Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Introducción al álgebra mediante ecuaciones

Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes

Gómez, Roberto Luis

Moyano Budde, Consuelo

Soler, Verónica Belén

Supervisión de práctica profesional e informe final: Giménez, Darío

Equipo responsable de MyPE: Antunez, Daniela; Coirini Carreras, Araceli; Gerez Cuevas, José Nicolás; Giménez, Anibal Darío; Smith, Silvina.

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 24-11-2023

Clasificación:

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

Palabras Claves

Ecuaciones, Expresiones algebraicas, Lenguaje coloquial y simbólico, Propiedad uniforme, Números naturales y números racionales positivos.

Resumen

En el presente informe se describe y analiza nuestra experiencia en las prácticas docentes en el marco de la materia Metodología y Práctica de la Enseñanza, de la carrera del Profesorado en Matemática de FaMAF - UNC. La práctica se desarrolló en tres divisiones de un primer año en una escuela secundaria de gestión privada en la Ciudad de Córdoba. Los temas que se desarrollaron fueron expresiones algebraicas y ecuaciones, donde se introdujo el álgebra a través de ecuaciones. Para dar inicio, presentamos el contexto institucional y áulico en el cual se llevaron a cabo las prácticas. Luego, se muestra el proceso de planificación de clases y su implementación en el aula, junto con las instancias evaluativas. Además, se eligió y analizó una problemática surgida en el transcurso de nuestras prácticas. Finalmente, se realizaron unas reflexiones de nuestra experiencia.

Abstract

This report describes and analyzes our experience in teaching practices within the framework of the subject 'Methodology and Practice of Teaching' in the Mathematics Teaching Degree at FaMAF - UNC. The practice took place in three divisions of the first year at a privately managed secondary school in the city of Córdoba. The topics covered were algebraic expressions and equations, where algebra was introduced through equations. To begin, we present the institutional and classroom context in which the practices were carried out. Then, we outline the process of lesson planning and its implementation in the classroom, along with the evaluation stages. Additionally, a specific issue that arose during our practices was chosen and analyzed. Finally, some reflections on our experience were made.

“La verdadera prosperidad de un pueblo, como la verdadera nobleza de los individuos, está basada en la educación”

- *Juana Manso*

“Un país que destruye la escuela pública no lo hace nunca por dinero, porque falten recursos o su costo sea excesivo.
Un país que desmonta la educación, las artes o las culturas, está ya gobernado por aquellos que solo tienen algo que perder con la difusión del saber.”

- *Italo Calvino*

"La educación debe ser costeada por todos y para todos"

- *Juana Manso*

Índice

1. Introducción

En el presente informe exponemos una descripción y análisis de nuestras prácticas profesionales docentes llevadas a cabo en una institución de nivel secundario en la provincia de Córdoba durante el año 2023. Dichas prácticas se realizaron en el marco de la materia Metodología y Prácticas de la Enseñanza, correspondiente al cuarto año de la carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba.

1.1 Contexto institucional

La institución en la que se realizaron las prácticas profesionales se encuentra ubicada en el barrio Alberdi cercano al centro de la ciudad de Córdoba. Es de gestión privada, exclusiva para varones, de jornada simple y con orientación en valores de la religión católica. Cuenta con cuatro niveles: Nivel inicial; Nivel primario, los cuales son mixtos hasta tercer grado inclusive desde el año 2021, Nivel secundario con orientación en Economía y Administración, y Nivel Superior.

El nivel secundario, se estructura en dos ciclos conforme a lo establecido en Diseño Curricular vigente de la provincia de Córdoba, Ciclo Básico y Ciclo Orientado con una duración de tres años cada uno. Los años de 1^{ro} y 2^{do} cuentan con tres divisiones de A, B y C, mientras que 3^{er} , 4^{to}, 5^{to} y 6^{to} año solo cuentan con dos divisiones A y B.

El edificio de la Institución para el Nivel Secundario se distribuye en dos plantas. En planta baja, se encuentra un amplio patio equipado con dos canchas, una de fútbol y otra de básquet, además de cuatro mesas de ping pong. También en esta planta se encuentra la sala de profesores, la cantina destinada tanto a estudiantes como a profesores, la dirección, baños para varones, un espacio de oratorio y las aulas de 4^{to}, 5^{to} y 6^{to} año. En la planta alta, se encuentran las aulas correspondientes a 1^{ro}, 2^{do} y 3^{er} año, la biblioteca y una sala de multimedia, la preceptoría y vicedirección, otra mesa de ping pong y baños para varones y otro para mujeres.

1.2 Los cursos

Llevamos a cabo nuestras prácticas en tres divisiones: 1^{ro} A, 1^{ro} B y 1^{ro} C, las cuales estaban a cargo de la misma docente. Tanto en 1^{ro} A como en 1^{ro} B contaba con 37 estudiantes, mientras que en 1ro C había 35 estudiantes. Sin embargo, durante las prácticas en esta última división se incorporó un estudiante más, por lo que finalmente fueron 36 estudiantes. Cabe destacar que en 1ro A había un estudiante con necesidades educativas especiales, mientras que en 1ro C teníamos un estudiante con diagnóstico de Trastorno del Espectro Autista (TEA), en ambos casos, no se contaba con la presencia de una maestra de apoyo integrador.

Los estudiantes comienzan su jornada en la institución a las 06:55 de la mañana y finalizan sus actividades a las 12:50. A primera hora los estudiantes forman en el patio de la institución, izan la bandera en silencio y luego el director da unas palabras de bienvenida. A veces se realizan anuncios pertinentes para la jornada y finalizan siempre con una oración. Estos horarios se mantienen durante todos los días de la semana, de lunes a viernes. Los horarios correspondientes a las clases de matemática se detallan en la Figura 1.1 a continuación.

<table>
<tr><th></th><th>Lunes</th><th>Martes</th><th>Miércoles</th><th>Jueves</th><th>Viernes</th></tr>
<tr><td>6:55-7:35</td><td rowspan="2">1ro A</td><td></td><td rowspan="2">1ro B</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7:35-8:15</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Recreo</td></tr>
<tr><td>8:30-9:10</td><td rowspan="2">1ro C</td><td></td><td>1ro B</td><td rowspan="2">1ro B</td><td rowspan="2">1ro C</td></tr>
<tr><td>9:10-9:50</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Recreo</td></tr>
<tr><td>10:00-10:40</td><td>1ro C</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10:40-11:20</td><td></td><td></td><td>1ro A</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Recreo</td></tr>
<tr><td>11:30-12:10</td><td></td><td></td><td rowspan="2">1ro A</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12:10-12:50</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 1.1: horarios de cursado.

Cada división cuenta con su propia aula, equipadas con una pizarra blanca. Las aulas del colegio tienen ventanas laterales que dan a la calle y otras que dan al pasillo. Los bancos son individuales dispuestos en 6 filas de aproximadamente 6 o 7 estudiantes por fila, y cada estudiante tiene su lugar asignado en el aula que se respeta en todas las clases. La distribución del aula se ilustra en la Figura 1.2 a continuación.

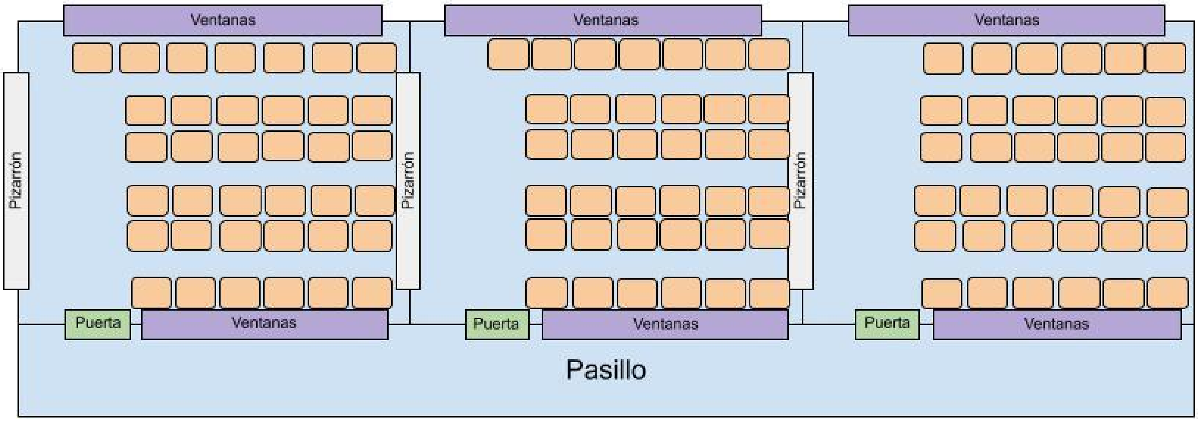


Figura 1.2: distribución espacial de las aulas de 1^{ro} C, 1^{ro} B y 1^{ro} A respectivamente.

Durante nuestras prácticas, también hicimos uso de otros espacios disponibles en la institución. Utilizamos la biblioteca para la primera clase de 1^{ro} B y la sala multimedia para la primera clase de 1^{ro} A y 1^{ro} C. Para disponer de estas salas tuvimos que pedirlas con anticipación ya que son espacios utilizados por otras asignaturas. Estos espacios están equipados con un proyector, sistema de sonido y disponen de Wi-Fi. Además, cuentan con una pizarra blanca para marcadores. En la Figura 1.3 puede verse la distribución espacial de la biblioteca, la cual cuenta con tres mesas amplias. La Figura 1.4 presenta la distribución espacial de la sala multimedia, con bancos individuales organizados en cinco filas.

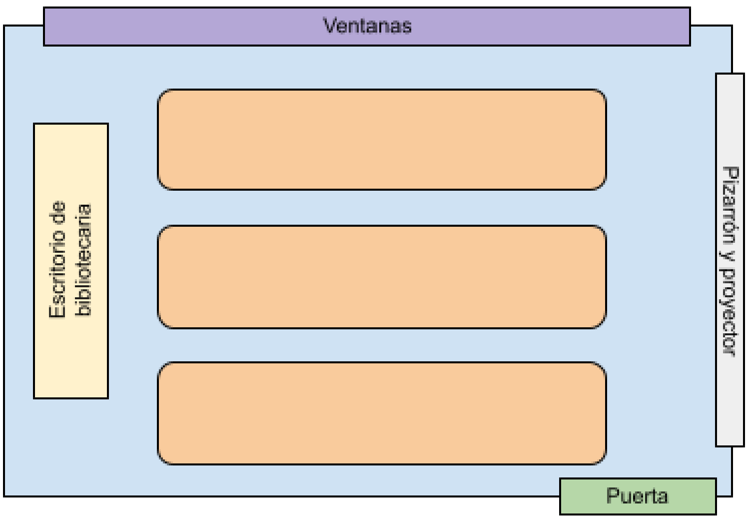


Figura 1.3: distribución espacial de la biblioteca.

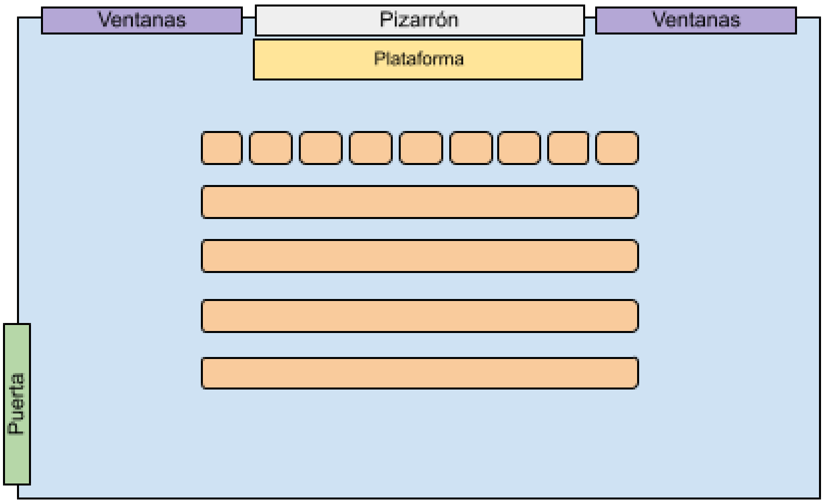


Figura 1.4: distribución espacial de la sala multimedia.

Las tres divisiones de primer año contaban con un mismo preceptor. Entre otras tareas, era el encargado de tomar asistencia en la primera hora del día, pero el resto de las horas debía tomar asistencia el docente a cargo. Durante las prácticas tuvimos en promedio 2 inasistencias por curso.

1.3 Las clases de matemática

Antes de comenzar con las prácticas, llevamos a cabo un período de observación de las clases a cargo de la profesora titular. Durante esta instancia pudimos observar la relación entre la docente y los estudiantes, el modo de trabajo en clase, los recursos disponibles y las costumbres y rutinas establecidas.

En el ingreso al aula, luego de que sonara el timbre los estudiantes se formaban fuera de la misma. Esto ocupaba unos 7 a 10 minutos diarios de clase. Una vez dentro, se quedaban parados al lado de sus bancos para saludar a la profesora y tomaban asiento cuando se les indicaba. Al comenzar la clase, los estudiantes debían tener el material, el cual se encontraba en el aula virtual y ellos eran los responsables de llevarlo impreso a todas las clases. No estaba permitido el uso de calculadoras ni de celulares.

En cuanto a la dinámica entre los estudiantes y la docente, observamos que la relación era respetuosa, siempre con un trato formal. Los alumnos eran participativos en clases y mostraban un buen comportamiento.

Durante este período el contenido que se trabajó era el correspondiente a la Unidad 2 del programa: múltiplos y divisores, y el tema en ese momento era factorización de un número natural, múltiplo común menor (MCM) y divisor común mayor (DCM).

Las actividades propuestas en clase pueden clasificarse en los ambientes de aprendizaje de tipo 1 y 3, siguiendo la clasificación de Skovsmose (2000). En donde las actividades del ambiente de tipo 1 se enfocan en un contexto de "matemáticas puras" y en el paradigma del ejercicio, mientras que las del tipo 3 incluyen elementos referenciando a una semi realidad en el paradigma del ejercicio.

Las clases se desarrollaban en el aula o en la biblioteca, allí se utilizaba el proyector para mostrar el material del aula virtual, mientras que las mesas permitían que los estudiantes pudieran trabajar en grupo, esto es algo que no era muy habitual en el aula. La profesora nos comentó que esta dinámica de trabajo era muy favorable e incentivaba la participación de los estudiantes.

Con el transcurso de las observaciones, notamos que la dinámica de las clases era reiterativa. Las actividades e intervenciones de la docente se repetían en cada una de las divisiones, ya que su objetivo era llevar los tres cursos en simultáneo. En general se iniciaba continuando desde donde habían finalizado la clase anterior. Como ya se mencionó, en el aula virtual estaba subido en formato PDF todo el material que debían disponer. Al no poder utilizar el teléfono en clase los estudiantes llevaban impreso este material, el cual funcionaba de estructura de la clase. Generalmente estos archivos se organizaban con una parte teórica y luego, su respectiva ejercitación. La docente daba las clases siguiendo los archivos que subía al aula virtual y realizaba una puesta en común luego de la ejercitación donde se controlaban las respuestas. Los estudiantes tenían una participación limitada en las clases.

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula

En el presente capítulo abordaremos la etapa de planificación y su realización en las prácticas. Para ello empezaremos presentando el programa anual de la materia utilizado en la institución, los contenidos propuestos a trabajar, detallando la organización y secuenciación de los mismos, el cronograma implementado como así también mencionar los recursos y materiales utilizados durante las prácticas. Luego, contrastaremos lo que estaba planificado con lo que efectivamente ocurrió. Finalmente, mostraremos los instrumentos de evaluación y los criterios para la selección de actividades, analizando los resultados de los mismos.

2.1 Programa y contenidos a tratar

En esta sección presentamos el programa anual de Matemáticas correspondiente al primer año del Ciclo Básico de la institución. A continuación detallamos textualmente la división de los contenidos en seis unidades. En la Tabla 2.1 destacamos la Unidad 2, que fueron los contenidos abordados durante las observaciones, y la Unidad 4 que son los contenidos que desarrollamos en el marco de nuestras prácticas docentes.

NÚCLEOS DE CONTENIDOS PROGRAMÁTICOS - AÑO 2023	
Unidad 1: NÚMEROS NATURALES	Números naturales. Ubicación en la recta numérica. Suma, resta, multiplicación y división con números naturales. Propiedades de las operaciones con números naturales. Propiedad distributiva. Potenciación de números naturales. Propiedades de la potenciación con números naturales. Radicación de números naturales. Propiedades de la radicación con números naturales. Operaciones combinadas con números naturales. Situaciones problemáticas
Unidad 2: MÚLTIPLOS Y DIVISORES	Múltiplos y divisores. Criterios de divisibilidad. Números primos, compuestos y coprimos. Factorización de un número natural. Múltiplo común menor y divisor común mayor. Resolución de situaciones problemáticas.
Unidad 3: NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS	Fracciones y Expresiones decimales finitas y periódicas. Comparación y representación de fracciones en la recta numérica. Fracciones equivalentes. Sumas y restas con fracciones y expresiones decimales. Multiplicación y división de racionales positivos. Potenciación y radicación de racionales positivos. Cálculos combinados y resolución de situaciones problemáticas.

Unidad 4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS – ECUACIONES	Lenguaje coloquial y simbólico. Traducción del lenguaje coloquial y simbólico y viceversa. Expresiones algebraicas. Ecuaciones. Resolución y verificación de ecuaciones con números naturales. Propiedad distributiva. Ecuaciones con potencias y raíces de números naturales. Resolución y verificación de ecuaciones con números racionales positivos. Problemas que se resuelven mediante el planteo de una ecuación.
Unidad 5: FUNCIONES. PROPORCIONALIDAD. ESTADÍSTICA	Ejes cartesianos. Ubicación y reconocimiento de puntos en el plano. Pares ordenados. Abscisa y ordenada. Interpretación de gráficos. Gráficas crecientes, decrecientes y constantes. Información dada por un gráfico. Gráficos y tablas de funciones. Proporcionalidad directa e inversa. Resolución de situaciones problemáticas. Estadística. Poblaciones y variables. Variables cuantitativas y cualitativas. Cálculo de probabilidades. Problemas de aplicación.
Unidad 6: FIGURAS GEOMÉTRICAS. SIMELA	Unidades de medida. Construcción de triángulos, cuadriláteros, círculos y circunferencias. Elementos y propiedades. Perímetro de triángulos cuadriláteros y figuras circulares

Tabla 2.1: programa anual para primer año del Ciclo Básico

Los contenidos trabajados en nuestras prácticas corresponden en su totalidad a la Unidad 4 del programa, descartando el uso de ecuaciones con potencias y raíces de números naturales. Previo al receso invernal los estudiantes trabajaron la Unidad 3, donde vieron los números racionales positivos, y realizaron cálculos combinados en este conjunto numérico. Por lo tanto, se esperaba que tuvieran un buen manejo aritmético de las operaciones con números naturales y racionales.

Por último, queríamos destacar que la docente a cargo continuaría con la Unidad 4, incorporando las operaciones de potencia y raíz. Además, se nos pidió que no trabajemos con situaciones problemáticas con el concepto de perímetro pues lo abordarían y trabajarían en la Unidad 6 del programa.

2.2 La planificación

Una vez seleccionado el tema a desarrollar, comenzamos a diseñar la planificación. Para su construcción consideramos distintas variables, tomando como referencia algunas de las propuestas por Gvirtz y Palamidessi (2008):

a. las metas, objetivos o expectativas de logro;

b. la selección del/de los contenido/s;
c. la organización y secuenciación del/de los contenido/s;
d. las tareas y actividades;
e. la selección de materiales y recursos;
f. la participación de los alumnos;
g. la organización del escenario;
h. la evaluación de los aprendizajes.

En esta sección nos detendremos a analizar las primeras variables, desde las metas, objetivos o expectativas de logro hasta la selección de materiales y recursos. En secciones posteriores del informe veremos las variables restantes: la participación de los estudiantes, la organización del escenario y la evaluación de los aprendizajes.

2.2.1 Objetivos y selección de contenidos

Al momento de comenzar la planificación de las clases, para llevar a cabo nuestras primeras prácticas docentes, establecimos un objetivo general como grupo pedagógico que mantuvimos a lo largo de todo el trayecto de residencia. Este objetivo consistía en diseñar una propuesta didáctica que se alejara de los métodos tradicionales y se alineara con una perspectiva constructivista de la enseñanza de las matemáticas. Nuestra intención principal era permitir a los estudiantes construir su propio conocimiento a través de las actividades y el trabajo propuesto en clase. Siguiendo este objetivo general, fue que desarrollamos la planificación utilizando el formato de guion conjetural presentado por Bombini y Labeur (2013). Para nuestras clases, formulamos objetivos específicos considerando los contenidos y los aprendizajes que deseábamos desarrollar. Estos objetivos los llevamos a cabo a partir de las actividades que diseñamos para las mismas.

El primer objetivo fue que los estudiantes lograran resolver ecuaciones en la abstracción matemática, es decir la resolución de ecuaciones sin un contexto específico. Esto implicaba comprender el uso de la propiedad uniforme. Si bien esperábamos que algunos de los estudiantes ya tuvieran conocimientos previos en la resolución de ecuaciones con pasaje de términos, nuestra intención no era excluirla, sino asegurarnos de que comprendieran que en este procedimiento subyace la propiedad uniforme.

En segundo lugar nos propusimos enseñarles a traducir del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa. Esto implicaba que los estudiantes debían utilizar y comprender el vocabulario específico del álgebra para traducir diversas situaciones de un lenguaje a otro. Por ejemplo debían ser capaces de interpretar situaciones como “el siguiente de un número” y traducirlas a términos algebraicos. Particularmente esta situación se ajusta a cuando se trabaja con números naturales.

Finalmente, queríamos que los estudiantes ejercitaran la interpretación de textos para traducir situaciones problemáticas en una ecuación y resolverla. Al referirnos a situaciones problemáticas hacemos alusión tanto a situaciones intra como extra-matemáticas. Queríamos que los estudiantes pudieran analizar el enunciado de un problema, identificar la incógnita y sus elementos claves y traducirlos a ecuaciones que pudieran resolver.

Estos fueron los objetivos que guiaron nuestro trabajo a lo largo de las clases, y a partir de los que comenzamos a desarrollar las actividades.

En cuanto a la selección de los contenidos, como se mencionó anteriormente, se nos asignó la Unidad 4 del programa anual de matemática de la institución. Los contenidos que abordamos fueron:

- Lenguaje coloquial y simbólico.
- Traducción del lenguaje coloquial y simbólico y viceversa.
- Expresiones algebraicas.
- Ecuaciones.
- Resolución y verificación de ecuaciones con números naturales.
- Propiedad distributiva.
- Resolución y verificación de ecuaciones con números racionales positivos.
- Problemas que se resuelven mediante el planteo de una ecuación.

2.2.2 Secuenciación de contenidos y recursos

Para organizar los contenidos que abordamos en nuestras prácticas, podemos visualizarlo en tres etapas:

- Trabajo con balanza de platillos:

En esta etapa se propone la utilización de un simulador de balanza como instrumento de representación de ecuaciones, al relacionar el equilibrio de la misma con el concepto de igualdad como equivalencia. Además, esta etapa involucra la introducción a ecuaciones, dado que había masas cuyo peso era desconocido, lo cual permitía el concepto de incógnita dentro de una igualdad. Es importante resaltar que decidimos emplear esta herramienta para la construcción de la propiedad uniforme de la suma y la resta pero no para la multiplicación y división. Con la balanza no es evidente cómo aplicar estas propiedades; las operaciones de división y multiplicación no se traducen directamente en acciones físicas como “agregar” o “quitar” objetos de la balanza. Considerábamos necesario que los estudiantes puedan resolver ecuaciones en la abstracción matemática, al margen de la exploración realizada por ellos mismos con las balanzas. Por otro lado, estas acciones en la balanza nos permitieron relacionar con ejemplos concretos el lenguaje coloquial y simbólico en el contexto de las operaciones de suma y resta.

- *Resolución de ecuaciones:*

En esta segunda etapa nos alejamos del recurso concreto de la balanza para pasar paulatinamente a la abstracción matemática en la resolución de ecuaciones. Esta transición fue necesaria para poder introducir la propiedad uniforme de la multiplicación y división, como así también profundizar el lenguaje coloquial y simbólico de estas operaciones.

- *Situaciones problemáticas:*

Finalmente, luego de pasar por las etapas anteriores consideramos que los estudiantes estaban preparados para plantear y resolver ecuaciones a través de situaciones problemáticas. De esta manera relacionan el lenguaje coloquial y simbólico y utilizan la propiedad uniforme de las cuatro operaciones para resolver la ecuación.

A su vez podemos subcategorizar la secuencia de contenidos según el tipo de actividades que se llevaron a cabo, de la siguiente manera:

- *Actividades sobre usos del signo igual e introducción a las ecuaciones*:

Comenzamos con actividades para resaltar el uso del signo igual como equivalencia ya que, como mencionan Grimaldi et al. (2017), los estudiantes ingresan en el secundario concibiendo a la igualdad como un anuncio de resultado y rara vez vieron a la igualdad como una equivalencia. Además con estas actividades introducimos los conceptos de ecuaciones, incógnitas y notación con ayuda de un simulador digital de balanza donde había elementos cuyos pesos eran desconocidos.

- *Actividades sobre la propiedad uniforme de la suma y la resta:*

Aquí dividimos esta secuenciación para la construcción de esta propiedad y su uso en 3 partes, una fue con ayuda de ilustraciones de balanza, al inicio con casos particulares y luego generalizando la propiedad para lograr introducir la resolución de ecuaciones. La segunda fue entregada como tarea donde hubo un salto de abstracción de ecuaciones aunque tenían un dibujo de balanza de apoyo por si deseaban utilizarlo. Y por último, de resolución de ecuaciones en la abstracción matemática.

- *Actividades sobre lenguaje coloquial y simbólico*:

Estas actividades estuvieron de manera implícita durante las prácticas mostrando la relación entre sí, no obstante, hubo algunas actividades específicas como unir con flechas expresiones del lenguaje coloquial con expresiones simbólicas, traducir una situación problemática concreta a un planteo de ecuación o completar un cuadro entre todo el curso que vinculó estos conceptos en las cuatro operaciones abordadas:suma, resta, multiplicación y división.

- *Actividades sobre la propiedad uniforme de la multiplicación y división:*

Acá podemos dividir esta secuenciación en dos, una donde se trabajó implícitamente esta propiedad con el objetivo de formalizarla en conjunto a los estudiantes y luego se vuelve a retomar estas propiedades en la resolución de ciertas situaciones problemáticas.

- *Actividades de situaciones problemáticas*:

Para estas actividades se tuvo en cuenta un orden según la complejidad de los enunciados y el tipo de planteo de ecuaciones. Se incorporaron situaciones problemáticas intramatemáticas, y extramatemáticas contextualizando los enunciados en base a los intereses de los estudiantes.

- *Actividad de repaso:*

Estas actividades fueron llevadas a cabo teniendo en cuenta lo estudiado las semanas anteriores donde los estudiantes la realizaron previo a la evaluación para que tuvieran algunas actividades de ejercitación.

- *Recursos*:

Para llevar a cabo esta secuenciación de las actividades utilizamos distintos recursos. En primer lugar utilizamos un simulador de la web, llamado Equilibra la balanza de la página educaplus.org[1]. Para esto, hicimos que los estudiantes trabajen en grupos con computadoras y utilizamos un proyector para mostrar el simulador en las puestas en común. Otro recurso utilizado fue un cuadro que vincula el lenguaje coloquial y el lenguaje simbólico. Para ello, sobre un afiche hicimos su estructura, separando en cuatro columnas el lenguaje coloquial, operación, lenguaje simbólico y un ejemplo, y cuatro filas para completar con las distintas operaciones. Además, a lo largo de todas las clases, entregamos fotocopias con las actividades, trabajamos en el pizarrón y los estudiantes registraban todo en sus cuadernos. Por último, a pedido de la profesora titular, hicimos un material teórico que la profesora se encargó de subir al aula virtual, donde tenían las actividades y las definiciones o propiedades trabajadas en la semana.

La decisión de utilizar el simulador web y las computadoras fue porque consideramos que la exploración en las mismas estimula la construcción del conocimiento. Creemos que "cuando los estudiantes se apropian del proceso de exploración y explicación de esta manera, se constituye un escenario de investigación que a su vez genera un nuevo ambiente de aprendizaje. En un escenario de investigación los estudiantes están al mando" (Skovsmose, 2000, p. 8).

2.2.3 Cronograma implementado

A continuación presentamos el cronograma de los tres cursos donde se realizaron las prácticas. Se detallan las semanas, las clases, las actividades y el contenido trabajado. Queremos destacar que este no es el cronograma inicial, pues sufrió modificaciones a lo largo del mes de prácticas por diferentes eventualidades.

[1] https://www.educaplus.org/game/equilibra-la-balanza

1º A			
Semana	Clase	Actividad	Contenidos
Primera semana	Clase 1 - 31/07 - 80 min.	Relato historia de la balanza; Actividad 1 y 2	Concepto de igualdad como equivalencia, introducción de notación y ecuaciones
	Clase 2 - 2/08 - 120 min.	Teórico de ecuaciones y sus propiedades; Actividad 3; teórico de lenguaje coloquial y simbólico; Actividad 4 (tarea)	Definición de ecuaciones e incógnita; propiedad uniforme de la suma y resta, introducción al lenguaje coloquial y simbólico
Segunda semana	Clase 3 - 7/08 - 80 min.	Completar el cuadro de lenguaje coloquial y simbólico; Actividad 5	Lenguaje coloquial y simbólico para suma y resta ; resolución de ecuaciones
	Clase 4 - 9/08 - 120 min.	Actividad 5 y 6; completar cuadro lenguaje coloquial y simbólico	Resolución de ecuaciones en la abstracción matemática y verificación de las mismas ; lenguaje coloquial y simbólico para multiplicación y división
Tercera semana	Clase 5 - 14/08 - 80 min.	Teórico de propiedades de ecuaciones; Actividad 7; Repaso (tarea)	Definición de propiedad uniforme para la multiplicación y división; planteo y resolución de ecuaciones y traducción de lenguaje coloquial y simbólico
	Clase 6 - 16/08 - 120 min.	Suspensión de actividades	-
Cuarta semana	Clase 7 - 21/08 - 80 min.	Feriado nacional	-
	Clase 8 - 23/08 - 120 min.	Control del repaso y evaluación	Traducción del lenguaje coloquial y simbólico; identificación de propiedad uniforme; resolución de ecuaciones en la abstracción matemática; planteo y resolución de ecuaciones en situaciones problemáticas.

Tabla 2.2: cronograma de 1°A

1ºB			
Semana	Clase	Actividad	Contenidos
Primera semana	Clase 1 - 2/08 - 120 min.	Actividad 1 y 2; teórico de ecuaciones	Concepto de igualdad como equivalencia, introducción de notación y ecuaciones
	Clase 2 - 3/08 - 80 min.	Actividad 3;Teórico de propiedades de ecuaciones; Cuadro de lenguaje coloquial y simbólico; Actividad 4 (tarea)	Definición de propiedad uniforme para la suma y resta, introducción al lenguaje coloquial y simbólico
Segunda semana	Clase 3 - 9/08 - 120 min.	Actividad 5 y 6; teórico propiedades de ecuaciones; completar el cuadro de lenguaje coloquial y simbólico	Resolución de ecuaciones en la abstracción matemática y verificación de las mismas; definición de propiedad uniforme y lenguaje coloquial y simbólico para la multiplicación y división.
	Clase 4 - 10/08 - 80 min.	Actividad 7	Traducción del lenguaje coloquial al simbólico; planteo y resolución de ecuaciones
Tercera semana	Clase 5 - 16/08 - 80 min.	Actividad 8 y Tarea	
	Clase 6 - 17/08 - 80 min.	Actividad 9 y 10	
Cuarta semana	Clase 7 - 23/08 - 120 min.	Repaso	Traducción del lenguaje coloquial y simbólico; identificación de propiedad uniforme; resolución de ecuaciones en la abstracción matemática; planteo y resolución de ecuaciones en situaciones problemáticas.
	Clase 8 - 24/08 - 80 min.	Evaluación	

Tabla 2.3: cronograma 1°B

1ºC			
Semana	Clase	Actividad	Contenidos
Primera semana	Clase 1 - 31/07 - 120 min.	Actividad 1 y 2; teórico de ecuaciones	Concepto de igualdad como equivalencia, introducción de notación y ecuaciones
	Clase 2 - 4/08 - 80 min.	Actividad 3; Definición propiedad uniforme de la suma y resta; Cuadro de lenguaje coloquial y simbólico; Actividad 4 (tarea)	Definición de propiedad uniforme para la suma y resta, introducción al lenguaje coloquial y simbólico
Segunda semana	Clase 3 - 7/08 - 120 min.	Actividad 5 y 6; Definición propiedad uniforme de la multiplicación y división; Lenguaje coloquial y simbólico	Resolución de ecuaciones en la abstracción matemática y verificación de las mismas; definición de propiedad uniforme y lenguaje coloquial y simbólico para la multiplicación y división.
	Clase 4 - 11/08 - 80 min.	Actividad 7	Traducción del lenguaje coloquial al simbólico; planteo y resolución de ecuaciones
Tercera semana	Clase 5 - 14/08 - 120 min.	Actividad 8 y Tarea	
	Clase 6 - 18/08 - 80 min.	Repaso	Traducción del lenguaje coloquial y simbólico; identificación de propiedad uniforme; resolución de ecuaciones en la abstracción matemática; planteo y resolución de ecuaciones en situaciones problemáticas.
Cuarta semana	Clase 7 - 21/08 - 120 min.	Feriado nacional	-
	Clase 8 - 25/08 - 80 min.	Evaluación	Traducción del lenguaje coloquial y simbólico; identificación de propiedad uniforme; resolución de ecuaciones en la abstracción matemática; planteo y resolución de ecuaciones en situaciones problemáticas.

Tabla 2.4: cronograma 1°C

2.3 Las clases

En esta sección haremos una descripción de las clases teniendo en cuenta la secuenciación de las actividades y el teórico. Describiremos las tareas y actividades con los objetivos específicos de cada una, y lo que consideremos relevante. Además comentaremos sobre la participación de los estudiantes y mostraremos algunas de sus producciones.

2.3.1 Introducción a ecuaciones con el simulador de balanza de platillos

La primera clase tomó lugar en la sala multimedia para los cursos de 1^{ro} A y C, y para el curso de 1^{ro} B en la biblioteca. Elegimos estos espacios ya que es más sencillo el trabajo en grupo por la distribución de los bancos y para utilizar el proyector.

Comenzamos la primera clase hablando sobre las balanzas y su historia, haciendo un breve relato de cuándo y para qué fueron creadas. Luego, preguntamos sobre el funcionamiento de las balanzas de platillo específicamente, y los estudiantes conocían todos su funcionamiento. Concluimos que cuando la balanza está equilibrada es porque los objetos colocados en ambos platillos pesan lo mismo, y si está desequilibrada es porque pesan distinto, siendo el objeto que está más abajo el más pesado.

Luego de esta breve introducción, les pedimos a los estudiantes que se separen en grupos de 5 o 6 y les dimos una computadora por grupo, donde tenían el simulador de balanza abierto. Les repartimos la Actividad 1 que se muestra en la Figura 2.1 a continuación y comenzaron a trabajar. El objetivo de esta actividad fue resaltar el uso del signo igual como equivalencia.

Actividad 1

Utilizar al menos 5 pesas en total en los platillos, para equilibrar la balanza. Registrar sus producciones en los siguientes dibujos de balanzas al menos 3 ejemplos obtenidos. En este caso deben utilizar solamente los objetos cuyo peso es conocido.

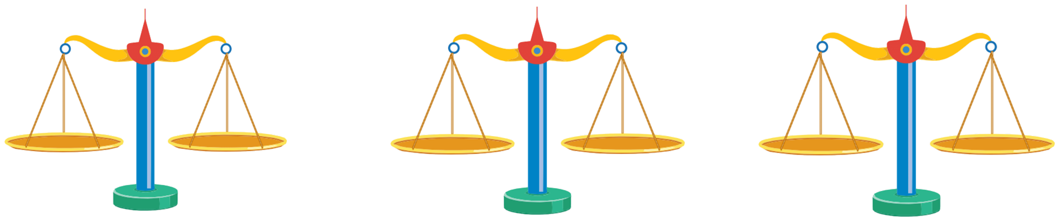


Figura 2.1: Actividad 1 (Se redujo el tamaño de las balanzas para el formato de impresión)

Los estudiantes se mostraron muy entusiasmados por el uso de las computadoras. Destacamos también que las computadoras eran pocas y los grupos de trabajo eran grandes, por lo que tuvimos que intervenir en todos los grupos para que compartan el material y todos puedan trabajar. La actividad estaba planificada para 20 minutos, incluyendo la conformación de los grupos, y finalmente duró 15 minutos. Luego comenzó la puesta en común, que fue dirigida por nosotros, donde les pedimos a distintos grupos que nos detallen desde sus bancos cómo hicieron para equilibrar la balanza. A partir de sus relatos escribimos en el pizarrón en forma numérica los distintos pesos que utilizaron. Dijimos que primero nos detallen lo que colocaron en el platillo izquierdo de la balanza y luego en el derecho. Registramos las respuestas respetando esta disposición (izquierda/derecha) con la precaución de dejar ciertos espacios vacíos entre los números. Luego preguntamos a los estudiantes qué operación matemática iba entre esos números y respondieron fácilmente suma e igualdad según correspondía. De esta manera, llegamos a la notación esperada en el guión conjetural, como se muestra en la Figura 2.2, lo que quedó registrado en el pizarrón.

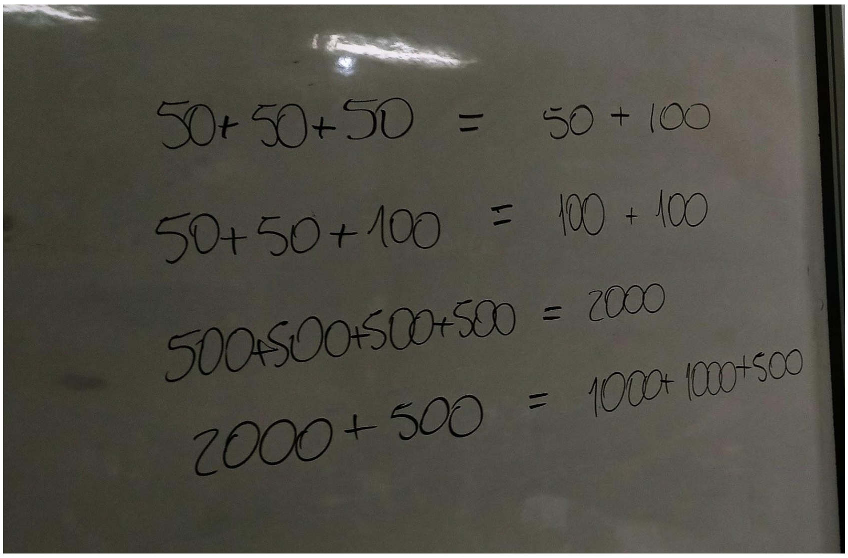


Figura 2.2: producciones en el pizarrón de la Actividad 1

En este momento, concluimos que el signo igual tiene dos funciones en la matemática, una que estuvieron trabajando anteriormente para anunciar un resultado, y esta otra la cual refleja una equivalencia entre dos expresiones.

Luego repartimos la Actividad 2 que se muestra a continuación en la Figura 2.3. Les pedimos que continúen trabajando con los mismos grupos y con el simulador en las computadoras.

Actividad 2
Utilizar la balanza virtual para lograr equilibrarla. Colocar en uno de los platillos los objetos que figuran a continuación:
a. El microscopio.
b. La pelota de basquet y dos pesas de 1000 gramos.
c. El trofeo con una pesa de 2000 gramos y una de 10 gramos.
d. Tres pesas de 50 gramos y el cono de tránsito.
Registrar en sus cuadernos las igualdades obtenidas.

Figura 2.3: Actividad 2

El objetivo de esta actividad era acercar a los estudiantes al trabajo de ecuaciones e incógnitas a través de la exploración con el simulador, además de reforzar el uso del símbolo igual como equivalencia. Esta actividad estaba planificada para 15 minutos, pero finalmente duró 20 minutos. Mientras los estudiantes resolvían la actividad, fuimos pasando por los grupos para ver las distintas respuestas que estaban registrando en sus carpetas. Seleccionamos un estudiante en cuatro diferentes grupos que pase al pizarrón a escribir su respuesta. A continuación, se muestran en la Figura 2.4 y Figura 2.5, las producciones de los estudiantes en la pizarra.

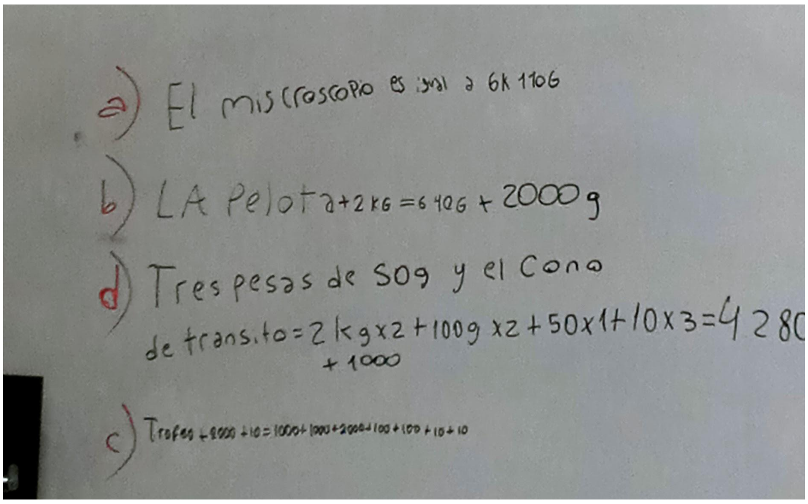


Figura 2.4: producciones de estudiantes de la Actividad 2

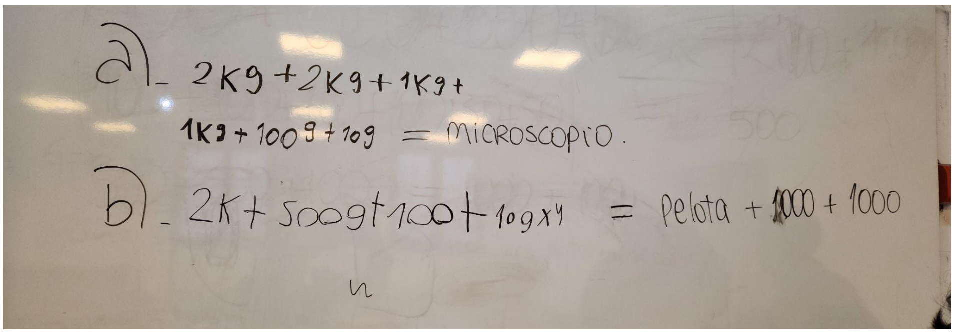


Figura 2.5: más producciones de estudiantes de la Actividad 2

Luego, entre todos corregimos las distintas respuestas escritas y les preguntamos a los estudiantes cuál creen que es la forma más corta y clara. Los estudiantes acordaron que las expresiones como “pelota + 2 kg = 610 g + 2000 g” son las más claras. Preguntamos a ellos sí creían que existía otra forma aún más corta de representar eso con una sola letra, y todos concluyeron que sí, con la letra “p”. Luego escribimos en el pizarrón “p: pelota” seguido de la igualdad “p + 2000 = 610 + 2000”. Realizamos este mismo trabajo con todas las expresiones y les preguntamos si alguna vez vieron una expresión de ese tipo. La gran mayoría respondió que no, salvo algunos que decían haberlas visto en la carpeta de los hermanos. Les dijimos que el nombre de estas expresiones es ecuaciones y las definimos en el pizarrón de la siguiente forma:

Una ecuación es una igualdad en donde hay al menos un valor desconocido, y a este valor lo llamamos incógnita.

Finalmente, concluimos que la letra más utilizada para representar la incógnita en las ecuaciones es la letra “x”.

Luego de realizar estas actividades, nos sobró un poco de tiempo y los estudiantes comenzaron a averiguar el peso del único objeto de peso desconocido que no incorporamos en la Actividad 2. La decisión de no incluirlo, fue porque no alcanzaba con todas las pesas para lograr su peso, y tenían que incluir otros objetos, por lo que la ecuación iba a tener dos incógnitas. De todas maneras, dejamos que lo descubran por su cuenta y llegaron al resultado correcto sin nuestra intervención. Creemos que esto sucedió ya que los estudiantes estaban muy entusiasmados con el uso de computadoras y las actividades propuestas les gustaron mucho.

Queremos destacar que estas actividades salieron según lo planificado, que los estudiantes fueron muy participativos y no mostraron inconvenientes.

2.3.2 Introducción a la propiedad uniforme de la suma y la resta

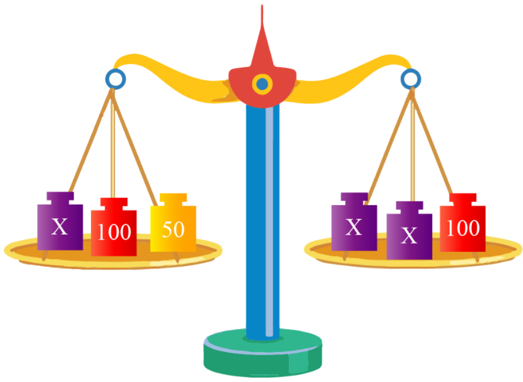
El resto de las clases tuvo lugar en el aula de cada curso y no volvimos a hacer uso de las computadoras. Repartimos la Actividad 3 que se muestra en la Figura 2.6. El objetivo de esta actividad era introducir la propiedad uniforme de la suma y la resta. En los primeros incisos de la actividad se trabajó con casos particulares en balanza y luego se generalizó la propiedad para introducirla en la resolución de ecuaciones. También queríamos que en esta actividad comiencen a hacer conexiones entre el lenguaje coloquial con el simbólico, y viceversa.

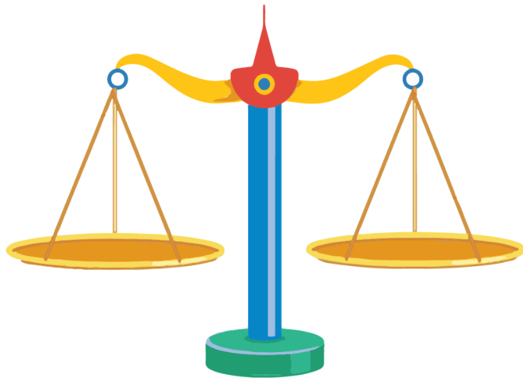
Actividad 3

En esta actividad la masa que posee la letra **x** es la que desconocemos su peso, como sucedía anteriormente con los objetos del simulador.

a) ¿Qué crees que sucedería si agregamos la masa de 500 del lado izquierdo de la balanza?

b) ¿Qué harías para volver a equilibrarla, sin quitar la masa de 500 que acabamos de agregar? Dibujar lo que pensaste en la balanza vacía e intentar completar abajo cómo quedaría esa igualdad.



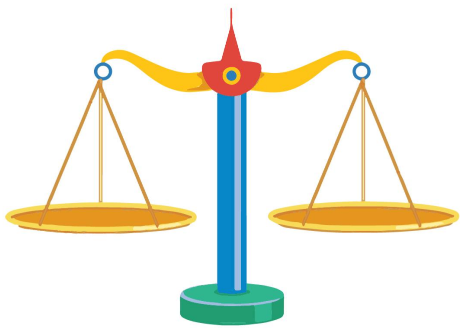


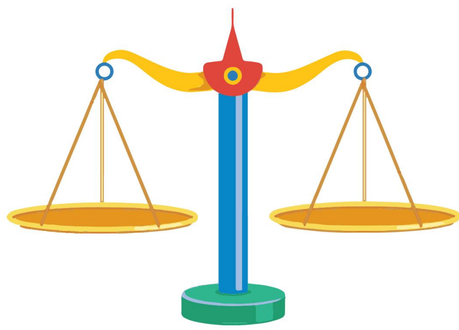
$x + 100 + 50 \;=\; x + x + 100$ .... = ...

c) Ahora que está equilibrada, ¿qué pasaría si quito una masa de 100 del lado derecho de la balanza? ¿Cómo harías para equilibrarla nuevamente sin agregar ese peso? Dibujar en una de las balanzas cómo lo harías e intentar completar abajo como quedaría esa igualdad.

d) Entonces si de un lado de la balanza quitamos una pesa ¿qué deberíamos hacer del otro lado para equilibrarla? ¿Y si agregamos de un lado una pesa?

e) Ahora que sabemos cómo equilibrar la balanza después de quitar o agregar masas ¿Es posible hallar el valor de x? Intentar hacerlo en la otra balanza.





.... = ... = ...

Figura 2.6: Actividad 3

La actividad estaba planificada para realizarse en 25 minutos y la realización estuvo dentro del tiempo estipulado. Queremos mencionar que la actividad fue entregada a los estudiantes como se mostró en la Figura 2.6 anteriormente, pero causó mucha confusión porque no estaba clara la consigna. Nuestra intención era que hubiera una continuidad entre la primera balanza y el resto, agregando y sacando pesas de la misma, pero esto no fue lo que interpretaron los estudiantes. Tuvimos que responder muchas preguntas de consigna y realizar intervenciones. En la Figura 2.7 y Figura 2.8 a continuación se pueden ver las producciones de algunos estudiantes.

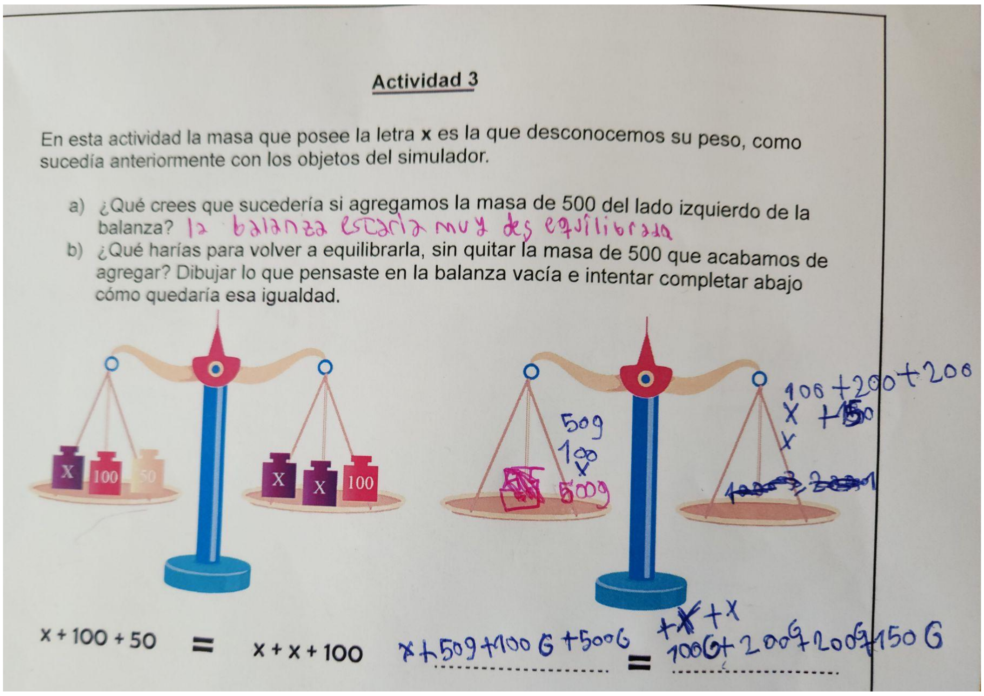
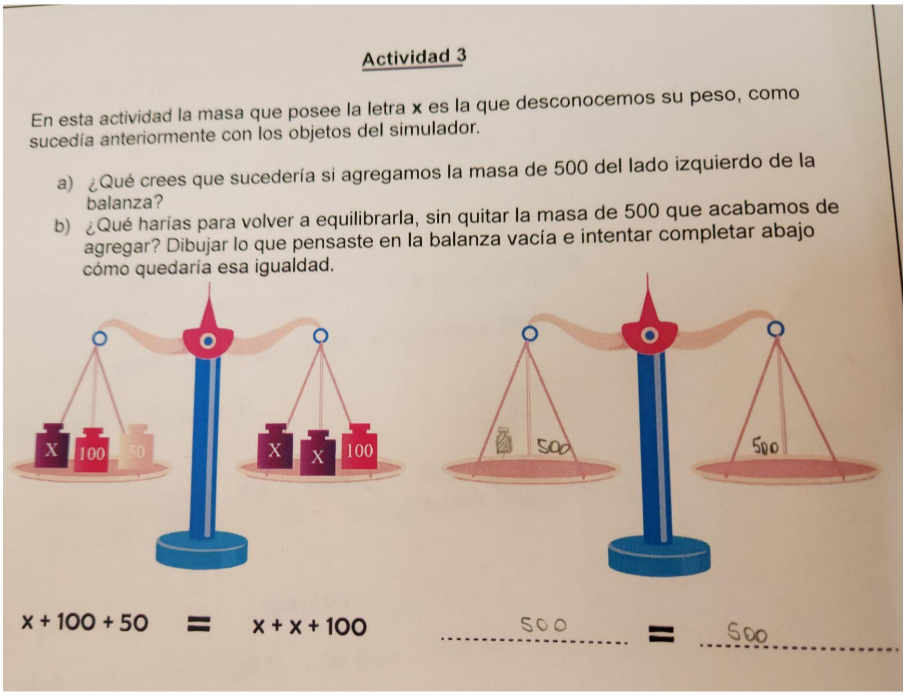


Figura 2.7: producción de un estudiante de la Actividad 3



Actividad 3

En esta actividad la masa que posee la letra **x** es la que desconocemos su peso, como sucedía anteriormente con los objetos del simulador.

a) ¿Qué crees que sucedería si agregamos la masa de 500 del lado izquierdo de la balanza?

b) ¿Qué harías para volver a equilibrarla, sin quitar la masa de 500 que acabamos de agregar? Dibujar lo que pensaste en la balanza vacía e intentar completar abajo cómo quedaría esa igualdad.

x + 100 + 50 = x + x + 100 ....500........ = ...500........

Figura 2.8: producción de un estudiante de la Actividad 3

Luego realizamos una puesta en común, donde los estudiantes desde sus bancos nos dictaban las respuestas y nosotros las escribíamos en el pizarrón, y le preguntábamos al resto de la clase si estaban de acuerdo. La pizarra quedó escrita como se muestra en la Figura 2.9 y Figura 2.10.

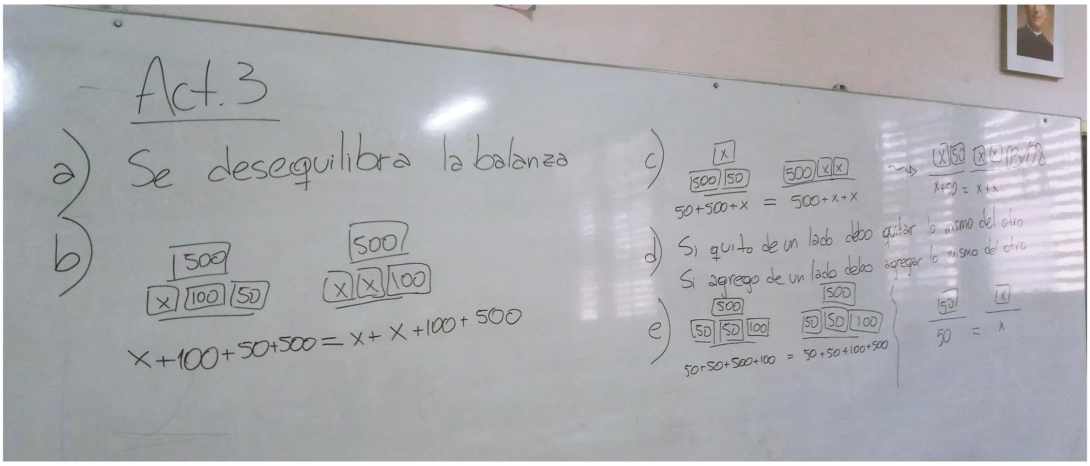


Figura 2.9: producciones en el pizarrón de la Actividad 3

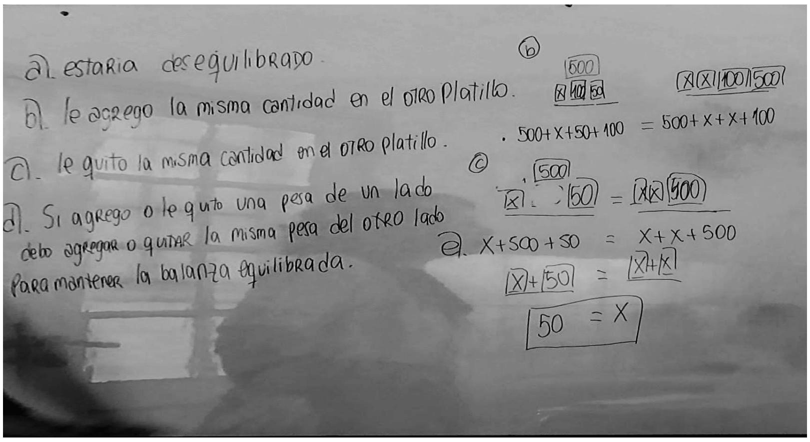


Figura 2.10: producciones en el pizarrón de la Actividad 3

El siguiente texto se detalla lo escrito en el pizarrón de la Figura 2.10 para mejor comprensión:

a) estaría desequilibrado.

b) le agrego la misma cantidad en el otro platillo.

c) le quito la misma cantidad en el otro platillo.

d) Si agrego o le quito una pesa de un lado debo agregar o quitar la misma pesa del otro lado para mantener la balanza equilibrada.

Aunque la consigna no ayudó en la actividad y tuvimos que guiarla mucho, nos permitió concluir en las definiciones de la propiedad uniforme de la suma y la resta. Las escribimos en el pizarrón de esta manera:

<u>Propiedad uniforme de la suma</u>
Para que se mantenga la igualdad si sumo un valor a un lado de la igualdad, le debo sumar al otro lado de la igualdad el mismo valor.
<u>Propiedad uniforme de la resta</u>
Para que se mantenga la igualdad si resto un valor a un lado de la igualdad, le debo restar al otro lado de la igualdad el mismo valor.

A continuación, dimos dos ejemplos, que ilustraban las propiedades en dos ecuaciones.

Ejemplo propiedad uniforme de la resta:

$$x + 58 = 75$$
$$x + 58 - 58 = 75 - 58$$
$$x = 17$$

Ejemplo propiedad uniforme de la suma:

$$x - 36 = 50$$
$$x - 36 + 36 = 50 + 36$$
$$x = 86$$

2.3.3 Introducción al lenguaje coloquial y simbólico de las operaciones de suma y resta

Para llevar a cabo esta actividad comenzamos por mencionar que el lenguaje coloquial es el que utilizamos cotidianamente para hablar o escribir, y que el lenguaje simbólico es el que interpretamos a través de símbolos. Además, previo a la clase, realizamos un afiche con un cuadro en donde se relacionaba el lenguaje coloquial con el simbólico. Fuimos completándolo con los estudiantes a lo largo de las clases. Volvimos sobre los incisos b) y c) de la Actividad 3, y evidenciamos la relación existente entre el lenguaje coloquial y el simbólico. Mostramos que donde agregamos una pesa en la balanza, sumamos en la ecuación y donde quitamos una pesa en la balanza, restamos en la ecuación. Fuimos completando el cuadro con estas dos expresiones en las columnas de lenguaje coloquial y de operación. Luego les preguntamos ¿Cuál es el símbolo que se utiliza para la suma? ¿Y para la resta?, y completamos en la columna de lenguaje simbólico. Luego les preguntamos ¿Cuáles pueden ser otras palabras que refieran a la suma? ¿Y a la resta? Y los invitamos a que completen con esas palabras. Luego escribimos por último un ejemplo para recurrir cuando lo necesiten. El cuadro tenía la siguiente estructura que se muestra en la Figura 2.11.

Lenguaje coloquial	Operación	Lenguaje simbólico	Ejemplo
agregar sumar aumentar	Suma	+	si le sumo cinco a un número → x + 5
quitar sustraer diferencia disminuir restar	Resta	-	la diferencia entre un número y dos → x - 2

Figura 2.11: cuadro de lenguaje coloquial y simbólico

En esta primera instancia completamos solo la parte de suma y resta, quedaban para clases posteriores el producto y la división. Cabe destacar que a los estudiantes les gustó mucho pasar a completar el cuadro ellos mismos, algo que no teníamos planificado, y además no tuvieron inconvenientes en traducir el lenguaje coloquial de los ejemplos a expresión algebraica.

2.3.4 Primera tarea

Como trabajo para hacer fuera de clases, entregamos la Actividad 4 que se muestra a continuación en la Figura 2.12.

Actividad 4

La idea principal de esta actividad es hacer un seguimiento de tu proceso de aprendizaje y visualizar si surgen inconvenientes para luego trabajarlos en clase.

A. Unir con flechas (*¡Atención! puede haber más de una opción correcta)*

La diferencia entre siete y cuatro	z
Un número cualquiera más uno	x + 2
Un número disminuido en ocho	x + 1
Un número cualquiera	5 + 6 = 8 + 3
La suma de cinco y seis es igual a ocho aumentado en tres	7 - 4
Un número aumentado en dos	y - 8
El siguiente de un número	x

B. Encontrar el valor de la incógnita de la siguiente ecuación aplicando la propiedad uniforme *(Ayuda: podés representar la igualdad en el dibujo de la balanza)*

$$100 + 50 + 50 + 500 = x + 100 + 100$$

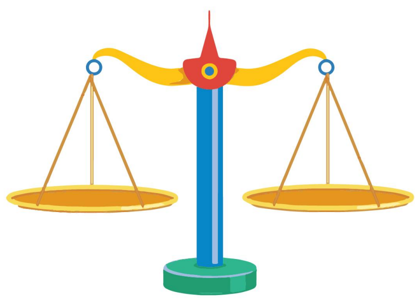


Figura 2.12: actividad de tarea

Esta actividad tenía dos objetivos diferenciados para cada inciso. Primero, proponer una primera actividad para la traducción del lenguaje coloquial al simbólico, mostrando que no hay una única respuesta correcta. Es decir, a veces existe más de una traducción del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa. Segundo, avanzar con la resolución de ecuaciones, tratando de despegarse cada vez más del uso de las balanzas y llevarlas a la abstracción matemática.

En la mayoría de las resoluciones de los estudiantes pudimos ver errores similares. Para el inciso A notamos que "el siguiente de un número" lo unían incorrectamente, y decidimos volver a trabajar esta generalización más adelante. Por otro lado, para el inciso B, los estudiantes obtenían el valor de la incógnita, pero no lo hacían aplicando la propiedad uniforme en la ecuación, si no simplemente reemplazando su valor y verificando si la igualdad era cierta. A continuación mostraremos algunas producciones de estudiantes. En la Figura 2.13 vemos el error más común del inciso A y en la Figura 2.14 y Figura 2.15 del inciso B.

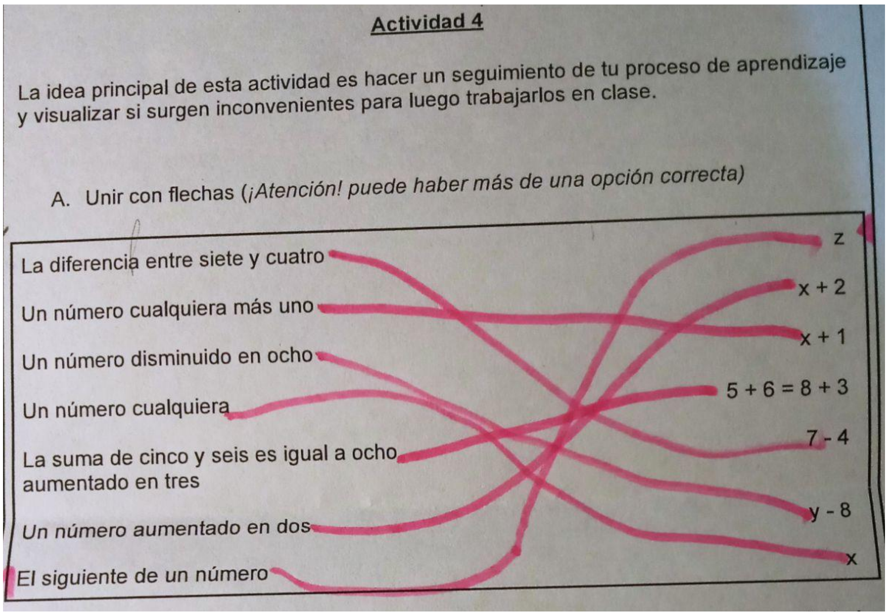


Figura 2.13: error más común de inciso A

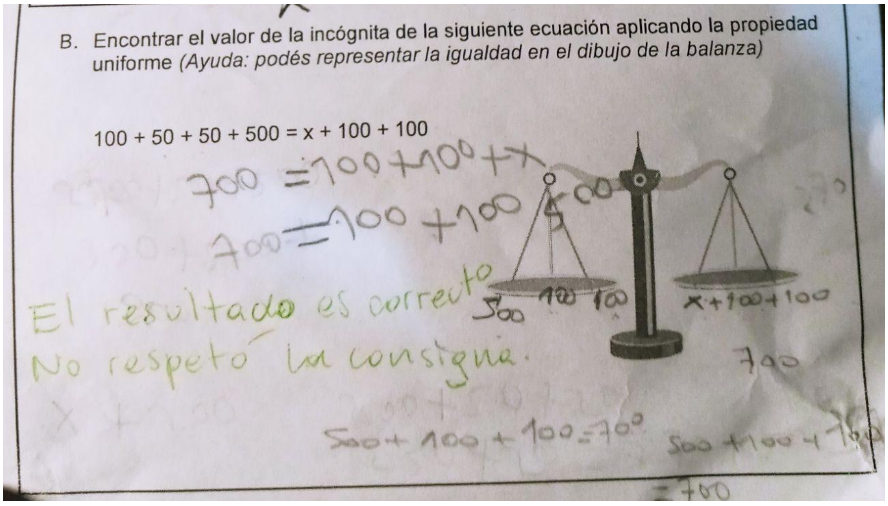


Figura 2.14: error más común en inciso B

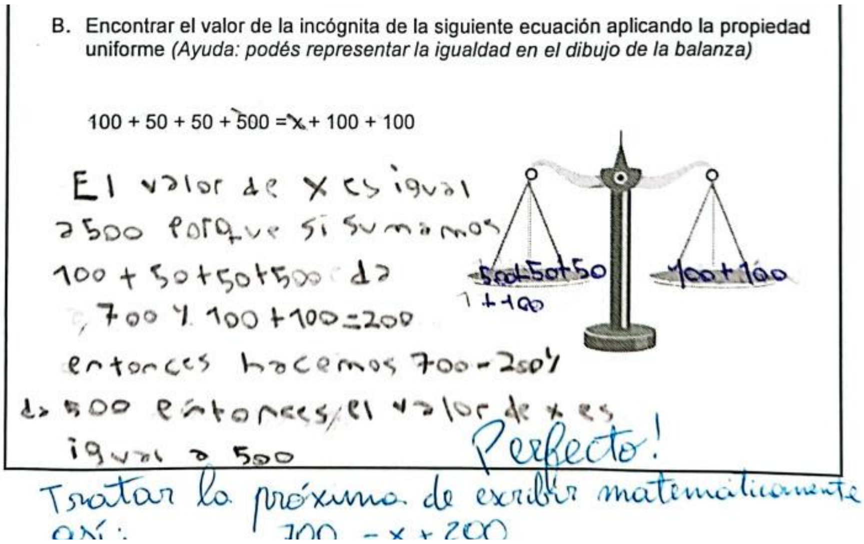


Figura 2.15: otras producciones para el inciso B

2.3.5 Resolución de ecuaciones en la abstracción matemática con la propiedad uniforme de la suma y la resta

Antes de comenzar la siguiente actividad, hicimos un pequeño repaso de lo visto anteriormente y resolvimos una ecuación a modo de ejemplo utilizando la propiedad uniforme de la suma y la resta. El objetivo, además de repasar, era llegar a un acuerdo en cuanto a la notación de las ecuaciones. Es decir hasta este momento solo habíamos trabajado con expresiones del tipo:

$$x + x + 35 + 75 = x + x + x + 35$$

Y queríamos lograr que los estudiantes construyeran una expresión como la siguiente:

$$2 \cdot x + 110 = 3 \cdot x + 35$$

Para ello hicimos preguntas como: ¿Se les ocurre otra forma de escribir esa expresión?, ¿Podemos sumar las x?. Aquí apelamos al uso contextualizado de las letras y al trabajo que realizamos con las balanzas. Nos referimos a pensar las letras x como si fueran “manzanas” o “pelotas” al igual que lo hacíamos con los objetos de la balanza cuyo peso era desconocido. Otra estrategia utilizada fue recurrir a la representación en metros. En las observaciones vimos que los estudiantes trabajaban en algunos problemas con expresiones como 50m refiriéndose a 50 metros y realizaban operaciones de la siguiente manera:

$$50m + 30m = 80m$$

Como los estudiantes tenían claro el uso de las letras en el contexto de las medidas, utilizamos este recurso. Nuestro objetivo era que los estudiantes lograran darse cuenta que:

$$x + x + x = 3x$$

Apelando a uso contextualizando con pelotas por ejemplo:

$$pelota + pelota + pelota = p + p + p = 3p$$

Una vez finalizado el repaso, y establecida la notación a partir de ahora en adelante, repartimos la Actividad 5 que se muestra en la Figura 2.16. El objetivo de esta actividad era lograr que los estudiantes resuelvan ecuaciones en la abstracción matemática, sin la necesidad de recurrir a las balanzas.

En esta actividad, nuestra finalidad era incrementar gradualmente la dificultad de las ecuaciones. Comenzamos en el inciso A donde solo hay que utilizar la propiedad uniforme de la resta para su resolución, donde se puede hacer una clara referencia a las balanzas teniendo únicamente las operaciones de suma. Luego, en el inciso B, ampliamos la dificultad al incorporar la propiedad uniforme de la suma y de la resta. En la ecuación del inciso C incorporamos números racionales. En este punto destacamos que el valor de $x = 0$ era un resultado posible, lo cual llamó la atención de los estudiantes, ya que en algunos casos pensaban que eso no podía suceder. Finalmente, en el D, está presente la propiedad uniforme de la resta junto con números racionales, y la x queda del lado derecho de la igualdad.

Actividad 5

Hallar el valor de x

A. $3 \cdot x + 20 = 2 \cdot x + 90$

B. $7 \cdot x - 3 \cdot x - 5 = 3 \cdot x + 11$

C. $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

D. $x + \frac{3}{4} = 2 \cdot x - \frac{1}{8}$

Figura 2.16: Actividad 5

La actividad estaba planificada para 20 minutos, pero finalmente duró 45 minutos. En esta actividad comenzaron algunos inconvenientes con los signos. Es decir cuando los estudiantes querían aplicar la propiedad uniforme en el punto A por ejemplo, algunos restaban 90 a ambos lados de la ecuación. El inconveniente aquí era que, al trabajar solo con números positivos ellos no podían efectuar la operación $20 - 90$, ya que les daba como resultado un número negativo. En otros casos, como por ejemplo en el punto B en donde la ecuación tenía el número cinco con un signo negativo delante, los estudiantes restaban cinco a ambos lados de la igualdad en vez de sumarlo. Creemos que esto sucedía porque ellos no tenían la noción del inverso aditivo.

A continuación mostraremos algunas producciones en el pizarrón de los estudiantes.

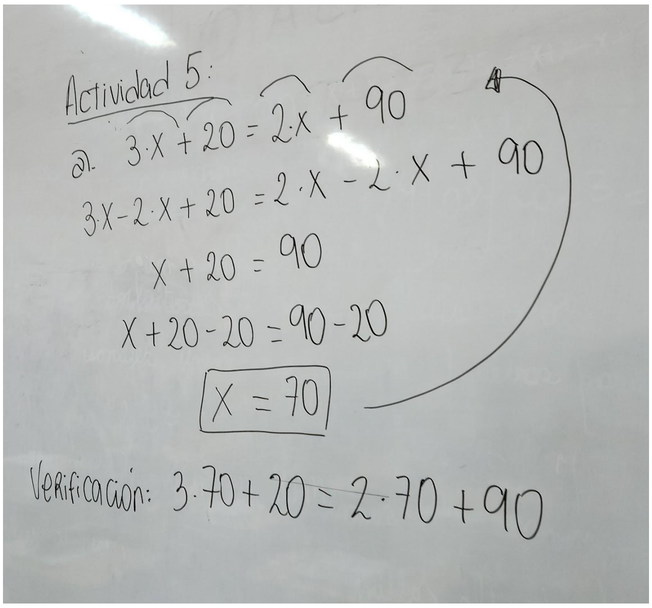


Figura 2.17: ejemplo de resolución de la Actividad 5 en el pizarrón

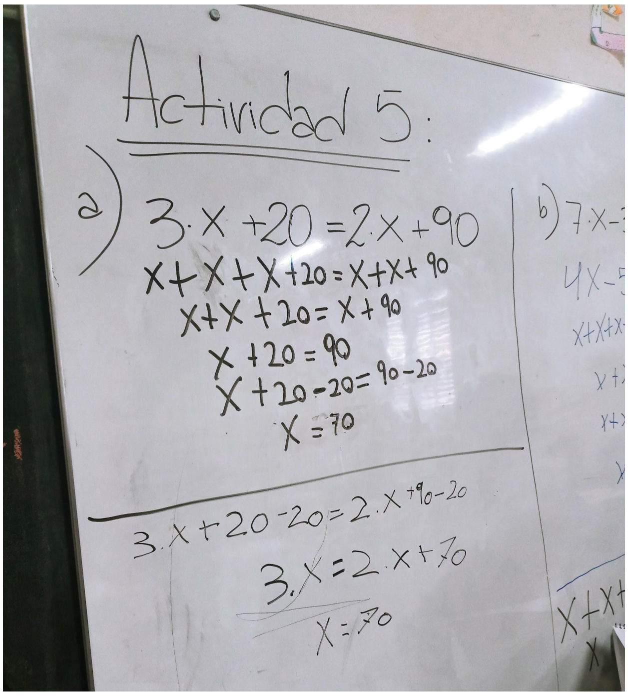


Figura 2.18: producciones del inciso a) de la Actividad 5 en el pizarrón

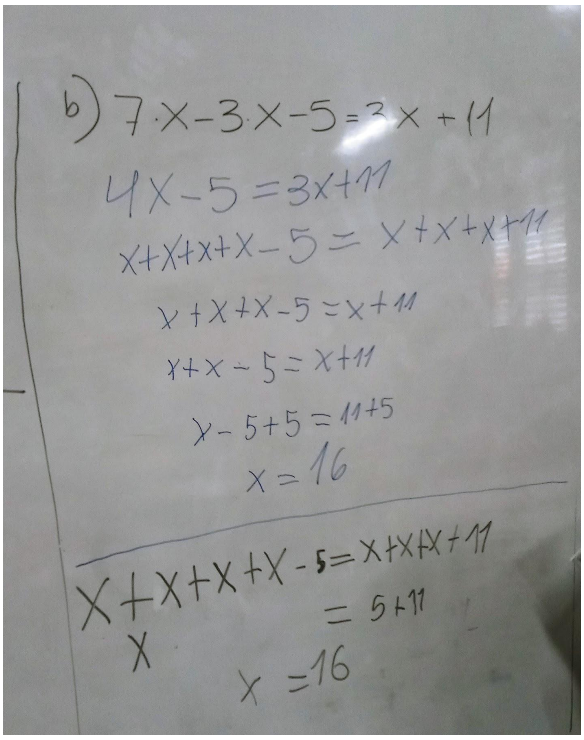


Figura 2.19: producciones del inciso b) de la Actividad 5 en el pizarrón

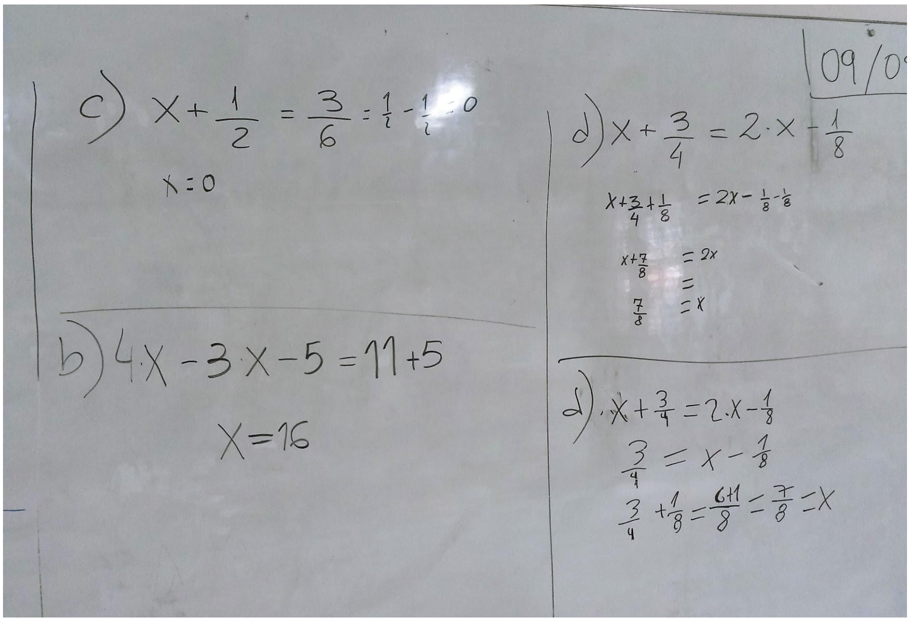


Figura 2.20: producciones del inciso b), c) y d) de la Actividad 5 en el pizarrón

2.3.6 Introducción a la propiedad uniforme de la multiplicación y la división en la abstracción matemática

El objetivo principal era introducir la propiedad uniforme de la multiplicación y la división, a través de la resolución concreta con ecuaciones. Para esta etapa propusimos la resolución de ecuaciones del tipo:

$$a \cdot x = b$$

Este conjunto de ecuaciones puede resolverse a partir de la relación entre la multiplicación y la división. El objetivo de esta actividad era debatir las distintas formas de resolución y hacer una introducción a la propiedad uniforme de la multiplicación y la división.

Repartimos fotocopias con la Actividad 6 que muestra la Figura 2.21.

<u>Actividad 6</u>

Resolver la siguientes ecuaciones:

A. $4 \cdot x = 152$

B. $\frac{x}{18} = 15$

C. $\frac{1512}{x} = 36$

Figura 2.21: Actividad 6

La actividad estaba planificada para durar 15 minutos y eso fue lo que duró. Cabe destacar que esta actividad fue muy productiva, surgieron distintas formas de resolver. Logramos evidenciar el objetivo de la actividad, que detrás de todas estas estrategias de resolución estaban presente la propiedad uniforme del producto y la división. Se muestra en la Figura 2.22 el pizarrón de la puesta en común.

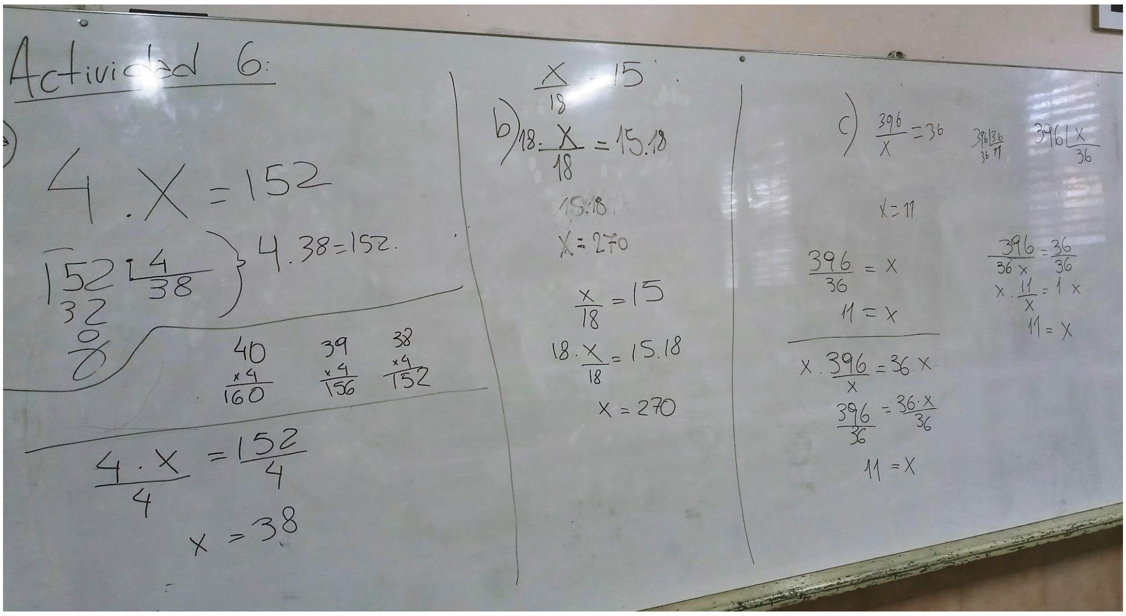


Figura 2.22: producciones de la Actividad 6 en el pizarrón

Luego escribimos en el pizarrón las definiciones de las propiedades de la siguiente manera:

<u>*Propiedad uniforme del producto*</u>

Para que se mantenga la igualdad si multiplico por un valor a un lado de la igualdad, le debo multiplicar por el mismo valor al otro lado de la igualdad.

<u>*Propiedad uniforme de la división*</u>

Para que se mantenga la igualdad si divido por un valor a un lado de la igualdad, debo dividir por el mismo valor al otro lado de la igualdad.

<u>*¡Atención!*</u> *El valor por el que multiplico o divido nunca puede ser cero.*

2.3.7 Lenguaje coloquial y simbólico con multiplicación y división

Para introducir el lenguaje coloquial y simbólico de la multiplicación y división escribimos dos ejemplos en el pizarrón y preguntamos formas de traducirlo al lenguaje coloquial. Luego completamos entre todos el cuadro de lenguaje coloquial y simbólico con estas operaciones que faltaban. El mismo, quedó de la siguiente manera como lo muestra la Figura 2.23.

Lenguaje coloquial	**Operación**	**Lenguaje simbólico**	**Ejemplo**
agregar sumar aumentar	Suma	+	si le sumo cinco a un número --> x + 5
quitar sustraer diferencia disminuir restar	Resta	-	la diferencia entre un número y dos --> x - 2
producto multiplicar el doble de…	Multiplicación	·	el triple de un número --> $3 \cdot x$
cociente dividir la … parte de …	División	:	la tercera parte de doce --> $12 : 3$

Figura 2.23: cuadro de lenguaje coloquial y simbólico completo

2.3.8 Situaciones problemáticas intra-matemáticas

Para iniciar con situaciones problemáticas hicimos una selección que consideramos pertinentes para el desarrollo paulatino del aprendizaje de los estudiantes. Se nos sugirió que modificáramos el orden, y el que quedó es el que presentamos a continuación. Comenzamos con la Actividad 7 que muestra la Figura 2.24.

Actividad 7

Resolver las siguientes situaciones, registrar en el cuaderno cómo fue tu razonamiento.

A. El producto entre un número y 8 es 96 ¿Cuál es ese número?
B. Martina pensó un número que al sumarle 3 y multiplicarlo por 6 le dio 150 ¿Qué número pensó Martina?

Figura 2.24: Actividad 7

Esta actividad estaba planificada para 15 minutos y se desarrolló en los tiempos planificados. El objetivo de esta actividad era trabajar la relación del lenguaje coloquial y el lenguaje simbólico, a través del planteo de una ecuación en una situación problemática concreta. En esta actividad tuvimos algunos inconvenientes con las consignas ya que no aclaramos que debían plantear la ecuación y luego resolverla, aunque posteriormente lo agregamos. Los estudiantes en algunos casos iban probando con números hasta obtener el resultado correcto.

Queremos evidenciar que en el punto B introdujimos la propiedad distributiva por primera vez. En este caso notamos que algunos estudiantes que sí plantearon la ecuación, no aplicaron el paréntesis que sugiere el enunciado del problema. A raíz de este error, observamos dos modalidades de resolución: algunos estudiantes operaban normalmente sin considerar el paréntesis, mientras que otros operaban como si estuviera presente. Por último queremos mencionar que en el curso de 1^{ro} A se nos indicó que no trabajemos con la propiedad distributiva, pues teníamos menor cantidad de tiempo para dar los contenidos. Por lo tanto el inciso B de la actividad se modificó de la siguiente manera: Martina pensó un número que al multiplicarlo por 6 y sumarle 3 le dio 45 ¿Qué número pensó Martina?. En la Figura 2.25 mostraremos resoluciones en el pizarrón corregidas.

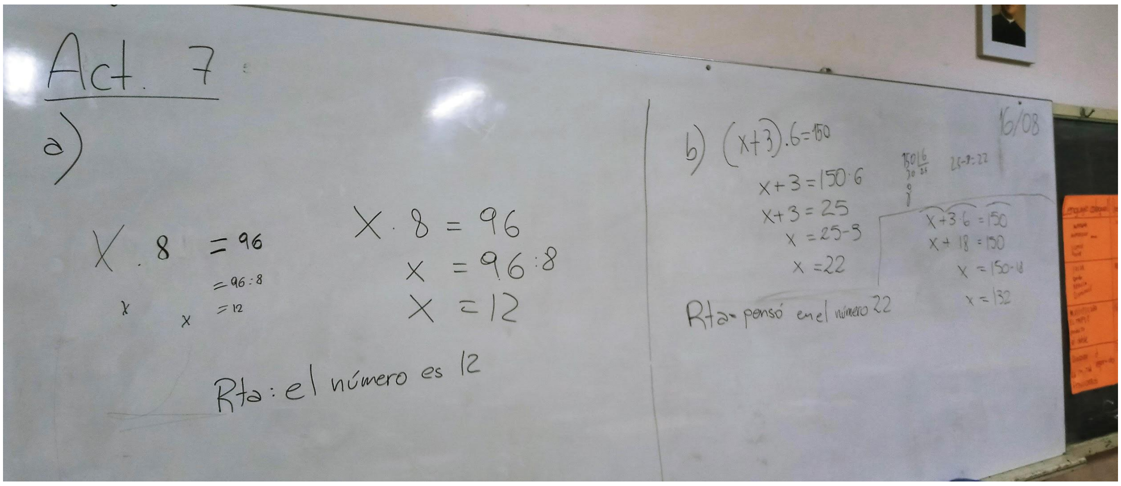


Figura 2.25: producciones de la Actividad 7 en el pizarrón

Luego de la puesta en común entregamos la Actividad 8 que muestra la Figura 2.26. El objetivo era continuar trabajando con situaciones problemáticas intra-matemáticas, un poco más complejas. Destinamos 30 minutos para que las resuelvan en grupos de a dos o tres, pero la actividad duró 80 minutos.

Actividad 8

Plantea y resuelve la ecuación para responder la pregunta de las siguientes situaciones problemáticas.

A. La suma de tres números consecutivos es 219. ¿Cuáles son esos números?
B. La mitad de la suma entre un número y el triple del mismo número es igual a 18 ¿Cuál es ese número?
C. El doble de un número más cinco es igual a la diferencia del triple del mismo número más uno ¿Cuál es el número?

Figura 2.26: Actividad 8

En este tipo de situaciones problemáticas notamos que los estudiantes tenían dificultades para comprender algunos de los enunciados. En las actividades anteriores relacionadas con la traducción de lenguaje coloquial y simbólico, ya habíamos observado que tenían inconvenientes para simbolizar expresiones como “el siguiente de un número” o “el anterior a un número”. En el caso del punto A de la Actividad 8, volvimos a encontrarnos con esta dificultad, a pesar de que lo habíamos explicado repetidas veces.

Debido a esta dificultad que presentaron los estudiantes, decidimos cambiar los enunciados de las actividades para el otro curso. La Actividad 8 modificada se muestra en la Figura 2.27. Este cambio fue muy significativo, ya que los estudiantes no se mostraron confundidos con las consignas y pudieron resolver sin problemas. Esta actividad la resolvieron en 50 minutos.

Actividad 8

A. Hallar tres números consecutivos tal que su suma sea 219. ¿Cuáles son esos números?
B. Hallar el número tal que si sumamos su mitad y su triple y lo dividimos por cuatro obtenemos 14. ¿Cuál es ese número?
C. ¿Cuál es el número que al sumarle cinco a su doble, es igual a la diferencia entre su triple y uno?

Figura 2.27: Actividad 8

Se muestra a continuación en la Figura 2.28 las resoluciones en el pizarrón.

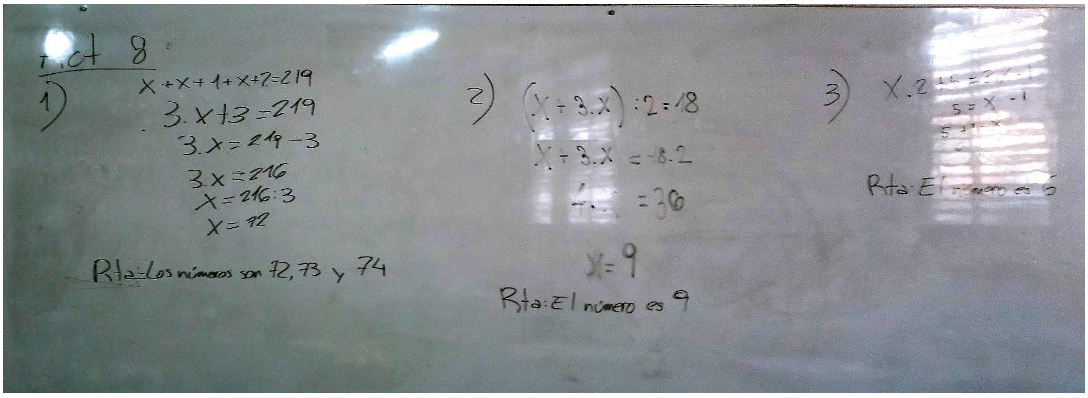


Figura 2.28: producciones de la Actividad 8 en el pizarrón

2.3.9 Segunda tarea

Les entregamos a los estudiantes la siguiente actividad que se muestra en la Figura 2.29 para que hagan de tarea en sus casas.

<u>Actividad de tarea</u>

Nombre:____

- Joaquín cometió algún error al resolver la ecuación. Marcarlo y resuelve correctamente.

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x + 21 &= 171 \\
x + 21 &= 171:3 \\
x + 21 &= 57 \\
x &= 36
\end{aligned}
$$

- Plantea la ecuación correspondiente y resuelve la siguiente situación problemática.

José está vendiendo rifas para el centro de estudiantes. Cada rifa cuesta $1000 y ya vendió ocho rifas. Si quiere juntar trece mil pesos ¿cuántas rifas le falta vender para llegar a esa cantidad?

Figura 2.29: Segunda tarea

Esta actividad tenía dos objetivos diferenciados en los dos incisos. Primero, trabajar la propiedad uniforme, mostrando un error común en la resolución de ecuaciones. Segundo, introducir las situaciones problemáticas extra-matemáticas, donde puedan plantear una ecuación y resolverla, para responder una situación de la vida real.

Notamos en esta actividad un gran avance de los estudiantes, ya que la gran mayoría resolvieron correctamente la actividad respetando la consigna, a diferencia de la tarea anterior. A continuación mostraremos algunas producciones de los estudiantes:

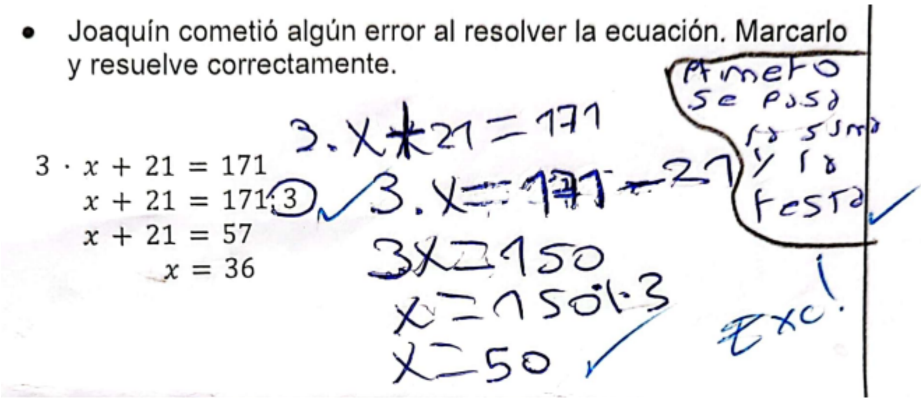


Figura 2.30: producción más común de los estudiantes en el inciso A

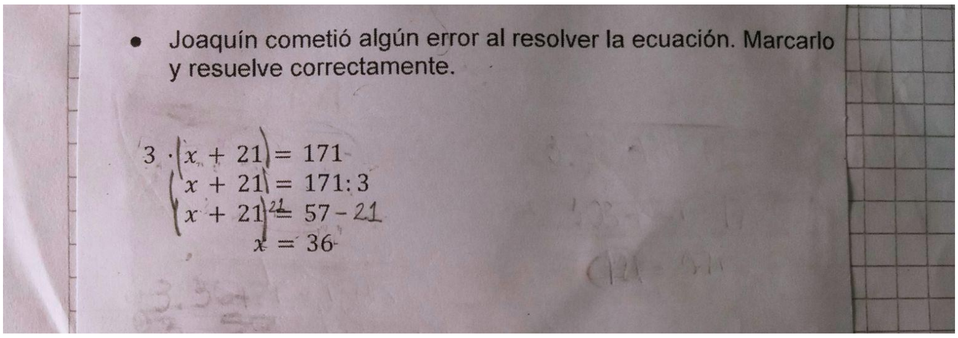


Figura 2.31: producción de estudiante del inciso A

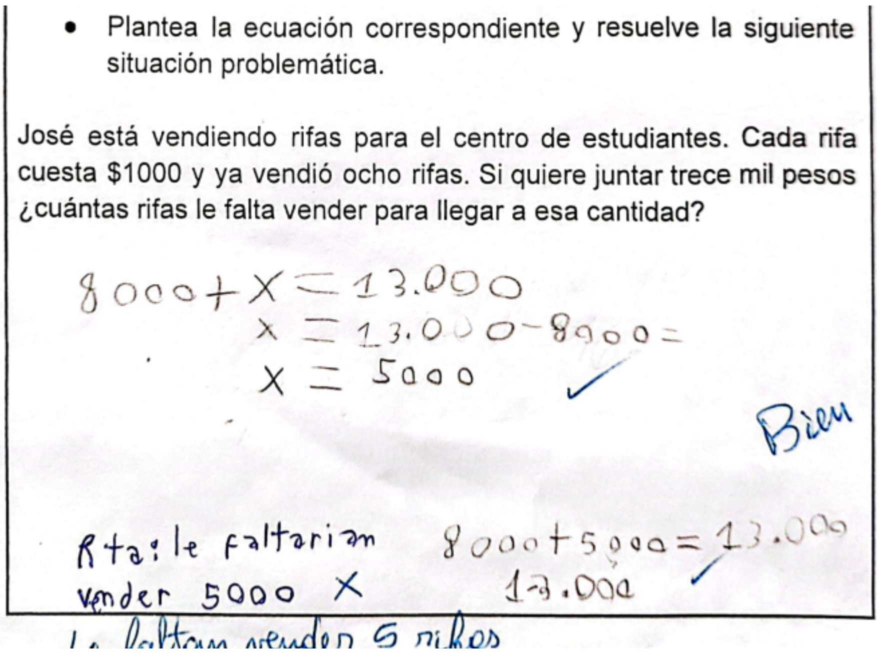
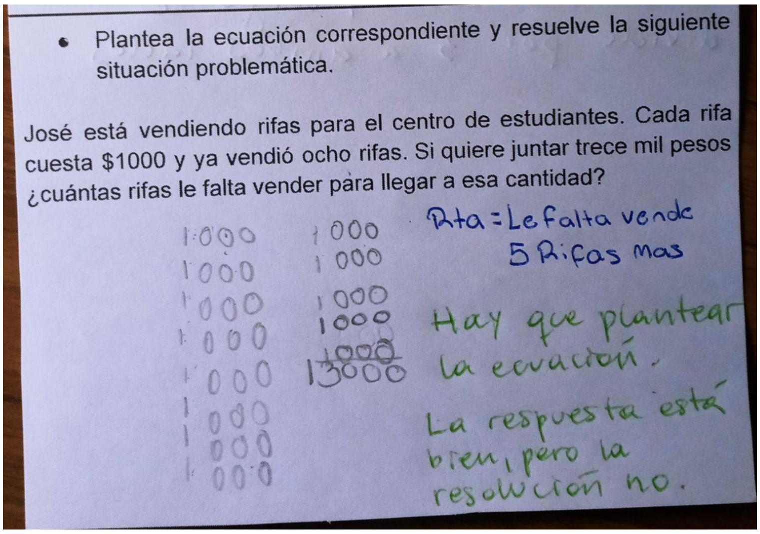


Figura 2.32: producción más común de los estudiantes en el inciso B



- Plantea la ecuación correspondiente y resuelve la siguiente situación problemática.

José está vendiendo rifas para el centro de estudiantes. Cada rifa cuesta $1000 y ya vendió ocho rifas. Si quiere juntar trece mil pesos ¿cuántas rifas le falta vender para llegar a esa cantidad?

1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000

1000
1000
1000
1000
1000
13000

Rta = Le falta vende 5 Rifas mas

Hay que plantear la ecuación.

La respuesta está bien, pero la resolución no.

Figura 2.33: producción de estudiante del inciso B

2.3.10 Situaciones problemáticas extra-matemáticas

Luego del trabajo con situaciones problemáticas intra-matemáticas, comenzamos con las extra-matemáticas. La primera es la Actividad 9 que se muestra en la Figura 2.34. Para la misma destinamos 15 minutos, pero en realidad tardaron 10 minutos.

<u>Actividad 9</u>

Plantea y resuelve la ecuación para responder la pregunta de la siguiente situación problemática.

- Martín junto a tres amigos fueron a un recital de Duki. El papá de Martín compró todas las entradas y les pidió a los tres amigos que le devolvieran cada uno su parte. Si entre los tres amigos juntaron $20000 y él les devolvió $410 en total ¿Cuánto costaba cada entrada?

Figura 2.34: Actividad 9

El objetivo principal era lograr traducir en una ecuación y resolverla. Les pedimos que trabajen de a dos con el fin de que, a través del debate, intenten construir una ecuación que represente la situación problemática. Queremos destacar que en esta actividad desde el comienzo los estudiantes estuvieron muy motivados por el contexto. Nos parece importante resaltarlo ya que no había sucedido desde el trabajo con las computadoras. Además la mayoría no presentó inconvenientes para plantear la ecuación y resolverla. En la Figura 2.35 y Figura 2.36 mostramos las resoluciones en el pizarrón.

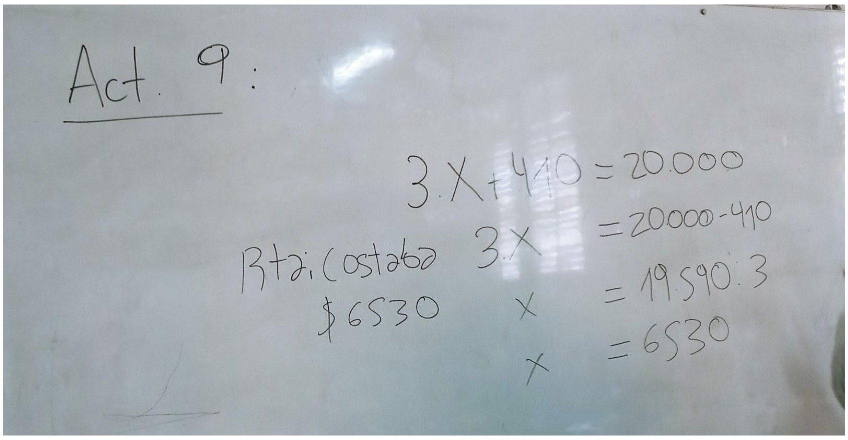


Figura 2.35: producciones de la Actividad 9 en el pizarrón

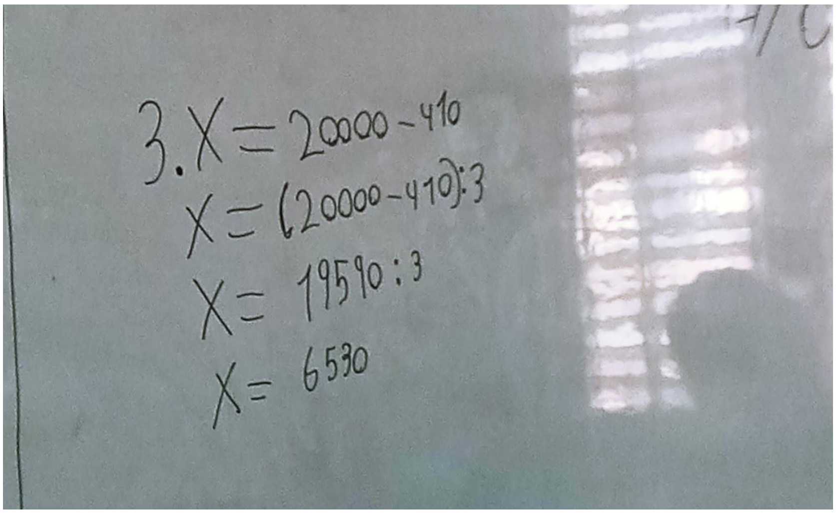


Figura 2.36: otras producciones de la Actividad 9 en el pizarrón

La siguiente fue la Actividad 10 que se muestra en la Figura 2.37. Si bien destinamos 15 minutos para su resolución, en la práctica nos llevó 30 minutos. El objetivo es el mismo que el de la actividad anterior, pero queríamos incorporar la propiedad distributiva.

Actividad 10

Plantea y resuelve la ecuación para responder la pregunta de las siguientes situaciones problemáticas.

a) Si dentro de 10 años Martín tendrá el triple de la edad que tiene ahora, ¿qué edad tendrá entonces?

b) Si dentro de 15 años Gonzalo tendrá el doble de edad que la que tenía hace 5 años, ¿qué edad tiene ahora?

Figura. 2.37: Actividad 10

Al contrario de la Actividad 9, los estudiantes nuevamente volvieron a tener inconvenientes con la comprensión de los enunciados. Creemos que esto fue porque el problema, aunque hacía referencia a la realidad, estaba dado en un contexto que no sucede en la vida real. A los estudiantes les costaba mucho entender que “dentro de 10 años” hacía referencia a una suma, y que “hace 5 años” hacía referencia a una resta. En la Figura 2.38 y 2.39 se ven las producciones en el pizarrón.

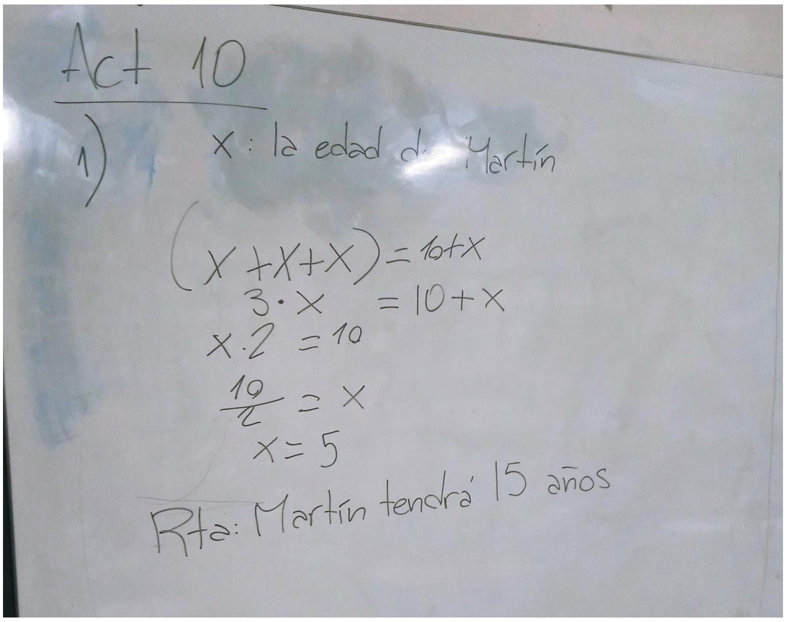


Figura 2.38: producciones de los estudiantes del inciso 1 de la Actividad 10 en el pizarrón

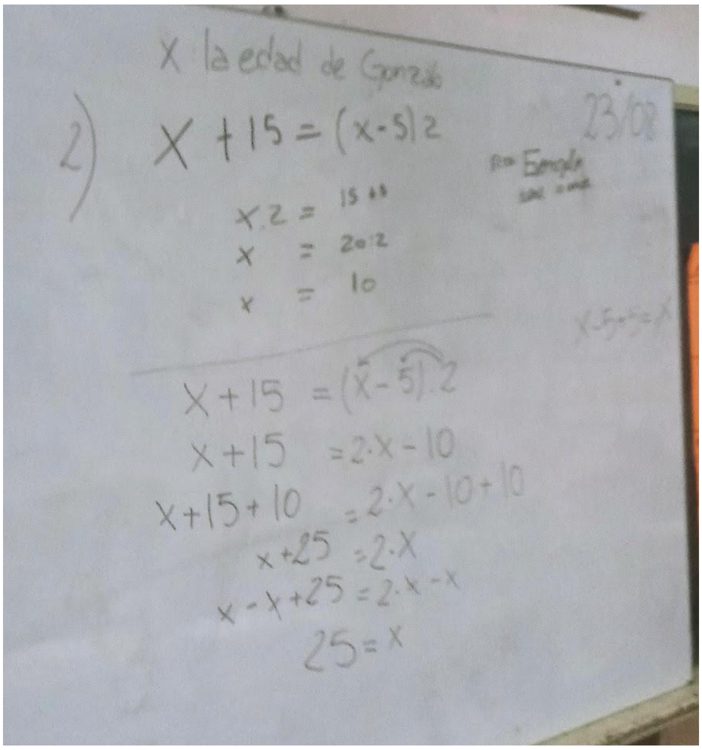


Figura 2.39: producciones de los estudiantes del inciso 2 de la Actividad 10 en el pizarrón

2.3.11 Repaso

Una vez finalizadas todas las actividades, para la clase previa a las evaluaciones, realizamos un repaso, que fue distinto para cada curso. Esta decisión fue debido a que las evaluaciones debian tomarse en la misma semana y dos de los cursos tuvieron menos horas de clases por feriados o días festivos de la institución. La formulación de las actividades de repaso tenían ejercicios semejantes a los que tendría la evaluación. Aunque no lo comunicamos explícitamente a los estudiantes, fue una decisión que tomamos con el propósito de tomar una evaluación coherente con lo trabajado en las clases.

El repaso que aparece en la Figura 2.40 corresponde a 1ro A que fue el curso con menos horas. Cabe destacar que en la Actividad 2 a los estudiantes les costó comprender que había que hacer, por lo que decidimos cambiarla para los cursos siguientes.

Repaso evaluación:

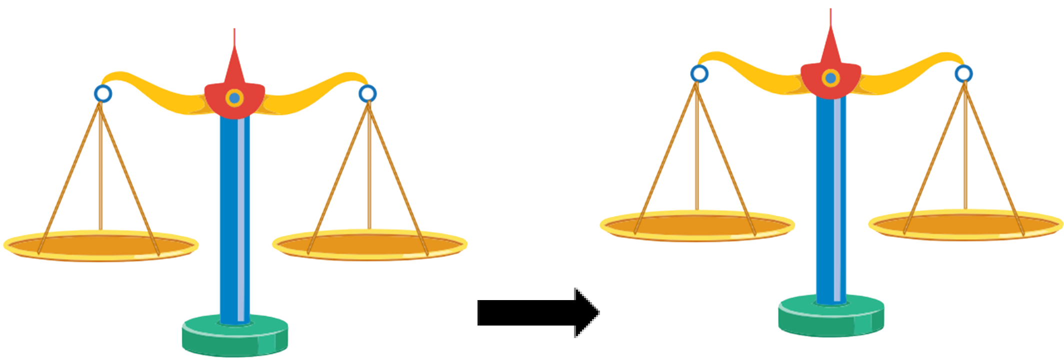
Actividad 1:

Unir con flechas la opción correcta

A.	La suma entre dos números es trece	$x + 1$
B.	La diferencia entre un número y su mitad	$\frac{x}{4} + 1$
C.	El siguiente de la cuarta parte de un número	$x - \frac{x}{2}$
D.	El siguiente de un número	$a + b = 13$

Actividad 2:

En las siguientes balanzas, ilustra un ejemplo de la propiedad uniforme de la resta.



Balanza inicial **Balanza final**

Actividad 3:

Hallar el valor de la incógnita aplicando la propiedad uniforme

A. $12x = 33$
B. $3 \cdot x - 2 = 2x + 11$
C. $2 \cdot x + 5 = 6$

Actividad 4:

Plantear la ecuación y resolver la siguiente situación problemática:

A. Hallar tres números consecutivos tal que su suma sea 219. ¿Cuáles son esos números?

Figura 2.40: repaso 1^{ro} A

El repaso de la Figura 2.41 corresponde a 1ro C que fue el segundo curso con menos horas.

Repaso evaluación:

Actividad 1:

Unir con flechas la opción correcta

El triple de la diferencia entre nueve y cinco	$x - 1$
La suma entre dos números es trece	$3 \cdot (9 - 5)$
La mitad del siguiente de un número	$\frac{x}{4} + 1$
La diferencia entre un número y su quinta parte	$a + b = 13$
El siguiente de la cuarta parte de un número	$x - \frac{x}{5}$
El anterior de un número	$(x + 1) : 2$

Actividad 2:

Escribir la propiedad utilizada en cada paso

$$x - 7 = \frac{1}{2} \cdot x$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot x + 7$$
$$\frac{1}{2} \cdot x = 7$$
$$x = 14$$

Actividad 3:

Resolver las siguientes ecuaciones:

A. $5 \cdot x - 7 = 4x + 12$
B. $2 \cdot x + 5 = 6$
C. $(x + 3) : 2 = 12$

Actividad 4:

Plantear y resolver la ecuación para responder la siguiente situación problemática.

Martín junto a tres amigos fueron a un recital de Duki. El papá de Martín compró todas las entradas y les pidió a los tres amigos que le devolvieran cada uno su parte. Si entre los tres amigos juntaron $20000 y él les devolvió $410 en total ¿Cuánto costaba cada entrada?

Figura 2.41: repaso 1ro C

El repaso de la Figura 2.42 corresponde al 1ro B.

<u>Repaso evaluación:</u>

<u>Actividad 1:</u>

Unir con flechas la opción correcta

El triple de la diferencia entre nueve y cinco	$x - 1$
La suma entre dos números es trece	$3 \cdot (9 - 5)$
La mitad del siguiente de un número	$\frac{x}{4} + 1$
La diferencia entre un número y su quinta parte	$a + b = 13$
El siguiente de la cuarta parte de un número	$x - \frac{x}{5}$
El anterior de un número	$(x + 1) : 2$

<u>Actividad 2:</u>

Escribir la propiedad utilizada en cada paso

$$x - 7 = \frac{1}{2} \cdot x$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot x + 7 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} \cdot x = 7 \Rightarrow$$
$$x = 14 \Rightarrow$$

<u>Actividad 3:</u>

Resolver las siguientes ecuaciones:

A. $5 \cdot x - 7 = 4x + 12$

B. $2 \cdot x + 5 = 6$

C. $(x + 3) : 2 = 12$

<u>Actividad 4:</u>

Plantear y resolver la ecuación para responder la siguiente situación problemática.

A. Pedrito compró una pelota de fútbol y pagó tres quintas partes del precio de la pelota. Al día siguiente fue a retirarla y pagó los $5000 restantes. ¿Cuál es el precio de la pelota?

B. Hallar dos números consecutivos tales que la tercera parte de la suma es 15 ¿Cuáles son esos números?

Figura 2.42: repaso 1ro B

2.4 La evaluación

Decidimos realizar dos tipos de evaluaciones, una formativa y otra sumativa. Nuestra idea principal era hacer un seguimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes a través de las tareas entregadas. Surgieron inconvenientes no previstos, por lo que no pudimos hacer las tareas como un seguimiento de su proceso, pues había estudiantes que no las entregaban, o que las hacían con sus padres o maestras particulares. Finalmente solo desarrollamos una evaluación sumativa, e incrementamos el porcentaje de la nota final teniendo en cuenta las tareas entregadas por los estudiantes.

Las evaluaciones fueron individuales y escritas, y se realizaron durante 80 minutos. Todos los cursos tenían la Actividad 1 y Actividad 2 iguales. Mientras que para la Actividad 3 y 4, el curso de 1^{ro} A tenían ecuaciones y situaciones problemáticas distintas, ya que al tener menos cantidad de clases llegaron a ver menos contenidos. Tomamos esta decisión pues queríamos evaluar actividades similares a las trabajadas en clases.

En la siguiente Figura 2.43 podremos ver la evaluación realizada en 1^{ro} A, y en la Figura 2.44 la evaluación realizada en 1^{ro} B y 1^{ro} C.

<u>Evaluación 1º A</u>

Nombre:____

Criterios de evaluación: interpretación de consigna, traducción del lenguaje coloquial a simbólico y viceversa, identificar la propiedad uniforme utilizada, procedimiento y resultado correcto en la resolución de ecuaciones, planteo de las ecuaciones.

<u>Actividad 1:</u>

Unir con flechas (*¡Atención! puede haber más de una opción correcta)*

A.	Un número aumentado en cinco	$5 \cdot x$
B.	Dos veces un número	$2 \cdot x$
C.	El quíntuple de un número	$\frac{2 \cdot 5}{3}$
D.	La suma entre dos números desconocidos	$x + 5$
E.	La tercera parte del doble de cinco	$a + b$
		$x + x$

<u>Actividad 2:</u>

Escribir la propiedad utilizada en cada paso

$$2 \cdot x + 7 = 9$$
$$2 \cdot x + 7 - 7 = 9 - 7 \quad \Rightarrow$$
$$2 \cdot x = 2$$
$$(2 \cdot x) : 2 = 2 : 2 \quad \Rightarrow$$
$$x = 1$$

<u>Actividad 3:</u>

Hallar el valor de la incógnita aplicando la propiedad uniforme. Verificar el resultado.

A. $3 \cdot x + 20 = 2 \cdot x + 90$

B. $\frac{x}{22} = 7$

C. $4 \cdot x - 9 = 27$

<u>Actividad 4:</u>

Plantear la ecuación y resolver la siguiente situación problemática:

A. El resultado de la división entre un número y tres es dieciséis ¿cuál es el número?

B. El doble de un número más uno es igual a setenta y tres ¿cuál es el número?

Figura 2.43: Evaluación 1ro A

Evaluación 1º B

Nombre:____

Criterios de evaluación: interpretación de consigna, traducción del lenguaje coloquial a simbólico y viceversa, identificar la propiedad uniforme utilizada, procedimiento y resultado correcto en la resolución de ecuaciones, planteo de las ecuaciones.

Actividad 1:
Unir con flechas (***¡Atención!*** *puede haber más de una opción correcta)*

Un número aumentado en cinco	$5 \cdot x$
Dos veces un número	$2 \cdot x$
El quíntuple de un número	$\frac{2 \cdot 5}{3}$
La suma entre dos números desconocidos	$x + 5$
La tercera parte del doble de cinco	$a + b$
	$x + x$

Actividad 2:
Escribir la propiedad utilizada en cada paso

$$2 \cdot x + 7 = 9$$
$$2 \cdot x + 7 - 7 = 9 - 7 \quad \Rightarrow$$
$$2 \cdot x = 2$$
$$(2 \cdot x) : 2 = 2 : 2 \quad \Rightarrow$$
$$x = 1$$

Actividad 3:
Resolver las siguientes ecuaciones:

A. $2 \cdot x + \frac{1}{4} = x + \frac{3}{4}$

B. $(x + 2) : 4 = 8$

C. $x : 3 + 5 = 17$

Actividad 4:
Plantear y resolver la ecuación para responder las siguientes situaciones problemáticas.

a) El doble de un número aumentado en 5 es igual al triple del mismo número disminuido en 3 ¿Cuál es ese número?

b) Ezequiel compró 3 empanadas y pagó con 1800 pesos, el vuelto fue de 60 pesos. ¿Cuánto sale cada empanada?

c) Valentino dejó su auto en el estacionamiento por 4 horas. Pagó a la salida con \$3000 y le devolvieron \$200. ¿Cuánto cuesta la hora en el estacionamiento?

Figura 2.44: Evaluación 1ro B y C

Le asignamos a cada actividad un porcentaje, lo que nos permitió ser equitativos y objetivos a la hora de corregir. La Actividad 1 valía 24%, por lo que cada flecha que tenían que unir valía un 2%. Luego, la Actividad 2, valía 16% en total, por lo que completar cada espacio en blanco valía 8%. La Actividad 3, valía 30%, es decir, cada correcta resolución de ecuaciones valía 8% y su verificación un 2%. Por último, la Actividad 4 valía un 30% en total. Para el curso de 1ro A, como solo tenían dos situaciones problemáticas, cada una valía 15%, mientras que para 1ro B y C, cada una valía 10%.

En los siguientes gráficos mostraremos las notas obtenidas por curso

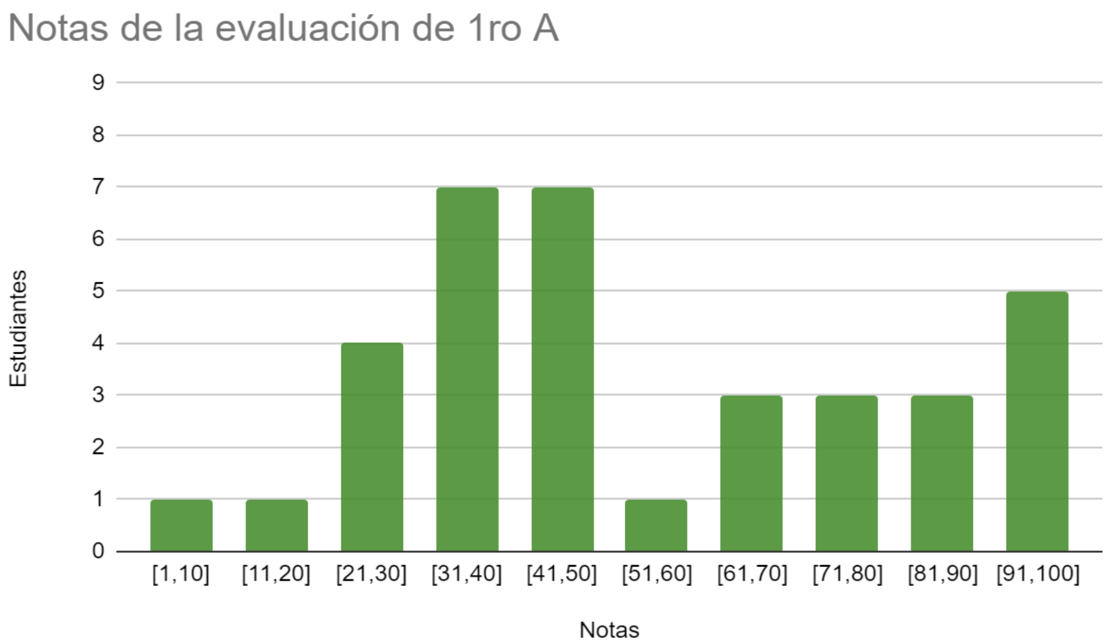


Figura 2.45: Notas obtenidas en evaluaciones en 1ro A

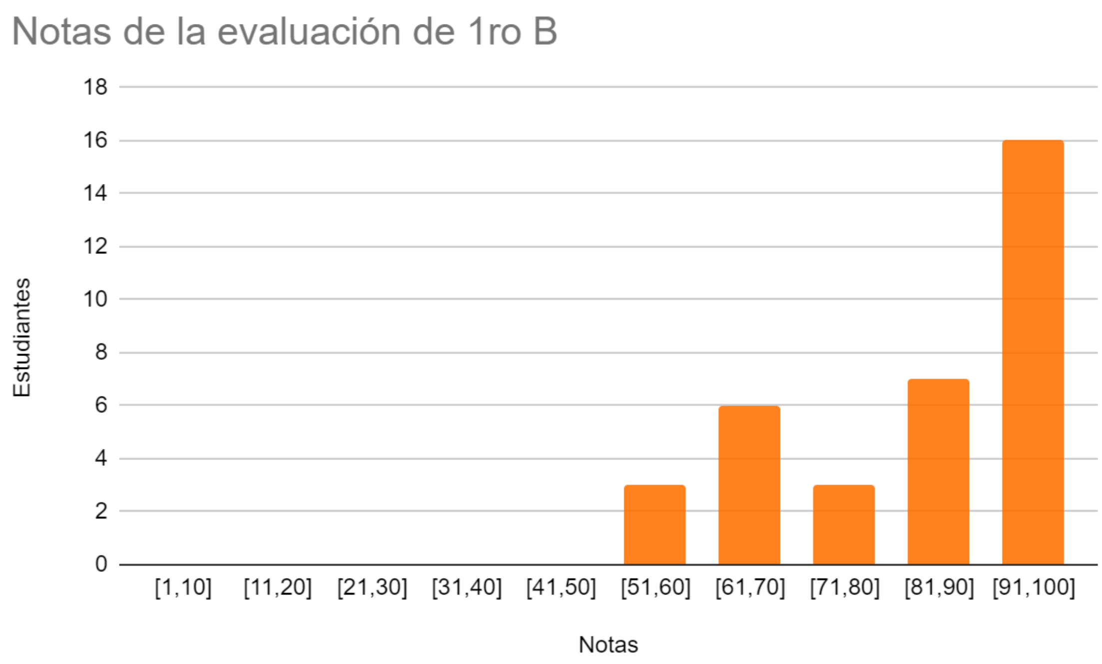


Figura 2.46: Notas obtenidas en evaluaciones en 1ro B

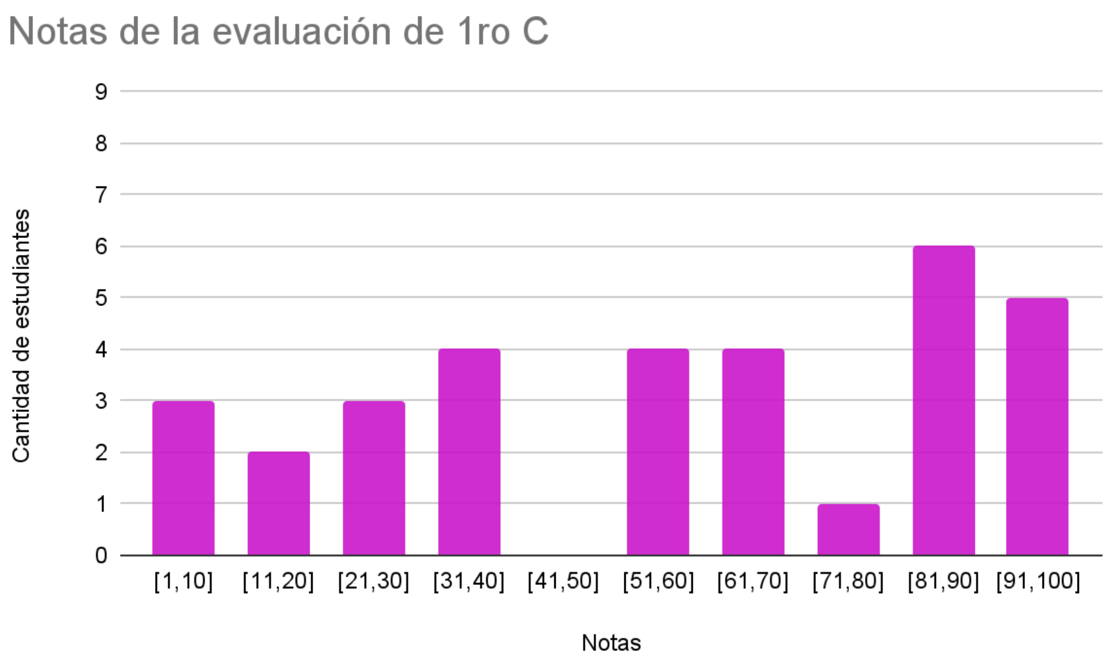


Figura 2.47: Notas obtenidas en evaluaciones en 1ro C

En los siguientes gráficos mostraremos la cantidad de aprobados, desaprobados y ausentes por cursos.

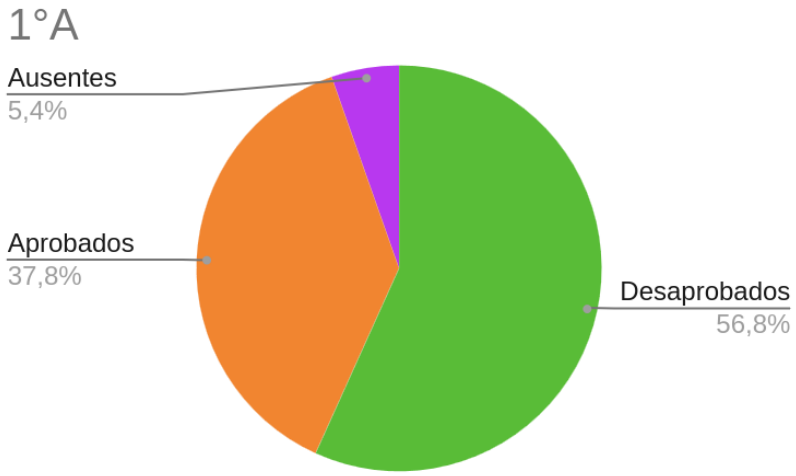


Figura 2.48: Porcentajes de estudiantes aprobados y desaprobados en 1ro A

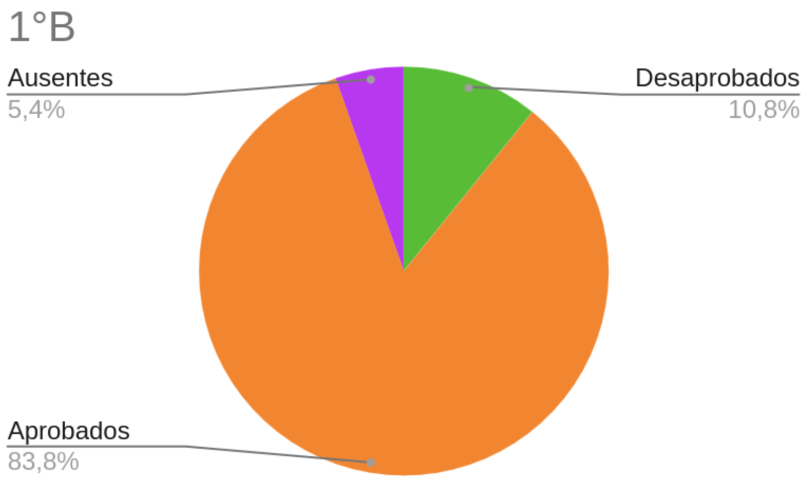


Figura 2.49: Porcentajes de estudiantes aprobados y desaprobados en 1ro B

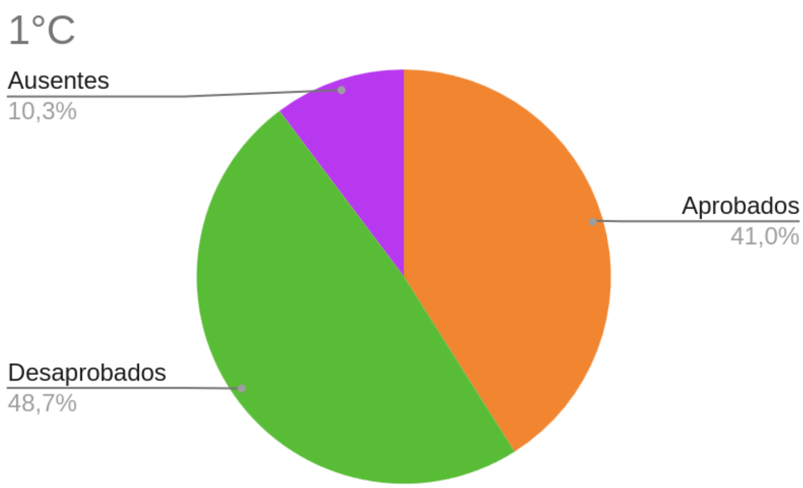


Figura 2.50: Porcentajes de estudiantes aprobados y desaprobados en 1ro C

Cabe destacar que los estudiantes aprobaban con 60% o más. Además, queremos mencionar que los estudiantes tenían siempre dos evaluaciones por unidad. Como la profesora titular continuaba con esta unidad, iban a tener luego una segunda evaluación agregando los contenidos faltantes. Por lo tanto, se decidió que esta evaluación representa únicamente el 40% de la nota de la Unidad 4.

3. Elección y análisis de una problemática de estudio

A lo largo de este capítulo, realizaremos un análisis sobre distintas situaciones que sucedieron en el contexto de nuestras prácticas docentes. Seleccionamos estas situaciones debido a su relevancia y por la necesidad de destacarlas en nuestro estudio. Este capítulo se desarrolla luego de varias instancias de presentaciones y de revisiones sobre nuestras clases y las actividades propuestas en ellas, en conjunto con el equipo de docentes supervisores y compañeras. El proceso de análisis y reflexión fue fundamental para identificar la problemática y su posterior estudio. Esperamos que este trabajo pueda evidenciar una reflexión de nuestras prácticas y con esto contribuir a la futura enseñanza de la matemática.

3.1 Construcción de la problemática

La propuesta que se nos asignó para nuestras prácticas consistía en introducir a nuestros estudiantes al pensamiento algebraico mediante la resolución de ecuaciones. Nuestra decisión fue utilizar la propiedad uniforme como estrategia tanto teórica como práctica para la resolución de las mismas. Es importante señalar que nuestros estudiantes de primer año se desenvuelven en el campo de los números naturales y racionales positivos, es decir no tienen experiencia con los números negativos. Además, es relevante mencionar que algunos de ellos tenían conocimientos previos sobre ecuaciones y el método de resolución que utilizaban era el pasaje de términos. Estos contextos y situaciones mencionadas nos servirán para comprender el análisis que sigue en el avance del capítulo.

Sin embargo, durante el transcurso de nuestras prácticas, nos encontramos con algunas situaciones no planificadas que nos llevaron a hacernos algunos cuestionamientos tales como, ¿qué tan pertinente es introducir a los estudiantes al álgebra a través de la resolución de ecuaciones? Además, ¿cómo afecta la elección de ciertas estrategias en la comprensión y el proceso de aprendizaje de los estudiantes en este contexto? Por esta razón, realizaremos un análisis de nuestras prácticas mediante la siguiente problemática:

> *Reflexiones sobre las dificultades que enfrentaron los estudiantes de primer año en la construcción de sentido sobre el álgebra, en el contexto de la introducción a su estudio mediante ecuaciones.*

3.2 Descripción y análisis de las producciones de los estudiantes

En esta sección, llevaremos a cabo un análisis de las actividades propuestas en el aula y de las correspondientes producciones de los estudiantes. Este análisis lo realizaremos basándonos en distintos aportes teóricos proporcionados por distintos autores del campo de la educación en la didáctica de la matemática.

El objeto de estudio que se nos asignó nos llevó a incorporar el estudio del álgebra a través de ecuaciones, una decisión didáctica común en nuestro país. Grimaldi et al. (2017) señalan que en la educación primaria, los estudiantes se centran en el trabajo aritmético dentro del campo de los números naturales y los racionales positivos. Para facilitar la transición de la aritmética al álgebra, generalmente se recurre a las ecuaciones. Al respecto Sessa (2005) expone:

> Para muchos alumnos, las ecuaciones son cosas que se despejan, y dominar las reglas de esta técnica suele ser una fuente inagotable de dificultades para ellos. Ahora bien, las ecuaciones son objetos complejos y su tratamiento muy temprano suele llevar a una simplificación que oculta su naturaleza y las descarga de sentido. (p.67).

Hay diferentes investigaciones que identifican por qué resulta complejo su abordaje tanto por el uso de las letras, las técnicas que involucran, el planteo de ecuaciones en ciertas situaciones problemáticas y el sentido que los estudiantes les dan, por lo que en este capítulo proponemos tratar las diferentes cuestiones de modo reflexivo.

3.2.1 La propiedad uniforme como estrategia de resolución

Como mencionamos en el capítulo anterior la Actividad 5 es importante, ya que es la primera vez que los estudiantes comienzan a resolver ecuaciones sin ninguna referencia a las balanzas. En esta actividad, que muestra la Figura 3.1, los estudiantes presentaron una de sus primeras dificultades. Ellos no sabían exactamente qué sumar o qué restar al momento de aplicar la propiedad uniforme en una ecuación.

Actividad 5

Hallar el valor de x

A. $3 \cdot x + 20 = 2 \cdot x + 90$
B. $7 \cdot x - 3 \cdot x - 5 = 3 \cdot x + 11$
C. $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$
D. $x + \frac{3}{4} = 2 \cdot x - \frac{1}{8}$

Figura 3.1: Actividad 5

El siguiente diálogo da cuenta de esta situación:

Estudiante 1: - Profe, en el punto A ¿yo puedo restar 10 a cada lado por ejemplo?

Profesor: - Sí, podrías restar 10 a cada miembro. Pero… ¿Cuál es tu objetivo cuando querés resolver una ecuación?

Estudiante 1: - Dejar la x sola de un lado.

Profesor: - ¿Entonces qué cantidad te conviene restar?

Estudiante 1: 20

Esta conversación sucedió en el contexto de la puesta en común de la actividad, frente a toda la clase. Luego notamos que varios estudiantes tenían este inconveniente. Algunos autores se refieren a que estas dificultades suelen ocurrir cuando se utiliza la propiedad uniforme como estrategia de resolución. Grimaldi et al. (2017) mencionan que:

También se suele trabajar sobre su resolución, ya sea despejando –pasando de términos– o aplicando la propiedad uniforme. Lo cierto es que la mayoría despeja, ya que el uso de la propiedad uniforme carece de sentido a los ojos de los alumnos y, para ellos, es lo mismo que despejar pero escribiendo más (p.49).

Pudimos observar que los estudiantes mostraban una mayor comprensión y facilidad al utilizar la estrategia de transposición de términos, acompañados de las frases: “lo que está sumando de un lado de la ecuación, pasa al otro lado restando” o “lo que está restando de un lado de la ecuación, pasa al otro lado sumando”. Lo que resaltan Grimaldi et al. (2017) sobre esto es: “Desde el punto de vista de los alumnos, toda esta manera de pensar la ecuación resulta arbitraria y difícil de seguir. Muchos de ellos prefieren que se les enseñen pasos mecánicos, descontextualizados, para evitar toda esta arbitrariedad.” (p.30).

Otra dificultad presentada en esta actividad que nos llamó la atención, apareció en la ecuación del punto B. Aquí los estudiantes intentaban aplicar la propiedad uniforme como se explicó en el punto A, pero presentaban inconvenientes con los signos. Como observamos en la Actividad 5 en el punto B teníamos la siguiente ecuación:

$$4 \cdot x - 5 = 3 \cdot x + 11$$

Aquí los estudiantes aplicaban la propiedad uniforme de la siguiente manera:

$$4 \cdot x - 5 - 5 = 3 \cdot x + 11 - 5$$

Es decir, restaban cinco a ambos lados de la igualdad en vez de sumar. Esto sucedía porque los estudiantes veían al número separado del signo, es decir en el miembro izquierdo de la ecuación manifestaban que tenían cinco en vez de menos cinco. Creemos que esto se debe a que los estudiantes aún no operaban con números negativos, por lo que veían al signo como un operador. Como dicen De Moreno y De Castellanos (1997): “Para dar solución a la ecuación es necesario (…) realizar operaciones y aplicar las propiedades del inverso multiplicativo y/o del inverso aditivo al despejar la incógnita” (p. 251).

En estos casos tuvimos que apelar a casos particulares como por ejemplo preguntarles ¿Qué sucede si tengo $10 - 5 + 5$? ¿Qué resultado obtengo? Para responder a estas preguntas, los estudiantes resolvían la cuenta. Es decir, primero restaban 5 a 10, obtenían 5 y a este resultado le sumaban 5, teniendo como resultado 10; no podían anticipar el resultado sin efectuar las operaciones. Esto nos lleva a pensar que los estudiantes no tenían el conocimiento del inverso aditivo, o sea el número que hay que sumarle a otro para que de cero. Es por esto que no sabían cuál era el resultado de $x - 5 + 5$, ya que no podían efectuar la operación, por lo que no utilizan esta estrategia para despejar las ecuaciones.

Cuando se introduce al álgebra a través de ecuaciones, se suele definir a la ecuación como una “igualdad con incógnita”, acercando el objeto al campo aritmético. Al definirlo de esta manera Sessa (2005) menciona que “es como una cuenta, de la cual se desconoce un término. La concepción que se cristaliza de este modo, asimila el concepto de ecuación al de "ecuación en una sola variable y con solución única".” (p.68). Además, agrega que esta idea que aparece del álgebra en las ecuaciones como incógnita y no como variable, no permite a los estudiantes tener un mayor grado de complejidad del concepto y abarcar ecuaciones con más incógnitas.

3.2.2 La no necesidad del álgebra

En la Actividad 4 inciso B que podemos ver en la Figura 3.2, es la primera vez que se evidencia que los estudiantes no veían la necesidad de plantear una ecuación para poder resolverla, ya sea porque hacían los cálculos mentalmente o iban probando números hasta llegar al resultado que necesitaban. Lo mismo sucedió en la Actividad 7 de la Figura 3.3, la cual fue la primera actividad donde se vió una situación problemática y no se pedía explícitamente que se plantee una ecuación.

B. Encontrar el valor de la incógnita de la siguiente ecuación aplicando la propiedad uniforme *(Ayuda: podés representar la igualdad en el dibujo de la balanza)*

100 + 50 + 50 + 500 = x + 100 + 100

Figura 3.2: Actividad 4, inciso B

<u>Actividad 7</u>

Resolver las siguientes situaciones, registrar en el cuaderno cómo fue tu razonamiento.

A. El producto entre un número y 8 es 96 ¿Cuál es ese número?
B. Martina pensó un número que al sumarle 3 y multiplicarlo por 6 le dio 150 ¿Qué número pensó Martina?

Figura 3.3: Actividad 7

Sobre esta situación Sessa (2005) respalda que en los primeros años de la escuela secundaria suelen presentarse actividades matemáticas donde se evidencia esta no necesidad del álgebra. Esto sucede ya que los recursos aritméticos que poseen los estudiantes son suficientes para resolver tales actividades y, aunque se les pidiera que planteen las ecuaciones, afirma que "La mayoría se pregunta por qué ya no pueden resolver como lo venían haciendo hasta ahora –con cuentas "sueltas", estimando y ajustando–, y no advierten la potencia del álgebra para abordar los problemas que les proponemos." (Grimaldi et al., 2017, p.21).

Respecto al inciso B de la actividad 4 los estudiantes obtenían el valor de la incógnita, pero no lo hacían aplicando la propiedad uniforme en la ecuación, si no simplemente reemplazando su valor. Sessa (2005) menciona que esta nueva herramienta del álgebra para los estudiantes resulta una complejidad innecesaria teniendo que memorizar las reglas que permiten “despejar la x”. Podemos ver en la Figura 3.4 y la Figura 3.5 estos modos de resolución.

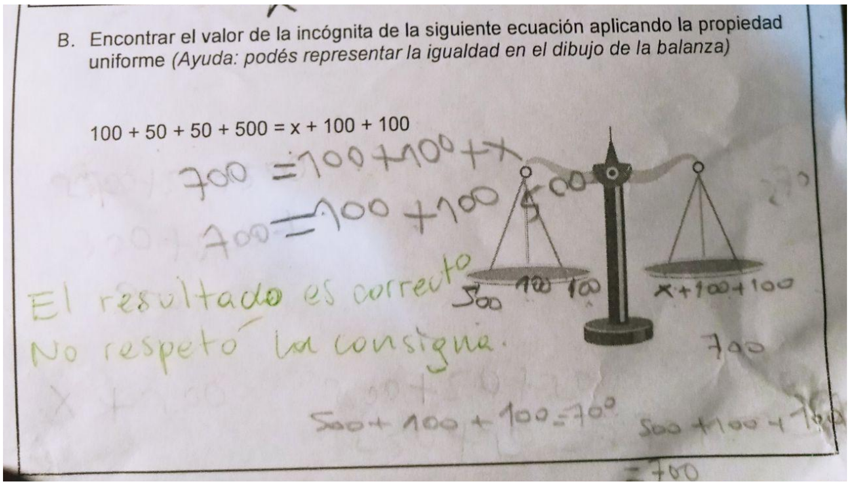


Figura 3.4 : modelo de resolución de los estudiantes en la Actividad 4 inciso B

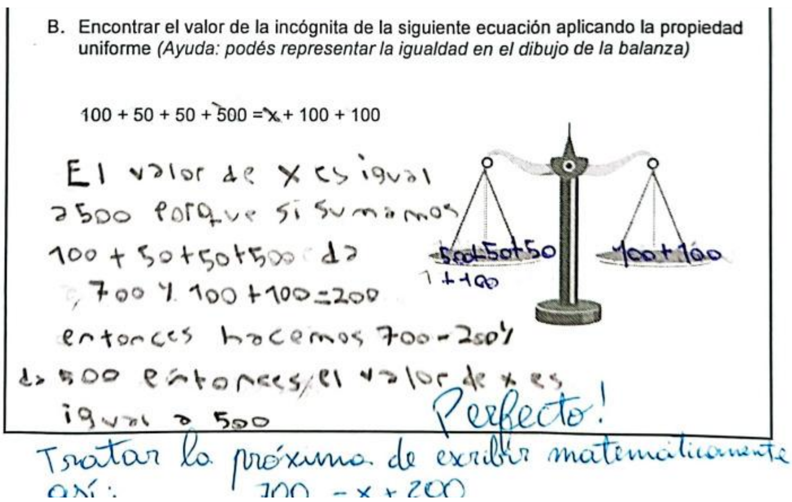


Figura 3.5: modelo de resolución de los estudiantes en la Actividad 4 inciso B

En las actividades siguientes, se les pidió a los estudiantes explícitamente que planteen las ecuaciones que representan las situaciones problemáticas. Sucedió entonces que algunos resolvían los problemas con cálculos aritméticos y luego buscaban una ecuación que represente la situación y se obtenga como resultado lo que ellos habían calculado previamente. Sessa (2005) afirma que:

> Enfrentar al alumno a problemas en los cuales la herramienta de las ecuaciones resulte francamente más eficaz o económica que los recursos aritméticos de que

dispone implica el planteo de ecuaciones que -paradójicamente- son de una complicación técnica excesiva para un principiante. (p.69).

3.2.3 La traducción del lenguaje coloquial al simbólico

Otras de las dificultades que presentaron los estudiantes fue en la traducción del lenguaje coloquial al simbólico. En estos ejercicios observamos que los estudiantes no podían traducir ciertas palabras al lenguaje simbólico. Esto lo evidenciamos nuevamente en ejercicios posteriores cuando no lograban expresar una cierta situación problemática en una ecuación. El inciso A de la Actividad 4, que se muestra en la Figura 3.6, fue en la primera actividad donde comenzamos a observarlas.

<u>Actividad 4</u>

La idea principal de esta actividad es hacer un seguimiento de tu proceso de aprendizaje y visualizar si surgen inconvenientes para luego trabajarlos en clase.

A. Unir con flechas (*¡Atención! puede haber más de una opción correcta)*

La diferencia entre siete y cuatro	z
Un número cualquiera más uno	x + 2
Un número disminuido en ocho	x + 1
Un número cualquiera	5 + 6 = 8 + 3
La suma de cinco y seis es igual a ocho aumentado en tres	7 - 4
Un número aumentado en dos	y - 8
El siguiente de un número	x

Figura 3.6: Inciso A de la Actividad 4

Como se ve en la Figura 3.7, los estudiantes unían correctamente con flechas las expresiones como “un número cualquiera más uno”, donde era evidente la operación. Pero, en expresiones como “el siguiente de un número” cometían errores, pues la operación de sumarle uno no está explícita.

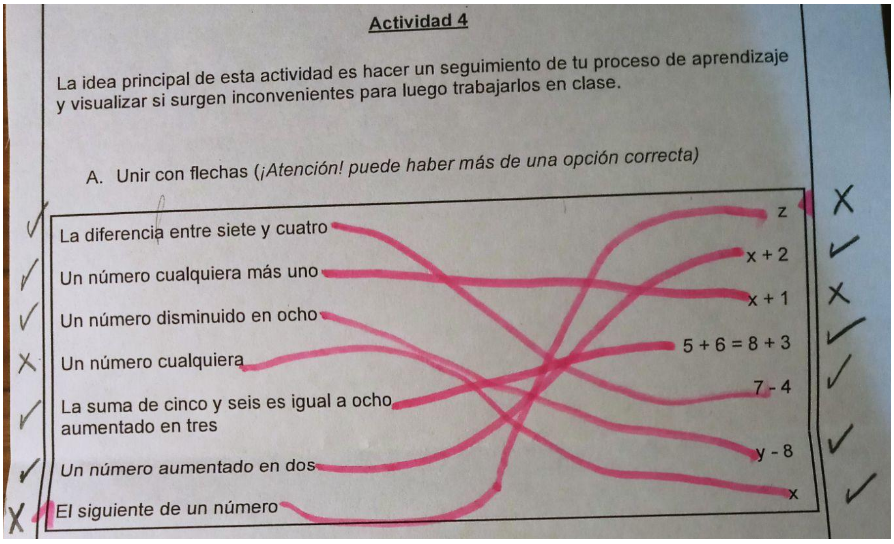


Figura 3.7: Resolución común en los estudiantes del inciso A de la Actividad 4

Este tipo de error volvió a repetirse en la Actividad 8, que se muestra en la Figura 3.8.

Actividad 8

Plantea y resuelve la ecuación para responder la pregunta de las siguientes situaciones problemáticas.

A. La suma de tres números consecutivos es 219. ¿Cuáles son esos números?
B. La mitad de la suma entre un número y el triple del mismo número es igual a 18 ¿Cuál es ese número?
C. El doble de un número más cinco es igual a la diferencia del triple del mismo número más uno ¿Cuál es el número?

Figura 3.8: Actividad 8

Los estudiantes no sabían cómo representar en lenguaje algebraico "la suma de tres números consecutivos". Grimaldi et al. (2017) reflexionan respecto a esto y nos dicen:

> En situaciones como esta, se espera que los alumnos adviertan la presencia de ciertas palabras que indican operaciones determinadas (…). Al hablar de "doble", los alumnos deberían interpretar que allí hay una multiplicación por 2; al leer "el anterior", deberán reconocer que han de restar 1. Cabe preguntarse cuál es la actividad matemática que se despliega en este ejercicio de identificar *palabras clave* (p.27).

Los estudiantes veían este ejercicio de traducción de un lenguaje a otro como algo mecánico, donde al ver palabras como "mitad" sabían que debían dividir por dos. Pero cuando se trataba de una situación donde debían generalizar, como “tres números consecutivos”, no sabían qué hacer.

Estas dificultades junto con las preguntas “¿Cuál es la potencia de este trabajo? ¿Qué desafío intelectual supone para los alumnos? ¿De qué manera se los está convocando a producir conocimiento matemático?”(Grimaldi et al., 2017, p.28), nos llevan a reflexionar sobre este contenido en el aula. Plantear la traducción del lenguaje coloquial al simbólico cuando se introduce al álgebra a través de ecuaciones, ¿realmente tiene sentido matemático? ¿Cuál es la matemática que se pone el juego?

3.2.4 La pertinencia de las consignas

En las situaciones problemáticas que hacían referencia a realizar cálculos con la edad, que se muestra en la Figura 3.9 de la Actividad 10, observamos además de los inconvenientes mencionados en cuanto a la traducción y a la no necesidad del álgebra, problemas con las consignas.

<u>Actividad 10</u>

Plantea y resuelve la ecuación para responder la pregunta de las siguientes situaciones problemáticas.

a) Si dentro de 10 años Martín tendrá el triple de la edad que tiene ahora, ¿qué edad tendrá entonces?

b) Si dentro de 15 años Gonzalo tendrá el doble de edad que la que tenía hace 5 años, ¿qué edad tiene ahora?

Figura 3.9: Actividad 10

En este tipo de situaciones problemáticas los estudiantes se notaron muy confundidos y no lograban plantear una ecuación. No comprendían que “dentro de 10 años” hace referencia a sumar 10, o que “hace 5 años” hace referencia a restar 5. Analizando estas dificultades vimos que:

> El trabajo en contexto –en este caso, de personas y edades– muchas veces les sirve para elaborar su plan de acción y controlar lo que van planteando. Pero cuando se les pide que primero escriban la ecuación, los alumnos deben cambiar de “lógica”, discriminando desde el principio datos de incógnitas para vincularlos de una sola vez. (Grimaldi et al., 2017, p.24).

Creemos que por esto los estudiantes mostraron tanta resistencia frente a este tipo de actividades, pues lo natural para ellos sería resolver estas situaciones con un cálculo aritmético.

Por otro lado, los estudiantes no mostraron ninguna dificultad en plantear ecuaciones para la Actividad 9 que se muestra en la Figura 3.10 a continuación.

Actividad 9

Plantea y resuelve la ecuación para responder la pregunta de la siguiente situación problemática.

- Martín junto a tres amigos fueron a un recital de Duki. El papá de Martín compró todas las entradas y les pidió a los tres amigos que le devolvieran cada uno su parte. Si entre los tres amigos juntaron \$20000 y él les devolvió \$410 en total ¿Cuánto costaba cada entrada?

Figura 3.10: Actividad 9

Creemos que esto fue así ya que los estudiantes estaban involucrados en el contexto, donde le daban un sentido a lo que estaban haciendo. Es evidente la diferencia con la actividad anterior, donde nunca se harían esos cálculos en un contexto real. Aquí queremos recuperar lo que dice Skovsmose (2000), que en situaciones como la Actividad 9, hacen referencias reales y con esto proveen un significado a las actividades. No es así el caso de la Actividad 10, donde no se encuentra un contexto real donde eso suceda y los estudiantes no pueden dotar de sentido a la actividad.

Por último, queríamos reflexionar sobre este tipo de actividades. Muchas veces los docentes planteamos situaciones problemáticas en un contexto insólito, para que los estudiantes planteen determinado tipo de ecuaciones. Esto puede traer consecuencias ya que ellos no le ven sentido a lo que están haciendo, y sobre todo no le ven sentido al álgebra en estas situaciones.

3.3 A modo de conclusión

En este capítulo, hemos explorado el desafío de introducir a nuestros estudiantes en el pensamiento algebraico a través de la resolución de ecuaciones. La construcción del sentido del álgebra es un tema central en la escuela secundaria, ya que los conceptos son de naturaleza abstracta y requieren un cambio de pensamiento en los estudiantes. Es por esto que creemos que la decisión didáctica del docente juega un papel crucial.

Algunos autores proponen la introducción del álgebra a través de generalización, enfoque que se centra en la búsqueda de patrones, regularidades y relaciones más amplias. Donde los estudiantes exploran secuencias numéricas y fórmulas generales. Esta forma podría ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda del álgebra. Como afirma Sessa (2005) la generalización permitiría “(...) a los alumnos construir referencias, sentidos y herramientas de control para las transformaciones algebraicas.” (p.120).

Creemos que trabajar el álgebra a través de generalización y trabajar con ecuaciones, no son excluyentes y ambos deben ser utilizados en el proceso de aprendizaje. De hecho, realizar la introducción del álgebra a través de la generalización podría brindar una solución a las distintas dificultades que hemos planteado a lo largo del capítulo. Acordamos en que “la llegada a las ecuaciones desde la idea de variable, de fórmula o de número general pondría en mejores condiciones a los alumnos para atrapar el sentido de ese objeto en toda su riqueza.” (Sessa, 2005, p.72). Como menciona Sessa (2005):

> El trabajo en torno a la generalización que proponemos permitiría que los alumnos construyeran referencias para realizar y controlar las transformaciones algebraicas que respetan la equivalencia de expresiones. De este modo, estarían en condiciones de abordar el objeto "ecuación" con mayor dominio técnico. (p. 72).

Por lo tanto, consideramos que es más efectivo realizar la introducción al álgebra a través de generalización, donde los estudiantes afiancen los conceptos de variables. Esto permitiría luego que el trabajo de ecuaciones, centrado en la resolución de situaciones problemáticas, pueda contextualizar el álgebra y mostrar así su utilidad en problemas del mundo real.

Sin embargo, es importante señalar que la enseñanza del álgebra sea gradual, ya que la construcción del sentido de esta rama de la matemática es un proceso lento y espiralado para el estudiante. Al respecto Grimaldi et al. (2017) mencionan que:

> Sostenemos que la enseñanza de lo algebraico, de lo cual las ecuaciones son solo una parte, abarca varios años de escolaridad. Esto se debe a la complejidad de la noción, de la idea de variable que involucra, los diferentes sentidos que adopta y las técnicas de resolución asociadas. (p.76)

Para esto consideramos que es necesario actividades que permitan al estudiante construir la comprensión paso a paso, incluyendo la resolución de problemas, exploración de patrones y generalización.

4. Reflexiones finales

En esta última sección, queremos compartir nuestras reflexiones acerca de nuestra experiencia de práctica docente, siendo nuestro primer acercamiento a las aulas. Hacernos responsables del aprendizaje de los estudiantes supuso un gran reto que aceptamos con gusto. Este camino fue largo, lleno de desafíos y diversas emociones como miedos, incertidumbre, alegría, ternura e interés. Además, esta experiencia fue muy enriquecedora y necesaria para nuestro futuro trabajo como docentes.

Creemos que la planificación fue de suma importancia a la hora de dar clases ya que funcionó de guía. Además, pudimos prever algunas cosas como la distribución horaria de las actividades, preguntas que podrían surgir de los estudiantes, dificultades que podían surgir. Todo esto nos proporcionó una ayuda para enfrentar la situación con más tranquilidad, y tener mayor confianza en el trayecto.

En cuanto a la primera experiencia en el aula, sentimos que fue el momento más significativo de este largo recorrido. Nos gustaría mencionar que el momento previo a la primera clase es cuando surgen los mayores miedos e incertidumbres, sin embargo, al momento de estar frente al curso estas sensaciones se disiparon. Los estudiantes se mostraron muy entusiasmados y participativos en la clase, lo que facilitó aún más la experiencia.

En relación a la problemática elegida, nos permitió hacer una revisión de nuestras prácticas docentes. Creemos que este trabajo fue fundamental, ya que pudimos reflexionar sobre los tipos de actividades propuestas, los tiempos asignados, las respuestas de los estudiantes, entre muchas otras cosas. Esto nos puede ayudar a mejorar nuestra propuesta didáctica en un futuro. Tener esta experiencia de reflexión sobre nuestras prácticas, no solo es importante en esta etapa del aprendizaje, sino que también es importante como futuros docentes, pues reflexionar sobre nuestras prácticas permanentemente es parte de la tarea docente.

Finalmente, queremos agradecer a nuestros docentes de Metodología y Prácticas de la Enseñanza por el acompañamiento en todo momento, a las docentes de Didáctica de la Matemática por ayudarnos a construir las herramientas para brindarles a los estudiantes nuestra visión de la matemática, y finalmente a nuestros/as amigos/as y familiares por el apoyo y contención permanente.

5. Referencias bibliográficas

Bombini, G., & Labeur, P. (2013). Escritura en la formación docente: los géneros de la práctica. *Enunciación*, *18*(1).

De Moreno, I., & De Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA*, *2*(3), 247-258.

Grimaldi, V., Itzcovich, H., & Novembre, A. (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*. Santillana.

Gvirtz, S., & Palamidessi, M. (2008). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*. AIQUE.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: Orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, *6*(1), 3-26.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.