

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.29>

Шевельова Н.В., аспірант,
Ходанен Т.В., к.ф.-м.н., доц.

N.V. Shevelova, postgraduate student,
T.V. Khodanen, PhD, docent

Система колінеарних електрично та магнітно проникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами

A set of collinear electrically and magnetically permeable cracks between two piezoelectromagnetic materials

Дніпровський національний університет імені
Олеса Гончара, м. Дніпро, пр-т Гагаріна, 72,
e-mail: thod7474@gmail.com
e-mail: nataliya.shevelyova@gmail.com

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro,
Gagarin Av., 72,
e-mail: thod7474@gmail.com
e-mail: nataliya.shevelyova@gmail.com

Розглянуто плоску деформацію біматеріального простору, що складається з двох п'єзоелектромагнітних півпросторів зі скінченним набором електрично і магнітно проникних тріщин уздовж межі поділу матеріалів. Визначено в замкнутому вигляді всі необхідні механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж межі поділу матеріалів, а також швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин

Ключові слова: п'єзоелектромагнетик, інтерфейс, множина тріщин.

The plane strain problem for the bimaterial space consisting of two piezoelectromagnetic half-spaces with a finite set of cracks along the material interface is considered. It is assumed that the edges of the crack are electrically and magnetically permeable, and a mixed mechanical load and electric and magnetic fields can be set at infinity.

The presentations of electro-magneto-mechanical quantities through a piecewise analytical vector function are constructed with the use of constitutive equations for piezoelectromagnetic materials. By means of these presentations the problem of linear relationship is formulated and solved analytically. Using the obtained solution, all the necessary mechanical, electrical, and magnetic components along the material interface as well as the energy release rate for all crack tips are found analytically. The asymptotic presentations of all fields around the crack tips and the crack closure integral method were used.

Numerical results are obtained for different loads, location of the cracks, their number and lengths. A significant increase in energy release rates was demonstrated because of cracks converge, especially for the tips located closest to each other.

Key Words: piezoelectromagnetic, interface, cracks set.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Волокнисті та шаруваті композити, виготовлені з п'єзоелектричних та магнітоелектропружних матеріалів [1, 2], знаходять все більш широке застосування в техніці. Натомість такі матеріали дуже часто руйнуються через свою крихкість. Але систему міжфазних тріщин у магнітоелектропружних матеріалах дотепер вивчено недостатньо. Лише в роботах [3] та [4] розглянуто плоску задачу для магнітоелектропружного композита із електро-магнітно-ізованими та електро-магнітно-провідними міжфазними тріщинами, відповідно. Тому в даній роботі

розглядається проблема довільної кількості колінеарних електропроникних міжфазних тріщин довільної довжини та розташування в магнітоелектропружному біматеріалі, що раніше не вивчалась.

2. Система колінеарних тріщин на межі поділу матеріалів

Будемо вважати, що на межі поділу матеріалів $x_3 = 0$ виникли n електро- та магнітопроникних тріщин $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_1 \leq b_2$, ..., $a_n \leq x_1 \leq b_n$, які можуть мати довільну довжину і розташування. При цьому матеріали мають клас

симетрії b_{mm} і попередньо поляризовані в напрямку осі x_3 . Вважається, що береги тріщин вільні від механічних напружень.

Позначимо через $L' = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ множини тріщин, а через $L'' = (-\infty, \infty) \setminus L'$ – ділянки інтерфейсу поза тріщинами. Тоді умови на межі поділу матеріалів для поставленої задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0, \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L', \quad (1) \\ u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0), \quad \sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \\ E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0), \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0), \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) = D_3^{(2)}(x_1, 0), \\ B_3^{(1)}(x_1, 0) = B_3^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L'', \quad (2) \end{aligned}$$

де σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій, D_i , B_i – складові електричної та магнітної індукцій, E_i , H_i – напруженості електричного та магнітного полів, $i = 1, 3$.

В роботі [5] отримано такі представлення компонент напружень та стрибків переміщень через функції, аналітичні у всій площині за виключенням області тріщини:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = \mathfrak{G}_j \left(\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) \right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + is_j \langle u_3'(x_1) \rangle = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1), \quad (4)$$

причому

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (5)$$

де $\tilde{\sigma}_j = \sigma^\infty / r_j$, $\tilde{\tau}_j = -m_j \tau^\infty / r_j$, $j = 1, 3$.

Використовуючи представлення (3) при $j = 1$, з граничних умов (1) одержуємо

$$\Phi_1^+(x_1) + \gamma_1 \Phi_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L'. \quad (6)$$

На основі [6] розв'язок задачі лінійного спряження (6) можна подати у вигляді

$$\Phi_1(z) = X(z) P_n(z), \quad (7)$$

де $X(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\frac{1}{2} + i\varepsilon_1} \cdot (z - b_k)^{-\frac{1}{2} - i\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 = \frac{\ln \gamma_1}{2\pi}$,
 $P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n$.

Коефіцієнти C_k ($k = 0, 1, \dots, n$) визначаються з умови (5) при $j = 1$ та умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин. В результаті одержуємо:

$$C_0 = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1, \quad (8)$$

$$\int_{a_m}^{b_m} P_n(t) X(t) dt = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Останнє співвідношення призводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{a}_{m\alpha} C_\alpha = \tilde{b}_m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

У цій системі

$$\hat{a}_{m\alpha} = I_{m, n-\alpha}, \quad \tilde{b}_m = -I_{mn} C_0, \quad (10)$$

$$I_{ms} = \int_{a_m}^{b_m} \frac{t^s}{\prod_{k=1}^n (t - a_k)^{\frac{1}{2} - i\varepsilon_1} \cdot (t - b_k)^{\frac{1}{2} + i\varepsilon_1}} dt.$$

Точний аналітичний розв'язок системи (9) можна знайти для будь-якого значення n методом Гауса.

З використанням отриманого розв'язку напруження поза тріщинами може бути знайдене за формулою:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \mathfrak{G}_1 (1 + \gamma_1) \Phi_1(x_1), \quad (11)$$

а стрибки переміщень на тріщині – в результаті інтегрування формули:

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + is_1 \langle u_3'(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \Phi_1^+(x_1). \quad (12)$$

Електричне та магнітне поля можуть бути визначені за формулами [5].

Особливий інтерес представляють асимптотичні вирази для напружень та стрибків переміщень в околі вершин тріщин. На основі формул (11) і (12) ці вирази в околі правої вершини k -ї тріщини можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = \\ = \bar{R}_k (x_1 - b_k)^{-0.5 + i\varepsilon_1}, \quad (13) \end{aligned}$$

де $\bar{R}_k = (1 + \gamma_1) \mathfrak{G}_1 \bar{P}_n(b_k) (b_k - a_k)^{-0.5 - i\varepsilon_1} \times$
 $\times \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0.5 - i\varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0.5 + i\varepsilon_1}$,

$$\langle u_1(x_1) \rangle + i s_1 \langle u_3(x_1) \rangle \Big|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = T_k (b_k - x_1)^{0.5 - i \varepsilon_1}, \quad (14)$$

$$\text{де } T_k = \frac{i(1 + \gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1} (0.5 - i \varepsilon_1)} P_n(b_k) (b_k - a_k)^{-0.5 + i \varepsilon_1} \times \\ \times \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0.5 + i \varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0.5 - i \varepsilon_1}.$$

Беручи до уваги, що $\langle \varphi(x_1) \rangle = 0$ і $\langle \psi(x_1) \rangle = 0$ для $-\infty < x_1 < \infty$, швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) біля вершин тріщини b_k може бути визначена за формулою:

$$G_{b_k} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_{b_k}^{b_k + \Delta l} \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \right. \\ \left. + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle \right] dx_1. \quad (15)$$

Використаємо далі наступну тотожність:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle = \\ = -m_1^{-1} \text{Im} \left\{ \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - i m_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle + i s_1 \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle \right] \right\}. \quad (16)$$

Підставляючи формули (13), (14) в (16), а потім в (15) і проводячи інтегрування, отримуємо:

$$G_{b_k} = -\frac{\pi}{4m_1} \text{Im} \left(\frac{1 - 2i\varepsilon_1}{\cosh(\pi\varepsilon_1)} \bar{R}_k S_k \right). \quad (17)$$

Аналогічним чином знайдено ШЗЕ і біля лівих вершин тріщин.

3. Результати та їх аналіз

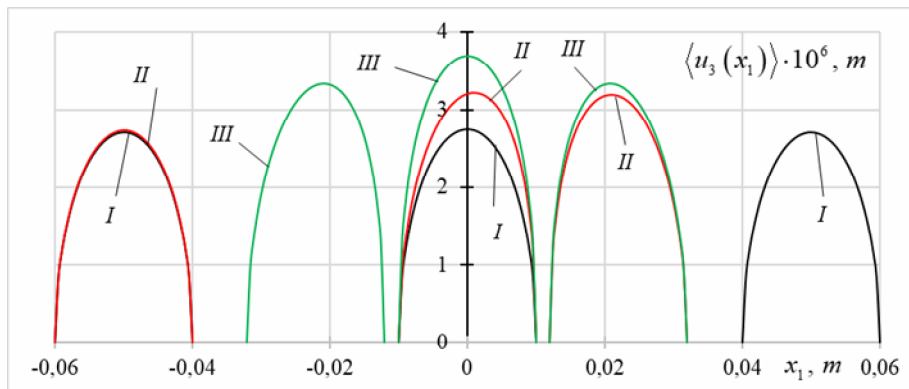


Рис. 2. Зміна розкриття тріщин при зміні відстаней між ними

Для числової ілюстрації розглянемо біматеріал, що складається з композиту $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ з об'ємними частками BaTiO_3 $V_f = 0.5$ (верхній матеріал) і $V_f = 0.1$ (нижній). Характеристики цих матеріалів наведено в [2].

Результати для випадку трьох тріщин однакової довжини 20 мм, які мають координати лівих вершин $a_1 = -60$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 40$ мм (лінії I), $a_1 = -60$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 12$ мм (II), $a_1 = -32$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 12$ мм (III) показано на рис. 2. Зовнішнє механічне навантаження було обрано таким: $\sigma^\infty = 10^7$ Па, $\tau^\infty = 0$, а значення електричної та магнітної індукцій: $D_3^\infty = 0$, $B_3^\infty = 0$. З рис. 2 видно, що зближення тріщин призводить до суттєвого збільшення розкриття середньої тріщини, а також збільшення значень розкриття для тієї тріщини, що стає ближче до середньої.

У табл. 1 показано зміни швидкості звільнення енергії біля лівої G_{a_2} та правої G_{b_2} вершин середньої тріщини $a_2 = -10$ мм, $b_2 = 10$ мм для фіксованого положення лівої тріщини $a_1 = -32$ мм, $b_1 = -12$ мм та зміни положення правої тріщини. З результатів, наведених в таблиці 1, видно, що зближення тріщин приводить до суттєвого росту швидкостей звільнення енергії, особливо для найближче розташованих вершин.

Таблиця 1

Зміни швидкостей звільнення енергії біля правої та лівої вершин середньої тріщини

Розташування тріщин, мм	$a_3 = 80$, $b_3 = 100$	$a_3 = 40$ $b_3 = 60$	$a_3 = 20$, $b_3 = 40$	$a_3 = 12$, $b_3 = 32$	$a_3 = 11$, $b_3 = 31$	$a_3 = 10,5$, $b_3 = 30,5$
$G_{b_2}, N/m$	26.434	27.447	31.973	56.666	81.753	124.141
$G_{a_2}, N/m$	46.569	47.598	50.453	56.666	59.350	61.803

4. Висновки

Проаналізовано плоску деформацію біматеріального простору, що складається з двох п'єзоелектромагнітних півпросторів зі скінченим набором електро і магнітно проникних тріщин уздовж межі поділу матеріалів. З використанням представлень електро-магніто механічних величин через кусково-аналітичну вектор-функцію сформульовано задачу лінійного спряження, яку розв'язано аналітично. Знайдено

швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин. Проведено чисельну ілюстрацію одержаних аналітичних розв'язків.

Результати роботи було викладено у доповіді на VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 28-30 серпня 2023 р.). Автори щиро вдячні організаторам.

Список використаних джерел

1. Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5 т. Т. 5 Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга / Под ред. Гузя А. Н. – Київ: Наукова думка, 1989. – 280 с.
2. Sih, G. C. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite / G. C. Sih, Z. F. Song // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003. – **39**. – P. 209–227.
3. Feng W. J. Fracture analysis of bounded magnetoelastoelectric layers with interfacial cracks under magnetoelastoelectric loads: plane problem / Feng, W. J., Su, R. K. L., Liu, J. X., Li, Y. S. // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2010. – **21**. – P. 581-594.
4. Shevelova N. A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelastoelectric bimaterial / Shevelova N., Khodaneni T., Chapelpe F., Lapusta Y., Loboda V. // Acta Mechanica, – 2023. – P. 1-17. Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.
5. Herrmann K. P. An interface crack with contact zones in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / Herrmann K. P., Loboda V. V., Khodaneni T. V. // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – **80** (6), P. 651-670.
6. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity. – Noordhoff, Groningen, 1963. – 707 с.

References

1. GRINCHENKO, V. T., ULITKO, A. F. and SHULGA, N. A. (1989) *Elektrouprugost*. Kiev: Naukova dumka (*Mechanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsiy*: v 5 t.; t. 5).
2. SIH, G. C. and SONG, Z. F. (2003) Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite. *Theor. Appl. Fract. Mech.* **39**, p. 209–227.
3. FENG, W. J., SU, R. K. L., LIU, J. X. and LI, Y. S. (2010) Fracture analysis of bounded magnetoelastoelectric layers with interfacial cracks under magnetoelastoelectric loads: plane problem. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **21**, p. 581-594.
4. SHEVELOVA, N., KHODANEN, T., CHAPPELLE, F., LAPUSTA, Y. and LOBODA, V. (2023) A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelastoelectric bimaterial. *Acta Mechanica*. p. 1-17. Available from: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.
5. HERRMANN, K. P., LOBODA V. V. and KHODANEN, T. V. (2010) An interface crack with contact zones in a piezoelectric /piezomagnetic bimaterial. *Archive of Applied Mechanics* **80** (6), p. 651-670.
6. MUSKHELISHVILI, N. I. (1963) *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.

Надійшла до редколегії 01.09.23