OBTENCIÓN DE SOLUCIONES EXACTAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN MEDIANTE GRUPOS DE LIE APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE MECÁNICA

José Alberto Sánchez (1) – Osvaldo Natali (2)
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
(1) Departamento de Física
(2) Departamento de Matemática
Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
joseasanchez53@yahoo.com.ar , nataliosvaldo@hotmail.com

Resumen: La teoría de Lie a través de la teoría de grupos de transformaciones de Galois sirvió para estudiar las soluciones de las EDO's al ser estas invariantes bajo algunas transformaciones uniparamétricas. Podrán convertirse en ecuaciones a variables separables mediante cambios de coordenadas, o exactas mediante el uso de un factor integrante, determinando así un único fundamento matemático para obtener soluciones exactas. Este artículo expondrá el método del factor integrante de Lie y el método de las coordenadas canónicas aplicado a un problema de la mecánica clásica.

Palabras clave: grupos de Lie – soluciones de EDO's – generadores infinitesimales – factor integrante – coordenadas canónicas

Introducción

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, especiales, que se enseñan son: a variables separables, homogéneas, lineales, exactas, de Bernoulli, entre otras, sin aparente relación entre sí. Sophus Lie (1842-1899) utilizó la teoría de grupos de transformaciones de Galois para estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Lie descubrió que las ecuaciones diferenciales eran invariantes bajo algunas transformaciones uniparamétricas. De esta manera, podían convertirse en ecuaciones a variables separables mediante cambios de coordenadas o en exactas mediante el uso de un factor integrante, determinando así un único fundamento matemático para obtener soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales lineales, homogéneas, exactas y de Bernoulli, entre otras.

Se expondrá el método del factor integrante de Lie y el método de las coordenadas canónicas para obtener la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales de primer orden. Mediante el mismo se pretende divulgar, de manera elemental, la teoría de los grupos de Lie de creciente importancia en distintos ámbitos investigación, como por ejemplo en la teoría del control [8].

Descripción del Método

Se establecerá un procedimiento que nos permita identificar, cuáles las transformaciones que mantienen invariante a una ecuación diferencial.

Criterio de invariancia:

La EDO de primer orden

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

es invariante bajo las transformaciones uniparamétricas,

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y, \varepsilon) \\ y_1 = \varphi(x, y, \varepsilon) \\ y_1' = \theta(x, y, y', \varepsilon) \end{cases} \tag{2}$$

si y sólo si

$$f\left(x_1, y_1, y_1'\right) \equiv f\left(x, y, y'\right) \tag{3}$$

Desarrollando la función $f\left(x_1, y_1, y_1'\right)$ en serie de Taylor, alrededor de $\varepsilon = 0$, obtenemos:

$$f(x_1,y_1,y_1')= f(x_1,y_1,y_1')\Big|_{\varepsilon=0}+\varepsilon\frac{df}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2 f}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}+\ldots \qquad \textbf{(4)}$$

es decir,

$$\frac{df}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y_1'}\frac{\partial y_1'}{\partial\varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} \qquad \textbf{(5)}$$

Definiendo:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\dfrac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\xi(x,y)\\[2ex] \dfrac{\partial y_1}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\eta(x,y)\end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

Además, utilizando los respectivos desarrollos en serie de Taylor, alrededor de $\varepsilon = 0$ y aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas,

$$\begin{cases}x_1(\varepsilon)=x+\varepsilon\,\xi(x,y)+o\left(\varepsilon^2\right)\\ y_1(\varepsilon)=y+\varepsilon\,\eta(x,y)+o\left(\varepsilon^2\right)\\ y_1'(\varepsilon)=y'+\varepsilon\,\zeta(x,y,y')+o\left(\varepsilon^2\right)\end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{dy_1}{dx_1}\\ &= \frac{dy_1}{dx}\frac{dx}{dx_1}\\ &= \frac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dx_1}{dx}}\\ &= \frac{y'+\varepsilon\left(\eta_x+\eta_y y'\right)+o\left(\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon\left(\xi_x+\xi_y y'\right)+o\left(\varepsilon^2\right)}\\ &= y'+\varepsilon\left[\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right]+o\left(\varepsilon^2\right)\end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{dy_1'}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0}=\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2=\zeta\left(x,y,y'\right) \qquad \textbf{(8)}$$

reemplazando (6), (7) y (8) en (5) obtenemos:

$$\frac{df}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'} \qquad \textbf{(9)}$$

Denominamos,

$$\zeta\left(x,y,y'\right)=\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2 \qquad \textbf{(10)}$$

definiendo, el generador infinitesimal:

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial y'} \qquad \textbf{(11)}$$

y

$$Xf\left(x,y,y'\right)=\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'} \qquad \textbf{(12)}$$

reemplazando en (4),

$$f\left(x_1,y_1,y_1'\right)=f\left(x,y,y'\right)+\varepsilon Xf+\frac{\varepsilon^2}{2}X^2 f+\ldots \qquad \textbf{(13)}$$

obtenemos:

$$f\left(x_1,y_1,y_1'\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k X^k f}{k!}=e^{\varepsilon X}f\left(x,y,y'\right) \qquad \textbf{(14)}$$

de la ecuación (13) se desprende que $Xf\equiv 0$ es una condición necesaria y suficiente para la invariancia de ***f*** bajo el grupo de transformaciones (2). Esto significa que debe cumplirse $\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'}\equiv 0$ denominada ***condición de invariancia infinitesimal***, la cual, conjuntamente con la ecuación $f\left(x,y,y'\right)\equiv 0$, permite obtener $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$; y, como consecuencia, el generador infinitesimal ***X***, el cual, a través de la serie de Taylor conduce al grupo de transformaciones que deja invariante la ecuación diferencial.

No existe una manera sistemática de resolver las ecuaciones anteriores para cualquier EDO de primer orden, su solución en todos los casos depende en mucho de la habilidad y la intuición. Una estrategia, por ejemplo, consiste en suponer nula una de las funciones y calcular la otra. En la actualidad existen varios programas que permiten simplificar el procedimiento; por ejemplo Hereman [7]. El grupo que mantiene invariante la ecuación diferencial, transforma cualquier solución de la misma en otra solución de esa ecuación diferencial. En la teoría de Lie se presupone que las funciones $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son analíticas, ó clase C^{∞}, y se equipa al conjunto de transformaciones (2) con una estructura de grupo mediante la operación de composición, que se denomina

Grupo de Lie.
En este artículo sólo damos un enfoque básico de los grupos de Lie y no se pretende una definición formal y precisa de los mismos, para ello ver [1] y [3].

Ejemplo Nº 1:
Consideremos como ejemplo la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y'+p(x)y=q(x) \qquad \textbf{(15)}$$

entonces,

$$f\left(x,y,y'\right)=y'+p(x)y-q(x)=0$$
$$f_x=p'(x)y-q'(x)$$
$$f_y=p(x)$$
$$f_{y'}=1$$

Además, si $y' = q(x) - p(x)y$. Suponiendo $\xi = 0$ y reemplazando en la condición de invariancia infinitesimal, obtenemos: $\eta p(x) + \eta_x + \eta_y (q(x) - p(x)y) = 0$. Suponiendo que η sólo depende de x, es decir $\boldsymbol{\eta_y}$= 0, obtenemos:

$$\eta p(x) + \eta_x = 0$$

y

$$\eta = e^{-\int p(x)dx}$$

En consecuencia, con las funciones $\xi = 0$ y $\eta = e^{-\int p(x)dx}$ se obtiene un generador infinitesimal: ***X*** de esta ecuación diferencial. Varios autores (ver [2]) han desarrollado tablas en las que se relacionan diversas ecuaciones diferenciales de primer orden con generadores de grupos bajo las cuales dichas ecuaciones son invariantes. En estas tablas las ecuaciones aparecen en una forma general en la cual quedan incluidas la mayoría de aquellas de las cuales se conoce solución.
El siguiente teorema brinda un modo explícito para relacionar la solución de una ecuación diferencial de primer orden, con las funciones ξ y η que permiten construir el generador de un grupo bajo el cual esta es invariante.

Teorema del Factor Integrante de Lie
Supongamos que la ecuación diferencial sobre un dominio simplemente conexo,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

admite un grupo uniparamétrico ***G***, con funciones $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ del generador infinitesimal del grupo. Entonces, la función:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\xi M + \eta N} \qquad \text{con} \qquad \xi M + \eta N \neq 0 \qquad \textbf{(17)}$$

es un ***factor integrante*** de la ecuación diferencial dada. El teorema se demuestra mostrando que la condición de invariancia infinitesimal y la condición que debe cumplir una función $\mu(x,y)$ para ser un factor integrante de la ecuación diferencial son equivalentes.

Ejemplo Nº 2:
Sea la ecuación diferencial $\left(x + y^2\right)dx - 2xydy = 0$. La condición de invariancia infinitesimal es:

$$\eta_x + \frac{1}{2}\frac{\left(\eta_y - \xi_x\right)\left(x + y^2\right)}{xy} - \frac{1}{4}\frac{\xi_y\left(x + y^2\right)^2}{x^2y^2} - \xi\left(\frac{1}{2xy} - \frac{x + y^2}{2x^2y}\right) - \eta\left(\frac{1}{x} - \frac{x + y^2}{2xy^2}\right) = 0$$

Suponiendo $\eta = 0$ obtenemos $\xi = \dfrac{x^2}{x + y^2}$ y el factor integrante de Lie es:

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N} = \frac{1}{\frac{x^2}{x + y^2}\left(x + y^2\right)} = \frac{1}{x^2}$$

La solución general de la ecuación diferencial exacta resultante es: $x = \mathrm{C}\, e^{\frac{y^2}{2}}$

Ejemplo Nº 3:
Supóngase la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y - x\left(x^2 + y^2\right)}{x + y\left(x^2 + y^2\right)}$$

que se puede expresar también en la forma:

$$\left[y - x\left(x^2 + y^2\right)\right]dx - \left[x + y\left(x^2 + y^2\right)\right]dy = 0$$

Puede probarse que la ecuación diferencial es invariante bajo el grupo de Lie de transformaciones:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varepsilon - y\,\text{sen}\ \varepsilon \\ y_1 = x\,\text{sen}\ \varepsilon + y\cos\varepsilon \end{cases}$$

utilizando las ecuaciones (6): $\xi = -y, \quad \eta = x$ y el factor integrante de Lie es:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\xi M + \eta N} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$$

resolviendo la ecuación exacta resultante, se obtiene:

$$\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \text{C}$$

Coordenadas Canónicas

La teoría de Lie da la posibilidad de transformar una ecuación invariante bajo un grupo de transformaciones de la forma (2) en una de variables separables, siempre que la ecuación diferencial admita un grupo de simetría de traslación. Las coordenadas que permiten este cambio, $r = r(x,y)$, $s = s(x,y)$, se pueden obtener a partir de los generadores ξ y η mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\xi(x,y)\, r_x + \eta(x,y)\, r_y = 0 \\ &\xi(x,y)\, s_x + \eta(x,y)\, s_y = 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

De acuerdo con el método de las características, r es cualquier solución de la forma r = c, de la ecuación:

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} \qquad \textbf{(19)}$$

y s puede obtenerse a partir de las ecuaciones:

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = ds \qquad \textbf{(20)}$$

Por ejemplo si tenemos la conocida ecuación diferencial homogénea $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, entonces resolviendo la ecuación que da la condición de invariancia infinitesimal:

$$\xi f_x + \eta f_y + \left(\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right)y' - \xi_y y'^2\right) f_{y'} \equiv 0$$

Obtenemos el generador infinitesimal: $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$

En consecuencia: $\xi(x,y) = x$ y $\eta(x,y) = y$

El método de las características conduce a las ecuaciones:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = ds$$

Integrando, obtenemos $r = \frac{y}{x}$, $s = \ln(x)$

lo que conduce a la ecuación diferencial a variables separables en r y s:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{f(r) - r}$$

cuya solución general es:

$$s = \int \frac{dr}{f(r) - r} + c$$

Escribiendo r y s e función de x e y, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$\ln(x) = \int \frac{dr}{f(r) - r} + c \qquad \text{con} \qquad r = \frac{y}{x}$$

PROBLEMA DE LA MECÁNICA CLÁSICA

Una embarcación atraviesa un río de ancho "a", partiendo desde la posición opuesta al punto de llegada "O". La velocidad de la embarcación v_e es constante, respecto del agua, y la del río v_r con respecto a la tierra también es constante. Si la dirección del vector velocidad relativa debe estar siempre dirigida hacia "O"; determinar la trayectoria de la embarcación.

Planteamos las siguientes ecuaciones diferenciales de la cinemática:

$$\dot{x} = -v_e \cos\theta$$
$$\dot{y} = -v_r + v_e sen\theta$$

que también se pueden escribir:

$$\dot{x} = -v_e \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\dot{y} = -v_r + v_e \frac{(-y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Lo que conduce a la siguiente ecuación diferencial de primer orden, homogénea:

$$y' = \frac{v_r}{v_e}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

cuya solución general es:

$$y = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right] \quad \text{con} \quad k = \frac{v_r}{v_e}$$

Conclusiones y Recomendaciones

El método del factor integrante de Lie y el método de coordenadas canónicas permiten obtener la solución exacta de la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que se enseñan en los cursos regulares de grado, tanto lineales como no lineales.

Aunque la ecuación de invariancia infinitesimal habitualmente implica cálculos más complejos y extensos que los demás métodos de solución, tiene la ventaja de que puede aplicarse para obtener una solución exacta en aquellos problemas para los cuales no exista un método tradicional.

El criterio de invariancia infinitesimal bajo grupos de Lie se utiliza también para reducir el orden de una ecuación diferencial ordinaria, EDO; y para reducir el número de variables independientes en una ecuación diferencial en derivadas parciales: EDP. (ver [4], [5], [6]). Muchos problemas de mecánica clásica, tales como los que surgen de problemas de oscilaciones no lineales se pueden abordar con la teoría de Lie, pero deben plantearse a través de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Referencia Bibliográfica

[1] Boothby, W. M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, San Diego: Academic Press, 1986.

[2] Gigena, S. et al *Análisis Matemático II – Teoría, Práctica y Aplicaciones*, Ed.GALEON, ISBN Nº 987-9363-04-3, Córdoba. 1998.

[3] George, Emanuel, *Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups*, CHAPMAN and HALL/CRC, 2001.

[4] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and lie Groups*, New York: Springer Verlag, 1983.

[5] Olver, P. J, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Springer Verlag, 1993.

[6] Bluman, G. and Kumei, S., *Symmetries and Differential Equations*, Second Edition, Springer Verlag, 1989.

[7] Hydon, P. E., *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge University Press, 2000.

[8] Hereman, W, *Review of Symbolic Software for Lie Symmetrie Analysis*, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 25 (8/9), pp. 115-132, 1997.

[9] Kwatny, H. G., Blankenship, G. L., *Nonlinear Control and Analytical Mechanics*, Birkhäuser, 2000.