Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 47, e2024001
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.pe2024001.id586

O papel da intuição no ensino da matemática segundo Felix Klein

The role of intuition in mathematics teaching according to Felix Klein

El papel de la intuición en la enseñanza de las matemáticas según Felix Klein

Circe Mary Silva da Silva[1]

RESUMO

A intenção deste estudo é problematizar o conceito de intuição na obra *Matemática elementar de um ponto de vista superior* (1908), de Felix Klein, com o objetivo de compreender o significado do conceito de intuição para o autor e de ressaltar o seu papel no ensino. A metodologia de pesquisa utilizada foi a bibliográfica analítica e a conclusão foi de que Klein trouxe uma nova proposta para o ensino da matemática, que deve ser abordada sob três perspectivas: a perspectiva matemática, que preconiza uma matemática orgânica - sem descontinuidade entre o ensino elementar, médio e superior - e com aplicações; a perspectiva histórica, que sugere o uso do princípio genético; e a perspectiva didática, que recomenda o uso do método intuitivo.
Palavras-chave: Matemática; Ensino da Matemática; Intuitivo; História da Matemática.

ABSTRACT

The intention of this study is to problematize the concept of intuition in the work *Elementary Mathematics from a Superior Point of View* (1908), by Felix Klein, with the aim of understanding the meaning of the concept of intuition for the author and highlighting its role in teaching. The research methodology used was analytical bibliography and the conclusion was that Klein brought a new proposal for the teaching of mathematics, which must be approached from three perspectives: the mathematical perspective, which advocates organic mathematics - without discontinuity between elementary education, medium and higher - and with applications; the historical perspective, which suggests the use of the genetic principle; and the didactic perspective, which recommends the use of the intuitive method.
Keywords: Mathematics; Mathematics Teaching; Intuitive; History of Mathematics.

RESUMEN

La intención de este estudio es problematizar el concepto de intuición en la obra *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior* (1908), de Felix Klein, con el objetivo de comprender el significado que tiene el concepto de intuición para el autor y resaltar su papel. en la enseñanza. La metodología de investigación utilizada fue la bibliografía analítica y la conclusión fue que Klein traía una nueva propuesta para la enseñanza de las matemáticas, la cual debe abordarse desde tres perspectivas: la perspectiva matemática, que propugna la matemática orgánica -sin discontinuidad entre la educación primaria, media y superior- y con aplicaciones; la perspectiva histórica, que sugiere el uso del principio genético; y la perspectiva didáctica, que recomienda el uso del método intuitivo.
Palabras clave: Tecnología digital; Producción de vídeo; Matemáticas; Enseñanza; Festival de vídeo.

1 Doutorado em Pedagogia pela Universitat Bielefeld (UB, Alemanha). Professora colaborada no Programa Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Campus Centro. Endereço para correspondência: Rua Gomes Carneiro, 01 – Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil, CEP: 96010-610. E-mail: cmdynnikov@gmail.com.

MOTIVAÇÃO E CONTEXTO

> O professor deve, por assim dizer, ser um diplomata. Deve conhecer a psicologia das crianças para conseguir captar o seu interesse e só poderá ter sucesso se apresentar os assuntos de forma intuitivamente compreensível (Klein, 2009, p. 4).

A epígrafe acima trata de ensino, interesse e método intuitivo – conceitos relevantes para Klein que, além de ter sido um dos poucos matemáticos com uma visão de conjunto da matemática (Rodrigues, 2009), preocupou-se com as questões de ensino e aprendizagem nesta área do conhecimento. Ele legou à posteridade suas contribuições. Após mais de cem anos da publicação de *Matemática elementar de um ponto de vista superior,* pesquisadores voltam sua atenção para as ideias matemáticas, históricas e didáticas desse texto. O objetivo do presente estudo é problematizar o conceito de intuição, segundo Klein, por meio de uma interpretação dos escritos do próprio autor.

À época de Felix Christian Klein (1849-1925), o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) discutia amplamente o papel da intuição na matemática. Para Poincaré, a criação em matemática necessitava da intuição; a lógica só não bastava: "Necessitamos uma faculdade que nos faça ver o fim de longe, e essa faculdade é a intuição" (Poincaré, 1995, p. 21). Entre os vários tipos de intuição, ele situava em primeiro lugar o apelo aos sentidos, à imaginação e dizia que, também, a generalização por indução era um tipo de intuição.

O verbete do dicionário da língua portuguesa Larousse Cultural (1992, p. 647) "considera a intuição como conhecimento claro, direto, imediato da verdade sem auxílio do raciocínio". Enquanto para Abbagnano (2007, p. 581), "a intuição é entendida como a relação direta (sem intermediários) com um objeto qualquer, por isso, implica a presença efetiva do objeto". À intuição Klein atribuiu grande importância não apenas na investigação matemática, mas também no ensino, conforme discutirei neste texto.

Na *Encyclopedia of Mathematics Education* (2014), a entrada sobre intuição apresenta a etimologia dessa palavra: do latim, "intuire" seria entendido como contemplar, olhar para dentro (Tirosh; Tsamir, 2014). Os autores esclarecem que, dependendo da área de conhecimento, o significado pode variar. Para Descartes (1596-1650), a intuição é uma forma de conhecimento pela qual é revelada a própria essência das coisas; para Jacques Hadamard (1865-1963) e Poincaré, a intuição é fonte de inovação genuína e criativa e, para o psicólogo Bruner (1971), é o primeiro e necessário passo para a educação continuada.

Pesquisas sobre a intuição e a educação matemática têm sido realizadas por diversos investigadores. Harteis, Koch e Morgenthaler (2008, p. 68) realizaram um estudo acerca do conhecimento sobre a intuição numa perspectiva educativa. Eles entendem que a intuição é geralmente definida como a "capacidade de agir ou decidir apropriadamente sem seguir conscientemente uma certa rotina ou regra". A posição de Descartes relativamente à intuição foi objeto de pesquisa de Oliveira (2008), para quem Descartes tem uma concepção de intuição diferente daquela de Aristóteles (384 - 322 a.C.): mesmo sem saber sua origem, podemos ter acesso a certos objetos pela intuição - no caso de objetos matemáticos. Meneghetti (2009) afirma que, antes de Immanuel Kant (1724-1804), distinguiam-se duas posições filosóficas: aqueles que fundamentavam o conhecimento inteiramente na razão, como Platão (428-347 a.C.), e aqueles que o fundamentavam exclusivamente na intuição ou experiência, como John Locke (1632-1704), Isaac Newton (1643-1727), entre outros. Entretanto, em Kant a intuição que se relaciona com a sensação denomina-se intuição empírica. Clímaco e Otte (2010, p. 178), ao analisarem a intuição em Bernard Bolzano (1781-1848), apontam que este matemático insistiu que não se deve utilizar a intuição em provas matemáticas, e que de fato a matemática, ao se manter fiel à intuição, chegou a contradições. No entanto, os autores afirmam: "Quando não estamos lidando com infinitos, infinitésimos e dimensões maiores do que três, frequentemente nossa intuição é plenamente confirmada". Outro pesquisador que analisou a intuição na *Crítica da Razão Pura* de Kant foi Oliveira (2020). Esse autor ressaltou o papel essencial de Kant no esclarecimento desse conceito – "somente a construção geométrica possui axiomas, ou verdades imediatamente evidentes em intuição, [...] as fórmulas numéricas constroem símbolos que podem se referir à experiência em geral" (Oliveira, 2020, p. 30). A intuição tem sido estudada principalmente na psicologia cognitiva e as contribuições que a história da educação matemática pode fornecer são pouco conhecidas pelos professores. Para o psicólogo Bruner (1971), a intuição é um salto de pensamento não ligado a um pensamento passo a passo, cuidadoso e informado; significa, em suma, adivinhar ou dar um palpite. Bruner encorajou os alunos a usarem esse tipo de pensamento.

Baldin (2013), no artigo o *Projeto Klein de Matemática em português*: uma ponte entre a matemática avançada e a escola, idealizado pela Comissão Internacional do Ensino da Matemática (ICMI), desafiou pesquisadores a escreverem artigos que abordassem, entre outras, questões do tipo – que matemática é, nos dias atuais, a mais excitante e viva? Na *Matemática Elementar de um ponto de vista superior,* Klein coloca em destaque uma matemática viva. No presente estudo, procurei identificar uma resposta de Klein a essa questão.

A intuição representa, no processo de aprendizagem, um papel coparticipante que deve ser levado em consideração pelo docente. Na escola, em geral, é comum que os alunos se apropriem de conhecimentos de forma acabada, algoritmos prontos, teoremas inquestionáveis e que parecem ter surgido como num passe de mágica. Alves (2016) afirma que muitos dos obstáculos enfrentados pelos alunos resultam da metodologia que o professor utiliza, quando não tem em conta tanto a natureza e o desenvolvimento do raciocínio matemático, como a psicologia cognitiva.

CAMINHOS DA PESQUISA

Neste estudo, ao discutir as ideias de Klein contidas na obra *Matemática elementar sob um ponto de vista superior,* procuro entender o conceito de intuitivo e o modo como o autor exemplifica um ensino que considera a intuição como ponto de partida. As edições da obra investigadas foram as que seguem:

Quadro 1 - Livros Pesquisados de Felix Klein

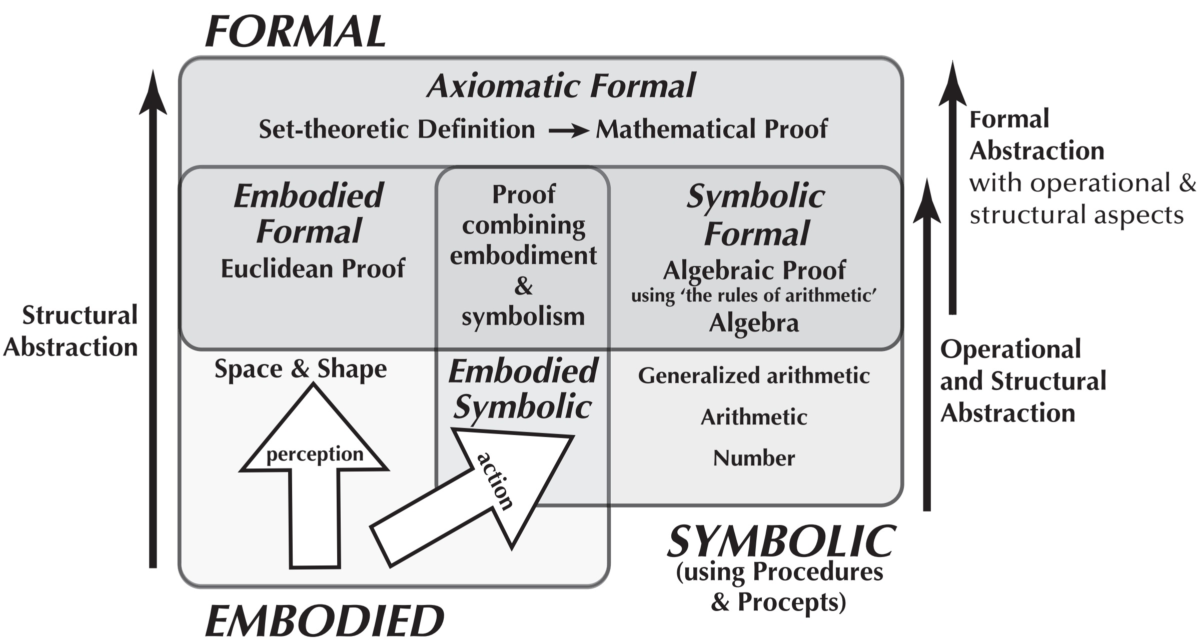
Título	Edição	Ano
Elementarmathematik	1ª	1908
Elementary Mathematics from an advanced standpoint	1ª	1945
Matemática Elementar de um ponto de vista superior: Aritmética	1ª	2009
Matemática Elementar de um ponto de vista superior: Álgebra	1ª	2010
Matemática Elementar de um ponto de vista superior: Análise	1ª	2011
Matemática Elementar de um ponto de vista superior: Geometria Partes I e II	1ª	2012
Matemática Elementar de um ponto de vista superior: Geometria Parte III	1ª	2014

Fonte: elaborado pela autora

A metodologia adotada neste trabalho é a bibliográfica analítica, na medida em que se interpreta o conceito de intuição nas obras do alemão Klein bem como as suas relações desse conceito com o ensino da matemática. A análise dos dados apoia-se, parcialmente, na abordagem de Richard e Sierpinska (2004), que consideram necessário, para uma descrição da linguagem, a identificação das unidades significantes, das formas e regras de conexão dessas unidades, assim como a realização dos objetivos de tal conexão. As unidades significantes encontradas foram: intuição, lógica e formalização.

David Tall (2013) oferece suporte teórico para a análise dos conceitos de intuição e formalização. Segundo ele, o pensamento matemático começa com objetos físicos e operações sobre esses objetos. Quanto ao pensamento matemático, o autor entende que este se desenvolve na criança a partir de uma matemática prática que explora a forma, o espaço e a contagem em conceitos como o número. Nessa fase, há o mundo corpóreo (intuitivo) e simbólico em ação. Entretanto, à medida que o raciocínio matemático se desenvolve, há uma mudança adicional que vai do estudo de objetos para a matemática formal. A teoria de Tall, que traz a ideia dos três mundos, serviu como inspiração e base para escolhermos as categorias de abordagens apresentadas na obra de Klein.

Figura 1 - Os três mundos conceituais da matemática segundo Tall



Fonte: Tall (2013, p. 19)

Para Tall (2013), o mundo formal não é necessariamente antagônico aos mundos corpóreo e simbólico. Existem resultados, chamados de teorema de estrutura, que estabelecem resultados dos outros dois mundos, misturando todos os três mundos da matemática em uma única estrutura integrada. Para ele, "isso dá uma coerência essencial à matemática, que oferece uma vantagem em dar sentido ao pensamento matemático em todos os níveis de aprendizagem" (Tall, 2013, p. 18). Para este pesquisador, o sistema dos números reais é um exemplo de uma mistura de corpóreo, simbólico e formal, em que "cada um contribui com diferentes aspectos para a compreensão do número" (Tall, 2013, p. 21).

Segundo Tall (2013), para o desenvolvimento do pensamento matemático é preciso comprimir e conectar o conhecimento em diferentes estruturas de conhecimento. "Nossos cérebros biológicos evocam conceitos pensáveis por uma ligação seletiva de estruturas neurais envolvendo uma gama de sentidos e percepções" (Silva, 2023, p. 8).

Tall (2013) considera que, a longo prazo, os indivíduos usam diferentes tipos de matemática o que os torna indivíduos pensantes na sociedade. Mas a alfabetização matemática necessita de uma matemática prática, com alguns *insights* sobre a matemática teórica. Não apenas os psicólogos, mas também matemáticos especialistas - como aquele investigado no presente estudo - refletiram sobre a forma como os indivíduos entendem a matemática formal e isso permitiu que percebessem as diferentes necessidades dos estudantes tanto em nível universitário como secundário.

Segundo este autor, a transformação do desenvolvimento prático e teórico de objetos corpóreos e operações simbólicas para o formalismo envolve mudanças significativas de significado (Tall, 2013). Ocorre que, na matemática escolar, as operações da aritmética e as figuras geométricas evoluem a partir de experiências práticas até alcançarem o nível mais elevado de definições e deduções teóricas. Isso acarreta, que: "A mudança para uma abordagem formal axiomática é susceptível de ser problemática, uma vez que as operações formais não exigem a especificação de qualquer procedimento de operação" (Tall, 2013, p. 256).

O AUTOR E A OBRA

> [...] Penso que Felix Klein tinha esse forte sentimento pela ideia de matemática como cultura. Ele também estava claramente preocupado em explorar a matemática como uma forma de conhecimento cultural, com significados profundos e valorizados e não apenas como conhecimento de rotina a ser acumulado e memorizado objetivando os exames (Bishop, 2016, p. 168).

Klein não usou a palavra cultura na *Matemática elementar sob um ponto de vista superior,* como Bishop reconhece, entretanto, o seu grande desafio era trazer o ponto de vista avançado de um conhecimento cultural para o introduzir numa matemática elementar destinada aos jovens estudantes (Bishop, 2016).

Felix Klein nasceu em Düsseldorf. Foi estudar na Universidade de Göttingen, onde obteve o título de doutor, em 1868, sob a orientação de Julius Plücker e Rudolf Lipschitz. Fez carreira na Universidade de Göttingen e orientou mais de duas dezenas de doutorados, entre eles, o de Mary Frances Winston Newson, que foi a primeira mulher norte-americana a obter o doutoramento no exterior, em 1896. Klein foi um matemático multifacetado, pois além de se destacar em várias áreas da matemática, exerceu, no início do século XX, um protagonismo no debate que vinha acontecendo a respeito da educação matemática. Em 1908, por ocasião do 3º Congresso Internacional de Matemática, foi eleito presidente do ICMI. Nesse mesmo ano, surgiu a primeira parte do livro *Matemática elementar sob um ponto de vista superior*, escrito a partir de notas de um curso que ministrou aos professores de ginásios da Alemanha no semestre 1907-1908 e publicado em 1908 pela Editora Teubner. O livro alcançou grande repercussão internacional (Silva; Rios, 2019).

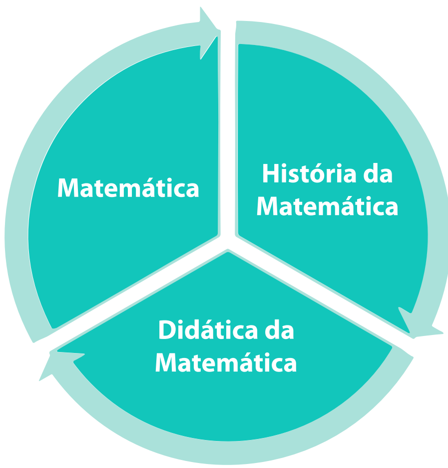
Após a primeira edição em 1908, em alemão, as reedições e traduções de *Matemática elementar sob um ponto de vista superior* têm sido muitas[2], mantendo viva uma obra de mais de cem anos. Em Portugal, as edições dessa obra traduzida para o português ocorreram de 2009 a 2014.

Segundo Menghini e Schubring (2019), o *Elementarmathematik,* de um manuscrito tornou-se um bestseller. A recepção a este livro foi diferente nos vários países em que foi publicado. No Brasil, o principal personagem que impulsionou a circulação de propostas de mudança no ensino de matemática, na primeira metade do século XX, foi Euclides Roxo (1890-1950), à época professor do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Percebe-se uma consonância com aquelas ideias elaboradas por Felix Klein em 1908, trazendo uma conexão entre a Aritmética, Álgebra e Geometria que, reunidas, resultariam numa única disciplina – a matemática (Silva; Rios, 2019) e Valente (2014).

Neste livro, Klein usa diferentes perspectivas: a perspectiva matemática, a perspectiva histórica e a perspectiva didática. A perspectiva didática visa a preparar os futuros professores para as suas tarefas docentes e fornecer-lhes a visão geral e os antecedentes necessários; ele justifica a perspectiva histórica dizendo considerar que o desenvolvimento histórico é a "única forma científica" de ensinar matemática; e quanto à perspectiva a matemática, esta, diz o autor, é necessária como uma ferramenta para explicar os conteúdos da matemática escolar, conforme figura 2.

Figura 2 - Três perspectivas

Três Perspectivas de Felix Klein



Fonte: Elaborado pela autora

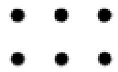
2 A Open Library indica 39 edições em língua alemã e inglesa: https://openlibrary.org/works/OL3783651W/Elementarmathematik_vom_h%C3%B6heren_Standpunkte_aus?mode=all#editions-list

O CONCEITO DE INTUITIVO - ANSCHAUUNG

Klein não se limita a uma única concepção de intuitivo, usando-a em diferentes contextos. Na aritmética, apresenta o método intuitivo e genético para responder à questão de como os números são ensinados nas escolas alemãs a partir dos objetos concretos e familiares à criança (Klein, 2009, p. 9).

No ensino inicial da aritmética, Klein (2009) aconselha a que não se faça uma exposição sistemática das leis fundamentais da adição e multiplicação; diz, também, que uma demonstração intuitiva da comutatividade da multiplicação poderia ser introduzida como se observa na figura 3.

Figura 3 - Demonstração intuitiva da propriedade comutativa



"Se contarmos os pontos por linhas, como existem duas com três pontos cada, obtemos 2.3 pontos; por outro lado, se contarmos os pontos por colunas, obtemos 3.2 pontos; e assim podemos concluir que 2.3=3.2"

Fonte: Klein (2009, p. 15)

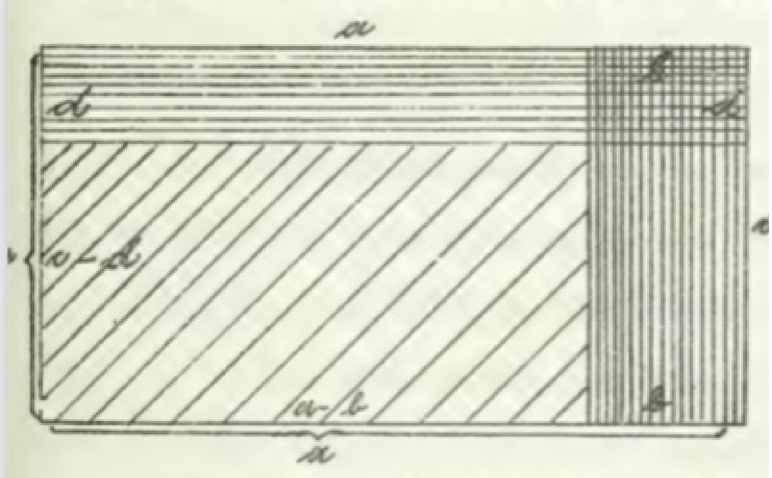
Klein, em alguns momentos, é um seguidor de Kant, quando diz que "[...] as leis do cálculo são resultados necessários imediatos da percepção", no sentido de que a intuição seria a percepção interior (Klein, 2009, p. 15).

Para ultrapassar a percepção sensorial, usa-se o princípio da indução matemática que traz a verdade intuitiva e, para fundamentar as leis do cálculo, o autor concorda com Poincaré, dizendo que "a estabilidade de toda estrutura matemática se baseia na intuição, no mais amplo sentido desta palavra" (Klein, 2009, p. 16).

O momento certo para a passagem do intuitivo para o dedutivo é explicado por Klein com as seguintes palavras: "Até que se obtenha uma demonstração da compatibilidade lógica no domínio dos números inteiros, devemos ter presente que essa mesma compatibilidade se baseia apenas no facto de existirem coisas intuitivas, que se relacionam intuitivamente, obedecendo a estas leis" (Klein, 2009, p. 34).

Klein apresenta uma representação de uma "demonstração" intuitiva (Figura 4), para mostrar uma questão algébrica resolvida geometricamente pelo produto de segmentos, que resulta numa área. Comparando o desenho com os manuscritos, parece que este foi elaborado pelo próprio autor.

Figura 4 - Representação geométrica de $(a-b)(c-d)= ac-ad-bc+bd$



Fonte: Klein (1908, p. 65)

Outra importante menção à noção de intuição é aquela em que ele aborda a percepção empírica, que compreende tudo que nos cerca e é passível de medida; a outra é a percepção abstrata de espaço ou intuição idealizadora subjetiva, esta vai além da inexatidão e da observação dos sentidos.

No que concerne à Geometria, Klein afirma que a fonte de todos os conceitos geométricos fundamentais é a percepção. A partir deles faz-se uma idealização adequada e passa-se à fundamentação lógica. Ele explora muito o conceito de percepção espacial e vê os axiomas da geometria não como arbitrários, mas: "[...] antes afirmações razoáveis que são em geral induzidas pela percepção espacial e cujo conteúdo preciso é determinado por conveniência" (Klein, 2014, p. 84).

Ao discutir sobre o conceito de área, retoma o papel da intuição: "Esta noção está, contudo, presente na ideia intuitiva que todos temos de espaço, ainda que de uma forma mais ou menos inexata" (Klein, 2014, p. 64). Sugere começar com uma apresentação simples, conforme pode ser lida nos *Elementos* de Euclides. Outro exemplo de percepção intuitiva, em geometria, é a noção de curva. Para deixar essa noção mais clara e precisa, sugere o uso da análise, onde as noções de comprimento de arco, área de superfícies curvas, entre outras, podem ser pensadas como o limite de uma linha poligonal inscrita.

Klein prossegue afirmando que os objetos da geometria abstrata não podem ser totalmente apreendidos pela intuição espacial, todavia, a intuição permite construir uma demonstração e assim obter uma visão geral; além disso, ela é uma fonte de invenções e novas conexões mentais. No âmbito da geometria prática, ele dá como exemplo os números comensuráveis e incomensuráveis, que só fazem sentido na matemática de precisão, ou seja, matemática pura.

No meu entendimento, Klein expressa que os conceitos e axiomas fundamentais da geometria não são fatos obtidos por meio da percepção imediata, mas idealizações dessas percepções; por exemplo, o ponto não existe na percepção sensorial, ele existe a partir da imagem ficcional que fizemos de um pequeno espaço que se torna cada vez menor, ao qual não podemos chegar a não ser por meio de limite idealizado. É a percepção sensorial que induz ao conteúdo idealizado. Quando o intuitivo não consegue expressar com clareza, objetividade e certeza os objetos matemáticos, é preciso deixar de lado a intuição e passar à formalização, ou seja, à lógica.

Klein utilizou muitas vezes a palavra intuição ou intuitivo na sua obra, mas não apresentou nenhuma definição deste conceito. No quadro 2 incluímos as páginas em que usa as palavras intuição e suas adjetivações.

Quadro 2 - Síntese dos usos de intuição

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Aritmética (Parte 1, 2009)
Intuitivamente compreensível (p. 4); percepção espacial (p. 5) intuitivo (p. 10); percepção simultânea (p. 15); verdade intuitiva (p. 16); mínimo de intuição (p. 18); significado intuitivo (p. 32); coisas intuitivas (p. 34); demonstrações intuitivas (p. 35); interpretação intuitiva (p. 98)</td>
<td rowspan="3">Análise (2011)
Maneira indutiva (p. 91); processo indutivo (p. 92); percepção dos sentidos (p. 92); evidência intuitiva (p. 94); percepção ingênua (p. 95); intuição geométrica (p. 99); aproximação intuitiva (p. 100); percepção interna ou externa (p. 107); elementos intuitivos (p. 127); origem intuitiva (p. 130); intuição espacial e intuição numérica (p. 139)</td>
<td>Geometria (parte 2, 2012)
Percepção espacial (p. 11)</td>
</tr>
<tr>
<td>Geometria (parte 3, 2014)</td>
</tr>
<tr>
<td>Percepção espacial (p. 47); percepção o do espaço (p. 47); Ideia intuitiva (p. 64); percepção intuitiva (p. 67); percepção usual (p. 70); percepção sensorial (p. 73);Factos intuitivos (p. 74); percepção imediata (p. 83); posse intuitiva (p. 83); percepção geométrica intuitiva</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora

A maneira como o autor emprega as palavras intuição e percepção estão muito próximas. No Quadro 2, ao adjetivar a palavra intuição, visivelmente reconhece a existência de diferentes intuitivos. Entretanto, não parece estabelecer distinção entre percepção espacial e intuição espacial. Ao comentar o método de trabalho do investigador, ele reforça o papel da intuição dizendo que o matemático "usa essencialmente a sua fantasia e procede de maneira indutiva auxiliado por expedientes heurísticos" (Klein, 2011, p. 91).

Exemplificarei alguns usos do conceito de intuição que aparecem no Quadro 2. A percepção espacial a que o autor se refere é abordada sob o ponto de vista matemático, sem entrar nas importantes questões filosóficas ou psicológicas. Assim, ele assume que cada indivíduo já possua a percepção do espaço. Ele exemplifica: quando uma reta entra num triângulo através de um lado, ela tem de sair através de outro lado, isto é um fato trivial para a nossa percepção do espaço. Além disso, segundo ele, o conceito de área é "[...] uma ideia intuitiva que todos têm do espaço", ainda que seja mais ou menos inexata (Klein, 2011, p. 64). O autor usa os termos percepção sensorial e percepção imediata do espaço quando trata do axioma das paralelas, dizendo:

> [...] a questão de saber se podemos ou não decidir, talvez por meio da percepção sensorial, se o axioma das paralelas está correto; também este aspecto é esclarecido pela geometria não euclidiana. De fato, não é de todo verdade que a nossa percepção imediata do espaço nos mostre a existência de uma única paralela, pois é claro que a nossa sensação do espaço não é absolutamente exata (Klein, 2011, p. 73).

Para Klein, a nossa percepção sensorial ou experiência espacial é limitada. Ele exemplifica com a representação de uma reta, afirmando que podemos prolongar uma linha reta apenas numa parte finita do espaço, e assim, não contradizendo nossa experiência espacial, dizemos que a reta tem um comprimento enorme, mas finito.

Resumirei a discussão extremamente pertinente sobre os axiomas e teoremas que estão na base da geometria. Para Klein, a natureza das afirmações, colocadas na base da geometria, a partir das quais é possível, por métodos lógicos, demonstrar todos os resultados, não pode ser esclarecida. Citando o próprio autor: "Há o velho ponto de vista de que são posse de qualquer pessoa e de uma simplicidade tão óbvia que ninguém os poderia pôr em questão. Contudo este ponto de vista foi abalado em grande medida pela descoberta da geometria não euclidiana" (Klein, 2011, p. 83). Ele esclarece que nenhuma percepção do espaço e nem a lógica conduzem necessariamente ao axioma das paralelas de Euclides.

Klein contesta os autores que acreditam que os axiomas são apenas proposições arbitrárias, que os conceitos fundamentais são apenas símbolos, que podemos fixar axiomas sem limites desde que não tragam contradições lógicas. Ele posiciona-se diametralmente contrário aos formalistas e logicistas. "De acordo com a minha maneira de pensar, os axiomas da geometria não são arbitrários, mas antes afirmações razoáveis que são em geral induzidas pela percepção espacial e cujo conteúdo preciso é determinado pela conveniência" (Klein, 2011, p. 84).

Especificamente sobre a análise matemática, em que o autor discute a respeito das bases do Cálculo Diferencial e Integral, o próximo item foi dedicado.

CÁLCULO INFINITESIMAL

> "A ciência nunca descansa, apesar de, individualmente, o investigador poder fatigar" (Klein, 2011, p. 86).

Klein dá vida à matemática ao afirmar que ela está sempre em movimento, porque seu motor criativo é formado por milhares de indivíduos de diferentes culturas que, em grupo e munidos de suas próprias capacidades, não a deixam parar, impulsionando-a como uma roda d'água.

No início do século XX, Klein considerava que as ideias básicas de função, geometria analítica e cálculo infinitesimal eram conhecimentos que poderiam ser ensinados na escola. A sua proposta foi recebida, inicialmente, com alguma resistência e cautela. Mas, passados alguns anos, ela foi incorporada no ensino elementar, permanecendo até a atualidade em muitos países.

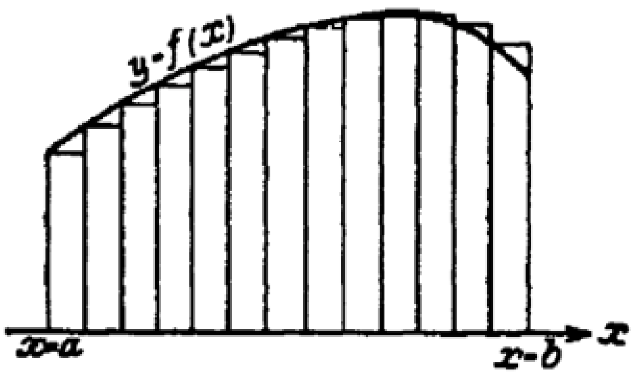
Klein apresentou o importante conceito de função na "roupagem" da teoria dos conjuntos. Essa teoria foi criada por Georg Cantor (1845-1918), que entendia ser o contínuo de todos os pontos x um exemplo de um conjunto:

> Deste novo ponto de vista estão-se a considerar funções que só são definidas para os pontos x de algum conjunto arbitrário de modo que, em geral, y diz-se uma função de x quando a todo elemento de um conjunto x de coisas (números ou pontos) corresponde um elemento de um conjunto y (Klein, 2011, 86).

Klein (2011, p. 109) desejava que os alunos tivessem familiaridade com "[...] os conceitos que são expressos pelos símbolos $y = f(x)$, dy/dx, $\int ydx$, [...] sob essas designações; não, de facto, como uma nova disciplina abstrata, mas como uma parte orgânica de toda instrução e que ela avance lentamente, iniciando com exemplos simples".

Ao abordar os princípios do cálculo infinitesimal, começa com uma digressão histórica. Ele mostra a importância de usar a intuição sensorial imediata, mesmo que o conceito de limite ainda não esteja fundamentado, mas é essa intuição que ajuda a entender o conceito básico do cálculo. Historicamente, por exemplo, a percepção sensorial foi a responsável pela criação da integral definida, o que foi feito partindo da definição da área de uma superfície como a soma de um número muito grande de retângulos (Figura 5), que foi usado por Kepler, Cavalieri, entre outros. A definição abstrata determina que "a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ isto é, a área limitada pela curva e os eixos como o limite da soma dos retângulos estreitos inscritos nesta área, quando o seu número aumenta e sua largura decresce sem limite" (Klein, 2011, p. 92).

Figura 5 - Área de uma superfície



Fonte: Klein (1945, p. 209)

A percepção sensorial deixa entrever que, como o desenho não é exato, não podemos diminuir indefinidamente esses retângulos, mas apenas aumentar seu número e deixá-los bem estreitos; portanto, como o limite não é exato, a medida dessa área só pode ser aproximada. A percepção sensorial nos dá uma visão ingênua. Do mesmo modo, ele ressalta que foi uma intuição ingênua que conduziu ao quociente diferencial de uma função, isto é, a tangente à curva.

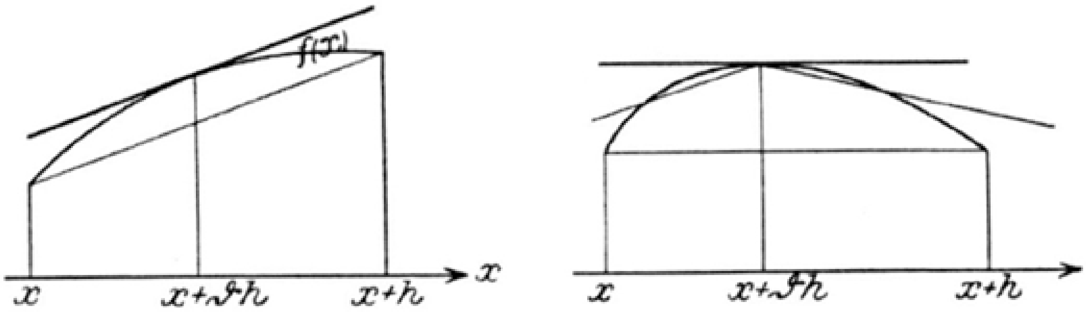
Newton desenvolveu o novo cálculo em numerosos exemplos, sem entrar em explicações sobre os seus fundamentos. Assim, Klein explica a formulação de Newton:

> Se se considerar, por exemplo, um movimento $x = f(t)$ sobre o eixo x, no tempo t, então toda gente tem uma noção do que significa a velocidade deste movimento e, se analisarmos este movimento, concluímos que, no fundo, o significado da velocidade é o valor-limite do quociente das diferenças $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Newton fez da velocidade de x, relativamente ao tempo a base de seus desenvolvimentos, chamou-lhe 'fluxão' de x e representou-o por $\dot{x}$. Considerou todas as variáveis x, y como dependentes desta variável fundamental t, o tempo e, em consequência, o quociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ aparece como o quociente de duas fluxões $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que atualmente escreveríamos na forma $\dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt}$ (Klein, 2011, p. 97).

Klein reconheceu que a diferença entre o método dos antigos matemáticos - como o de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e Johannes Kepler (1571-1630) com o Cálculo Infinitesimal - e o dos modernos, é que há, por parte dos últimos, uma recusa em aceitar a evidência intuitiva, motivo pelo qual recorrem à noção abstrata de limite. Referindo-se a Augustin-Luis

Cauchy (1789-1857) e ao importante teorema do valor médio[3], ele apresentou o enunciado e uma visualização geométrica, questionando: "como é que alguém pode dar uma demonstração rigorosa do teorema do valor médio sem apelar à intuição geométrica?" (Klein, 2011, p. 99).

Figura 6 - Representação geométrica do Teorema do Valor Médio



Fonte: Klein (2011, p. 99)

Entretanto, ele reconheceu que uma demonstração rigorosa necessita considerar as definições precisas de variável aritmética, função e continuidade.

Ao chegar-se a tais demonstrações passa-se do mundo corpóreo e simbólico para o mundo conceitual, que Tall caracterizou como mundo formalizado. Nesse terceiro mundo da matemática formal axiomática, constrói-se um nível formal baseado na teoria dos conjuntos e nas demonstrações formais (Silva, 2023). Para Tall (2002), uma abordagem corpórea do cálculo se concentra em ideias perceptivas fundamentais antes de introduzir qualquer tipo de simbolismo.

Na investigação científica, segundo Klein, o matemático faz uso de sua fantasia e procede indutivamente por meio de expedientes heurísticos. Afirma: "É precisamente na descoberta e no desenvolvimento do cálculo infinitesimal que esse processo indutivo, construído sem etapas lógicas convincentes, desempenhou um papel tão grande; e o auxílio heurístico efetivo foi muitas vezes a percepção dos sentidos" (Klein, 1945, p. 208).

Klein deixa entrever a sua visão de tratamento superior dado à matemática elementar: as ilustrações têm a ver com a percepção visual, assim como as amostras da literatura popular, que não pertencem ao mundo formal, mas ao mundo intuitivo; as aplicações da matemática abstrata ou pura servem como uma ligação entre a teoria e a prática; o desenvolvimento histórico da matemática, ao qual ele faz referência várias vezes no seu texto, mostra como o homem adquire conhecimento. Tudo isso caracteriza o que ele denomina matemática elementar de um ponto de vista superior.

Segundo a análise realizada, a proposta de Klein de trazer uma matemática superior para o ensino secundário não significava que ela deveria estar completamente "vestida" de uma linguagem rigorosa, ao contrário, a instrução nas escolas secundárias, segundo ele, "[...] não deveria ser introduzida por meio de definições abstratas, mas deveria ser introduzida como uma propriedade viva, por meio de exemplos elementares [...]" (Klein, 1945, p. 205). Inclusive,

3 Se uma função contínua $f(x)$, possui derivada $f'(x)$ em qualquer ponto de um intervalo dado, então tem que existir uma um ponto $x+\vartheta h$ entre x e $x+h$ tal que $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\vartheta h), \quad e\ 0 < \vartheta < 1$

> Ele recorreu à História da Matemática para mostrar como conceitos fundamentais do CDI poderiam ser introduzidos. Buscou em Newton uma inspiração ao comentar que o matemático inglês desenvolveu o novo cálculo em numerosos exemplos, sem entrar em explicações sobre os seus fundamentos (Silva, 2023, p. 7).

REFLEXÕES FINAIS

Matemática Elementar sob um ponto de vista superior é diferente dos livros didáticos da época, pois apresenta uma proposta dirigida à formação de professores de matemática, não aos iniciantes. O autor sugere usar o método intuitivo no ensino como uma primeira via de apresentação dos conceitos matemáticos, usando exemplificações, experiências, gráficos e tudo aquilo que possa auxiliar o aluno numa primeira abordagem de novos conceitos. Começa com exemplos da aritmética, relaciona-a com a geometria e, finalmente, mostra o uso do método intuitivo no cálculo diferencial e integral.

Klein considerava não ser possível um tratamento totalmente formalizado da matemática no ensino secundário, porque, como reconhecem psicólogos como Bruner e Tall, os conceitos teóricos são formados gradualmente e precisam do apoio da percepção sensorial.

Este retorno ao passado - numa visita às obras de Klein - continua atual, pois, segundo Tall (2013), o apelo à intuição no ensino da matemática continua a ocupar seu papel na construção do conhecimento pelo aluno.

A matemática viva e excitante de Klein deveria ser apresentada aos alunos por meio da mediação do professor, visando à obtenção de um equilíbrio entre o mundo intuitivo e o formalizado. É preciso começar com o mundo intuitivo, da prática, em que o olhar se volta para a empiria; depois este mundo deve ser ultrapassado a fim de se chegar à formalização, a qual fundamenta e capta a abrangência da matemática. É necessário que o aluno conheça a "água" que movimenta a matemática e o "fogo" que mantém acesa a chama do interesse e da curiosidade de cada aluno.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ARISTÓTELES. **Ética a Nicômaco**. São Paulo: Abril Cultural. Col. Os pensadores, n. 4, 1973.

BALDIN, Y. Y. O projeto Klein de matemática em português: uma ponte entre a matemática avançada e a escola. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Ano 8, n. 11, p. 411-419, 2013. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2872/1175. Acesso em: 4 dez. 2022.

BISHOP, A. Elementary Mathematics from advanced standpoint – a cultural perspective on mathematics education**. Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13**. p. 165-176, 2016.

BRUNER, J. **The relevance of education**. New York, NY: Norton & Co., 1971.

CLÍMACO, H.; OTTE, M. Bernard Bolzano: o conceitualismo e a intuição na educação matemática. **Revista de Educação Pública** [on line] v. 19, p. 165-180, 2010. Disponível em:

https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/article/view/384/352. Acesso em: 10 abr. 2022.

Dicionário da Língua Portuguesa: Larousse Cultural. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1992.

HARTEIS, C. ; KOCH, T. MORGENTHALER, B. How intuition contributes to high performance: an educational perspective**. US-China Education Review**, v.5, n. 1, p. 68-80, 2008. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED502537.pdf. Acesso em: 10 maio 2022.

KLEIN, F. **Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus**. Leipzig: Teubner, 1908.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from an advanced standpoint.** New York: Dover, 1945.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um ponto de vista superior:** Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um ponto de vista superior**: Álgebra. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um ponto de vista superior**: Análise. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2011.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um ponto de vista superior**: Geometria. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2014.

MENEGHETTI, R. C. G. O intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. **Bolema.** v. 22, n. 32, p. 161-188, 2009. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2077. Acesso em: 10 set. 2023.

MENGHINI, M.; SCHUBRING, G. Elementary mathematics from a higher standpoint – conception, realization, and impact on teacher education. In: Hans-Georg Weigand et al. (Ed.) **The Legacy of Felix Klein.** ICME- 13 Monographs (pp.167-168). Springer Open, 2019. Disponível em: https://www.loc.gov/item/2019767658/. Acesso em: 20 nov. 2023.

OLIVEIRA, E. A. A intuição vazia: a ontologia do objeto matemático nas Regulae ad Directionem Ingenii. **Analytica.** Rio de Janeiro, v.12, n. 2, p. 163-197, 2008.

OLIVEIRA, D. F. M. **Intuição e construção matemática na crítica da razão pura: uma análise das interpretações de Parsons e Hintikka**. 126f. Tese (Doutorado em Filosofia). Programa de Pós-Graduação em Filosofia. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. 2020. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/5310. Acesso em 16 nov. 2023.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

RODRIGUES, J. F. Prefácio. In: Felix Klein, **Matemática Elementar de um ponto de vista superior**: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

RICHARD, P.; SIERPINSKA, A. Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. **Review des Sciences de l'éducation**. p. 1-33, Jan. 2004. Disponível em: https://www.erudit.org/fr/revues/rse/2004-v30-n2-rse1025/012674ar.pdf. Acesso em 20 jun. 2023.

SILVA, C. M. S; RIOS, D. F. Apropriação de ideias Modernizadoras de Félix Klein em Práticas Docentes de Matemática no Colégio Gonzaga. **Com a palavra, o professor**. v.4, n. 8, p. 56-73, 2019.

SILVA, C. M. S. Limites: uma breve passagem nos livros brasileiros do ensino secundário. **ACERVO** (GHEMAT), v. 5, p. 1-25, 2023. https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.87

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically**: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: University Press, 2013.

TIROSH, D., & TSAMIR, P. Intuition in Mathematics Education. In: Stephen Lerner (Ed.) **Encyclopedia of Mathematics Education**. London, Springer, p. 326-329, 2014. Disponível em: https://link.springer.com/referencework/10.1007/978-94-007-4978-8. Acesso em 20 jul. 2022.

VALENTE, W. **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2014.

Histórico

Recebido: 11 de novembro de 2023.
Aceito: 18 de janeiro de 2024.
Publicado: 23 de janeiro de 2024.

Como citar – ABNT

SILVA, Circe Mary Silva da. O papel da intuição no ensino da matemática segundo Felix Klein. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 44, e2024001, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.pe2024001.id586

Como citar – APA

SILVA, C. M. S. (2024). O papel da intuição no ensino da matemática segundo Felix Klein. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (44), e2024001, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.pe2024001.id586