https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.34
УДК 519.925.51

Собчук В.В.[1], д.т.н., Проф.
Зеленська І.О. [2], Асп.

Побудова асимптотики розв'язку для системи сингулярно збурених рівнянь методом істотно особливих функцій

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
[1]e-mail: sobchuk@knu.ua
[1]e-mail: kopchuk@gmail.com

V.V. Sobchuk[1], Dr. Sci., (Engin.) Prof.
I.O. Zelenska[2], Postgraduate Student.

Construction of asymptotics of the solution for a system of singularly perturbed equations by the method of essentially singular functions

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4d, Glushkov ave., Kyiv, 03068,
e-mail: sobchuk@knu.ua
[1]ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
[2]ORCID ID: 0000-0002-7784-1030

Сингулярно збурені задачі з точками звороту виникають як математичні моделі для різних фізичних явищ. Задача з внутрішньою точкою звороту є одновимірною версією стаціонарної конвекційно-дифузійної задачі з домінуючим конвективним членом і полем швидкості, яке змінює свій знак у водозбірнику. Задачі з граничними точками звороту, з іншого боку, виникають у геофізиці та при моделюванні теплових прикордонних шарів у ламінарному потоці. У роботі проведено аналіз результатів з асимптотичного аналізу сингулярно збурених задач з точками звороту. Для однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту, одержані умови для побудови рівномірної асимптотики розв'язку. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Асимптотику побудовано методом істотно особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі. Конструкція асимптотичних розв'язків містить довільні сталі, які визначаються однозначно під час розв'язання ітераційних рівнянь. Водночас отримано умови існування розв'язку системи диференціальних з малим параметром при старшій похідній та при наявності точки звороту, за умови, що точка звороту міститься на інтервалі $[0;l]$. *Наведено приклад побудови асимптотики однорідної системи диференціальних рівнянь.*

Ключові слова: малий параметр, точка звороту, система сингулярно збурених рівнянь, функції Ейрі, рівняння Ліувілля.

Singularly perturbed problems with turning points arise as mathematical models for various physical phenomena. The internal turning point problem is a one-dimensional version of the steady-state convection-diffusion problem with a dominant convective term and a velocity field that changes sign in the reservoir. Boundary turning point problems, on the other hand, arise in geophysics and in the modeling of thermal boundary layers in laminar flow. The paper analyzes the results from the asymptotic analysis of singularly perturbed problems with turning points. For a homogeneous system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the highest derivative and a turning point, the conditions for constructing a uniform asymptotic solution are obtained. We consider the case when the spectrum of the limit operator contains multiple and identically zero elements. The asymptotics are constructed by the method of essentially singular functions, which allows using the Airy model operator in the vicinity of the turning point. The construction of asymptotic solutions contains arbitrary constants, which are determined uniquely during the solution of the iterative equations. At the same time, the conditions for the existence of a solution of a system of differentials with a small parameter for the highest derivative and for the presence of a turning point are obtained, provided that the turning point is located on the interval $[0;l]$. *An example of constructing the asymptotic of a homogeneous system of differential equations is given.*

Keywords: small parameter, turning point, singular perturbations, Airy functions, Liouville equation.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Багато процесів в природі, фізиці, інженерній справі характеризуються різкою зміною характеру поведінки системи. При описі таких систем застосовуються математичні моделі, які описуються сингулярно збуреними диференціальними рівняннями. Такі рівняння мають сингулярні точки, де коефіцієнти або функції стають невизначеними або руйнуються, що призводить до суттєвих труднощів у їх аналізі та розв'язанні. Більше того, розв'язування таких рівнянь може вимагати спеціалізованих методів та аналізу, щоб врахувати особливості сингулярних точок та збурень.

Історично такі задачі виникли у небесній механіці при дослідженні поведінки зірок, силових впливів планет та інших небесних тіл тощо. В подальшому сингулярно збурені диференціальні рівняння почали широко застосовувати у задачах оптимального керування; фізиці руйнування матеріалів – при вивченні поведінки матеріалів під впливом зовнішніх навантажень, таких як напруження та температурні зміни, коли можуть виникати диференціальні рівняння зі сингулярними коефіцієнтами у точках локального руйнування матеріалу; у моделях екологічних систем та дослідженнях біологічних процесів, пов'язаних з ростом та розвиток організмів в умовах нестачі ресурсів або інших обмежень і т.і.

Загальний клас задач на власні значення з двоточковими граничними умовами на кінцевому інтервалі, породжених диференціальним рівнянням з невизначеною ваговою функцією, яка має кілька нулів або полюсів досліджено у [1]. Робота [2] ілюструє, як за допомогою перетворення Ліувіля диференціальне рівняння зводиться до однієї з чотирьох стандартних форм із неперервними коефіцієнтами. Після чого будуються асимптотичні наближення для розв'язків у термінах функцій параболічного циліндра. Наведено основні властивості функцій параболічного циліндра. Для кожного наближення дано строгі обґрунтовані оцінки похибок.

В роботі [3] запропоновано два підходи: коротkохвильове граничне наближення та довгохвильове граничне наближення для побудови асимптотики розв'язку рівняння Орра-Зоммерфельда. Процедура полягає у перетворенні рівняння Орра-Зоммерфельда в систему двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для яких власні значення та власні функції можуть бути апроксимовані

У роботі [4] досліджується спектральна теорія несамоспряженого двоточкового диференціального оператора n-го порядку L у комплексному гільбертовому просторі. Встановлено умову повноти для дискретних операторів Гільберта-Шмідта. Основні особливості спектральної теорії для L включають асимптотичні формули для характеристичного визначника та функції Гріна; класифікацію граничних значень: регулярні, нерегулярні або вироджені; обчислення власних значень і відповідні алгебраїчні кратності та сходження.

Окремої уваги заслуговує сингулярно збурене диференціальне рівняння Ліувілля, яке відіграє важливу роль у різних областях фізики, хімії та математики, сприяючи розвитку теоретичних моделей та розумінню властивостей фізичних систем.

Класичне рівняння Ліувілля є частинним випадком рівняння виду

$$\varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x) \qquad (1)$$

при $b(x) \equiv 0$. Для рівнянь вищих порядків та їх систем додаються нові особливості і труднощі при їх дослідженні, оскільки спектр виродженого оператора складається з двох груп елементів: стабільних і нестабільних [5-7].

В цій роботі опишемо алгоритм методу істотно особливих функцій для побудови розв'язку і сформулюємо умови його існування на інтервалі $[0,1]$ для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

2. Постановка задачі

Нехай задана система сингулярно збурених диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x) \qquad (2)$$

де $\varepsilon \to +0$, $x \in [0;1]$, де $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_0(x)+\varepsilon A_1(x)=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}$ – відома матриця, $Y(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} y_1(x,\varepsilon) \\ y_2(x,\varepsilon) \\ y_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix}$ – шукана вектор-функція, $H(x)=colomn(0,0,h\ (x))$ – задана вектор-функція [8].

Систему (2) будемо досліджувати за таких умов:

C1. $a(x), b(x), h(x)\in C^{\infty}[0,l]$.

C2. $a(x)=x\widetilde{a}(x),\ \widetilde{a}(x)\neq 0,\ b(x)\neq 0.$

3. Методика побудови асимптотики розв'язку системи

Рівномірну асимптотику розв'язку для задачі (1) побудуємо методом істотно особливих функцій [9, 10]. Алгоритм цього методу можна подати у вигляді.

I крок. *Розширення сингулярно збуреної задачі*.

В сингулярно збуреній задачі з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x,\varepsilon)$ вивчається нова «розширена вектор-функція» $\widetilde{Y}(x,t,\varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\widetilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)}\equiv Y_k(x,\varepsilon).$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з однією змінною до задачі з двома змінними.

II крок. *Простір безрезонансних розв'язків.*

Для регуляризації вводиться вибраний простір функцій, який називають *простором безрезонансних розв'язків* і для кожної конкретної задачі цей простір має свою специфіку.

$$\widetilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}D_{ik}(x,t,\varepsilon)+B(x,t,\varepsilon)+\omega(x,\varepsilon),$$

$$D_{ik}(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} \alpha_{i1}(x,\varepsilon) \\ \alpha_{i2}(x,\varepsilon) \\ \alpha_{i3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix}U_i(t)+\mu\begin{pmatrix} \beta_{i1}(x,\varepsilon) \\ \beta_{i2}(x,\varepsilon) \\ \beta_{i3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix}U_i'(t),$$

$$B(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} f_1(x,\varepsilon) \\ f_2(x,\varepsilon) \\ f_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix}\psi(t)+\mu\begin{pmatrix} g_1(x,\varepsilon) \\ g_2(x,\varepsilon) \\ g_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix}\psi'(t).$$

III крок. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.*

Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, у який малий параметр $\varepsilon>0$ входить регулярно.

IV крок. *Формалізм побудови розв'язку задачі.*

Оскільки розширена задача є регулярно збуреною відносно малого параметра в ПБР, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\widetilde{Y}_k(x,t,\mu)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r Y_{\text{hom.}}(x)+\sum_{r=-2}^{\infty}\mu^r Y^{part.}(x),$$

де $\mu=\sqrt[3]{\varepsilon}$.

Побудову асимптотичного ряду частинного розв'язку розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР. Права частина буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора L_ε [5].

V крок. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.*

Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k. На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=F\cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ - матриця, $Z_{kr}(x)$ - вектор-стовпець складений з аналітичних функцій

$$\theta(x,\varepsilon)\equiv\{\alpha_{ik}(x,\varepsilon),\beta_{ik}(x,\varepsilon)\}.$$

При цьому будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної досліджуваної задачі.

VI крок. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.*

На даному кроці будується розв'язок неоднорідної задачі за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=F\cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ – матриця, $Z_{kr}(x)$ – вектор-стовпець складений з аналітичних функцій

$$\theta_2=\{f_k(x,\varepsilon),g_k(x,\varepsilon),\omega_k(x,\varepsilon)\}.$$

VII крок. *Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку.*

На цьому етапі проводимо оцінку залишкових членів

$$\varepsilon^{1+q}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$$

$$\varepsilon^{1+q}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$$

одержаних розв'язків.

VIII крок. *Побудова загального розв'язку системи* (2):

$$Y\,(x,\varepsilon)=Y_{\text{hom}}(x,\varepsilon)+Y^{part}(x,\varepsilon).$$

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь* (2) *задовольняє умови:*

1) $H(x)\in C^{\infty}[0;l]$;

2) $a(x)=x\tilde{a}(x),\quad \tilde{a}(x)>0,\quad b(x)<0.$

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon>0$ *методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку* $Y(x,t,\varepsilon)$ *даної системи у вигляді асимптотичного ряду*

$$Y(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\alpha_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]U_k\left(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{1/3}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\beta_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dU_k(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}\right\}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\omega_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}f_r(x)+\ O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\psi\left(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x)\right)+$$

$$+\varepsilon^{1/3}\left[\sum_{r-0}^{+\infty}\varepsilon^{r}g_r(x)+\ \frac{d\psi(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}\right]\frac{d\nu(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\bar{\omega}r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right).$$

4. Приклад побудови асимптотики розв'язку однорідної системи

Проілюструємо використання описаного підходу до побудови асимптотики розв'язку систему

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon)-A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon)=H(x) \tag{3}$$

де $\varepsilon\to+0$, $x\in[0;1]$, де $A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$$A_0(x)+\varepsilon A_1(x)=\begin{pmatrix}0&\varepsilon&0\\0&0&1\\4x+4&-4x&0\end{pmatrix}$$

Систему (3) будемо досліджувати за таких умов:

Q1. $a(x)\,i\,b(x)\in C^{\infty}[0,1]$.

Q2. $a(x)=x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x)=4,\ b(x)=-(4x+4),$ $h(x)=0.$

Тобто знайдемо $Y_{\text{hom.}}(x,\varepsilon)$ для системи (3).

Дана система відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню третього порядку

$$\varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon)+4x\cdot y'(x,\varepsilon)-(4x+4)\cdot y(x,\varepsilon)=0. \tag{4}$$

Вироджене рівняння, що відповідає системі (3) має вигляд

$$4x\cdot\omega'(x)+\omega(x)=0. \tag{5}$$

Характеристичне рівняння запишеться таким способом:

$$|A(x,0)+\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\4x+4&-4x&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-4x\cdot\lambda.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1=0$ і $\lambda_{2,3}=\pm2\sqrt{x}i.$

Згідно алгоритму введемо регуляризуючу змінну $t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)$, де показник p і функцію $\varphi(x)$ необхідно визначити.

Для визначення "розширеної" функції одержимо "розширене" векторне рівняння

$$L_\varepsilon\cdot Y_{\text{hom}}(x,t,\varepsilon)\equiv\varepsilon^{1-p}\varphi'(x)\frac{\partial Y_{\text{hom}}(x,t,\varepsilon)}{\partial t}+ \\ +\varepsilon\frac{\partial Y_{\text{hom}}(x,t,\varepsilon)}{\partial x}-A(x)Y_{\text{hom}}(x,t,\varepsilon)=H(x) \tag{6}$$

Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (6) будуємо у вигляді ряду

$$Y_{\text{hom.}}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)+\varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)\right]+ \\ +\omega_k(x,\varepsilon),$$

де $\theta(x,\varepsilon)\equiv\{\alpha_k(x,\varepsilon),\beta_k(x,\varepsilon),\omega_k(x,\varepsilon)\}$ – аналітичні функції відносно малого параметра $\varepsilon>0$.

Прирівняємо коефіцієнти при ІОФ в одержаній системі. Будемо мати такі векторні рівняння ($i=1,2;\ k=\overline{1,3}$)

$$U_i'(t):\varepsilon^{1-\mu}\alpha(x,\varepsilon)\varphi'(x)- \\ -A(x)\varepsilon^{\gamma}\beta(x,\varepsilon)+\varepsilon\beta(x,\varepsilon)=0\,, \tag{7}$$

$$U_i(t): \varepsilon^{1+\gamma-2\mu}\beta(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - $$
$$- A(x)\alpha(x,\varepsilon) + \varepsilon\alpha(x,\varepsilon) = 0.$$

При

$$p = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

векторні рівняння (7) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3\left[\beta_{i2}(x,\varepsilon) - \beta'_{i1}(x,\varepsilon)\right], \\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) - \beta_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i2}(x,\varepsilon), \\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) - (4x+4)\beta_{i1}(x,\varepsilon) + 4x\beta_{i2}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i3}(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3\left[\alpha'_{i1}(x,\varepsilon) - \alpha_{i2}(x,\varepsilon)\right], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) + \alpha_{i3}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i2}(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) + (4x+4)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) - 4x\alpha_{i2}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i3}(x,\varepsilon), \end{cases} \tag{8}$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Таким способом, одтримали регулярно збурену систему.

Розв'язки однорідної розширеної системи (8) побудуємо у вигляді рядів

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\alpha_{ikr}(x), \qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\beta_{ikr}(x). \tag{9}$$

Підставимо ряди (9) в (8). Тоді для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{ikr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$
$$\beta_{ikr}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$$

ми одержимо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\Phi(x)\cdot Z_{ik0}(x) = 0, \quad r = 0,1,2, \\ &\Phi(x)\cdot Z_{ikr}(x) = -Z'_{ik(r-1)}(x), \quad r \ge 3, \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$Z_{ikr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$$

, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & -(4x+4) & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ 4x+4 & -4x & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Обчислимо визначник матриці (11). В результаті одержимо:

$$\det\Phi(x) =$$
$$= \left(a^2(x) + 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\varphi'^4(x)\right)\cdot\varphi(x)\varphi'^2(x).$$

На даний момент регуляризуюча функція $\varphi(x)$ ще не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі

$$16x^2 + 8x\varphi(x)\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\varphi'^4(x) = 0,$$
$$\left(4x + \varphi(x)\varphi'^2(x)\right)^2 = 0,$$
$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = -4x(x).$$

Отже,

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = -4x \equiv \det A(x), \quad \varphi(0) = 0. \tag{12}$$

Перш ніж продовжити дослідження і написати розв'язок задачі (8) необхідно розібратися із знаком правої частини рівняння. При виконанні умови

$$\det A(x) = -a(x) > 0$$

розв'язком буде функція

$$\varphi(x)\cdot\varphi(x)'^2 = -4x,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\cdot\varphi(x) = -4x,$$
$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{-4x},$$
$$\int\varphi^{\frac{1}{2}}(x)d\varphi = \int_0^x\sqrt{-4x}\,dx,$$

$$\frac{2}{3}\varphi^{\frac{3}{2}}(x) = \int_0^x\sqrt{-4x}\,dx,$$
$$\varphi^{\frac{3}{2}}(x) = \frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{-4x}\,dx,$$
$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{-4x}\,dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$
$$\varphi(x) = \sqrt[3]{4}x.$$
$$\varphi'(x) = \sqrt[3]{4}.$$

Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи (8) вигляду

$$Z_{kr}(x) = \tag{13}$$
$$= colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i30}(x), -\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\beta_{i20}(x), 0, \beta_{i20}(x), \beta_{i30}(x)\right)$$

де $\beta_{ik0}(x), r=\overline{0,2};\ i=1,2; k=\overline{1,3}$ – до певного моменту вільні, достатньо гладкі функції при $x\in[-0;1]$.

З явного вигляду матриці (11) і розв’язку (13) видно, що систему (8) можна розбити на дві системи

$$\begin{cases}\sqrt[3]{4}\alpha_{i2r}(x)-\beta_{i3r}(x)=\alpha'_{i2(r-1)}(x)\\ 4x\cdot\alpha_{i2r}(x)+\sqrt[3]{16}x\beta_{i3r}(x)=\beta_{i3(r-1)}(x)\end{cases} \tag{14}$$

і

$$\begin{cases}\sqrt[3]{4}\alpha_{i3r}(x)+4x\cdot\beta_{i2r}(x)=\alpha'_{i3(r-1)}(x)\\ -\alpha_{i3r}(x)+\sqrt[3]{16}x\beta'_{i2r}=\beta_{i2(r-1)}{}'\end{cases} \tag{15}$$

Ці системи незалежні одна від одної. Але при побудові асимптотики розв’язку розширеного рівняння вони беруть участь одночасно на кожному ітераційному кроці.

Розв’яжемо дані системи. Спочатку розглянемо ці системи при $r=3$. Врахувавши, одержаний розв’язок (13), з систем (14) і (15) одержимо

$$\begin{cases}\sqrt[3]{4}\alpha_{i23}(x)-\beta_{i33}(x)=\alpha'_{i20}(x)\equiv\left(\dfrac{1}{\varphi'}\beta_{i30}\right)',\\ 4x\cdot\alpha_{i23}(x)+\sqrt[3]{16}x\beta_{i33}(x)=\beta_{i30}(x).\end{cases} \tag{16}$$

і

$$\begin{cases}\sqrt[3]{4}\alpha_{i33}(x)+4x\cdot\beta_{i23}(x)=\left(-\dfrac{a}{\varphi'}\beta_{i20}\right)',\\ -\alpha_{i33}(x)+\sqrt[3]{16}x\beta'_{i23}=\beta'_{i20}.\end{cases} \tag{17}$$

Дослідити більш детально праві частини систем (16) і (17). Для того, щоб існував нетривіальний розв’язок систем (16) і (17) необхідно і досить, щоб ранги розширених матриць співпадали з відповідними рангами матриць цих систем [8]. Для виконання цих умов скористаємось довільністю функцій $\beta_{ik0}(x)$:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{4x}\equiv\frac{1}{\sqrt[3]{16}x}=\frac{\left(\dfrac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i30}(x)\right)'}{\beta'_{i30}(x)},\quad i=1,2 \tag{18}$$
,

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{-1}\equiv\frac{4x}{\sqrt[3]{16}x}=\frac{\left(-\dfrac{4x}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i20}(x)\right)'}{\beta'_{i20}(x)},\quad i=1,2 \tag{19}$$
.

З (18) при фіксованих $i=1,2$ одержимо диференціальне рівняння

$$2\beta'_{i30}(x)-\frac{4x+4}{4x}\cdot\beta_{i30}(x)=0. \tag{20}$$

З (19) при фіксованих $i=1,2$ одержимо диференціальне рівняння

$$-8x\cdot\beta'_{i20}-(8+4x)\beta_{i20}=0. \tag{21}$$

В (18) і (19) гладкими розв’язками будуть функції $\beta_{ik0}(x)=\beta^0_{ik0}\cdot\widetilde{\beta}_{ik0}(x), k=\overline{1,3}, i=1,2,$ де $\beta^0_{ik0}(x)$ – довільні сталі, $\widetilde{\beta}_{ik0}(x)$ – частинні, достатньо гладкі для всіх $x\in[0;1]$, розв’язки однорідних рівнянь (10).

При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв’язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (16) і (17) вигляду

$$Z_{kr}(x)=colomn\begin{pmatrix}0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\dfrac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}},\dfrac{-4x}{\sqrt[3]{4}}\dfrac{e^{Ci20}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}},\\ 0,\dfrac{e^{Ci20}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}},\dfrac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\end{pmatrix} \tag{22}$$

де $\beta_{ikr}(x), i=1,2, k=\overline{1,3}$ до певного часу довільні, достатньо гладкі для всіх $x\in[0;1]$.

Продовжуючи далі розв’язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (16) і (17) при $r>3$, методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розв’язків систем рівнянь (16) і (17) при $r=\overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r=\overline{0;q-1}$, визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta^0_{ik0}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ikr}=colomn\left(\beta^0_{i2r},\beta^0_{i3r}\right)$.

Третій формальний розв’язок розширеної системи (6)

$$\omega_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\omega_{kr}(x). \tag{23}$$

Для визначення вектор-функцій $\omega_{kr}(x)$ одержимо рекурентні системи рівнянь

$$\begin{aligned}&A_0(x)\cdot\omega_0(x)=0,\\ &A_r(x)\cdot\omega_r(x)=A_1(x)\cdot\omega_{(r-1)}(x)-\omega'_{(r-1)}(x),\quad r\geq1.\end{aligned} \tag{24}$$

де $\omega_r(x)=colomn(\omega_{1r}(x),\omega_{2r}(x),\omega_{2r}(x))$ – невідома вектор-функція.

Дослідимо розв'язок однорідного рівняння $A_0(x)\cdot\omega_0(x)=0$. В результаті отримаємо $\omega_{30}(x)=0$ і систему двох рівнянь:

$$\begin{cases}\omega'_{10}(x)-\omega_{20}(x)=0,\\ 4x\cdot\omega_{20}(x)-(4x+4)\,\omega_{10}(x)=0.\end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$4x\cdot\omega'_{10}(x)-(4x+4)\,\omega_{10}(x)=0. \tag{25}$$

Розв'язок рівняння (25) запишемо у вигляді:

$$\omega_{10}(x)=\omega_{10}^{0}\cdot x\cdot e^{x},$$

де ω_{10}^{0} – довільна стала.

На наступному кроці ми отримаємо неоднорідну систему рівнянь. Її розв'язок також буде містити одну довільну сталу ω_{11}^{0}. Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (24) будуємо третій формальний розв'язок системи (6) у вигляді ряду

Таким чином ми побудували три лінійно незалежні розв'язки для системи (2) у вигляді формального ряду

$$Y_{\text{hom}}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ik}(x)U_i(t)+\varepsilon^{1/3}\beta_{kr}(x)U'_i(t)\right]\right]+ \\ +\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\omega_r(x). \tag{25}$$

Звуження (25) при

$$t=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x,$$

Тобто, ряд

$$Y_{\text{hom}}(x,\varepsilon)=$$

$$=\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ik}(x)U_i\left(\varepsilon^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{4}x\right)+\varepsilon^{1/3}\beta_{kr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{4}x)}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{4}x)}\right]\right]+ \\ +\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\omega_r(x).$$

є формальним розв'язком системи (3).

Таким способом, тепер можемо записати асимптотику для загального розв'язку системи (3).

Висновок 1. *Асимптотику розв'язку однорідної системи* (3) *при виконанні умов* **Q1** *та* **Q2** *можна записати у вигляді ряду*

$$Y_{\text{hom}}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\alpha_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]U_k\left(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x)\right)+\right. \\ +\varepsilon^{1/3}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\beta_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dU_k(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}+ \\ +\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\omega_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right). \tag{26}$$

Підставивши знайдені розв'язки у (26) отримуємо:

$$Y_{\text{hom}}(x,t,\varepsilon)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{x}}\\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{Ci20}}{e^{x}e^{\frac{1}{4}x}}\end{pmatrix}+\varepsilon^{1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{x}}\\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{Ci20}}{e^{x}e^{\frac{1}{4}x}}\end{pmatrix}+\varepsilon^{2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{x}}\\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{Ci20}}{e^{x}e^{\frac{1}{4}x}}\end{pmatrix}+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\times\right.$$

$$\times U_i\left(\varepsilon^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{4}x\right)+\varepsilon^{1/3}\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon 0\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{Ci20}}{e^{x}e^{\frac{1}{4}x}}\\ \frac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{x}}\end{pmatrix}+\varepsilon^{1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{Ci20}}{e^{x}e^{\frac{1}{4}x}}\\ \frac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{x}}\end{pmatrix}+\varepsilon^{2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{Ci20}}{e^{x}e^{\frac{1}{4}x}}\\ \frac{\sqrt{e^{Ci30}}}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{x}}\end{pmatrix}+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dU_k(\varepsilon^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{4}x)}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{4}x)}\right\}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix}\omega_{10}^{0}\cdot x\cdot e^{x}\\ -\frac{4x+4}{4x}\ \omega_{10}^{0}\cdot x\cdot e^{x}\\ 0\end{pmatrix}+O\left(\varepsilon^{q+1}\right).$$

5. Висновки

Таким способом в роботі проведено аналіз результатів з асимптотичного аналізу сингулярно збурених задач з точками звороту. Для однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту (2), одержані умови для побудови рівномірної асимптотики розв'язку.

Розглянуто випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Асимптотика розв'язку будується методом істотно особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі.

Конструкція асимптотичних розв'язків містить довільні сталі, які визначаються однозначно під час розв'язання ітераційних рівнянь. Теоремою 1 визначено умови існування розв'язку системи диференціальних з малим параметром при старшій похідній та при наявності точки звороту, за умови, що точка звороту міститься на інтервалі $[0;l]$. Розглянуто приклад побудови асимптотики однорідної системи диференціальних рівнянь (3) з відповідними умовами на коефіцієнти.

Список використаних джерел

1. *Eberhard W., Freiling G. and Wilcken K.* Indefinite eigenvalue problems with several singular points and turning points./ W. Eberhard, G. Freiling and K. Wilcken // Math. Nachr, 229, pp. 51-71, 2001. doi: 10.1002/1522-2616(200109)229:13.0.CO;2-4.
2. *Langer R.E.* The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points/ R. Langer // Trans. Amer. Math. Soc. V. 90, pp.113–142, 1959.
3. *Nijimbere V.* Asymptotic "Approximation of the Eigenvalues and the Eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld Equation on Infinite Intervals /V. Nijimbere // *Advances in Pure Mathematics*, 9, pp. 967-989, 2019. DOI: 10.4236/apm.2019.912049.
4. *Locker J.* Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators, Mathematical Surveys and Monographs/J. Locker// American Mathematical Society, Rhode Island, 2000, vol. 73, doi: 10.1090/surv/073
5. *Бобочко В.М., Перестюк М.О.* Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту/В.М.Бобочко, М.О.Перестюк // Київ: Наукова думка. 310 с.
6. *Самойленко А.М., Ключник І.Г.* Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних/А.М.Самойленко, І.Г. Ключник // Нелінійні коливання. (2009). Т.12, № 2.- С. 208-234.
7. *Самойленко А. М., Самусенко П. Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь з точками повороту. I/ А.М. Самойленко, П.Ф. Самусенко// *Український математичний журнал*, вип. 72, вип. 12, Грудень 2020, с. 1669-1681
8. *Zelenska I.* System of singularly perturbed equations with differential turning point of the first kind /I. Zelenska// Russ Math. 2015.- 59. – P.55–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X15030068
9. *Собчук В. В., Зеленська І.О.* Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій/В.В.Собчук, І.О.Зеленська// Науковий вісник Ужгородського університету, 2022. 41(2). С. 78-90. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90
10. *Sobchuk V., Laptiev O., Zelenska I.* Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point/ *V. Sobchuk, O. Laptiev, I. Zelenska*// Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, Vol. 71(3), 2023, Article number: e145682 DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682

References

1. EBERHARD, W., FREILING, G., WILCKEN, K. (2001) Indefinite eigenvalue problems with several singular points and turning points. *Math. Nachr*, **229**, pp. 51-71. doi: 10.1002/15222616(200109)229:13.0.CO;2-4.
2. LANGER, R.E. (1959) The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points. *Trans. Amer. Math. Soc.* **V. 90**, pp.113–142.
3. NIJIMBERE, V. (2019) Asymptotic approximation of the eigenvalues and the eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld equation on infinite intervals". *Advances in Pure Mathematics*, **9**, pp. 967-989. DOI: 10.4236/apm.2019.912049.
4. LOCKER, J. (2000) Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators, Mathematical Surveys and Monographs. *American Mathematical Society, Rhode Island*, **V. 73**, doi: 10.1090/surv/073
5. BOBOCHKO V., PERESTYUK M. (2002) *Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points*. Kyiv: Scientific opinion.

6. SAMOILENKO, A., KLYUCHNYK, I. (2009) On the asymptotic integration of a linear system of differential equations with a small parameter with partial derivatives". *Nonlinear oscillations*. **V. 12(2).** pp. 208-234.
7. SAMOILENKO, A., SAMUSENKO, P. (2020) Asymptotic Integration of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations With Turning Points. Part I. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, **V 72(12)**, pp. 1669-81, doi:10.37863/umzh.v72i12.6261.
8. ZELENSKA, I. (2015) System of singularly perturbed equations with differential turning point of the first kind. *Russ Math*. **2015**.- **59**. – p.55–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X15030068
9. SOBCHUK, V., ZELENSKA, I (2022) Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of essentially singular functions. *Scientific Bulletin of the Uzhhorod University*, **V. 41(2),** p. 78-90. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90 (in Ukrainian).
10. SOBCHUK, V., LAPTIEV, O., ZELENSKA, I. (2023) Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, **V. 71(3)**. pp. Article number: e145682 DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682

Надійшла до редколегії 10.09.2023