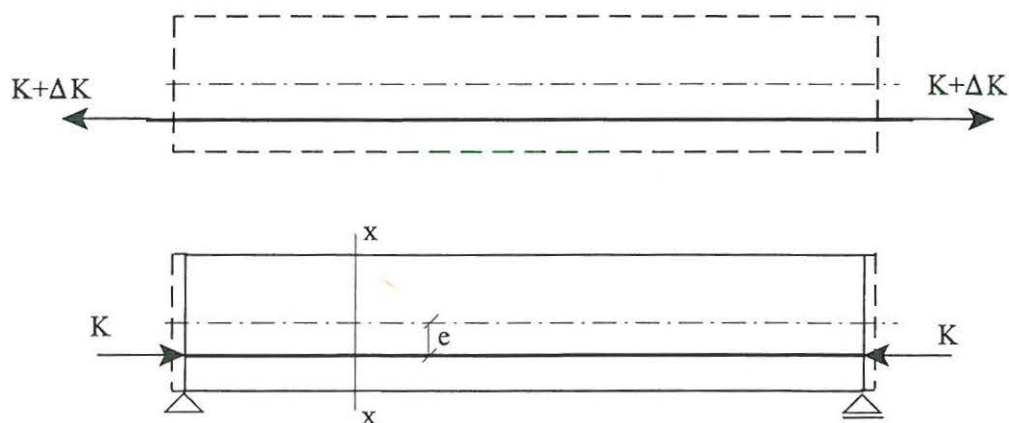
Note 1	Før- og efterspændt beton.	side 1.1
Note 2	Beregning af brudoment	side 2.1
Note 3	Valg af betontværsnit og forspændingskraft	side 3.1
Note 4	Kabelgeometri og beregning af kontaktkræfter	side 4.1
Note 5	Friktions- og låsetab	side 5.1
Note 6	Svind, krybning og relaxation	side 6.1
Note 7	Spaltearmering i forankringszonen	side 7.1
Note 8	Systemforspænding	side 8.1
	Oversigt over bestemmelser i DS 411	Bilag

/Søren Kloch

**Før- og efterspændt beton.**

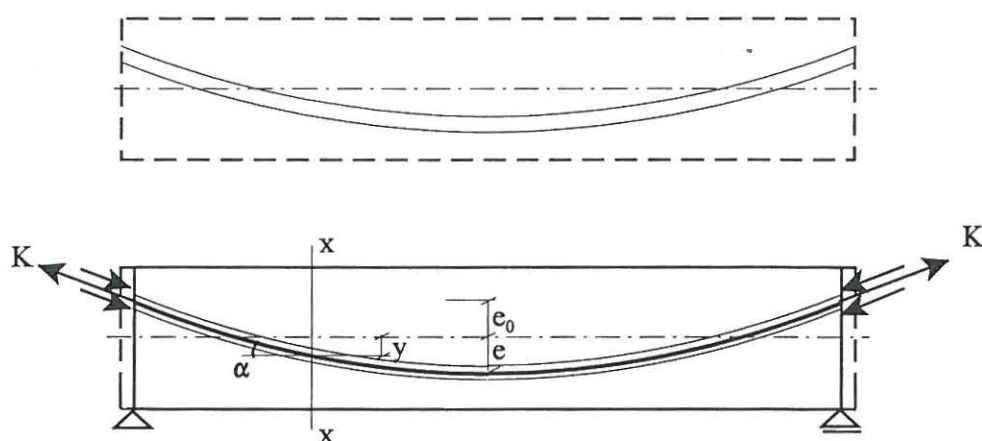
Princippet for udførelse af førspændt beton ses på figur 1. Armeringen, der består af liner eller strenge, opspændes mellem 2 ankerblokke (ikke vist) hvorefter betonlegemet udstøbes omkring armeringen. Når betonen har nået den tilstrækkelige styrke frigøres armeringen fra forankringerne og trækraften overføres som tryk på betonlegemets ender gennem adhæsion mellem beton og armering. På grund af betonens sammentrykning vil trækraften i armeringen reduceres derfor er det nødvendigt at opspænde armeringen med en større kraft end den ønskede ( $K$ ).

Førspændt beton udføres normalt som standardprodukter på en dertil indrettet fabrik.



Figur 1. Førspændt bjælke

Princippet for udførelse af efterspændt beton er skitseret på figur 2. Betonlegemet støbes med indlagte kanlrør for spændarmeringen. Når betonen har nået den ønskede styrke trækkes armeringen gennem kanlrørerne og den opspændes med donkrafte der overfører en tilsvarende



Figur 2. Efterspændt bjælke

trykkraft på betonlegemet. Da træk i armering og tryk mod beton etableres samtidig vil forspændingskraften ( $K$ ) ikke reduceres på grund af betonens forkortelse med denne metode.

Armeringen der benyttes til efterspændt beton er enten kabler bestående af et antal liner eller strenge og eller massive stænger. Da kanlrørerne kan indlægges i forskallingen med en vilkårlig geometri kan armeringen føres mere frit og hensigtsmæssigt end tilfældet er ved førspændt beton.

En anden fordel er at man ikke nødvendigvis behøver at påføre hele forspændingskraften på en gang. Til gengæld er selve forspændingsproceduren og etablering af forankringer mere kompliceret og metoden benyttes normalt kun ved insitu støbte konstruktioner.

### Bestemmelse af snitkræfter i anvendelsesgrænsetilstanden

Virkningen fra forspændingen kan bestemmes som et selvstændigt bidrag (dellast) der kombineres med virkningen fra egenvægt og øvrige laster på konstruktionen.

For statisk bestemte konstruktioner vil der ikke opstå tvangskræfter på grund af de deformationer som forspændingen medfører. Fx. vil der ikke opstå reaktioner ved understøtningerne i de på figur 1 og 2 viste bjælker selvom forspændingen medfører både længdeændringer og krumninger af bjælkerne.

Da der således er tale om en "egenspændingstilstand" kan man bestemme virkningen af forspændingen direkte ud fra forspændingskraftens størrelse og placering i det enkelte tværsnit idet trækraften i armeringen og resultanten af kræfter på betonlegemet vil være lige store og modsat rettede. I det følgende benyttes de på figur 3 viste betegnelser for snitkræfterne i betonlegemet fra forspændingen i et vilkårligt snit.



Figur 3. Forspænding og snitkræfter

Som tilnærmelse forudsættes det, at trækraften i armeringen er konstant, og betragtes bjælken i figur 1 ses det at virkningen fra forspændingen vil være konstant i hele længden:

$$N_K = -K \quad V_K = 0 \quad M_K = -K \cdot e$$

De tilsvarende udtryk for bjælken i figur 2 bliver:

$$N_K = -K \cdot \cos\alpha \quad V_K = -K \cdot \sin\alpha \quad M_K = -K \cdot \cos\alpha \cdot y$$

Med denne armeringsføring ses det umiddelbart, at forskydningskraften  $V_K$  får sin maksimale værdi ved vederlagene og er 0 ved bjælkemidten. Momentet  $M_K$  varierer med armeringsføringen og får sin maksimale værdi ( $-K \cdot e$ ) ved bjælkemidten. For en bjælke der, udover sin egenvægt påføres en jævnt fordelt nedadrettet last vil virkningen fra forspændingen således være optimal. For at undgå trækspændinger ved bjælkeenderne bør ekscentriciteten  $e_0$  vælges indenfor kerneradius.

For en statisk ubestemt konstruktion, fx. en kontinuerlig bjælke, er det nødvendigt at tage hensyn til de tvangskræfter som opstår når konstruktionen deformeres ved påførslen af forspændingen. Man kan indlede beregningen som ovenfor og derefter korrigere resultaterne med bidragene fra de beregnede tvangskræfter (reaktionerne).

En mere systematisk metode er at beregne snitkræfterne ved at betragtes betonlegemet som et selvstændigt statisk system der påføres de kontaktkræfter der opstår mellem beton og armering. Kontaktkræfterne optræder dels ved forankringer og dels hvor armeringsføringen er krum eller har knæk, og virkningen på beton og armering kan opfattes som 2 modsatrettede kraftsystemer der hver for sig er i ligevægt.



Sidstnævnte metode anbefales og kan naturligvis også benyttes ved statisk bestemte konstruktioner hvilket illustreres ved at betragte de 2 eksempler ovenfor.

Bjælken figur 1.

Her er der kun kontaktkræfter fra forankringerne ved enderne, nemlig et momentet  $-K \cdot e$  og trykkraften  $K$ . Det ses let at virkningen af disse kræfter påført betonbjælken overalt giver

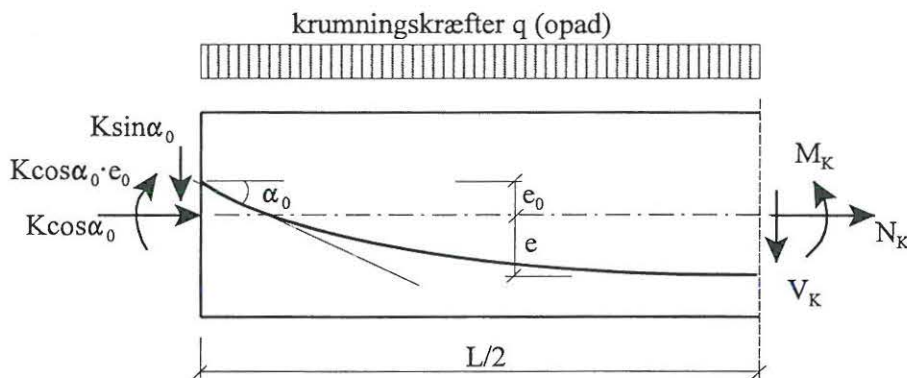
$$N_K = -K \quad V_K = 0 \quad M_K = -K \cdot e$$

Altså samme resultat som ovenfor.

Bjælken figur 2.

Her er beregningen noget mere besværlig idet der både er kontaktkræfter fra forankringerne og fra krumningskræfter langs armeringen. Krumningskræfterne virker som en linielast vinkelret på armeringsretningen med størrelsen  $K/R$  hvor  $R$  er krumningsradius, se i øvrigt note 4 hvor dette emne behandles.

Ved forankringerne henføres forspændingskraften  $K$  til bjælkeaksen og opløses i de 3 på figur 4 viste kontaktkræfter (og tilsvarende ved bjælkens højre ende).



Figur 4. Kontaktkræfter

Hvis armeringen antages at være parabelformet og længden  $L \gg (e_0 + e)$  kan følgende tilnærmelser benyttes (se også note 4).

$$\sin \alpha_0 \approx \tan \alpha_0 \approx 4(e_0 + e)/L \quad \cos \alpha_0 \approx 1 \quad R \approx L^2/8(e_0 + e)$$

$$q \approx K/R \approx 8K(e_0 + e)/L^2 \quad \text{virkende lodret opad}$$

Betragtes den simpelt understøttede bjælke nu kun påført disse kontaktkræfter og beregnes snitkræfterne midt i bjælken med de anførte tilnærmelser fås

$$N_K = -K \cos \alpha_0 \approx -K$$

$$V_K = -K \sin \alpha_0 + q \cdot L/2 \approx 0$$

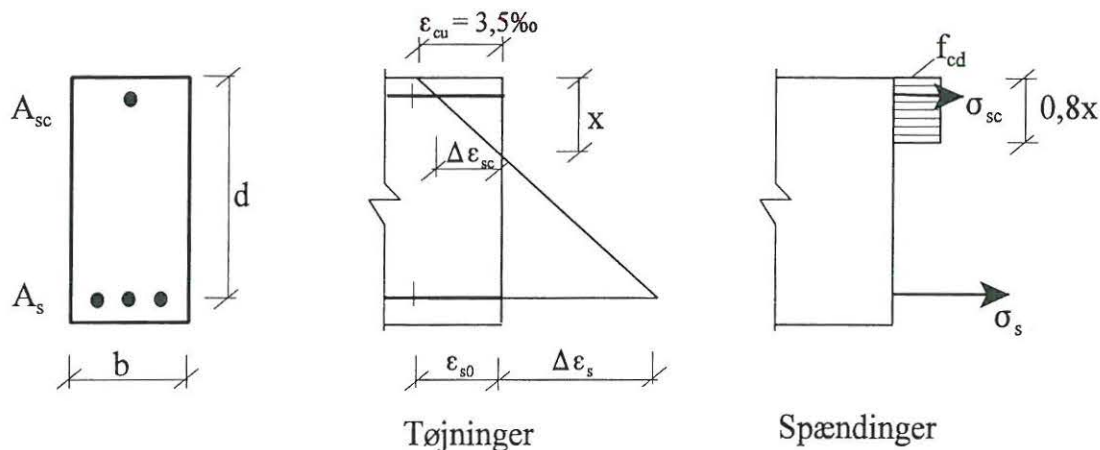
$$M_K = K \cos \alpha_0 \cdot e_0 - K \sin \alpha_0 \cdot L/2 + q \cdot L^2/8 \approx -K \cdot e$$

Altså igen samme resultat som ovenfor.

Bemærk at kontaktkræfterne udgør et kraftsystem i ligevægt og at der derfor ikke er ydre reaktionskræfter i statisk bestemte bjælke fra forspændingen.

### Forudsætninger

I brudstadiet er tværsnittet revnet og spændingsfordelingen ikke længere elastisk. I forhold til betonkonstruktioner med slap armering er der den forskel, at forspændingen giver en tøjning i armeringen som optræder inden de øvrige laster påføres, se figur 1. Da der samtidig er tale om armeringstyper uden udpræget flydegrænse (se figur 2) giver det en lidt mere besværlig beregning af brudsikkerheden.



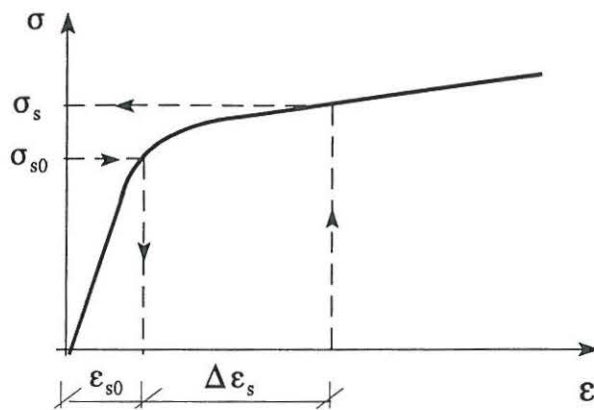
Figur 1. Brudstadiet

### Beregningsprocedure

I det følgende beskrives kort proceduren for bestemmelse af det regningsmæssige brudmoment i det simple tilfælde for et **rektangulært tværsnit** med **ren momentpåvirkning** og **ingen armering i trykzonen**. Der benyttes de på figur 1 viste betegnelser, og partialkoefficienter på armering og beton indføres.

- 1) Spændingen i armeringen  $\sigma_{s0}$  fra den kendte forspændingskraft beregnes og derefter bestemmes  $\epsilon_{s0}$  ved hjælp af den *fysiske betingelse* (armeringens arbejdskurve, se principskitsen figur 2).
- 2) Der gættes på en værdi af trykzonehøjden  $x$  og tillægstøjningen beregnes ved hjælp af den *geometriske betingelse*  $\Delta\epsilon_s = \epsilon_{cu} (d-x)/x$
- 3) Bestem den totale tøjning  $\epsilon_s = \epsilon_{s0} + \Delta\epsilon_s$  og derefter  $\sigma_s$  ved hjælp af armeringens arbejdskurven (figur 2)
- 4) Bestem træk- og trykresultanterne  $F_s = A_s \cdot \sigma_s$  og  $F_c = 0,8x \cdot b \cdot f_{ck}$
- 5) Hvis den *statiske betingelse*  $F_s/\gamma_s - F_c/\gamma_c = 0$  nu er opfyldt er den valgte værdi af  $x$  korrekt, ellers gentages punkt 2 til 5 med en korrigeret  $x$ -værdi.
- 6) Beregn brudmomentet  $M_u = (d - 0,4x) \cdot F_s/\gamma_s$  og kontroller om det er større end det regningsmæssige moment der optrædende i tværsnittet.

Såfremt der optræder en normalkraft i tværsnittet medtages denne på sædvanlig vis i ligningerne under pkt. 5 og 6.



Figur 2. Arbejdskurve, principskitse

Hvis armering er placeret med forskellig effektiv højde ( $d$ ) eller evt. har forskellig spænding fra forspændingen må der tages hensyn hertil ved beregning af tøjninger og spændinger.

Er der placeret forspændt armering i trykzonen, som antydtes på figur 4, vil der her ske en aflastning af forspændingen idet  $\Delta \epsilon_s < 0$ . Bidrag fra denne armering medtages naturligvis, men er den placeret over betonens trykresultant vil bidraget virke til ugunst for brudmomentet  $M_u$  og bør derfor medtages med partialkoefficienten  $\gamma_s = 1.0$ .

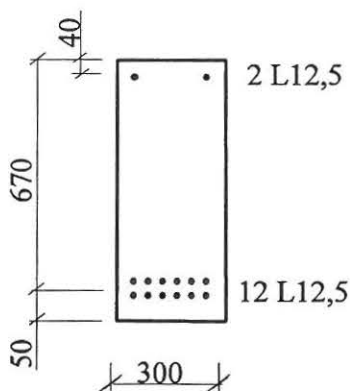
Endelig skal det bemærkes, at evt. slap armering også kan medtages ved beregningen af tværsnittes brudmoment.

### Taleksempel

Bæreevnen af det på figur 3 viste forspændte bjælketværsnit ønskes eftervist for følgende kombination af regningsmæssige værdier af moment og normalkraft:

$$M_s = 600 \text{ kNm (træk i us)}$$

$$N_s = 120 \text{ kN (træk)}$$



Figur 3. Bjælketværsnit

Beregningsforudsætninger:

Normal sikkerhedsklasse,  
skærpet materialekontrol.

$$\text{Beton: } f_{ck} = 45 \text{ MPa}$$

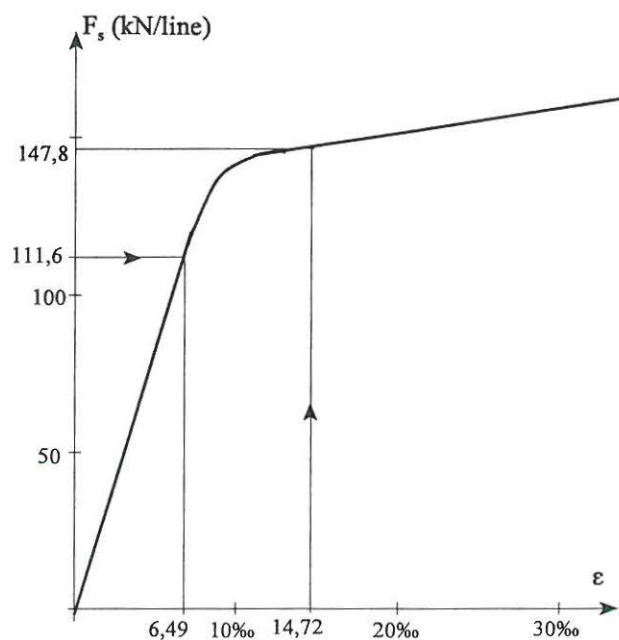
$$\gamma_c = 1.65 \cdot 0.95 = 1.57$$

$$\text{Stål: } f_{uk} = 1760 \text{ MPa}$$

$$\gamma_s = 1.30 \cdot 0.95 = 1.24$$

L12,5 liner har et tværsnitsareal på  $93 \text{ mm}^2$  og en brudstyrke på  $164 \text{ kN}$ . De opspændes alle med  $\sigma_{s0} = 1200 \text{ MPa}$  svarende til en kraft  $F_{s0} = 111.6 \text{ kN/line}$ , se i øvrigt arbejdslinien figur 4.





Aritmetrisk tilnærmelse:

$$0 < \varepsilon < 7: F_s = 17,205 \cdot \varepsilon$$

$$7 < \varepsilon < 10:$$

$$F_s = 0,2551 \cdot \varepsilon^3 - 9,237 \cdot \varepsilon^2 + 109,03 \cdot \varepsilon - 277,7$$

$$10 < \varepsilon < 35: F_s = 136 + 0,8 \cdot \varepsilon$$

$\varepsilon$  skal indsættes i ‰ og  $F_s$  fås i kN !

Figur 4. Karakteristisk arbejdslinie for L12,5

Arbejdskurven på figur 4, med tilhørende aritmetrisk tilnærmelse, er udarbejdet specielt for L12,5 liner, derfor er det bekvemt i stedet for spændingen, at angive kraften pr. line som funktion af tøjningen.

I det følgende regnes alle 12 liner i træksiden placeret i det fælles tyngdepunkt hvilket normalt er en god tilnærmelse.

1) opspændingskraften  $F_{s0} = 111.6$  kN giver  $\varepsilon_{s0} = 6.49‰$  (figur 4)

2) 1. gæt  $x = 200$  mm giver tillægstøjningerne

$$\Delta \varepsilon_{sc} = -3.5‰(200-40)/200 = -2.80‰ \quad (\text{liner i oversiden})$$

$$\Delta \varepsilon_s = 3.5‰(670-200)/200 = 8.23‰ \quad (\text{liner i undersiden})$$

3) de resulterende tøjninger beregnes og i stedet for  $\sigma_s$  bestemmes  $F_s$  direkte af figur 4 eller af de tilsvarende aritmetriske udtryk

$$\varepsilon_{sc} = 6.49 - 2.80 = 3.69‰ \quad (\text{liner i oversiden})$$

$$\varepsilon_s = 6.49 + 8.23 = 14.72‰ \quad (\text{liner i undersiden})$$

4) Figur 4 eller de aritmetriske udtryk giver

$$F_{sc} = 63.5 \text{ kN/line} \quad \text{og} \quad F_s = 147.8 \text{ kN/line}$$

trykresultanten i betonen for den valgte  $x$ -værdi bestemmes

$$F_c = 0.8 \cdot 200 \cdot 300 \cdot 45 \cdot 10^{-3} = 2160 \text{ kN}$$

5) kontrol af den *statiske betingelse* med regningsmæssige værdier

$$12 \cdot 147.8 / 1.24 + 2 \cdot 63.5 / 1.0 - 2160 / 1.57 = 1430 + 127 - 1376 = 181 \text{ kN} > 120 \text{ kN} !$$



Da resultanten af spændingerne er forskellig fra træknormalkraften er den statiske betingelse (ækvivalens) ikke opfyldt, og den valgte  $x$ -værdi derfor ikke korrekt.

Det ses umiddelbart at trykresultanten skal øges, og da  $F_s$  samtidig kun varierer svagt med tøjningen i det aktuelle interval ( $\epsilon > 10\%$ ), kan følgende tilnærmelse til fastlæggelse af  $x$  benyttes

$$x = 200 \cdot (1376 + 181 - 120) / 1376 = 209 \text{ mm}$$

Idet mellemregninger udelades giver en gennemregning af pkt. 2 til 5 med  $x=209$  m:

$$F_{sc} = 63.0 \text{ kN/line} \quad F_s = 147.4 \text{ kN/line} \quad F_c = 2257 \text{ kN}$$

$$12 \cdot 147.4 / 1.24 + 2 \cdot 63.0 / 1.0 - 2257 / 1.57 = 1426 + 126 - 1438 = 114 \text{ kN} \approx 120 \text{ kN}$$

Afvigelsen er nu ubetydelig og der er ikke behov for yderligere gennemregninger (den korrekte værdi er  $x=208.2$  mm, og det tilhørende resultat ses i skemaet nedenfor).

6) kontrol af brudsikkerheden (der tages moment om armeringen i træksiden):

$$M_u = (0.670 - 0.4 \cdot 0.209) \cdot 1438 - (0.670 - 0.040) \cdot 126 = 843 - 79 = 764 \text{ kNm}$$

$$M - (0.720 / 2 - 0.050) \cdot N = 600 - 33 = 567 \text{ kNm}$$

da  $M_u > 567$  kNm er brudsikkerheden i orden !

Bemærk at oversidearmeringens bidrag virker til ugunst for brudmomentet, derfor ville det være på den usikre side at benytte en partialkoefficient  $> 1.0$ .

### Forspændingens indflydelse på brudmomentet

For at undersøge forspændingens indflydelse på brudmomentet  $M_u$  gennemføres beregningen for det samme tværsnit, men med slap armering ( $\epsilon_{s0} = 0$ ). Til sammenligning medtages desuden resultaterne af en beregning med det tilsvarende tværsnit uden armering i tryksiden.

Alle øvrige data og betegnelser er de samme og beregningerne gennemføres som vist som i ovenstående taleksempel. De vigtigste resultaterne er samlet i skemaet nedenfor.

Armering	$\epsilon_{s0}$ ‰	$x$ (mm)	$\epsilon_{sc}$ ‰	$\epsilon_s$ ‰	$N_{sc}$ (kN/line)	$N_s$ (kN/line)	$N_c$ (kN)	$M_u$ (kNm)
2 L12,5 i os	0	171.9	-2.69	10.14	-46.2	144.1	1857	758
12 L12,5 i us (som figur 3)	6.49	208.2	3.66	14.25	63.0	147.4	2249	761
12 L12,5 i us	0	183.1	-	9.31	-	142.6	1978	752
	6.49	191.1	-	15.26	-	148.2	2064	780

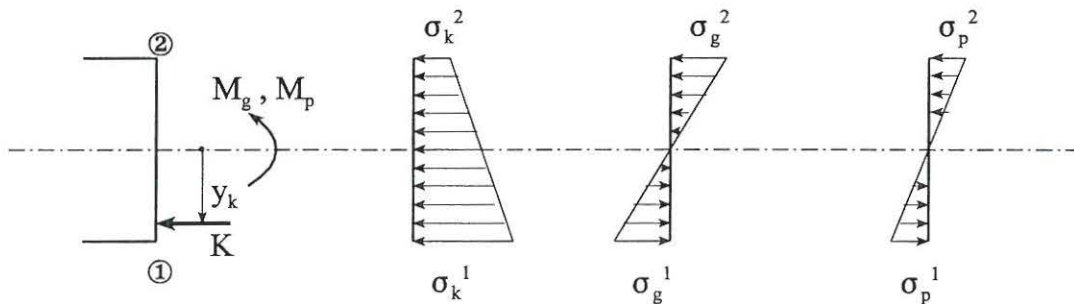
Som ovenfor er der regnet med en træknormalkraft på 120 kN og det regningsmæssige brudmoment  $M_u$  beregnes ved at tage moment om armeringen i træksiden.

Det fremgår, at opspændingen har en positiv effekt på brudmomentet hvilket skyldes, at armeringen udnyttes bedre på grund af bidraget fra  $\epsilon_{s0}$ . Fordelen er dog meget beskedent i tilfældet med oversidearmering fordi denne fortsat er trækpåvirket i brudsituationen og dermed giver et negativt bidrag til  $M_u$ .

I det følgende vises, hvorledes man kan opstille et sæt betingelser, der angiver grænserne for valg af betondimensioner og forspændingskraft (K) i et tværsnit, hvor momenterne fra den permanente last  $M_g$  og variable last  $M_p$  er bestemt. Forspændingskraften K ønskes fastlagt så de resulterende spændinger i anvendelsesgrænsetilstanden overalt opfylder betingelsen

$$-\sigma_t \leq \sigma \leq \sigma_c$$

hvor  $\sigma_t$  er den numerisk største værdi af trækspænding og  $\sigma_c$  den største trykspænding der kan accepteres. Valget af "tilladelige" værdier for  $\sigma_t$  og  $\sigma_c$  fastlægges under hensyntagen til betonens styrke, herunder alder, og samt kravene til konstruktionens funktion i øvrigt.



Figur 1. Spændingsfordeling i i urevnet tværsnit

I anvendelsesgrænsetilstanden forudsættes tværsnittet at være urevnet, og med lineær spændingsfordeling. Ovenstående betingelse skal være opfyldt for 2 forskellige lastkombinationer nemlig forspænding + egenvægt (k+g) og forspænding + egenvægt + nyttelast (k+g+p). Med de på figuren viste betegnelser kan der opstilles følgende betingelser for de resulterende spændinger i tværsnittets overside (2) og underside (1) idet tryk regnes positiv:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k^2 + \sigma_g^2 &\geq -\sigma_t \\ \sigma_k^2 + \sigma_g^2 + \sigma_p^2 &\leq \sigma_c \end{aligned} \right\} \quad -\sigma_t \leq \sigma_k^2 + \sigma_g^2 \leq \sigma_c - \sigma_p^2 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k^1 + \sigma_g^1 + \sigma_p^1 &\geq -\sigma_t \\ \sigma_k^1 + \sigma_g^1 &\leq \sigma_c \end{aligned} \right\} \quad -\sigma_p^1 - \sigma_t \leq \sigma_k^1 + \sigma_g^1 \leq \sigma_c \quad (1)$$

Indet  $W_2$  og  $W_1$  tværsnittets modstandsmomenter indføres  $\sigma_p^1 = -M_p/W_1$  og  $\sigma_p^2 = M_p/W_2$

og ulighederne (2) og (1) kan herefter omskrives til

$$-\sigma_t W_2 \leq W_2(\sigma_k^2 + \sigma_g^2) \leq \sigma_c W_2 - M_p \quad (2)$$

$$M_p - \sigma_t W_1 \leq W_1(\sigma_k^1 + \sigma_g^1) \leq \sigma_c W_1 \quad (1)$$

Benyttes ydergrænserne i de 2 sæt uligheder, fås følgende betingelser, der skal være opfyldt, for at et givet betontværsnit kan forspændes

$$W_2 \geq \frac{M_p}{(\sigma_c + \sigma_t)} \quad \text{og} \quad W_1 \geq \frac{M_p}{(\sigma_c + \sigma_t)}$$

Det bemærkes, at  $M_g$  der er momentet fra egenvægten eller fra den permanent last, ikke indgår i disse betingelser. Vælges et betontværsnit der kun lige opfylder ovenstående betingelser vil det normalt betyde, at forspændingskraften  $K$  bliver uhensigtsmæssig stor.

(2) og (1) videreudvikles ved at indføre

$$\sigma_k^2 = \frac{K}{A} - \frac{K \cdot y_k}{W_2} \quad \text{og} \quad \sigma_k^1 = \frac{K}{A} + \frac{K \cdot y_k}{W_1}$$

og

$$\sigma_g^1 = -M_g/W_1 \quad \text{og} \quad \sigma_g^2 = M_g/W_2$$

dermed fås følgende betingelserne for valg af  $K$

$$\frac{M_g + M_p - \sigma_c \cdot W_2}{y_k - k_2} \leq K \leq \frac{M_g + \sigma_t \cdot W_2}{y_k - k_2} \quad (2)$$

$$\frac{M_g + M_p - \sigma_t \cdot W_1}{y_k + k_1} \leq K \leq \frac{M_g + \sigma_c \cdot W_1}{y_k + k_1} \quad (1)$$

hvor betontværsnittets kerneradier  $k_1 = W_1/A$  og  $k_2 = W_2/A$  er indført.

Betingelsen (2) angiver kravene til  $K$  fra spændingerne i tværsnittets overside og (1) tilsvarende for spændingerne i undersiden. Desuden ses det at venstresiderne i ulighederne repræsenterer lastkombination  $k+g+p$  og højresiderne lastkombinationen  $k+g$ .

Forspændingskraften  $K$  skal vælges, så begge uligheder er opfyldt, dvs at de 2 intervaller overlapper hinanden, men selvom  $K$  naturligvis bør vælges mindst muligt, er problemet ikke helt så enkelt. Dels kan der være flere end de 2 lastkombinationer her, og dels reduceres  $K$  i konstruktionens levetid på grund af forskellige spændingstab. Endelig er det et problem, at betonens styrke udtrykt ved  $\sigma_t$  og  $\sigma_c$  er mindst på opspændingstidspunktet hvor  $K$  er størst, se eksempel nedenfor.

Ovenfor er forspændingskraftens ekscentricitet  $y_k$  forudsat kendt, men ulighederne kan let omformes så de i stedet angiver grænserne for en given forspændingskrafts angrebepunkt. Dette er ofte nyttigt når man skal fastlægge armeringsføringen i en bjælke hvor  $M_g$  og  $M_p$  varierer medens forspændingskraften  $K$  er fastlagt og nogenlunde konstant over længden.

$$\frac{M_g + M_p - \sigma_c \cdot W_2}{K} + k_2 \leq y_k \leq \frac{M_g + \sigma_t \cdot W_2}{K} + k_2 \quad (2a)$$

$$\frac{M_g + M_p - \sigma_t \cdot W_1}{K} - k_1 \leq y_k \leq \frac{M_g + \sigma_c \cdot W_1}{K} - k_1 \quad (1a)$$



### Tværsnit med træk i oversiden

I det foregående forudsættes den på figur 1 viste situation hvor momenterne fra den ydre last  $M_g$  og  $M_p$  regnes positive ved træk i undersiden (1) og hvor forspændingskraftens ekscentricitet  $y_k$  regnes positiv nedad fra tyngdepunktslinien

I tværsnit hvor  $M_g$  og  $M_p$  giver træk i oversiden, placeres forspændingskraften normalt over tyngdepunktet. De 2 sæt uligheder der blev udledt ovenfor kan modificeres så de også kan benyttes i denne situation:

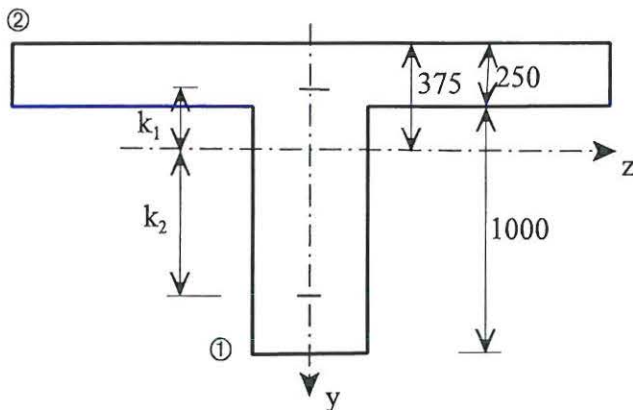
$$\frac{M_g + M_p + \sigma_t \cdot W_2}{y_k - k_2} \leq K \leq \frac{M_g - \sigma_c \cdot W_2}{y_k - k_2} \quad (2b)$$

$$\frac{M_g + M_p + \sigma_c \cdot W_1}{y_k + k_1} \leq K \leq \frac{M_g - \sigma_t \cdot W_1}{y_k + k_1} \quad (1b)$$

Betingelserne (2b) og (1b) svarer til kravene for henholdsvis over- og underside, og er udledt under forudsætning af fortegnsgenstandens definitionen på figur 1. Det betyder at  $y_k$  og  $M_g$  og  $M_p$  alle indsættes som negative størrelser.

### Taleksempel

Den nødvendige forspændingskraft ønskes bestemt i en kontinuerlig bjælke med det på figur 2 viste tværsnit. Det forudsættes at forspændingskraften er konstant i hele bjælke, men med varierende ekscentricitet  $y_k$ .



Tværsnitsdata:

$$A = 1.25 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

$$W_2 = 458.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \text{ (overside)}$$

$$W_1 = 196.6 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \text{ (underside)}$$

$$k_2 = W_2 / A = 367.0 \text{ mm}$$

$$k_1 = W_1 / A = 157.3 \text{ mm}$$

Figur 2. Tværsnitsgeometri og data (armering ikke vist)

Bjælken udføres af beton med trykstyrke  $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$  og trækstyrke  $f_{ct} = 2.0 \text{ MPa}$ . Det forudsættes, at betonen har opnået 75% af den foreskrevne styrke på det tidspunkt hvor forspænding + egenvægt påføres, og den fulde styrke når den variable last virker.

Til bestemmelse af den nødvendige forspændingskraft i anvendelsesgrænsetilstanden, er de dimensionsgivende momenter bestemt for henholdsvis egenvægt (g) og variabel (p) i 2 snit:

a) Tværsnit ved mellemunderstøtning:  $M_g = -2400 \text{ kNm}$   $M_p = -2000 \text{ kNm}$   
(træk i oversiden)

b) Tværsnit midt i fag:  $M_g = 1800 \text{ kNm}$   $M_p = 1200 \text{ kNm}$   
(træk i undersiden)



Der findes ingen normkrav til fastsættelse af "tilladelige" spændingerne i anvendelsesgrænsetilstanden, men erfaringsmæssigt bør trykspændingen  $\sigma_c$  ikke vælges større end 55% af  $f_{ck}$ . Den "tilladelige" trækspænding afhænger af konstruktionens funktion og miljøklassen, her vælges  $\sigma_t$  til  $2 \cdot f_{ct}$ , men ofte accepteres trækspændinger ikke.

I opspændingsfasen hvor betonen ikke har opnået sin fulde styrke reduceres de tilladelige spændinger Ifølge DS 411 (4. udgave 1999) må  $\sigma_c$  ikke må overstige 70% af trykstyrken på opspændings-tidspunktet. Der ses normalt ses bort fra trækstyrken i denne situation.

For lastkombinationen forspænding + egenvægt + variabel last (k+g+p), dvs venstre side af ulighederne, benyttes derfor

$$\sigma_c = 0.55 \cdot 40 = 22.0 \text{ MPa} \quad \text{og} \quad \sigma_t = 2 \cdot 2.0 = 4.0 \text{ Mpa.}$$

For lastkombinationen forspænding + egenvægt (k+g), dvs højre side af ulighederne, benyttes tilsvarende

$$\sigma_c = 0.7 \cdot 0.75 \cdot 40 = 21.0 \text{ MPa} \quad \text{og} \quad \sigma_t = 0.$$

#### a) Dimensionering af tværsnit med træk i oversiden.

Det antages at forspændingskraftens angrebspunkt over mellemunderstøtningen er placeret midt i pladen svarende til  $y_k = -250$  mm. Den nødvendige forspændingskraft  $K$  fastlægges ved hjælp af grænsebetingelserne (2b) og (1b) hvor  $y_k$ ,  $M_g$  og  $M_p$  indsættes med fortegn :

$$\frac{-2400 - 2000 + 4.0 \cdot 458.7}{-250 - 367.0} 10^3 \leq K \leq \frac{-2400 - 21.0 \cdot 458.7}{-250 - 367.0} 10^3 \quad (\text{overside})$$

$$\frac{-2400 - 2000 + 22.0 \cdot 196.6}{-250 + 157.3} 10^3 \leq K \leq \frac{-2400 - 0 \cdot 196.6}{-250 + 157.3} 10^3 \quad (\text{underside})$$

der giver intervallerne

$$\begin{aligned} 4158 \text{ kN} &\leq K \leq 19502 \text{ kN} && (\text{overside}) \\ 807 \text{ kN} &\leq K \leq 25890 \text{ kN} && (\text{underside}) \end{aligned}$$

Vælges den mindste værdi  $K = 4158$  kN skal det tages i betragtning, at der sker et tab i forspændingskraften i konstruktionens levetid. Dette tab sættes her skønsmæssigt til 15% og den initiale forspændingskraft vælges derfor til

$$K_{\text{init}} = K_{\text{eff}}/0.85 = 4158/0.85 = 4892 \text{ kN} (< 19502 \text{ kN})$$

#### b) Dimensionering af tværsnit med træk i undersiden.

Da opspændingen sker fra bjælkeenderne forudsættes forspændingskraften at være konstant i hele bjælkens længde idet der i dette eksempel ses bort fra friktions- og låsetab. Den ovenfor fundne kraft  $K = 4892$  kN skønnes umiddelbart være tilstrækkelig også i det dimensionsgivende tværsnit med positive momenter. Derfor gennemføres der ikke en beregning af den nødvendige forspændingskraft med grænsebetingelserne (2) og (1), men i stedet undersøge det hvor forspændingsarmeringen bør placeres hvis  $K = 4892$  kN. Det sker ved at anvende de ovenfor udledte grænsebetingelser for  $y_k$ :

$$\frac{1800+1200-22.0 \cdot 458.7}{4892} 10^3 + 367.0 \leq y_k \leq \frac{1800+0 \cdot 458.7}{4859} 10^3 + 367.0 \quad (2a)$$

$$\frac{1800+1200-4.0 \cdot 196.6}{4892} 10^3 - 157.3 \leq y_k \leq \frac{1800+21.0 \cdot 196.6}{4892} 10^3 - 157.3 \quad (1a)$$

der giver

$$\begin{aligned} -1082 \text{ mm} &\leq y_k \leq \mathbf{734.9 \text{ mm}} \\ \mathbf{295.2 \text{ mm}} &\leq y_k \leq 1054.6 \text{ mm} \end{aligned}$$

De markerede værdier af  $y_k$  ligger indenfor tværsnittet og kan derfor benyttes i praksis. De ret vide grænser for placeringen viser i øvrigt, at forspændingskraften  $K = 4892 \text{ kN}$  og/eller betontværsnittets dimensioner kunne reduceres hvis dette ønskes.

Det bemærkes at ovenstående kun vedrører **anvendelsesgrænsetilstanden**. En fuldstændig dimensionering omfatter også eftervisning af brudsikkerhed m.m.

## KABELGEOMETRI

Når man skal fastlægge armerings placering i en efterspændt konstruktion, fx. en kontinuerlig bjælke eller plade, vil der normalt være givet et eller flere punkter hvor igennem armeringen skal føres. Det drejer sig dels om dimensionsgivende snit hvor forspændingskraftens ekscentricitet ( $y_k$ ) er fastlagt som vist i note 3, og dels om krav med hensyn til placering af forankringer.

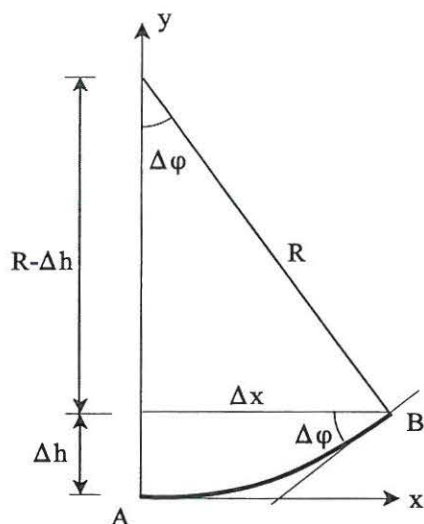
Kablegeometrien sammensættes af rette linier og cirkelbuer eller 2. grads parabler, og der må ikke optræde knæk i forløbet. For at kunne beregne kontaktkræfter og variationen i forspændingskraften som følge af friktions- og låsetab (se note 5) er det nødvendigt med en matematisk beskrivelse af armeringsføringen.

Under udstøbningen af betonen skal armeringen (egentlig kabelkanalerne) understøttes med passende afstand derfor er er også nødvendigt at kunne beregne koordinaterne til i et vilkårligt punkt af armeringen. Afstanden mellem disse understøtninger er ca. 1 m, men afhænger i øvrigt af kabelkanalernes stivhed og af armeringens krumningen på den pågældende strækning.

Med en udførelsesnøjagtigheden på ca. 5 mm er det normalt ikke nødvendigt at benytte de eksakte matematiske udtryk og man kan evt. også anvende udtryk for parabler selvom der er tale om cirkelbuer. I det følgende vises dels udledelsen af tilnærmede udtryk og dels eksempel på anvendelsen.

### Cirkelbue

Den på figuren viste cirkelbue AB har vandret tangent i pkt. A. Hvis  $\Delta x$  og R kendes kan ordinaten  $\Delta h$  og tangenthældningen  $\Delta \varphi$  bestemmes af



$$\Delta h = y = R - \sqrt{R^2 - \Delta x^2}$$

$$\Delta \varphi = \text{Arcsin}\left(\frac{\Delta x}{R}\right)$$

Ved rækkeudviklinger fås følgende simple tilnærmede udtryk for  $\Delta h$  og  $\Delta \varphi$ .

$$\Delta h = R(1 - \sqrt{1 - (\Delta x/R)^2}) = \frac{\Delta x^2}{2R} + \frac{\Delta x^4}{8R^3} + \dots \approx \frac{\Delta x^2}{2R}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta x}{R} \left( 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta x}{R} \right)^2 + \frac{3}{40} \left( \frac{\Delta x}{R} \right)^4 + \dots \right) \approx \frac{\Delta x}{R}$$

**Taleksempel**       $\Delta x = 2000 \text{ mm}$        $R = 10000 \text{ mm}$

Eksakt:               $\Delta h = 10000 - \sqrt{10000^2 - 2000^2} = 202 \text{ mm}$

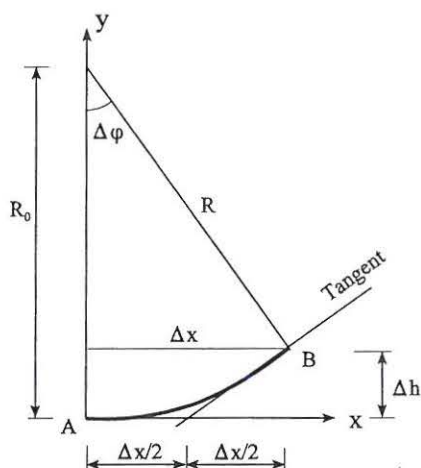
$$\Delta \varphi = \text{Arcsin}\left(\frac{2000}{10000}\right) = 0,2014 \text{ rad} = 11,54^\circ$$

Tilnærmet:          $\Delta h = \frac{2000^2}{2 \cdot 10000} = 200 \text{ mm}$

$$\Delta \varphi = \frac{2000}{10000} = 0,2000 \text{ rad} = 11,46^\circ$$

## 2. grads parabel

For den på figuren viste 2. grads parabel AB som har med vandret tangent og krumningsradius  $R_0$  i pkt. A haves



$$y = \frac{x^2}{2R_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{R_0}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R_0}$$

Det korrekte udtryk for krumningen er

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \text{ der for den viste parabel giver } R = R_0[1+(x/R_0)^2]^{3/2}$$

men med god tilnærmelse haves  $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R_0}$  svarende til konstant krumningradius.

**Taleksempel** fortsat, som ovenfor med  $R_0 = 10000 \text{ mm}$  fås i pkt. B:

$$\Delta h = y = \frac{2000^2}{2 \cdot 10000} = 200 \text{ mm}$$

$$\Delta \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{200}{1000} = 0,200 \text{ rad} = 11,46^\circ$$

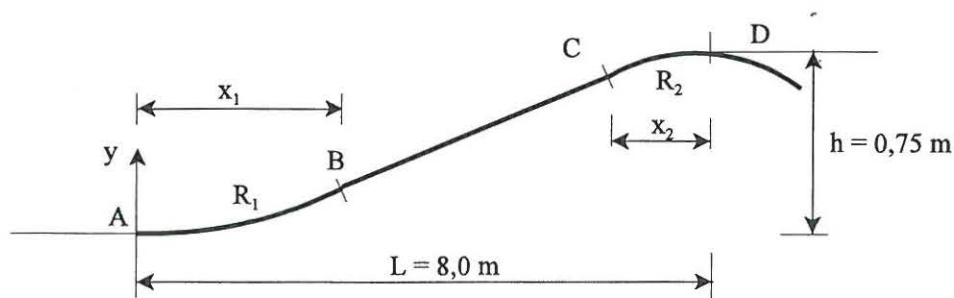
Eksakt:  $R = 10606 \text{ mm}$

Tilnærmet:  $R = R_0 = 10000 \text{ mm}$

Det ses, at tilnærmelsen for  $\Delta h$  i cirklebuen svarer til at denne erstattes med en 2. grads parabel. For både cirkelbue og parabel gælder at de tilnærmede udtryk kun bør benyttes når  $\Delta x \ll R$ .



Eksempler på fastlæggelse af kabelgeometri:



For den på figuren skitserede kabelføring hvor  $L$  og  $h$  kendes og tangenten i pkt. A og D skal være vandrette ønske følgende 2 situationer undersøgt.

1) pkt. B og C sammenfaldende d.v.s  $x_1 = x_2 = L/2 = 4,0$  m,  $R_1 = R_2$  ønskes bestemt.

Cirkelbuerne regnes tilnærmet som parabler:

$$\frac{h}{2} = \frac{x_1^2}{2R_1} \quad \text{giver} \quad R_1 = 21,333 \text{ m} \quad (=R_2)$$

$$\Delta\varphi = x_1/R_1 = x_2/R_2 = 0,1875 \text{ rad}$$

Den tilsvarende ordinat til pkt. B og C bliver  $y_B = y_C = 4,0^2/(2 \cdot 21,333) = 0,375$  m

Korrekt beregning med cirkelbuer giver  $R_1 = R_2 = 21,520$  m og  $\Delta\varphi = 0,1880$  rad

2)  $R_1 = 20,0$  m og  $R_2 = 5,0$  m er valgt, placeringen af pkt. B og C ønskes bestemt.

Cirkelbuerne regnes tilnærmet som parabler:

$$h = \frac{x_1^2}{2R_1} + \frac{x_2^2}{2R_2} + (L - x_1 - x_2)\Delta\varphi$$

$$\text{indsættes } x_2 = \frac{x_1}{R_1} R_2 \quad \text{og} \quad \Delta\varphi = \frac{x_1}{R_1} \quad \text{fås}$$

$$x_1 = 2,169 \text{ m}, \quad x_2 = 0,542 \text{ m} \quad \text{og} \quad \Delta\varphi = 0,1085 \text{ rad}$$

$$y_B = 2,169^2/(2 \cdot 20,0) = 0,118 \text{ m} \quad \text{og} \quad y_C = 0,75 - 0,542^2/(2 \cdot 5,0) = 0,721 \text{ m}$$

Den korrekte beregning med cirkelbuer giver

$$x_1 = 2,264 \text{ m}, \quad x_2 = 0,565 \quad \text{og} \quad \Delta\varphi = 0,1134 \text{ rad}$$

$$y_B = 0,129 \text{ m} \quad \text{og} \quad y_C = 0,718 \text{ m}$$

Det bemærkes at  $R_1$  og  $R_2$  ikke kan vælges frit, men begrænses af forholdet  $h/L$ .

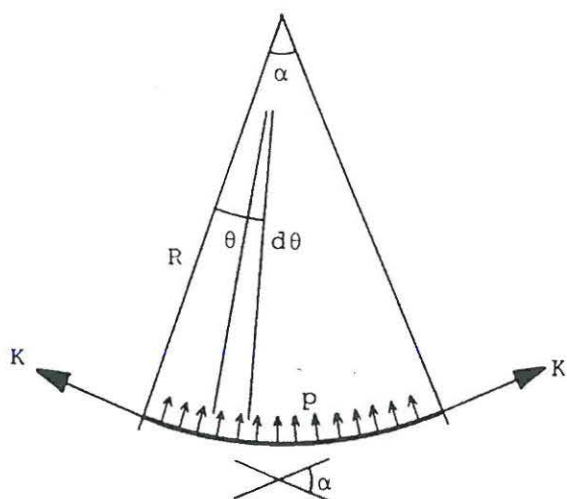
## BEREGNING AF KONTAKTKRÆFTER

Når virkningen af en forspændingen i en konstruktion skal beregnes kan det ske ved enten at betragte det enkelte betontværsnit og påføre en trykkraft med samme størrelse og retning som trækret i den opspændte armeringen, eller ved at beregne snitkraftfordelingen når den samlede konstruktion påføres de kontaktkræfter der opstår mellem armering og betonlegeme. Kontaktkræfterne udgør 2 lige store og modsatte kraftsystemer der virker på henholdsvis armering og betonlegeme.

Førstnævnte metode er dog begrænset til statisk bestemte konstruktioner idet der ikke tages hensyn til de tvangskræfter (reaktioner) der opstår i en statisk ubestemt konstruktion på grund af formændringerne i betonlegemet når forspændingen påføres.

I efterspændte konstruktioner stammer kontaktkræfterne dels fra forankringer i form af enkeltkræfter og dels af krumningskræfter på de strækninger hvor armeringen ikke er retliniet.

I det følgende vises hvorledes krumningskræfterne kan bestemmes og påføres konstruktionen som en linielast. Der ses i denne sammenhæng bort fra friktionskræfter.

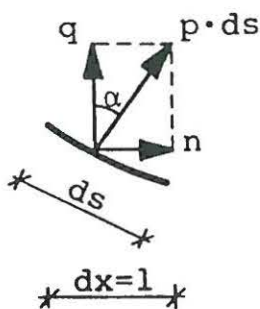


Den på figuren viste armering med krumningsradius  $R$  og konstant trækraft  $K$  udøver et tryk  $p$  pr. længdeenhed mod betonen, som findes ved projektion på en radius

$$K \cdot \sin \alpha - \int_0^\alpha R d\theta \cdot p \cdot \cos \theta = 0$$

$$\text{hvoraf } p = K/R \quad (1)$$

Af hensyn til snitkraftberegningen er det hensigtsmæssigt at opøse  $p$  i en lodret og vandret komponent  $q$  og  $n$  pr. længdeenhed af bjælkeaksen.



$$ds = 1/\cos \alpha$$

$$q = p \cdot ds \cdot \cos \alpha = p \quad (2)$$

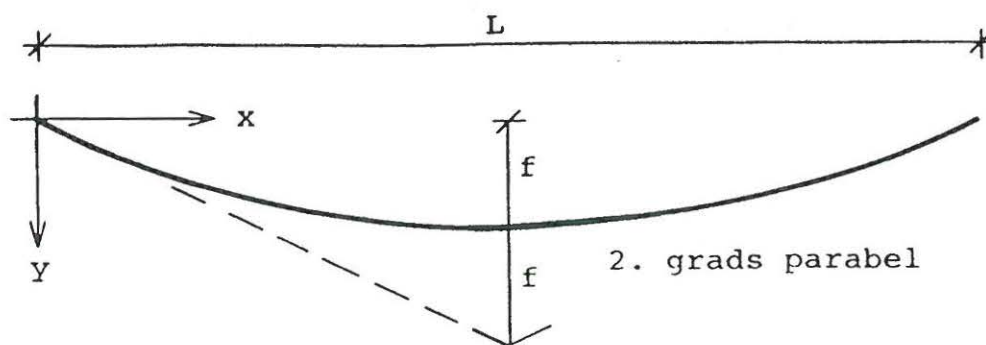
$$n = p \cdot ds \cdot \sin \alpha = p \cdot \tan \alpha \quad (3)$$

Som eksempel betragtes den på figuren viste 2. grads parabel hvor krumningen hvor krumningen som tilnærmelse kan sættes til

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4)$$

Det betyder, at krumningsradius  $R$  regnes konstant svarende til værdien for parablens toppunkt i  $x = L/2$ , og dermed fås en simpel behandling af krumningskræfterne som normalt vil være tilstrækkelig nøjagtig.

Beregning af krumningskræfterne med det korrekte udtryk for krumningen, angivet i afsnittet om Kabelgeometri ovenfor, vil derimod være særdeles kompliceret at gennemføre.



Ligningen for den på figuren viste parabel er

$$y = \frac{4f}{L^2}x(L-x) \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L-2x) \quad (= \tan\alpha) \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8f}{L^2} \quad (7)$$

Krumningskræfterne  $p$  pr. længdeenhed af bjælken kan herefter beregnes af (1), (4) og (7)

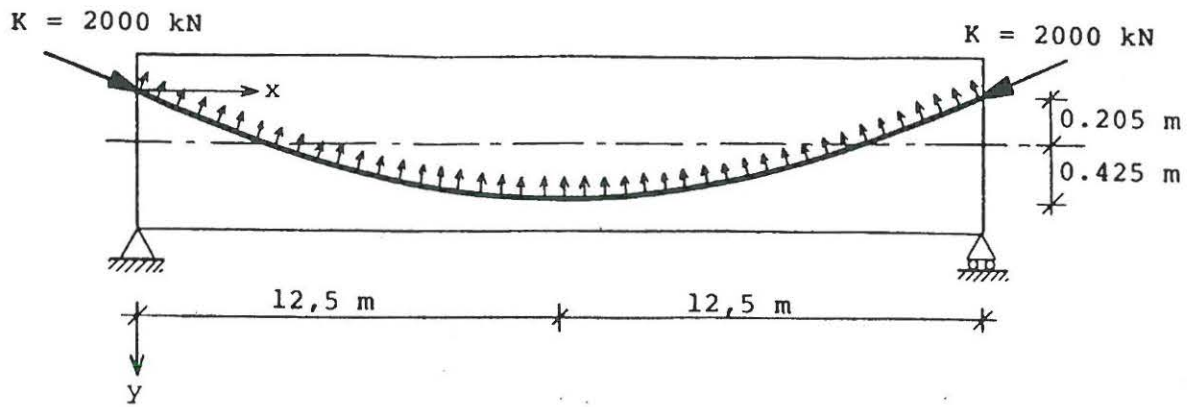
$$p = \frac{K}{R} = \frac{8f}{L^2}K$$

og af (2) og (3) fås tilsvarende

$$q = \frac{8f}{L^2}K \quad \text{og} \quad n = \frac{8f}{L^2}K \cdot \tan\alpha$$

Med tilnærmelsen (4) bliver den lodrette komponent  $q$  således konstant, medens den vandrette  $n$  varierer med tangenthældningen  $\alpha$ . I bjælker og plader vil  $\alpha$  normalt være så lille, at bidraget  $n$  kan negligeres.

I det følgende betragtes virkningen af kontaktkræfterne i en simpel understøttet bjælke med en parabelformet armering hvor forspændingskraften  $K$  forudsættes konstant i hele længden idet der ses bort fra friktionskræfter.



Det på figuren viste kraftsystem svarer til kontaktkræfterne virkende mod betonlegemet. Indsættes de geometriske størrelser i parabelligningen (5) - (7) fås

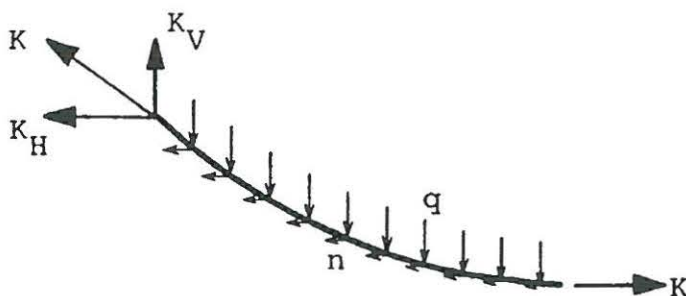
$$y = -0.004032x^2 + 0.1008x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.1008 - 0.008064x \quad (= \tan\alpha)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -0.008064$$

x (m)	y (m)	R (m)	$\alpha$	q (kN/m)	n (kN/m)
0.0	0.00	124.0 (125.3)	5.76°	16.13 (15.97)	1.61
12.5	0.63	124.0	0.00°	16.13	0.00
25.0	0.00	124.0 (125.3)	-5.76°	16.13 (15.97)	-1.61

De i parentes angivne værdierne svarer til en beregning hvor den korrekte krumning er benyttet, og for det foreliggende tilfælde ses fejlen ved den tilnærmede beregning at være ubetydelig. På nedenstående figur ses de kræfter, der virker på den ene halvdel af armeringen idet det jo forudsættes, at forspændingskraften er konstant  $K = 2000$  kN over hele længden.



$$K_H = 2000 \cdot \cos(5.76) = 1989.9 \text{ kN}$$

$$K_V = 2000 \cdot \sin(5.76) = 200.7 \text{ kN}$$

På grund af tilnærmelsen er der ikke ligevægt for lodret projektion

$$K_V - q \cdot L/2 = 200.7 - 16.13 \cdot 12.5 = -0.9 \text{ kN}$$



Det skyldes, at R ikke er konstant men varierer mellem 124.0 m og 125.3 m. Benyttes i stedet middelværdien  $q = K_v/12.5 = 16.06 \text{ kN/m}$  vil lodret ligevægt være opfyldt, og selvom der også her er tale om en tilnærmelse er den mere hensigtsmæssig at benytte.

Ved vandret projektion indgår bidraget fra den vandrette krumningskraft n

$$\int_0^{12.5} n \cdot dx = \frac{K}{R} \int_0^{12.5} \tan\alpha \cdot dx = 10.1 \text{ kN} \quad (\text{mellemlregninger udeladt})$$

og det ses, at her er ligevægten i orden.

### Beregning af snitkræfter

Som nævnt i foran kan virkningen af forspændingen beregnes som de snitkræfter der opstår når bjælken påføres kontaktkræfterne som ydre laster. Kontaktkræfterne udgør et kraftsystem i ligevægt, og i dette tilfælde hvor bjælken er statisk bestemt vil der ikke opstå ydre reaktioner.

For den viste bjælke fås i et vilkårlig snit i afstanden x fra venstre understøtning, følgende snitkræfter med sædvanlig fortegnsregning:

$$N_K = -K \cdot \cos(5.76) - \int_0^x n \cdot dx$$

$$V_K = q \cdot x - K \cdot \sin(5.76)$$

$$M_K = K \cdot \cos(5.76) \cdot 0.205 - K \cdot \sin(5.76) \cdot x + \frac{1}{2} q \cdot x^2 + \int_0^x n \cdot (0.205 - y) dx$$

Indsætte de ovenfor fundne udtryk for q, n og y fås for bjælkens midtersnit ( $x = 12.5 \text{ m}$ ):

$$N_K = -1989.9 - 10.1 = -2000 \text{ kN (tryk)}$$

$$V_K = 201.6 - 200.7 = -0.9 \text{ kN}$$

$$M_K = 407.9 - 2509.0 + 1254.7 - 1.2 = -847.6 \text{ kNm}$$

Til sammenligning haves

$$N_K = -2000 \text{ kN (tryk)}$$

$$V_K = 0$$

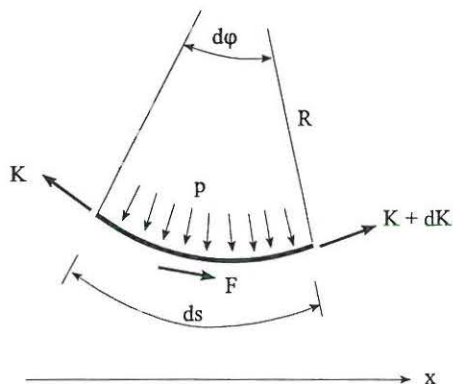
$$M_K = -2000 \cdot 0.425 = -850 \text{ kNm}$$

hvis snitkræfterne beregnes direkte ud fra forspændingskraftens størrelse og retning i bjælkens midtersnit.

Beregning af snitkræfter ved hjælp af kontaktkræfter er i dette tilfælde noget mere besværlig, og med de benyttede tilnærmelser fås heller ikke helt korrekte resultater. Det er imidlertid meget besværlig at gennemføre beregningen hvis der skal tages hensyn til at krumningsradius R varierer. Fejlen er ret uvæsentlig, og ser man yderligere bort fra de ubetydelige bidrag fra de vandrette krumningskræfter n bliver snitkraftberegningen væsentligt enklere.

**1. FRIKTIONSTAB**

Under opspændingen af armeringen i en efterspændt konstruktion vil der opstå friktion mellem kabelkanalens sider og armeringen (kablet) på grund af krumningskræfterne som vist på fig. 1. Beregning af krumningskræfter er behandlet i note 2.



$K$  = forspændingskraften et vilkårligt sted

$dK$  = ændring i  $K$  på strækningen  $ds$

$F$  = friktionskraften på strækningen  $ds$

$\mu$  = friktionskoefficienten

$R$  = armeringens krumningsradius

$p = K/R$  er kontaktkraften pr. længdeenhed

Figur 1. Kræfter på et kabeludsnit under opspændingen

Ved projektion på korden fås:

$$F + dK = 0$$

indsættes  $F = \mu p ds = \mu K/R ds$  og  $ds = R d\varphi$  fås

$$\mu K d\varphi + dK = 0 \text{ eller } dK/K + \mu d\varphi = 0$$

der efter integration giver

$$\ln K + \mu \varphi + C = 0$$

Den arbitrære konstant  $C$  bestemmes ved hjælp af randbetingelserne i kablets begyndelsespunktet hvor opspændingskraften  $K = K_0$  og vinkeldrejningen  $\varphi = 0$ .

Heraf fås  $C = -\ln K_0$  som indsat giver

$$\ln \left( \frac{K}{K_0} \right) = -\mu \varphi \text{ eller } K = K_0 e^{-\mu \varphi}$$

For retlinede strækninger hvor  $d\varphi = 0$  vil der dog i praksis også optræde friktion (også kaldet "guirlandeeffekten") derfor korrigeres ovenstående teoretiske udtryk til

$$K = K_0 e^{-(\mu \varphi + ks)}$$

hvor  $k$  er en empirisk, systemafhængig faktor og  $s$  er afstanden fra begyndelsepunktet mål langs armeringen. I bjælker hvor højden normalt er meget mindre end længden kan  $s$  med god tilnærmelse erstattes med den vandrette afstand  $x$ , se figur 1.

$\varphi$  er den numeriske sum af vinkelændringer over armeringsforløbet, målt fra begyndelsespunktet, og forspændingskraften  $K$  vil således aftage med afstanden fra opspændingspunktet som antydtes på figur 2.

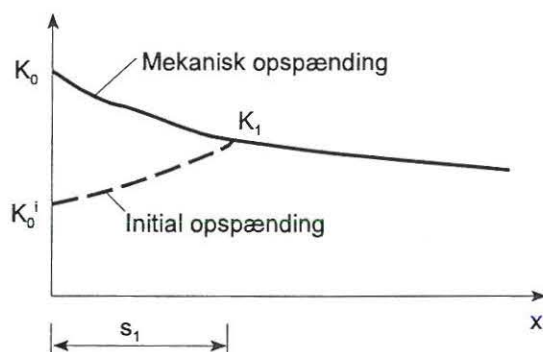
I stedet for faktoren  $k$  opgiver nogle leverandører en ækvivalen vinkelændring  $\Delta\varphi$  (radianer pr. meter), og ovenstående udtryk kan så skrives på formen

$$K = K_0 e^{-\mu(\varphi + \Delta\varphi \cdot s)}$$

Eksempel på beregning af friktionstabet er vist i taleksempellet side 5.3.

## 2. LÅSETAB

I nogle forspændingssystemer optræder der et såkaldt låsetab eller låseglidning, det gælder specielt systemer der benytter kileforankringer, fx. Freyssinet. Det betyder, at den mekaniske opspændingskraft  $K_0$  reduceres straks når donkraften frigøres og antager værdien  $K_0^i$  (den initiale opspændingskraft). Når den oprindelige forlængelse reduceres vil armeringen trække sig sammen og glide tilbage i kabelkanalen. Denne proces vil dog modvirkes af friktionen mellem armering og kabelkanal således at virkningen fra låsetabet normalt vil ophøre et stykke fra opspændingspunktet.



Figur 2. Mekanisk og initial opspændingskraft

Antages det at virkningen af låseglidningen optræder over en strækning  $s_1$  vil opspændingskraften  $K_1$  i dette punkt være uændret, og forholdet mellem opspændingskraften i begyndelsespunktet før og efter låseglidningen kan udtrykkes ved

$$K_1 = K_0 e^{-(\mu\varphi_1 + ks_1)} = K_0^i e^{+(\mu\varphi_1 + ks_1)}$$

hvor  $\varphi_1$  er den samlede vinkeldrejning fra opspændingspunktet og  $s_1$  er den tilsvarende afstand målt langs armeringen. Da længden  $s_1$  er ukendt er dette udtryk ikke velegnet til bestemmelse af kraftforløbet efter låseglidningen.

Størrelsen af låseglidningen  $dl$  ved en forankringen fastlægges på grundlag af erfaringer med det pågældende forspændingssystem. Kendes låseglidningen  $dl$  kan strækningen  $s_1$  bestemmes af følgende udtryk hvor  $d\epsilon$  er ændringen i armeringstøjning:

$$dl = \int_0^{s_1} d\epsilon ds = \int_0^{s_1} \frac{dK}{AE} ds$$

$dK$  er her forskellen mellem kabelkraften for den mekaniske og den initiale opspænding. Da både



tværsnitsareal  $A$  og elasticitetsmodul  $E$  er konstante kan udtrykket omskrives til

$$dl \cdot AE = \int_0^{s_1} dK ds$$

der netop angiver arealet mellem den mekaniske og den initiale kabelkraftkurve vist på figur 2. Størrelsen  $dl \cdot AE$  kaldes derfor låsetabsarealet og kan fastlægges på grundlag af erfaringer med det pågældende system. Både låsetab  $dl$  og låsetabsareal opgives af leverandørerne.

Da kabelkraften  $K$  med god tilnærmelse kan regnes stykvis retlinet kan man erstatte integralet med en summation over et passende antal intervaller med længden  $dx_i$ :

$$dl \cdot AE = \sum_{i=1}^n dK_i dx_i$$

og på grundlag af en skønnet værdi for  $s_1$  itererer sig frem til det korrekte resultat.

I systemer uden låsetab vil den mekaniske og den initiale forspændingskraftkurve være sammenfaldende.

I forspændte konstruktioner vil der ikke optræde friktionstab fordi opspændingen sker med fritliggende armering, og et evt låsetab vil udløses før betonen påføres opspændingskraften. Derimod vil den elastiske sammentrykning af betonen betyde, at der også for forspændte konstruktioner er forskel på den mekaniske og den initiale forspændingskraft.

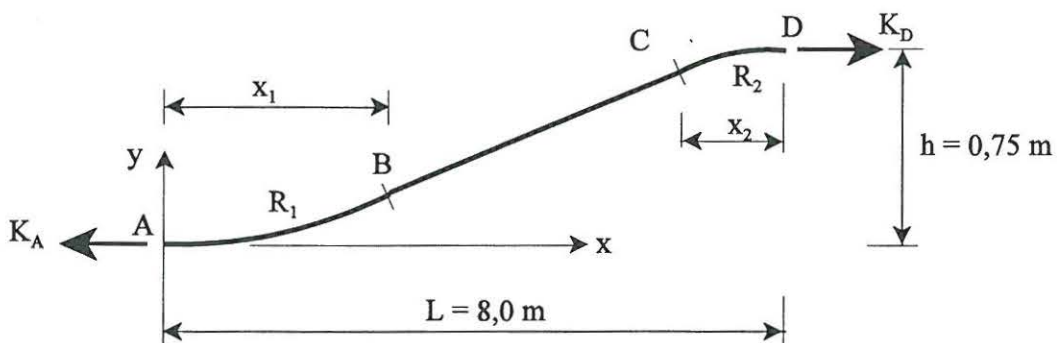
### Taleksempel

Det på figur 3 viste kabelstykke opspændes ved pkt. A og fastholdes (passivt) ved pkt. D. Virkningen af friktions- og låsetab på strækningen A - D ønskes bestemt under følgende forudsætninger:

Geometri:  $R_1 = 20.0 \text{ m}$   $R_2 = 5.0 \text{ m}$   
 koordinater til pkt. B og C er beregnet i det tilsvarende eksempel i note 4.

Opspænding:  $K_A = 1000 \text{ kN}$  friktionskoefficienter:  $\mu = 0.3$   $k = 0.005$

Låsetabsareal:  $300 \text{ kNm}$



Figur 3. Kabelføring

Kabelkraften fra den mekaniske opspænding (før låsetab) beregnes i de enkelte punkter i nedenstående tabel ved hjælp af det ovenfor udledte udtryk

$$K(s) = K_A e^{-(\mu\varphi + ks)}$$

Her benyttes længden  $s$  målt langs kablet, men normalt er det tilstrækkelig nøjagtigt at erstatte  $s$  med den vandrette afstand  $x$ .

Punkt/ strækning	$x$ (m)	$y$ (m)	$\Delta s$ (m)	$s$ (m)	$\Delta \varphi$ (rad)	$\varphi$ (rad)	$e^{-(\mu\varphi + ks)}$	$K$ (kN)
A	0.000	0		0.000		0.000	1.000	1000
A-B			2.268		0.1134			
B	2.264	0.129		2.268		0.1134	0.956	956
B-C			5.204		0.000			
C	7.435	0.718		7.472		0.1134	0.931	931
C-D			0.567		0.1134			
D	8.000	0.750		8.039		0.2268	0.897	897

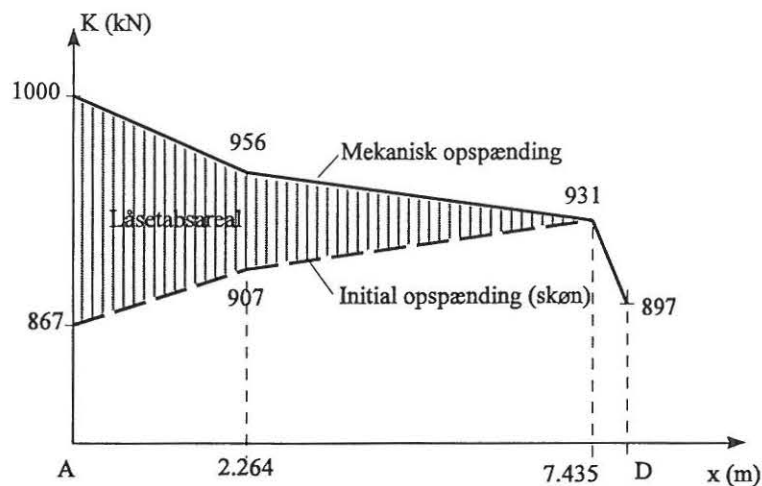
Kabelkraftens forløb er vist i diagrammet figur 4.

Virksomheden af låsetabet beregnes iterativt ved at gætte på "låsetabslængden" og derefter kontrollere om låsetabsarealet er korrekt. For at undgå yderligere beregninger af nye punkter på kabelkraftkurven er det her valgt at gætte på en låsetabslængde svarende til pkt. C som vist på figur 4. Den reducerede kabelkraft i pkt. A og B kan fx. beregnes således

$$K_A' = K_C \cdot 0.931 = 867 \text{ kN} \quad K_B' = K_C^2 / K_B = 931^2 / 956 = 907 \text{ kN}$$

Herefter beregnes låsetabsarealet

$$\frac{1}{2}((1000-867)+(956-907)) \cdot 2.264 + \frac{1}{2}(956-907)(7.435-2.264) = 333 > 300 \text{ kNm}$$



Figur 4. Kraftdiagram

En låsetabslængde på 7.435 m giver et lidt for stort låsetabsareal og er altså lidt for lang. Den korrekte værdi findes til ca. 6.95 m (beregning udeladt), men resultatet afhænger naturligvis noget af den valgte beregningsnøjagtighed for  $K$ .

Svind og krybning er betonteknologiske fænomener der giver plastiske deformationer (sammentrykning) i betonen og dermed spændingsændringer i den opspændte armering. Relaxation opstår som følge af en plastisk tøjning (krybning) i den opspændte armering. Alle 3 fænomener er tidsafhængige og foregår i hele konstruktionens levetid.

Den samlede virkning giver typisk et tab på 15% - 20% af den initiale forspændingskraft og det er derfor nødvendigt at foretage en vurdering både af størrelsen og af udviklingsforløbet, specielt af hensyn til beregningerne i anvendelsesgrænsetilstanden.

Svind og krybning behandles indgående i Beton-Bogen (2. udgave 1984) hvortil der henvises. I det følgende gengives de beregningsudtryk der findes heri med en kortfattet forklaring.

## 1. SVIND

Svindet opstår som følge af udtørring af betonen og er derfor hovedsageligt afhængig af det omgivende klima. Som vist i Beton-Bogen kan svindet beregnes ved hjælp af følgende empiriske udtryk

$$\epsilon_s = \epsilon_c \cdot k_b \cdot k_d \cdot k_t = \epsilon_\infty \cdot k_t$$

$\epsilon_c$  er basissvindet der kun afhænger af den relative luftfugtighed (RF).

$k_b$  faktor der afhænger af betonens sammensætning (cementindhold og v/c-tal).

$k_d$  faktor der afhænger af konstruktionsdelens geometri udtrykt ved den ækvivalente radius  $r = 2A/s$  hvor A er tværsnitsarealet og s den fri kontur.

$k_t$  faktor der beskriver svindforløbet som funktion af tiden, afhænger af den ækvivalente radius  $r$ .

$\epsilon_\infty = \epsilon_c \cdot k_b \cdot k_d$  kaldes for slutsvindet (svarende til tiden  $t = \infty$ )

De forskellige faktorer kan bestemmes ved hjælp af diagrammerne side 113 i Beton-Bogen eller mere nøjagtigt ved hjælp af de empiriske formler i samme afsnit. Teknisk Ståbi kan også benyttes, men desværre er der en del fejl i det pågældende afsnit (15. udgave).

Det er vigtigt at gøre sig klart at svindberegningen er behæftet med nogen usikkerhed så det har ingen mening at beregne de forskellige faktorer med stor nøjagtighed.

## 2. KRYBNING

Betonens krybning afhænger af nogle af de samme faktorer som beskrevet under svind, men medens svindet er uafhængig af belastningen er betonens krybningen direkte afhængig af spændingsniveauet i betonen. Desuden er betonens alder og modenhed på opspændings-tidspunktet eller ved lastpåførslen afgørende for krybningen størrelse. Krybningen angives ved "krybetallet"  $\psi(t)$  der angiver forholdet mellem den plastiske og den momentane eller elastiske tøjning  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_0 \psi(t)$$

hvor

$$\psi(t) = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_t = \psi_\infty \cdot k_t$$



$k_a$  faktor der beskriver alderens indflydelse, afhænger af lasttidspunktet målt i modenhedsdøgn (a) svarende til lagring ved 20° C og 100% RF.

$k_b$  faktor der afhænger af betonens sammensætning (cementindhold og v/c-tal).

$k_c$  faktor der afhænger af omgivelsernes relative luftfugtighed (RF).

$k_d$  faktor der afhænger af konstruktionsdelens geometri utrykt ved den ækvivalente radius  $r$ , men med andre værdier end den tilsvarende faktor i svindberegningen.

$k_t$  faktor der beskriver krybeforløbet som funktion af tiden, afhænger af den ækvivalente radius  $r$ , men med andre værdier end den tilsvarende faktor i svindberegningen.

$\psi_\infty = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d$  kaldes for slutkrybetallet (svarende til tiden  $t = \infty$ )

Krybetøjningen beregnes herefter som  $\epsilon_c = \epsilon_0 \psi(t) = \sigma/E_{ik} \psi(t)$ .

$E_{ik}$  er betonens elasticitetskoefficient der i henhold til DS 411 sættes til 70% af begyndelsesværdien  $E_{0k}$  og angives som

$$E_{ik} = 0.7 \cdot \frac{51000}{1 + 13/f_{ck}} = \frac{35700}{1 + 13/f_{ck}} \quad (f_{ck} \text{ i MPa})$$

Betonens styrke ( $f_{ck}$ ) afhænger af alder ved lastpåførsel og lagringsbetingelser, men af praktiske grunde er formler og diagrammer til beregning af krybningen baseret på betonens elasticitetskoefficient efter standardlagring, dvs 28 døgn ved 20°C.

Den samlede elastiske- og krybetøjning i betonen bliver  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_c = \sigma/E_{ik}(1 + \psi(t))$ , og indføres forholdet mellem stål og betons elasticitetskoefficienter  $n_0 = E_{ak}/E_{ik}$  kan tøjningen skrives på formen

$$\epsilon = \frac{(1 + \psi)n_0\sigma}{E_{ak}} \quad \text{hvor } n_0 \approx 5.5(1 + 13/f_{ck}) \text{ forudsat } E_{ak} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}^*)$$

De forskellige faktorer til beregning af  $\psi(t)$  kan fastlægges ved hjælp af diagrammer side 95 i Beton-Bogen eller mere nøjagtigt ved hjælp af empiriske formler i samme afsnit. Teknisk Ståbi kan også benyttes, men desværre er der en del fejl i det pågældende afsnit (15. udgave).

Ligesom for svind er krybeberegningen behæftet med nogen usikkerhed så det har ingen mening at beregne de forskellige faktorer med særlig stor nøjagtighed.

Da krybningen afhænger af spændingsniveauet, og dette ændres i en konstruktions levetid, kan beregningen af krybningens forløb blive en ganske kompliceret sag.

\*) Bemærk at for visse typer af forspændingsarmering er elasticitetsmodulet mindre end  $2 \cdot 10^5$  MPa, for liner således typisk omkring  $1.85 \cdot 10^5$  MPa.

---

Faktoren  $\alpha$  der benyttes ved beregning af slapt armeret beton (DS 411 Tabel V 6.3.1) er for korttidstilstanden beregnet som  $n_0$  ovenfor, men det er forudsat at  $E_{ak} = 2 \cdot 10^5$  MPa og tabelværdierne er afrundet til hele tal. Tabelværdierne svarende til langtidstilstanden er beregnet som  $\alpha = (1 + \psi_\infty) \cdot n_0$  hvor  $\psi_\infty$  er fastsat til ca. 3. En så grov tilnærmelse anvendes normalt ikke ved spændbetonberegninger hvor betonens krybning har stor betydning for virkningen af forspændingen i langtidstilstanden.

---

### 3. RELAXATION

Krybningen i armerings vil ikke give anledning til tøjningsændringer fordi armeringen er indstøbt i betonen og derfor anvender man i stedet begrebet relaxation der beskrives som det relative spændingstab der opstår i en armering under konstant tøjning. Størrelsen af relaxationen er især afhængig af begyndelsesspændingen og vokser kraftigt med denne.

For spændinger op til 50% - 60% af brudspændingen er relaxationen ubetydelig og derfor spiller dette fænomen ingen rolle i slapt armerede konstruktioner. I spændbetonkonstruktioner, hvor man ønsker en høj udnyttelsesgrad af armeringen under opspændingen, typisk 70 % - 85% af brudspændingen, kan der derimod opstå et betydeligt tab i forspændingskraften som følge af relaxationen.

I Beton-Bogen side 349 er der på fig. 4.5-7 vist eksempler på relaxationens afhængighed af begyndelsesspænding og temperatur for forskellige armeringstyper, og på fig. 4.5-6 udvikling med tiden.

Det er muligt at reducere størrelsen af relaxationen ved forskellige former for forbehandling af armeringen fx. kortvarig overspænding og varmebehandling.

Normalt opgiver leverandørerne størrelsen af relaxationen som funktion af den benyttede begyndelsesspænding.

Som eksempel angiver fa. Freyssinets i sit katalog (system K Range) følgende vejledning for beregning af relaxationstabet. Den kan benyttes for spændarmering bestående af enkelte liner eller kabler sammensat af liner (typisk L13 og L15 med en brudspænding på  $f_{tk} = 1670 - 1860$  MPa). Som udgangspunkt benyttes værdierne i nedenstående tabel hvor relaxationstabet efter 1000 timers forløb er angivet som funktion af forholdet mellem den initiale armeringsspændingen  $\sigma_{s0}$  og stålets trækbrudstyrke  $f_{tk}$ .

Opspændingsgrad $\sigma_{s0}/f_{tk}$	60%	70%	80%
relaxationstab for ikke stabiliseret stål (normal relaxationsklasse)	4,5%	8%	12%
relaxationstab for stabiliseret stål (lav relaxationsklasse)	1%	2%	4,5%

Tabel 1. Relaxationstab efter 1000 timer.

Spændingstabet  $\Delta\sigma_r$  fra relaxationen kan til et vilkårligt tidspunkt efter opspændingen herefter beregnes ved hjælp af følgende udtryk

$$\Delta\sigma_r(t) = \Delta\sigma_{r(1000h)} (t/1000)^\beta$$

$\Delta\sigma_{r(1000h)}$  er spændingstabet p.g.a. relaxationen efter 1000 timer beregnet på grundlag af armeringens initiale spænding  $\sigma_{s0}$  og værdierne i tabel 1. Tiden  $t$  indsættes i timer og  $\beta = 0,20$  benyttes hvis der ikke foreligger en mere nøjagtig værdi. Det bemærkes, at man med god tilnærmelse kan interpolere lineært for andre værdier af opspændingsgraden  $\sigma_{s0}/f_{tk}$ .

Da svind og krybning også giver spændingstab i armeringen vil der opstå en gensidig påvirkning med relaxationen. Svind og krybning reducerer armeringsspændingen og dermed spændingstabet fra relaxationen, og tilsvarende reduceres krybningen i takt med at armeringsspænding reduceres. En korrekt beregning bliver derfor særdeles kompliceret, men som en simpel tilnærmelse kan man



benytte følgende reduktionsfaktor ved beregningen af  $\Delta\sigma_r$

$$\gamma = (1 - 2 \cdot \Delta\sigma_{c+s} / \sigma_{s0})$$

$\Delta\sigma_{c+s}$  er det beregnede spændingstab i armeringen på grund af svind og krybning på det pågældende tidspunkt, som beskrevet i afsnit 1 og 2.

#### 4. BEREGNINGSPROCEDURE

I sin simpleste form beregnes størrelsen af betontøjningen fra svind og krybning hver for sig på det ønskede tidspunkt af konstruktionens levetid (normalt  $t=\infty$ ). For efterspændte konstruktioner skal den del af svindet der udvikles i tiden før opspændingen ikke medregnes, men kun det såkaldte "restsvind". Reduktionen i armeringstøjningen sættes lig med summen af betontøjninger  $\Delta\varepsilon_c$  og spændingstab og kan normalt beregnes som  $\Delta\sigma = \Delta\varepsilon_c E_{ik}$ . Herefter foretages fradraget på grund af relaxationen normalt som en %-sats af armeringens begyndelsesspænding.

De 3 fænomeners bidrag til spændingstab påvirker imidlertid hinanden fx. vil svindtøjninger løbende reducere armeringstøjningen og dermed også forspændingens bidrag til krybningen. Størstedelen af relaxationen sker ret hurtigt efter opspændingen og bidraget til betonens krybningen vil derfor heller ikke være så stor som med ovenstående simplificerede beregningsgang.

En anden komplikation er, at en tøjning (sammentrækning) beregnet for betonen alene vil modvirkes af den indstøbte armering (både slap + forspændt) således at den resulterende betontøjning bliver mindre end den først beregnede værdi. Hvis der er tale om svagt armerede tværsnit kan man dog se bort fra herfra.

En mere nøjagtig beregningen af krybetøjningen kan blive særdeles kompliceret når opspændingen og/eller lastpåførslen sker i flere tempi. Da betonens alder/modenhed har afgørende betydning for krybningen kan det være nødvendigt at beregne krybeforløbet for flere forskellige begyndelsestidspunkter og addere virkningen for de forskellige lastbidrag, som vist i Beton-Bogen fig. 3.2-36 og 3.2-37.

#### Taleksempel

I det følgende betragtes et forspændt element hvor der ikke optræder friktions- og låsetab (fx. en forspændt bjælke) således at spændingen i armeringen er konstant over længden. Det samlede spændingstab i armeringen ønskes beregnet idet der specielt fokuseres på beregningen af relaxationstab som beskrevet i afsnit 3. Betonens elastiske og plastiske deformationer forudsættes beregnet som beskrevet i afsnit 1 og 2 og vist i løsningen til øvelse 4.

#### Forpændingsarmering

$$\text{trækbrudstyrken } f_{ik} = 1860 \text{ Mpa, } E_s = 0,195 \cdot 10^6 \text{ MPa}$$

$$\text{opspændingsgrad 75\% af } f_{ik} \text{ svarende til } \sigma_{s0} = 1395 \text{ MPa}$$

$$\text{relaxationstab } \frac{1}{2} (2\% + 4,5\%) = 3,25\% \quad (\text{lav relaxationsklasse, se tabel 1 ovenfor})$$

For betonen er følgende beregnet

$$\text{elastisk tøjning fra opspændingen } \varepsilon_0 = 0,15\%$$

$$\text{krybetal } \psi_\infty = 2,2$$



slutsvind  $\epsilon_{\infty} = 0,21\%$

Spændingen i armeringen til tiden  $t = 10^5$  timer (ca. 12 år) beregnes således

spændingstab p.g.a. elastisk tøjning  $\Delta\sigma_{s0} \approx E_s \cdot \epsilon_0 = 0,195 \cdot 10^6 \cdot 0,15 \cdot 10^{-3} = 29,3 \text{ MPa}$

spændingstab p.g.a. krybning og svind

$$\Delta\sigma_{c+s} = (\psi_{\infty} \cdot \epsilon_0 + \epsilon_{\infty}) E_s = (2,2 \cdot 0,15 + 0,21) \cdot 10^{-3} \cdot 0,195 \cdot 10^6 = 105,3 \text{ MPa}$$

korrektionsfaktor  $\gamma = (1 - 2 \cdot \Delta\sigma_{c+s} / \sigma_{s0}) = 1 - 2 \cdot 105,3 / 1395 = 0,85$

tab p.g.a. relaxation ved  $t = 10^5$  timer:  $0,85 \cdot 3,25\% (10^5 / 1000)^{0,20} = 6,93\%$

spændingstab p.g.a. relaxation  $\Delta\sigma_r = 6,93\%$  af 1395 = 96,7 MPa

resulterende spænding  $\sigma_s = 1395 - 29,3 - 105,3 - 96,7 = 1164 \text{ MPa}$

svarende til et samlet tab på 17%.

I efterspændt beton, hvor der anvendes relativt store enheder som kabler og stænger, overføres der store koncentrerede forankringskræfter til betonen som kræver, at der anordnes forskellige former for slap armering i forankringszonen. Følgende forhold skal undersøges

- a) Trykbrud umiddelbart bag forankringer
- b) Spaltning parallelt med kraftretningen
- c) Afskalning af hjørner

### **Trykbrud umiddelbart bag forankringer**

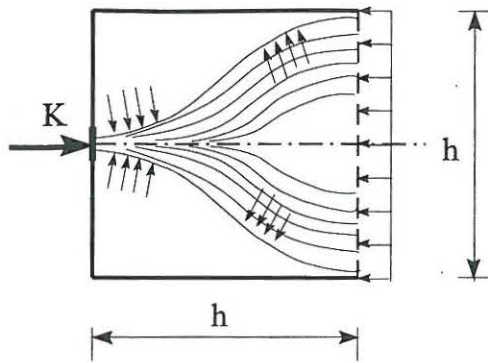
Da det ikke er hensigtsmæssigt, og heller ikke altid muligt, at benytte ankerplader der er så store, at kontaktrykket bliver mindre end betonens brudspænding vil spændingerne umiddelbart bag ved ankerpladerne ofte være betydeligt større end betonens trykbrudspænding. Derfor har de forskellige forspændingssystemer udviklet deres forankringer således at forankringskræfterne kan overføres uden at der opstår trykbrud i betonen. Det kan ske ved at man dels udnytter den forøgede trykstyrke der optræder når koncentrerede laster overføres gennem lejeflader der er væsentlig mindre end betontværsnittet (jvf. DS 411, afsnit 6.2.4) og dels ved konstruktive tiltag der indkapsler betonen i forankringszonen hvorved tværudvidelsen hindres så der opstår en tre-akset spændingstilstand som forøger trykstyrken. Tværudvidelsen kan hindres ved at indlægge en spiralarmering (anvendes fx. i system Freyssinet) eller ved en speciel udformning af ankerpladen (fx. "klokkeforankringer" der anvendes i visse typer fra System Dywidag).

Kravene til trykstyrke ved forankringen kan normalt regnes at være opfyldt hvis den projekterende følger leverandørens anvisninger herunder valget af ankerplades størrelse som i nogle tilfælde gøres afhængig af den benyttede betonkvalitet. Leverandøren har desuden fastlagt minimumskrav til betondimensioner og forankringernes indbyrdes afstande samt donkraftens pladskrav, se fx. det udliveredede materiale vedr. system Freyssinet.

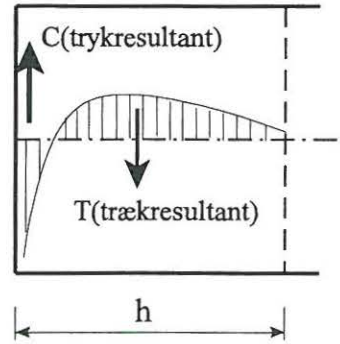
### **Spaltning parallelt med kraftretningen**

Bag forankringen skal opspændingskraften herefter ud over hele tværsnitsarealet og som følge af denne spændingsomlejring vil der opstå træk- og trykspændinger vinkelret på kraftretningen. I de områder hvor der optræder tværtrækspændinger kan det være nødvendigt, at indlægge en såkaldt spaltearmering for at hindre at der opstår revner parallelt med kraftretningen.

En elasticitetsteoretiske analyse viser at en centralt virkende koncentreret last  $K$  vil være fordelt over hele bjælkens højde i afstanden  $h$  fra bjælkeenden. På figur 1 ses forløbet af spændings-trajektorierne, og på figur 2 ses fordelingen af spændinger i tværetningen på den strækning hvor spændingsomlejringen foregår.



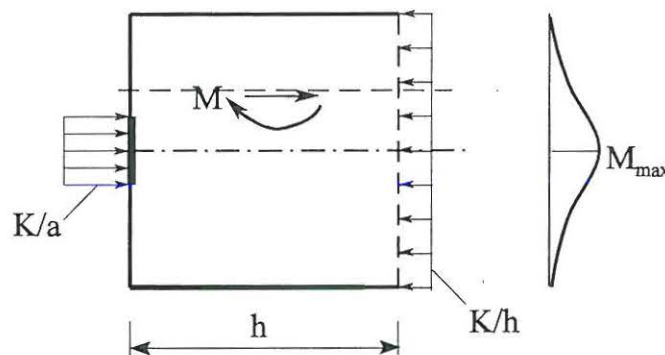
Figur 1. Spændingstrajektorier



Figur 2. Spændingsfordeling i tværetningen

På grund af spændingsomlejringen vil der optræde moment og forskydning i vandrette snit parallelt med bjælkeaksen som vist på figur 3. Antages det nu at ankerpladens højde er a og betragtes ligevægten af bjælkestykket med længden h vil det maximale optræde i bjælkeaksen og kan beregnes til

$$M_{\max} = K/h \cdot \frac{1}{2}h \cdot h/4 - K/a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a/4 = K/8 \cdot (h-a)$$



Figur 3. Bjælke model med momentfordeling i vandret snit

Det fremgår af figur 2, at resultanten af tværtrækspændinger (T) er beliggende i afstanden ca. 0.5·h fra bjælkeenden og da trykresultanten (C) er beliggende tæt ved bjælkeenden kan afstanden mellem T og C med god tilnærmelse sætte til h/2. Indsættes  $M_{\max} = T \cdot h/2$  i ovenstående kan størrelsen af trækresultanten beregnes til

$$T \approx 0.25 \cdot K \cdot (1 - a/h)$$

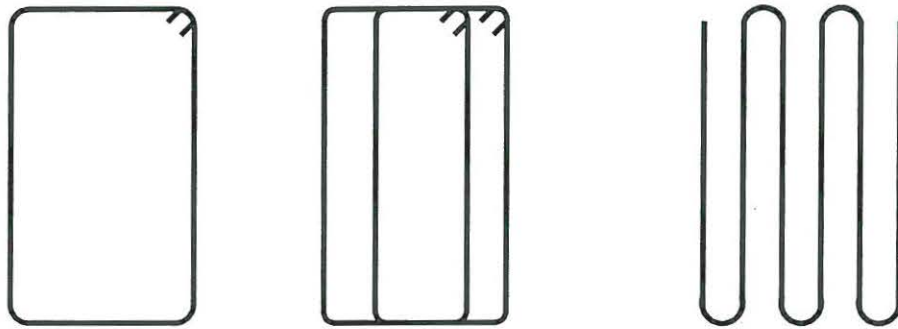
og det nødvendige areal af spaltearmering bliver

$$A_{\text{nødv}} = T/\sigma_s$$

Da dette resultatet er baseret på en elasticitetsteoretisk analyse dvs betonen regnes for urevnet, bør  $\sigma_s$  vælges passende lavt, fx. til 50% af  $f_{yk}$ . Spaltearmeringen kan udformes som bøjler eller såkaldte fretteringer (se figur 4) der dækker hele bjælkehøjden og placeres fordelt omkring trækresultanten. Fordelen ved fretteringer er at de lettere indplaceres i den øvrige armering og at



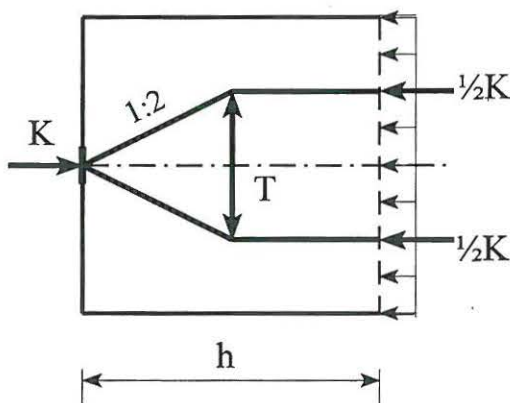
de samtidig giver mulighed for enheder med større armeringsareal de end traditionelle bøjler. Afstanden mellem de enkelte lodrette jern skal blot være større end kabelkanalernes diameter ligesom de nødvendige bukkediametre skal respekteres.



Figur 4. Eksempler på spaltearmering som bøjler og frettering

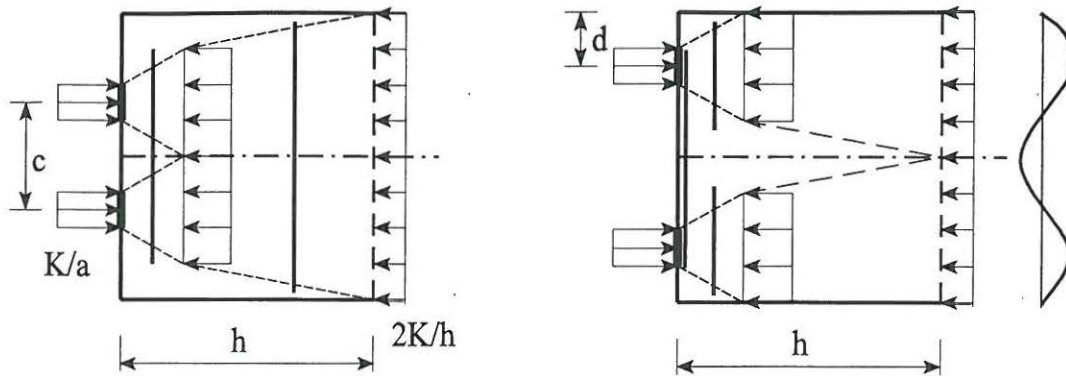
Det er normalt et krav, at ankerpladens bredde er mindre end bjælkebredden derfor skal der gennemføres en tilsvarende dimensionering af en spaltearmering til fordelingen af forankringskraften i vandret retning. Denne spaltearmering kan også udføres som bøjler eller fretteringer (med vandrette stænger). I forspændte plader med mange forankringer fordelt over bredden kan spaltearmeringen udføres som en gennemgående vandret armering.

I stedet for ovenstående kan man benytte en gitteranalogi der i sin enkleste form er vist på figur 5. Kraften  $K$  tænkes fordelt via 2 skrå "trykstænger" og en lodret "træstang" med længden  $h/2$ . De 2 kræfter á  $K/2$  til højre repræsenterer resultanterne af de jævnt fordelte spænding i øverste og nederste halvdel af bjælken. Med en hældning på 1:2 for trykstængerne fås trækraften  $T = K/4$ , altså samme resultat som ovenfor (forudsat  $a = 0$ ).



Figur 5. Eksempel på anvendelsen af gitteranalogien

Hvis der er 2 eller flere forankringer kan man gennemføre ovenstående beregninger i 2 faser, idet man først beregner spaltearmeringen i den primære forankringszone og dernæst i den sekundære forankringszone som skitseret på figur 6.



Figur 6. Primær og sekundær spaltearmering

På figur 6 til venstre skal den primære spaltearmering for hver af de 2 forankringer dimensioneres så den sikre fordelingen af  $K$  fra ankerpladens højde  $a$  til en højde svarende til forankringernes indbyrdes afstand  $c$ . Dernæst dimensioneres den sekundære spaltearmering så den samlede kraft  $2 \cdot K$  fordelt over højden  $2 \cdot c$  kan fordeles jævnt over den fulde højde  $h$ .

Spaltekraften i den primære zone kan for hver forankring beregnes som ovenfor

$$T_1 \approx 0.25 \cdot K \cdot (1 - a/c)$$

og spaltekraften i den sekundære zone bliver tilsvarende

$$T_2 \approx 0.25 \cdot 2K \cdot (1 - 2c/h)$$

Den primære spaltearmering udføres normalt gennemgående så den dækker begge forankringer, på den måde undgår man spild af forankringslængder.

Et specielt problem opstår når forankringerne er placeret som vist figur 6 til højre. Her skal den primære spaltearmering dimensioneres så den sikre fordelingen af  $K$  fra ankerpladens højde  $a$  til en højde svarende til 2 gange randafstanden  $d$ . Dernæst dimensioneres den sekundære spaltearmering så den samlede kraft  $2 \cdot K$  kan fordeles jævnt over den fulde højde  $h$ . Momentet i symmetrisnittet kan beregnes til

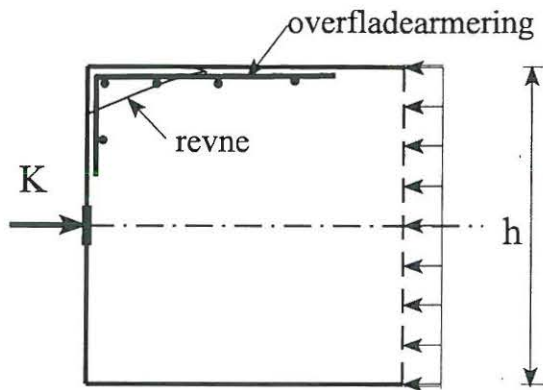
$$M = K \cdot (h/4 - d)$$

men som det fremgår af den viste momentkurve skifter denne fortegn så i dette tilfælde skal den sekundære spaltearmering optage en trækresultant der er beliggende tæt ved bjælkeenden. Afstanden mellem træk- og trykresultanter skønnes igen til  $h/2$  idet spændingsfordelingen antages at svare til på figur 2 viste, men med modsat fortegn.

I de tilfælde hvor ankerkræfternes resultant virker ekscentrisk på tværsnittet og den resulterende spændingsfordeling derfor ikke er konstant bliver beregningen af det maximale moment i et snit parallelt med bjælkeaksen (kraftretningen) mere kompliceret. Man kan evt. benytte en tilnærmelse hvor der regnes med konstant spænding i den del af tværsnittet der ligger symmetrisk om resultant.

### Afskalning af hjørner

I nærheden af hjørnerne vil betonen stort set være spændingsløs og specielt i bjælker vil der være en tendens til at der opstår revner som vist på figur 7. For at undgå afskalning bør man derfor indlægges en overfladearmering i begge retninger som antydnet.



Figur 7. Afskalning af hjørner



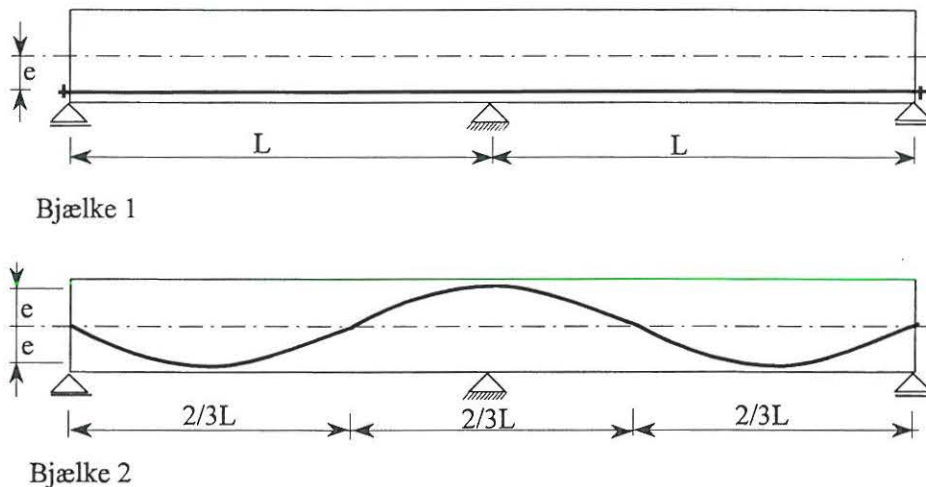
**Note 8. Systemforspænding**

I note 1 beskrives 2 metoder til bestemmelse af forspændingens bidrag til snitkræfterne i anvendelsesgrænsetilstanden. Dels den "direkte" metode hvor snitkræfterne bestemmes ud fra forspændingskraftens størrelse og placering i det enkelte tværsnit og dels en metode hvor kontaktkræfterne mellem armering og beton påføres betonkonstruktionens statiske system som en lastkombination.

Som nævnt giver den førstnævnte metode kun korrekte resultater hvis konstruktionen er statisk bestemt idet der ikke tages hensyn til de tvangskræfter der opstår i statisk ubestemte konstruktioner som følge af de formændringer som påførelsen af forspændingen medfører.

Tvangskræfternes bidrag kaldes også for "systemforspænding" og skal bestemmes særskilt hvis den "direkte" metode benyttes medens deres bidrag automatisk medregnes hvis metoden med kontaktkræfter benyttes.

For at illustrere systemforspændingens betydning og forskellen på de 2 beregningsmetoder betragtes 2 bjælker med samme dimensioner og statisk system, men med forskellig armeringsføring.

**Bjælke 1**

Den direkte forspænding ses at give følgende snitkræfter (jvf note 1)

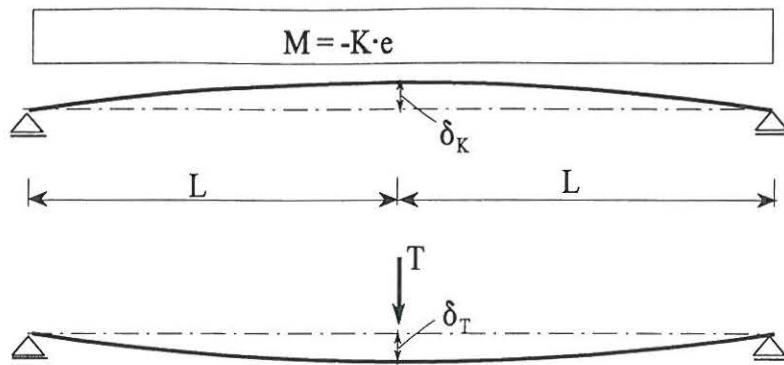
$$N_K = -K \quad (\text{tryk})$$

$$V_K = 0$$

$$M_K = -K \cdot e$$

Disse bidrag til snitkræfterne er konstante i hele bjælkens længde, men da bjælken er statisk ubestemt skal de korrigeres med bidrag fra de tvangskræfter der opstår ved understøtningerne fordi bjælken ikke frit kan deformere sig når forspændingen påføres.

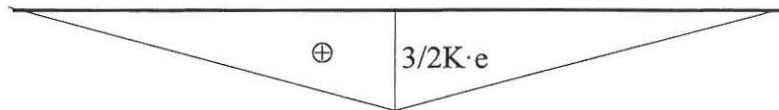
Virkingen kan fx. beregnes ved at fjerne mellemunderstøtningen og beregne den lodrette flytning når bjælken påføres det konstante momentet  $M_K = -K \cdot e$  og dernæst bestemme størrelsen af reaktionskraften  $T$  således at den resulterende flytning bliver 0.



Flytningerne  $\delta_K$  og  $\delta_T$  kan fx. bestemmes ved hjælp af Ståbien

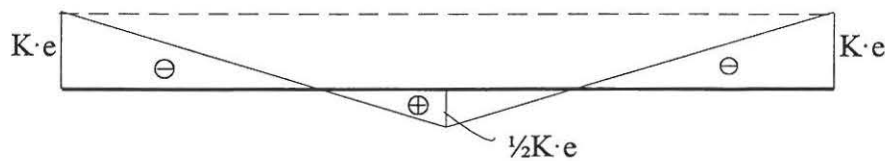
$$\delta_K = \frac{1}{8} \frac{(K \cdot e) \cdot (2L)^2}{EI} = -\delta_T = \frac{1}{48} \frac{T \cdot (2L)^3}{EI} \text{ der giver } T = \frac{3K \cdot e}{L}$$

og dermed det nedenfor viste trekantformede tillægsmoment  $\frac{1}{4} T \cdot (2L) = \frac{3}{2} K \cdot e$



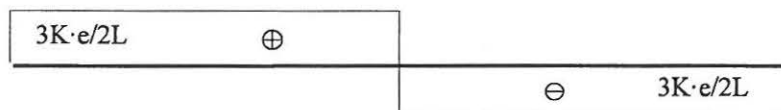
Tillægsmoment (Systemforspænding)

Den resulterende momentkurve fra forspændingen bliver herefter



Resulterede momentkurve (Bjælke 1)

På grund af tvangskraften  $T$  vil systemforspændingen også give et bidrag til forskydningskraften på  $\pm 1/2 T$  i de to fag (sml.  $V_K = 0$  fra den direkte forspænding !)

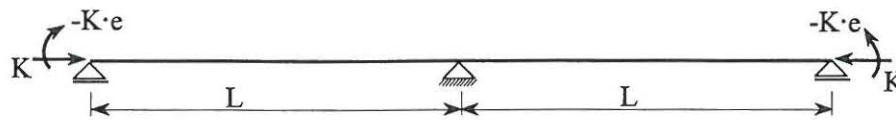


Resulterede forskydningskraftkurve (Bjælke 1)

Derimod påvirkes normalkraften  $N_K = -K$  ikke af systemforspændingen fordi aksialdeformationerne kan foregå uhindret i det aktuelle statiske system.

I stedet for at beregne den direkte forspænding + systemforspændingen hver for sig kan den resulterende virkning af forspændingen beregnes samlet ved at påføre kontaktkræfterne på betonbjælkens statiske system som beskrevet i note 1 og 4.

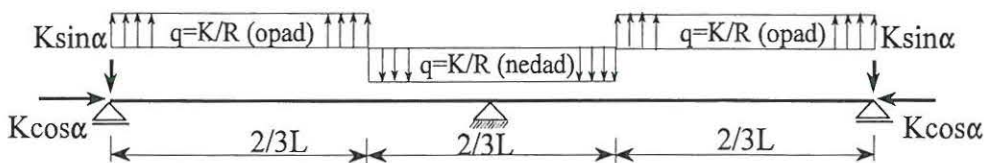
For bjælke 1 fås den på nedenstående figur viste situation som umiddelbart ses at give samme resultat som de resulterende moment- og forskydningskraftekurve vist ovenfor (pga symmetrien fås momentet  $+1/2K \cdot e$  over mellemunderstøtningen)



Kontaktkræfter på bjælke 1

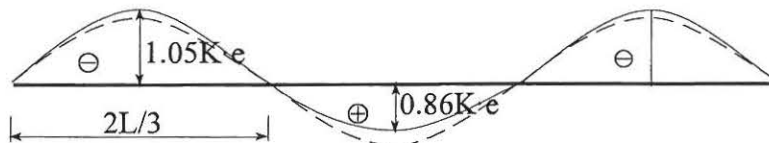
### Bjælke 2

Her er valgt en armeringsføring som er mere hensigtsmæssig for en kontinuerlig bjælke med jævnt fordelt nedadrettet last. Beregningen af forspændingens bidrag til snitkræfterne foretages her samlet ved at påføre kontaktkræfterne som vist på nedenstående figur.



Kontaktkræfter på bjælke 2

Som for bjælke 1 antages  $K = \text{konstant}$  i hele bjælkens længde. Desuden forudsættes samme krumningsradius  $R$  overalt og  $e \ll L$ . Idet alle mellemregninger udelades fås herefter den på figuren viste momentkurve.



Resulternede momentkurve (Bjælke 2)

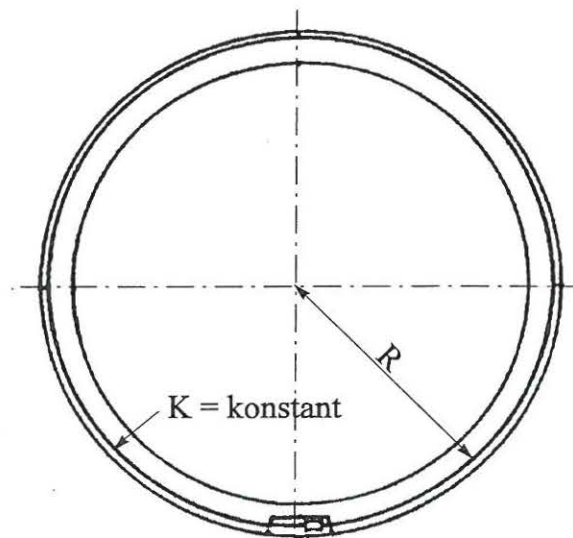
Den punkterede kurve angiver momentet fra den direkte forspænding svarende til værdien  $\pm K \cdot e$  i toppunkterne svarende til armeringsføringen vist på figuren side 8.1. Systemforspændingen som udgøres af forskellen mellem de 2 momentkurver er beskedne sammenlignet med resultatet for bjælke 1. Det er i øvrigt karakteristisk at en "uhensigtsmæssig" armeringsføring (bjælke 1) giver langt større bidrag til systemforspændingen end tilfældet er hvis man vælger en "fornuftigt" armeringsføring (bjælke 2).

Det må understreges, at systemforspændingen i begge de 2 viste tilfælde virker til ugunst i nogle snit og til ugunst i andre.

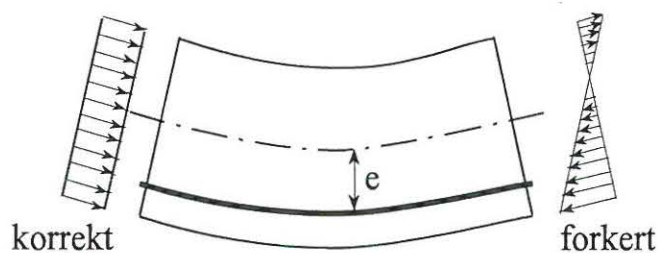
### Cirkulær beholder

Et andet eksempel på systemforspændingens betydning er den viste beholder med en ringformet armering der antages opspændt med en konstant kraft  $K$  og ekscentriciteten  $e$ .





Hvis man betragter et udsnit af beholdervæggen skulle man vente at den ekscentrisk virkende forspændingskraft giver en spændingsfordeling som vist til højre på figuren. Det vil imidlertid betyde at tøjningen i væggen inder- og yderside bliver forskellige, og det er naturligvis ikke muligt når beholdervæggen skal forblive cirkulær på grund af symmetrien.



Den korrekte løsning fås umiddelbart ved at påføre kontaktkræfterne på betonbeholderen. I dette tilfælde optræder der kun krumningskræfter  $q = K/R$  idet armeringen er forankret i sig selv. Da  $q$  er konstant og virkende ind mod centrum fås en konstant ringspænding (tryk) i betonvæggen

$$\sigma = q \cdot R / A_b = K / A_b$$

$A_b$  er væggenes areal og spændingsfordelingen er vist til venstre på figuren. Systemforspændingen får også i dette tilfælde afgørende indflydelse på resultatet.

Det er således uden betydning for virkningen hvordan en given forspændingskraft er placeret i forhold til beholdervæggens centerlinien (bortset naturligvis fra variationen i  $R$ )

Generelt set gælder Norm for betonkonstruktioner - DS 411 - også for spændbeton. Der er imidlertid nogle afsnit der er af speciel interesse for dimensionering og udformning af netop spændbetonkonstruktioner, se nedenstående liste fra DS 411 (4. udgave, 1999).

#### 6.2.2.1 Forskydning i armerede bjælker og plader.

(2) beregning af formel forskydningspænding  $\tau_{sd} = V_{sd} / b_w \cdot z$

(5) vedr. opbøjet spændarmering

(8) fradrag p.g.a. kabelkanaler ved fastsættelse af  $b_w$

(9) regningsmæssig forskydningskraft:  $V_{sd} = V_{0d} - V_{cd} - V_{td} - V_{pd}$

(22) optagelse af trækkræfter

(26) - (28) krav til ikke forskydningsarmerede bjælker og plader  $\tau_{sd} \leq \begin{cases} \beta \tau_0 \\ \frac{1}{2} v_v f_{cd} \end{cases}$

$v_v$  se tabel V 6.2.2.1

$$\tau_0 = 0,25k(1,2 + 40\rho_l)f_{ctd} + 0,15\sigma_{cp}$$

(29) - (31) fastlæggelse af  $\beta$ ,  $k$ ,  $\rho_l$  og  $\sigma_{cp}$

#### 6.2.5.4 Kipning og foldning

(2) krav til spændbetonbjælker i tabel 6.2.5.4

#### 6.2.6.4 Forankring af spændarmering

(1)-(2) spaltearmering

#### 6.3.1 Anvendelsesgrænsetilstande, Spændinger

(4) lineær-elastisk spændingsfordeling for trykspændinger  $< 0,6f_{ck}$

(5) urevnet tværsnit, krav til trækstyrke under hensyntagen til langtidsvirkning

(6) max. betontrykspændinger af hensyn til mikrorevner og krybning

#### 6.4.2 Spændarmering

(definition, begrænsning i anvendelse)

#### 6.4.2.2 Placering

se figur 6.4.2.2a-c

#### 6.4.3.1 Bjælker

(2) betonens karakteristiske bøjningstrækstyrke kan sættes til  $2f_{ctk}$

#### 7.1.4 Opspænding

#### Anneks A Alternativ beregning af forskydningsarmerede bjælker og plader

(6)  $N_{ad} + (\cos\alpha + \sin\alpha)N_{td} \geq (\tau_{sd} - \tau_0)lb_w$  Ved forskydningsarmering med lodrette

bøjler fås det simple udtryk  $N_{td} \geq (\tau_{sd} - \tau_0)lb_w$  gældende for  $\tau_{sd} \leq \begin{cases} 0,25f_{cd} \\ 6N/mm^2 \end{cases}$