



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Aalborg Universitet

Notat vedr. beregning af foldekonstruktioner uden forgreninger

Albertsen, A.

Publication date:
1991

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Albertsen, A. (1991). *Notat vedr. beregning af foldekonstruktioner uden forgreninger*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U / Nr. U9105

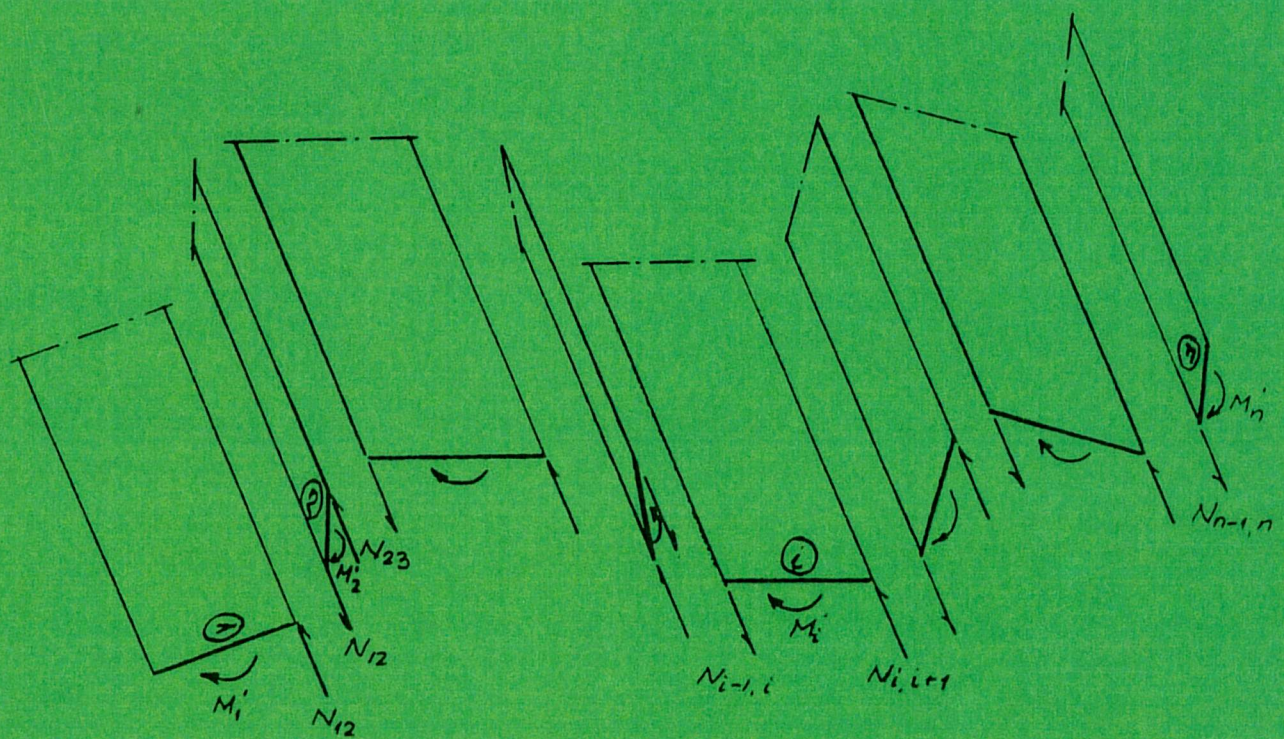
General rights

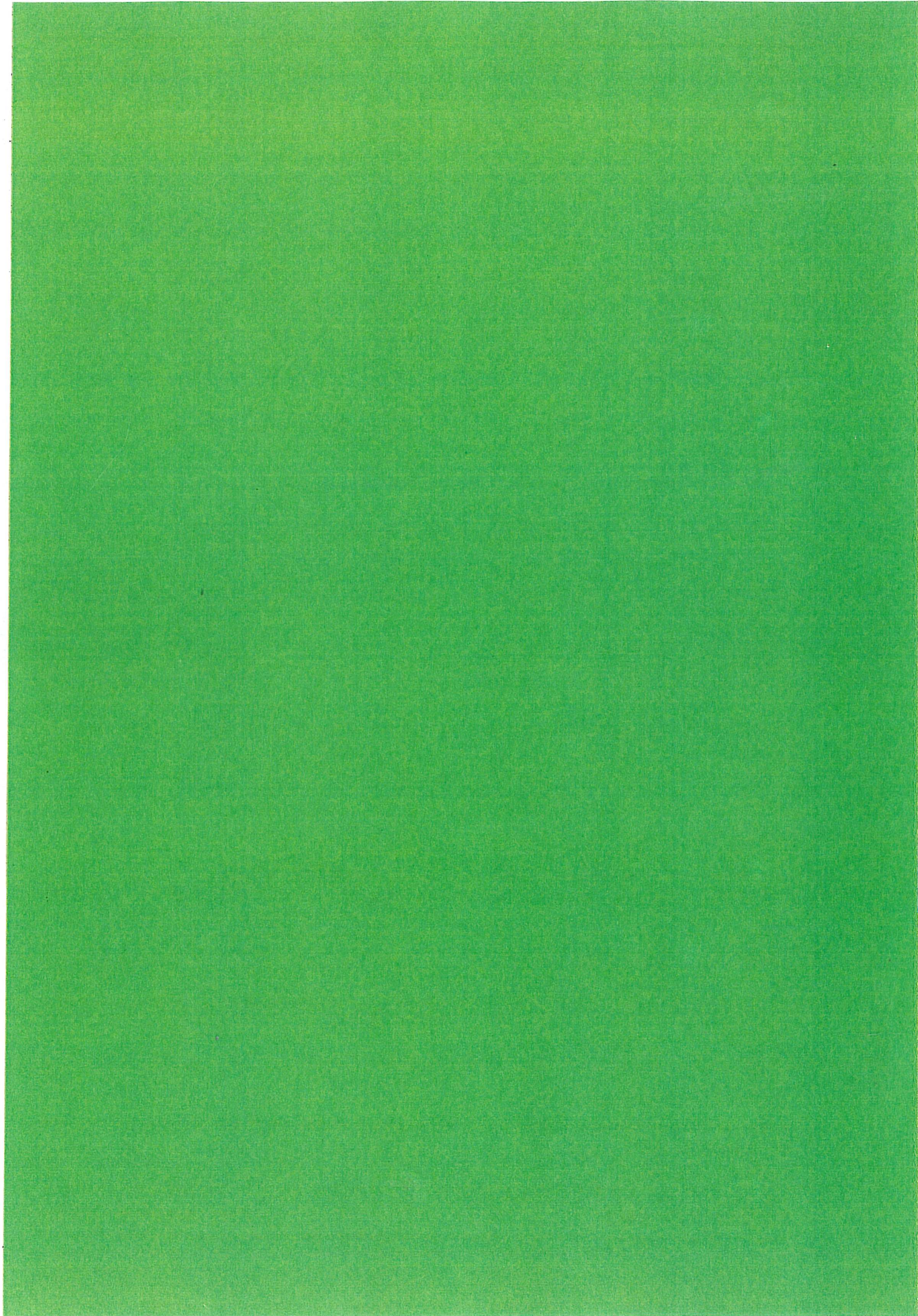
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.





RETTELSESLISTE til A. Albertsen: Notat vedr. beregning af foldekonstruktioner uden forgreninger, U9105

Side 5: På figur. 4 skal $33,4^\circ$ rettes til $33,0^\circ$.

Side 7: Den sidste matrix skal se således ud:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} -9018 \\ 6732 \\ -3056 \\ -2194 \\ 4140 \end{bmatrix} kPa = \begin{bmatrix} -9,0 \\ 6,7 \\ -3,1 \\ -2,2 \\ 4,1 \end{bmatrix} MPa$$

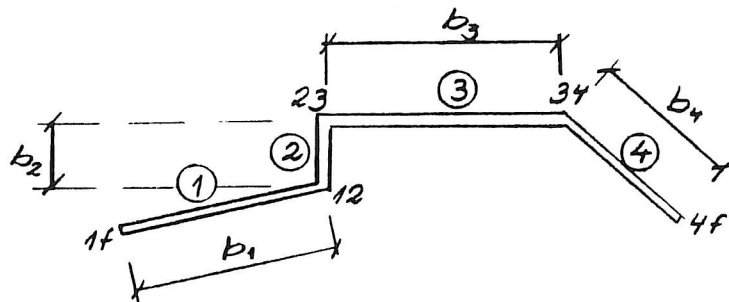
Notatet omhandler cylindriske foldekonstruktioner opbygget af rektangulære, plane skiver, hvis sammenstødende kanter er frembringere i en cylinderflade med en knækket ret linie som ledekurve, jfr. "Notat vedr. foldekonstruktioner" indeholdt i undervisningsnote U8808 "Konstruktionslære - smånotater og eksempler".

Formålet med dette notat er at præsentere en simplificeret beregning baseret på den samme strategi og de samme betegnelser, som i N.J. Gimsing's "Pladedragere"* er benyttet for emnet kassedragere. Notatet er fremkommet som støtte til et aktuelt kursus "Konstruktionssystemer", hvor emnet foldekonstruktioner behandles umiddelbart efter emnet kassedragere. Det er derfor nærliggende at gøre fremstillingen summarisk, hvad angår forudsætninger og beregningsstrategi samt redegørelse for betegnelser og fortegneregler m.m.

Dette notat kan altså i den foreliggende form ikke stå alene, men knytter sig i betydelig grad til "Pladedragere".

* Litteraturliste se bagest i dette notat

FOLDEKONSTRUKTION UDEN FORGRENINGER



Skivetykkelser

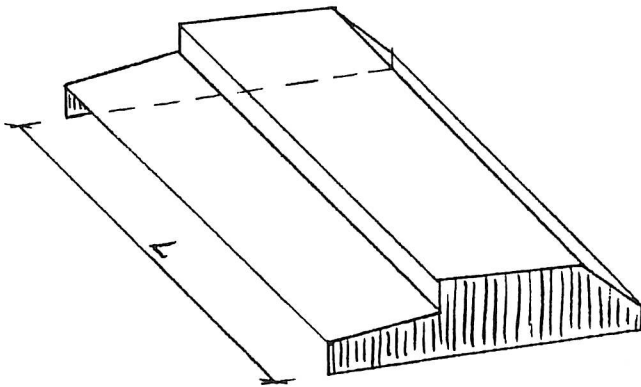
t_1, t_2, t_3 og t_4

Tværsnitsarealer

$A_1 = b_1 t_1$ etc.

Figur 1. Tværsnit i foldekonstruktion uden forgreninger.

På figur 1 er vist et tværsnit i en cylindrisk foldekonstruktion bestående af de plane skiver 1, 2, 3 og 4, der to og to støder sammen langs kanterne 12, 23 og 34. De frie kanter benævnes 1f og 4f.



Figur 2. Eksempel på understøtningsforhold.

Konstruktionen som helhed regnes understøttet på skiver, hvis plan er vinkelret på foldekonstruktionens frembringerretning. Konstruktionen kan være simpelt understøttet som vist på figuren, men også andre understøtningsformer kan forekomme. F.eks. kan konstruktionen være indspændt, eller den kan være kontinuerlig over to eller flere fag.

De væsentligste beregningsforudsætninger er følgende:

- Homogent, isotropt, lineærelastisk materiale.
- Forholdet $b:L$ mellem max. skivebredde og konstruktionens spændvidde er så lille, at sædvanlig, simpel bjælketeori kan anvendes.
- Skivernes bøjningsmodstand på den svage led, dvs. som plader, negligeres. (Dette er som regel en god tilnærmelse, hvad angår pladebøjning i længderetningen. For bøjning i tværretningen kan det for forholdsvis tykke skiver (parameter $t:b$) være påkrævet med en korrektion, se notat U8808.)
- Skivernes vridningsmodstand negligeres (vridning om frembringerretning).
- Forskydningsdeformationer negligeres. (I "Pladedragere" kan det ses, hvorledes disse kan medtages.)
- Der regnes ikke med tværskot eller tværbjælker undtagen ved konstruktionens understøtninger.
- Der regnes i denne fremstilling udelukkende med last vinkelret på konstruktionens langsgående kanter (= frembringerne).

Beregningsstrategi (n skiver)

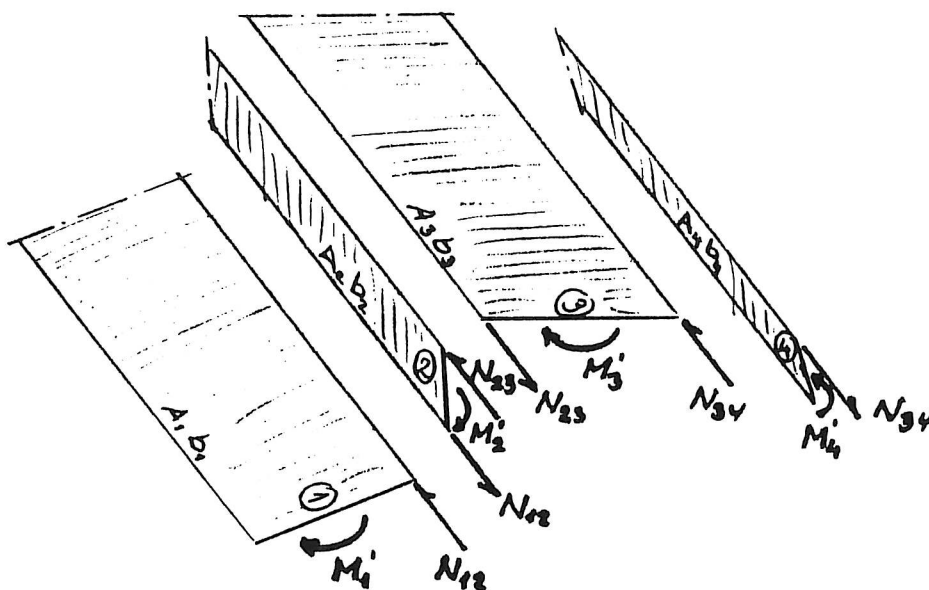
1. Den ydre last fordeles på skivernes planer.
2. Skiverne forudsættes først at virke uafhængigt af hverandre. Momenterne M'_1, M'_2, \dots, M'_n for de enkelte skiver beregnes i det/de snit, der ønskes undersøgt. Skivernes kant-normalspændinger beregnes.
3. Langs skivernes berøringslinier påføres forskydende kræfter $H_{12}, H_{23}, \dots, H_{n-1,n}$, der giver bidrag til hver enkelt skives snitkræfter.
4. Skivernes kant-normalspændinger fra de oven for nævnte forskydningskræfter beregnes og adderes til normalspændingerne beregnet under punkt 1.
5. Længdetøjningerne - og dermed også normalspændingerne - i to naboskiver skal være ens ved den fælles kant, hvilket giver $n-1$ ligninger til bestemmelse af de $n-1$ kantforskydningskræfter.
6. De resulterende spændinger beregnes.

Benævnelser og fortegneregler

Der henvises til figur 69, 70, 71 og 75 i "Pladedragere".

Beregning for $n = 4$

Dette tilfælde tages for sig, idet man derved får den mest direkte sammenligning mellem udtrykkene for en (åben) foldekonstruktion og en kassedrager (= lukket foldekonstruktion).



Figur 3. Ækvivalerede snitlaster i skiverne.

Ligninger til bestemmelse af kant-forskydningskræfterne:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} & \frac{1}{A_2} & 0 \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} + \frac{2}{A_3} & \frac{1}{A_3} \\ 0 & \frac{1}{A_3} & \frac{2}{A_3} + \frac{2}{A_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & \frac{1}{A_3 b_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3 b_3} & \frac{1}{A_4 b_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \end{bmatrix}$$

Med matrix-notation:

$$\underline{F} \underline{N}' = 3 \underline{V} \underline{M}' \quad (1)$$

Her er benyttet de samme betegnelser som i "Pladedrager". Bemærk dog det lidt ændrede indhold af matricerne. Vektoren \underline{N}' bestemmes af

$$\underline{N}' = 3 \underline{F}^{-1} \underline{V} \underline{M}' \quad (2)$$

Spændingerne ved kanterne, herunder de frie kanter 1f og 4f, bestemmes af

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1f} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{34} \\ \sigma_{4f} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 b_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1 b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3 b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_4 b_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ \frac{2}{A_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_3} & \frac{2}{A_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \end{bmatrix}$$

der også kan skrives som

$$\underline{\sigma} = 6 \underline{B} \underline{M}' - 2 \underline{C} \underline{N}' = 6 \underline{B} \underline{M}' - 6 \underline{C} \underline{F}^{-1} \underline{V} \underline{M}' = 6 (\underline{B} - \underline{C} \underline{F}^{-1} \underline{V}) \underline{M}' \quad (3)$$

altså igen formelt samme udtryk som for en kassedrager men med lidt ændret indhold af de enkelte matricer.

Hvis man, som i "Pladedragere", ønsker at bestemme de enkelte skivers snitkræfter M , N og Q , finder man på tilsvarende måde

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \end{bmatrix}$$

også skrevet som

$$\underline{M} = \underline{M}' - \frac{1}{2} \underline{D} \underline{N}' = (\underline{E} - \frac{3}{2} \underline{D} \underline{F}^{-1} \underline{V}) \underline{M}' \quad (4)$$

samt

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \end{bmatrix}$$

altså

$$\underline{N} = \underline{H} \underline{N}' = 3 \underline{H} \underline{F}^{-1} \underline{V} \underline{M}' \quad (5)$$

Når \underline{M} og \underline{N} er kendt, kan spændingerne også beregnes af udtrykket

$$\underline{\sigma} = 6 \underline{B} \underline{M} + \underline{L} \underline{N} \quad (6)$$

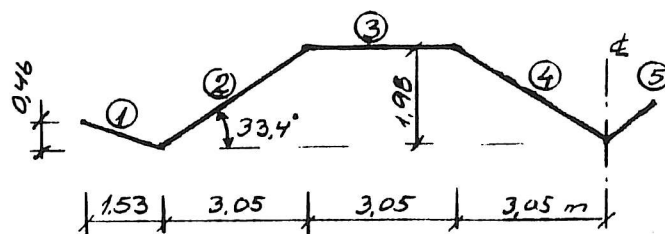
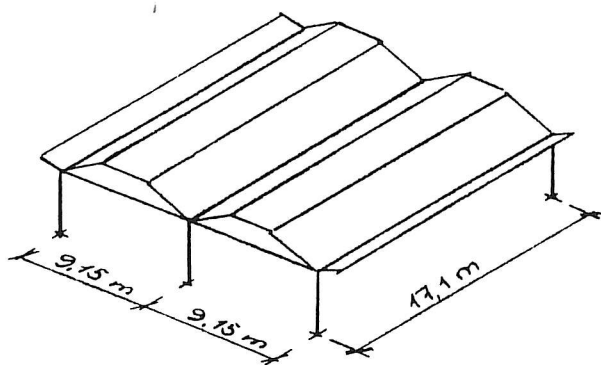
hvor

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_4} \end{bmatrix}$$

Taleksempel (jfr. 1. del af taleksempel side 41-43 i note U8808)

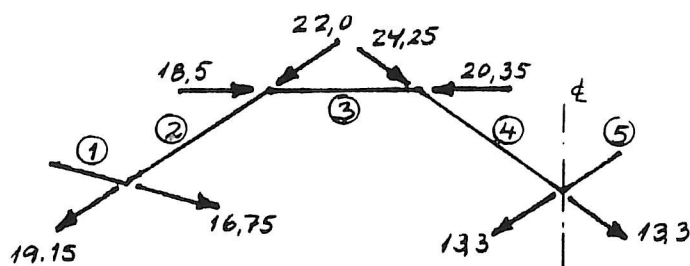
Formålet med dette eksempel er

- at vise anvendelsen af de foranstående formler
- at påpege muligheden for at anvende dem for et symmetrisk tværsnit med symmetrisk last, dvs. at regne et system med 8 skiver, som om der kun var 4.



Tværsnit $t_1 = 0,127 \text{ m}$
 $t_2 = t_3 = t_4 = 0,102 \text{ m}$

Figur 4. Symmetrisk foldekonstruktion med 8 skiver.



Figur 5. Laster i knudelinier (enhed kN/m).

Når både tværsnit og last er symmetrisk, vil kantforskydningskraften N_{45} være nul, og beregningen af systemet bliver som et tværsnit med kun 4 skiver med frie kanter ved A og E.

$$\begin{array}{ll} \text{Geometri:} & b_1 = 1,60 \text{ m} & A_1 = 0,203 \text{ m}^2 \\ & b_2 = 3,64 \text{ -} & A_2 = 0,371 \text{ -} \\ & b_3 = 3,05 \text{ -} & A_3 = 0,311 \text{ -} \\ & b_4 = 3,64 \text{ -} & A_4 = 0,371 \text{ -} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Momenter:} & M'_1 = \frac{1}{8} \cdot 16,75 \cdot 17,1^2 & = 612 \text{ kNm} \\ & M'_2 = \frac{1}{8} \cdot (-19,15 - 22,0) \cdot 17,1^2 & = -1504 \text{ -} \\ & M'_3 = \frac{1}{8} \cdot (18,5 - 20,35) \cdot 17,1^2 & = -68 \text{ -} \\ & M'_4 = \frac{1}{8} \cdot (24,25 + 13,3) \cdot 17,1^2 & = 1373 \text{ -} \end{array}$$

$$\text{Matricer:} \quad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 15,243 & 2,695 & 0 \\ 2,695 & 11,822 & 3,215 \\ 0 & 3,215 & 11,822 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 3,079 & 0,740 & 0 & 0 \\ 0 & 0,740 & 1,054 & 0 \\ 0 & 0 & 1,054 & 0,740 \end{bmatrix}$$

Af ligningssystemet $\underline{\underline{F}} \underline{\underline{N}}' = 3 \underline{\underline{V}} \underline{\underline{M}}'$ fås

$$\underline{\underline{N}}' = \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 232 \\ -452 \\ 363 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Med $\sigma = 6 \underline{\underline{B}} \underline{\underline{M}}' - 2 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{N}}'$ hvor

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -3,079 & 0 & 0 & 0 \\ 3,079 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,740 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,054 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,740 \end{bmatrix}$$

og

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -4,926 & 0 & 0 \\ 9,852 & 0 & 0 \\ 2,695 & 5,391 & 0 \\ 0 & 3,215 & 6,431 \\ 0 & 0 & 2,695 \end{bmatrix}$$

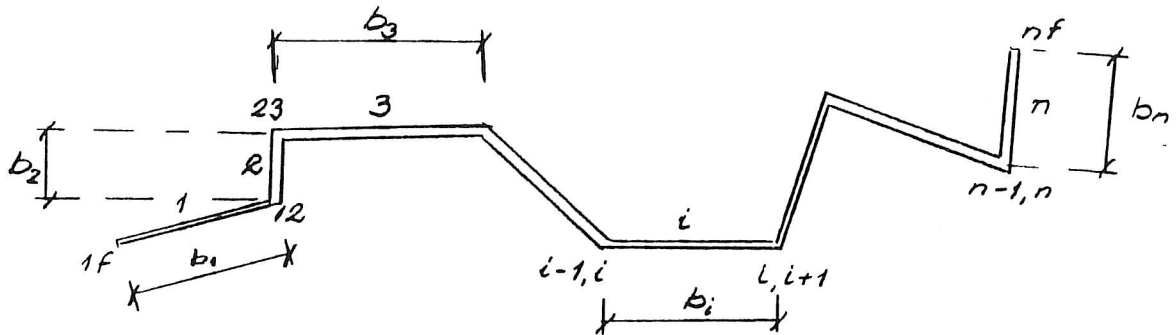
fås

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 9018 \\ 6732 \\ -3056 \\ -2194 \\ 4140 \end{bmatrix} \text{ kPa} = \begin{bmatrix} 9,0 \\ 6,7 \\ -3,1 \\ -2,2 \\ 4,1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

hvilket resultat stemmer med U8808 (pånær afrundinger).

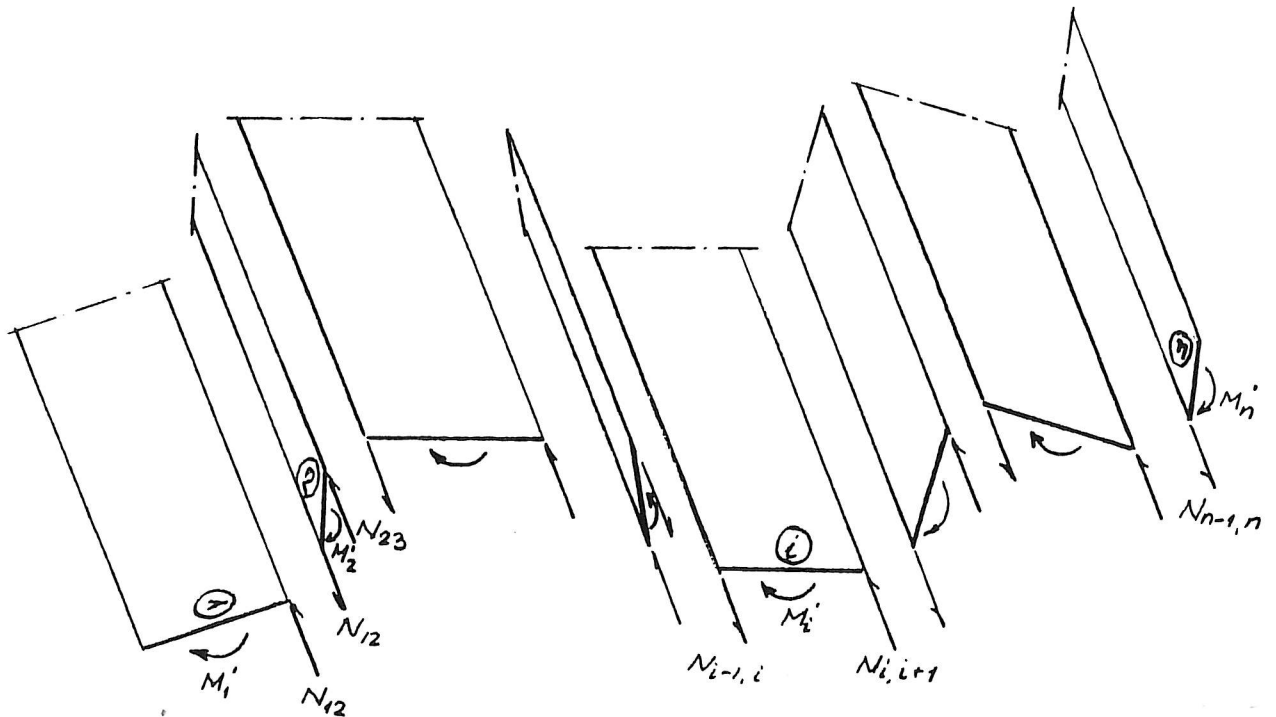
Beregning for vilkårligt antal skiver

Matrixligningerne (1) - (6) gælder for alle $n \geq 2$, idet de afspejler de samme beregningsforudsætninger og den samme beregningsstrategi. Det er derfor tilstrækkeligt på dette sted at redegøre for indholdet i de indgående matricer og vektorer. Betegnelser m.v. fremgår af figur 6 og 7.



Skivetykkelser $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$
 Tværsnitsarealer $A_1 = b_1 t_1, A_2 = b_2 t_2$ etc.

Figur 6. Tværsnit i uforgrenet foldekonstruktion med n skiver.



Figur 7. Ækvivalerede snitlaster i de n skiver.

$\underline{\underline{F}}$, der indgår i (1), er en kvadratisk matrix med $n - 1$ rækker og søjler:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} + \frac{2}{A_3} & \frac{1}{A_3} & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \frac{1}{A_3} & \frac{2}{A_3} + \frac{2}{A_4} & \frac{1}{A_4} & \dots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \frac{1}{A_{i-1}} & \frac{2}{A_{i-1}} + \frac{2}{A_i} & \frac{1}{A_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & \frac{1}{A_i} & \frac{2}{A_i} + \frac{2}{A_{i+1}} & \frac{1}{A_{i+1}} & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{A_{n-1}} & \frac{2}{A_{n-1}} + \frac{2}{A_n} & \end{bmatrix}$$

$i-2 \quad i-1 \quad i \quad i+1 \quad n-2 \quad n-1 \quad \text{søjle}$

Bemærk, at der her og i det følgende til hjælp for læseren er anført søjlenumre neden under matrixerne.

Matricen \underline{V} , der ligeledes indgår i (1), har $n - 1$ rækker og n søjler:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & \frac{1}{A_3 b_3} & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3 b_3} & \frac{1}{A_4 b_4} & \dots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \frac{1}{A_{i-2} b_{i-2}} & \frac{1}{A_{i-1} b_{i-1}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & \frac{1}{A_{i-1} b_{i-1}} & \frac{1}{A_i b_i} & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{A_{n-2} b_{n-2}} & \frac{1}{A_{n-1} b_{n-1}} & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_{n-1} b_{n-1}} & \frac{1}{A_n b_n} & \end{bmatrix}$$

$i-2$ $i-1$ i $n-2$ $n-1$ n søjle

$\underline{\underline{B}}$ indgår i (3) og er en $(n + 1) \cdot n$ matrix:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 b_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1 b_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_i b_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_{n-1} b_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{A_n b_n} \end{bmatrix}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad i-1 \quad i \quad i+1 \quad \dots \quad n-2 \quad n-1 \quad n \quad \text{søjle}$

$\underline{\underline{C}}$ indgår ligeledes i (3) og er en $(n + 1) \cdot (n - 1)$ matrix:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{A_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{A_{i-1}} & \frac{2}{A_{i-1}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_i} & \frac{2}{A_i} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_{n-1}} & \frac{2}{A_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{A_n} \end{bmatrix}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad i-2 \quad i-1 \quad i \quad \dots \quad n-3 \quad n-2 \quad n-1 \quad \text{søjle}$

$\underline{\underline{D}}$ indgår i (4) og er en $n \cdot (n - 1)$ matrix:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{i-1} & b_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_i & b_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad i-2 \quad i-1 \quad i \quad \dots \quad n-3 \quad n-2 \quad n-1 \quad \text{søjle}$

$\underline{\underline{H}}$ indgår i (5) og er ligeledes en $n \cdot (n - 1)$ matrix:

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad i-2 \quad i-1 \quad i \quad \dots \quad n-3 \quad n-2 \quad n-1 \quad \text{søjle}$

Endelig er $\underline{\underline{L}}$, der indgår i (6), en $(n + 1) \cdot n$ matrix:

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{A_n} \end{bmatrix}$$

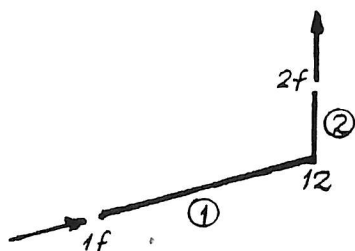
1 2 3 i-1 i i+1 n-2 n-1 n søjle

Ligningssystemer for nogle konkrete n -værdier

Det centrale udtryk i beregningen er ligning (1), hvis løsning, ligning (2) fører til, at udtrykkene (3) - (6) kan opstilles. Disse indeholder meget simple regneoperationer, som ikke nødvendigvis behøver foreligge på matrixform. Til brug for sådanne tilfælde, hvor det først og fremmest drejer sig om at løse ligning (1), er der i det følgende angivet indholdet af de deri indgående matricer og vektorer for en række konkrete n -værdier.

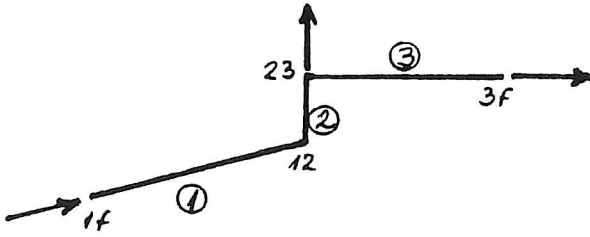
Ligningerne, der er specialtilfælde af (1), benævnes (1.2) for $n = 2$, (1.3) for $n = 3$ etc.

$$\boxed{n = 2}$$



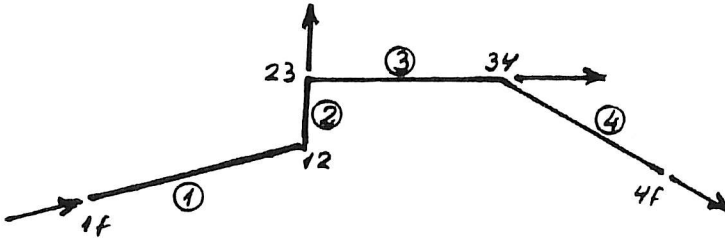
$$\left(\frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} \right) N_{12} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$n = 3$$



$$\begin{bmatrix} \frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} & \frac{1}{A_2} \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} + \frac{2}{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & \frac{1}{A_3 b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

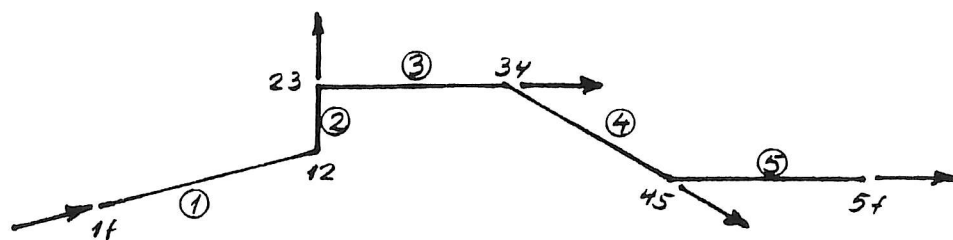
$$n = 4$$



Ligning (1.4):

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} & \frac{1}{A_2} & 0 \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} + \frac{2}{A_3} & \frac{1}{A_4} \\ 0 & \frac{1}{A_3} & \frac{2}{A_3} + \frac{2}{A_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & \frac{1}{A_3 b_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3 b_3} & \frac{1}{A_4 b_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \end{bmatrix}$$

$$n = 5$$

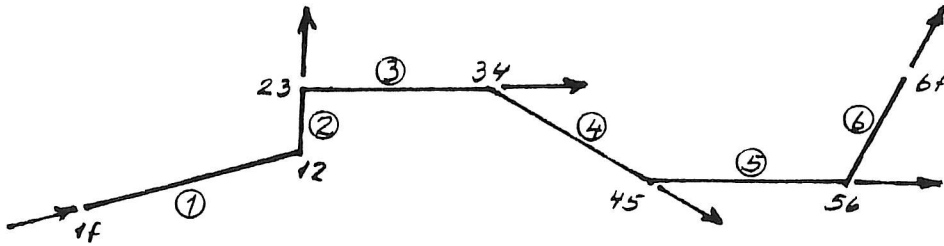


Ligning (1.5):

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} + \frac{2}{A_3} & \frac{1}{A_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_3} & \frac{2}{A_3} + \frac{2}{A_4} & \frac{1}{A_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_4} & \frac{2}{A_4} + \frac{2}{A_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \\ N_{45} \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & \frac{1}{A_3 b_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3 b_3} & \frac{1}{A_4 b_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_4 b_4} & \frac{1}{A_5 b_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \\ M'_5 \end{bmatrix}$$

$$n = 6$$



Ligning (1.6):

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{A_1} + \frac{2}{A_2} & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} & \frac{2}{A_2} + \frac{2}{A_3} & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_3} & \frac{2}{A_3} + \frac{2}{A_4} & \frac{1}{A_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_4} & \frac{2}{A_4} + \frac{2}{A_5} & \frac{1}{A_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_5} & \frac{2}{A_5} + \frac{2}{A_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{34} \\ N_{45} \\ N_{56} \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1 b_1} & \frac{1}{A_2 b_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2 b_2} & \frac{1}{A_3 b_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3 b_3} & \frac{1}{A_4 b_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_4 b_4} & \frac{1}{A_5 b_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_5 b_5} & \frac{1}{A_6 b_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \\ M'_5 \\ M'_6 \end{bmatrix}$$

Litteratur:

A. Albertsen: Konstruktionslære - Smånotater og eksempler.
Undervisningsnote U8808.
Instituttet for Bygningsteknik, september 1988.

N.J. Gimsing: Pladedragere.
Polyteknisk forlag, 1984.



