岡山理科大学紀要　第59号 A pp. 7-12 (2023)

四色問題に対するケンプの考察の続き

森　義之

岡山理科大学 理学部 応用数学科

(2023年10月30日受付、2023年11月27日受理)

四色定理は、「平面上のすべての地図の領域は、4 色以下で、境界線を共有する 2 つの領域の色がすべて異なるように彩色出来る。」というものである。この定理は、1976 年に Kenneth Appel と Wolfgang Haken によってコンピューターを用いて証明された。

それ以前には、1879 年 Alfred Kempe によって発表された Kempe chain(以下、ケンプ鎖) を用いた考え方がある。しかし、この考え方の反例が 1890 年に Percy John Heawood によって見つけられた。

ここでは、Alfred Kempe が用いたケンプ鎖による考察について、その先の新たな方針を示す。

1　最小反例を用いた証明

まず、以下では各領域を 1 つの国として考える。

n 個の国からなる任意の地図が 4 色で塗り分けられたとし、$n+1$ 個の国からなる 4 色で塗り分けることが出来ない地図を考える。この地図を**最小反例**と呼ぶ。

定理 1.1. *平面上の任意の地図には隣接する国が 5 国以下の国が必ず存在する ([3])。*

なお、隣接する国が k 国の国を k **辺国**と呼ぶことにする。

定理 1.1 より、最小反例には 2 辺国、3 辺国、4 辺国、5 辺国のいずれかが 1 国以上存在する。そのうちのいずれかの 1 国を取り除いた地図は 4 色で彩色出来る。

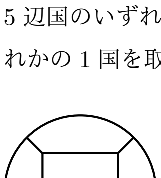


図 1

→

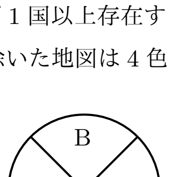


図 2

→

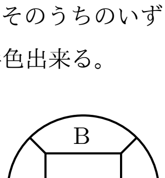


図 3

例えば、最小反例に図 1 のような 4 辺国があった場合、その国を 1 点 (交点) とみることにより、最小反例の図 1 の部分は図 2 となる。

図 2 に変えられた地図は n 国しかないので、この地図は 4 色で彩色出来る。その後、4 辺国を元に戻したものが図 3 になる。

まず、2 辺国 (3 辺国) の場合、2 辺国 (3 辺国) を 1 点とみて、4 色で彩色した後に元に戻したとき隣接する国は 2 国 (3 国) なので、戻した 2 辺国 (3 辺国) は余っている色で彩色することが出来る。

このことより、最小反例に 2 辺国、3 辺国は含まれないことが言える。

次に、4 辺国の場合、4 辺国を 1 点とみて、4 色で彩色した後に元に戻した地図で、その 4 辺国に隣接する国が 2 種類または 3 種類の色で彩色されているなら、4 辺国を残りの色で彩色することが出来る。そのため、最小反例にこのような 4 辺国は含まれないことが言える。

しかし、図 3 のように隣接する国が青 (B)、黄 (Y)、緑 (G)、赤 (R) の 4 色で彩色されていた場合、5 色目が必要となる。

このような場合 (図 3)、Kempe は 4 辺国に隣接している国で B(または Y) で彩色されて国から G(または R) で彩色された国への道 (以下、ケンプ鎖) を考えた (図 3')。

以後 ケンプ鎖とは、ある国に対して、その国に隣接する 2 国が、2 種類の色で交互に彩色された国が順に隣接するように繋がった国々のことを言う。

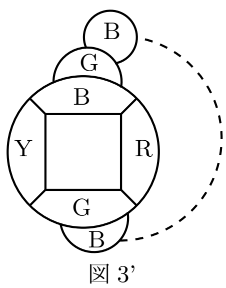
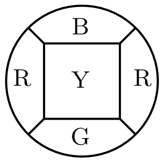


図 3'

図 3' の場合、4 辺国に隣接する B で彩色された国から G で彩色された国まで B−G−B−⋯−G−B−G と続く国々である。

図 3 において (図 3' のように) 上の B で彩色された国から下の G で彩色された国まで、B–G のケンプ鎖が存在したとする。その場合、左の Y から右の R までの Y–R のケンプ鎖は存在しないことになる。

そこで、左にある Y で彩色された国から繋がる Y–R で交互に隣接する国々 (枝分かれしている場合もある) の彩色に対して、Y と R の彩色を入替える。この国々の繋がりは右の R で彩色された国まで繋がらないので、右の R で彩色された国はそのまま (R) である。



よって、右図のように、4 辺国を Y で彩色することが出来るため、最小反例に 4 辺国は含まれないことが解った。

なお、ケンプ鎖が 1 つも存在しない場合も同様に (Y と R の) 彩色の入替えで 4 辺国を Y で彩色することが出来る。

最後に、5 辺国を考える。5 辺国が最小反例に含まれないことを示せれば、最小反例は存在しないことが言える。

5 辺国も、先ほどと同様に 1 点とみなして彩色し、元に戻して考える。このとき、隣接する国が 3 種類の色で彩色されているなら、残りの色で彩色することが出来るため、最小反例にこのような 5 辺国が含まれないことが解る。

隣接する 5 国が 4 色で彩色されていた場合、5 色目が必要になるので、彩色の入替えを考える。

まず隣接する 5 国が 4 色で彩色されているなら、同じ色で彩色された 2 国が存在する。ここでは、その色を R とする。もちろん、この R で彩色された 2 国は隣接しないので、図 4 のような配置となる。

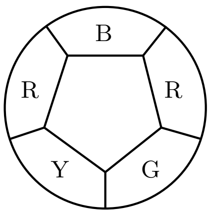


図 4

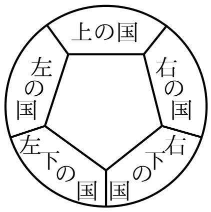


図 4'

以後、2 国ある同じ色で挟まれた国を上の国 (図 4 の B) と言い、上の国から時計回りに順に、右の国、右下の国、左下の国、左の国と呼ぶことにする (図 4')。

図 4 の彩色と、図 4' の呼び方を元に、Kempe が考えた方法について紹介する。

Kempe の考察

(I) 上の国から右下の国、上の国から左下の国へのケンプ鎖がどちらも存在しない場合。

このとき、上の国の彩色 (B) と、左下の国の彩色 (Y) に着目し、上の国から B–Y で隣接する国々の彩色を B と Y で入替えることにより、5 辺国に隣接する他の国の彩色を変えることなく、上の国を Y で彩色することが出来る。よって、中央の 5 辺国は B で彩色出来る。

(II) 上の国から右下の国、上の国から左下の国へのケンプ鎖が、いずれか一方のみ存在した場合。

例えば、上の国から左下の国へのケンプ鎖のみ存在し (図 4 の場合、ケンプ鎖 B–Y) 、右下の国から上の国へのケンプ鎖が無い場合で考える。

このとき、右下の国 (G) から G–B で交互に隣接する国々の彩色を G と B の入替えにより、右下の国は B で彩色される。よって、中央の 5 辺国は G で彩色出来る。

(III) 上の国から右下の国、上の国から左下の国へのケンプ鎖がどちらも存在する場合。

このような場合において、Kempe は図 5 のような状態を考えた。

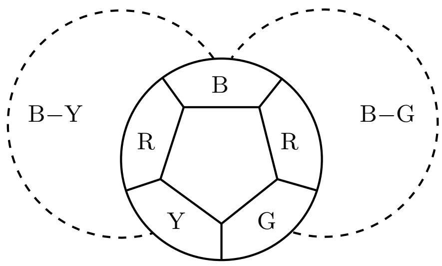


図 5

このとき、左の国 (R) から繋がる R–G で隣接する国々の彩色を R と G で入替え、右の国 (R) から繋がる R–Y で隣接する国々の彩色を R と Y で入替えることにより、5 辺国の周りの国は B,G,Y,G,Y で彩色され、中央の 5 辺国は R で彩色することが出来る。

Kempe は以上で最小反例は存在しないので、四色問題は解決したと思った。

しかし、Kempe の考察の反例が 1890 年に Percy John Heawood によって見つけられた。

Kempe の考えでは、5 辺国のとき出来る 2 つのケンプ鎖 (上の国と左下の国、上の国と右下の国) はそれぞれ独立していたが、この鎖がどこかで交差していた (上の国の色を共有している）場合、うまくいかない。

その例が、Percy John Heawood によって発表された (図 6 のように彩色された) 地図である。

※ 以下、単に地図と言う場合、高々 1 国を除き、隣接する国は互いに異なる色で彩色された平面上の有限国の地図のことを言う。

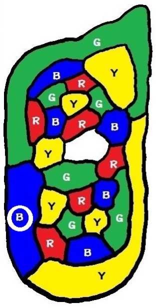


図 6

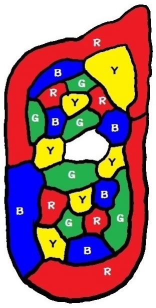


図 6'

図 6 の地図において、R で彩色された左の国から R–G で隣接する国々の彩色と、右の国からの R–Y で隣接する国々の彩色を入替えた場合、図 6' のようになり R で彩色された 2 国が隣接してしまう。

これは、2 つのケンプ鎖が図 6(図 7) の〇で囲まれた B で彩色された国をお互い通り、なおかつ、左の国から R–G で隣接する国々の G で彩色された国が〇で囲まれた B で彩色された国に隣接し、右の国から R–Y で隣接する国々の Y で彩色された国が〇で囲まれた B で彩色された国に隣接するためである。

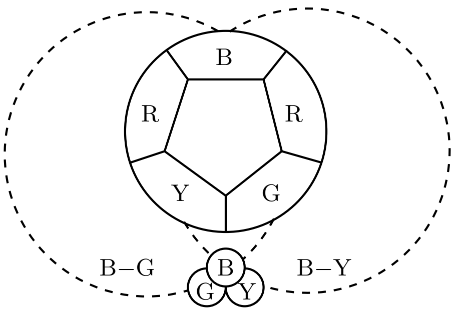


図 7

2　5 辺国の彩色の入替え

2 つのケンプ鎖が共有国をもつ場合、新たな方法で 5 辺国が隣接する国の彩色の入替えを考える。

なお、共有国が 2 国以上ある場合、ケンプ鎖が複数本ある場合も同様に考えることができるので、ここではケンプ鎖は 1 本ずつの場合のみを考える。

定義 2.1. (左変色、右変色)

ある地図に対して、1 つの 5 辺国を除いて 4 色で彩色されていて、その 5 辺国の右の国、左の国、上の国、左下の国、右下の国がそれぞれ c_1, c_1, c_2, c_3, c_4 で彩色されていたとする。

ただし、c_1, c_2, c_3, c_4 は相異なる色とする。

このとき、お互いに交差する 2 つのケンプ鎖 $c_2 - c_3$ および $c_2 - c_4$ が存在するものとする。

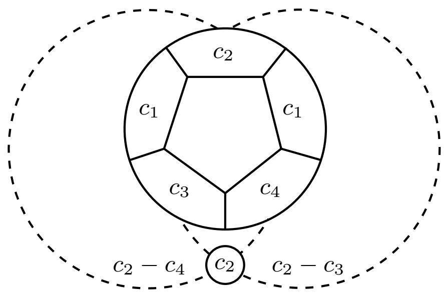


図 8

このような場合、c_1 で彩色された左の国からの $c_1 - c_4$ で隣接する国々は $c_2 - c_3$ のケンプ鎖によって、c_4 で彩色された右下の国まで繋がることはなく、ケンプ鎖とはなりえない。

そこで、左の国から $c_1 - c_4$ で隣接する国々の彩色を入替えると、図 9 の状態になる。この作用を**左変色**と呼ぶことにする。

同様に、右の国から $c_1 - c_3$ で隣接する国々の彩色を入替えると、図 10 の状態になる。この作用を**右変色**と呼ぶことにする。

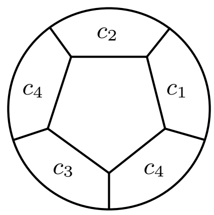


図 9

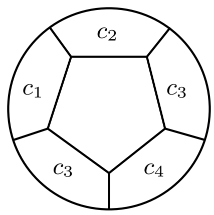


図 10

なお、2 つの交差するケンプ鎖がある場合、左変色、右変色によって 5 辺国に隣接する国の彩色は 1 国のみ彩色が変わる。

先ほどの反例の地図 (図 6) に対して左変色を行うと、図 6-L1 の地図になる。

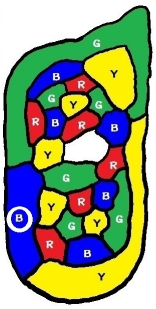
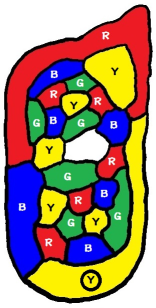
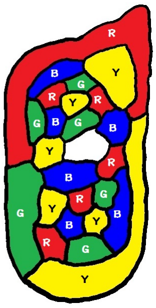




図 6　図 6-L1　図 6-L2

この場合も交差する 2 つのケンプ鎖が存在し、○で囲まれた Y で彩色された国が共有されている。

そこで、再度左変色を行うと、図 6-L2 の地図となり、この地図においてケンプ鎖は R–Y の 1 つのみとなり、Kempe の証明方法 (II) で示すことが出来る。

同様に、図 6 の地図に対して右変色を行うと、図 6-R1 の地図になる。

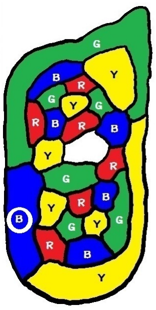
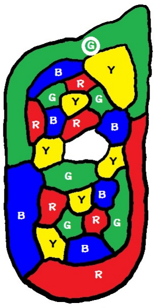
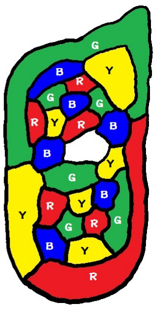




図 6　図 6-R1　図 6-R2

この場合も交差する 2 つのケンプ鎖が存在し、○で囲まれた G で彩色された国が共有されている。

そこで、再度右変色を行うと、図 6-R2 の地図となり、この地図においてケンプ鎖は R–Y の 1 つのみとなり、Kempe の証明方法 (II) で示すことが出来る。

定義 2.2. M は、1 つの 5 辺国以外すべて隣接する国は異なる 4 色で彩色された地図とする。

その 5 辺国に隣接する国に対して右変色を n 回繰り返し、初めてケンプ鎖が 2 つ存在しなくなるか、2 つのケンプ鎖が共有国をもたなく (交差しなく) なるとき、$Kr(M) = n$ とする。

同様に、左変色を n 回繰り返し、初めてケンプ鎖が 2 つ存在しなくなるか、2 つのケンプ鎖が共有国をもたなく (交差しなく) なるとき、$Kl(M) = n$ とする。

なお、地図 M において、ケンプ鎖が 2 つ存在しない、または、2 つのケンプ鎖が共有国をもたない (交差しない) とき、$Kr(M) = Kl(M) = 0$ とする。

図 6 の地図 M に対して、$Kr(M) = 2$, $Kl(M) = 2$ である。

予想 2.1. *1 つの 5 辺国以外すべて隣接する国は異なる 4 色で彩色されている地図 M に対して、*

$$Kr(M) < \infty \text{ または } Kl(M) < \infty$$

となる。

すなわち、最小反例に 5 辺国は含まれない。

3　右変色と左変色の例

ここでは、$Kl(M) = 4$ となる地図の例に対して、$Kr(M)$ の値を求めるとともに、作用による変化を確認する。

例 3.1. 以下の地図 M に対して、右変色、左変色の作用を考えてみる。

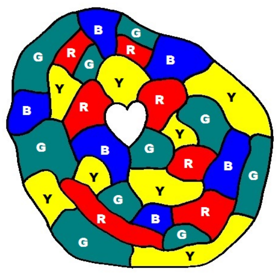
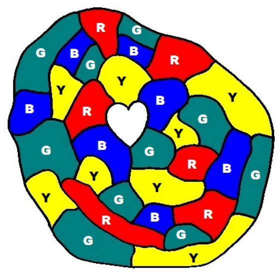



図 11　図 11-R1

図 11 の地図 M に対して、まず右変色を行う。この地図は、1 回の右変色でケンプ鎖が 1 つ (Y–G) になるため、$Kr(M) = 1$ である。

今度は、図 11 の地図 M に対して、左変色を行う。

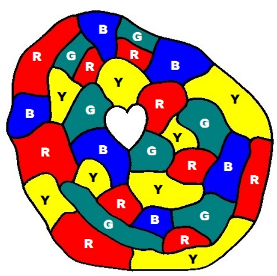
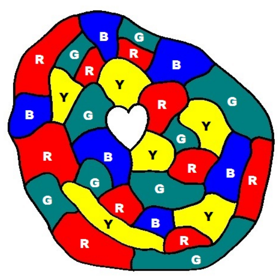



図 11-L1　図 11-L2

左変色 1 度では交差する 2 つのケンプ鎖が存在し、交差国 (青) をもつ (図 11-L1)。

そこでもう一度、左変色を行うと図 11-L2 の地図になる。

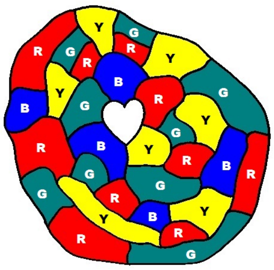


図 11-L3

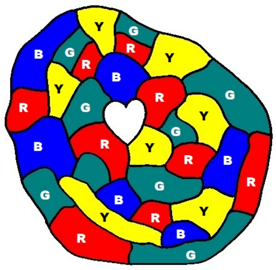


図 11-L4

この地図でも交差する 2 つのケンプ鎖が存在するので、さらに左変色を行うと図 11-L3 の地図になる。

まだ交差する 2 つのケンプ鎖が存在するので、さらに左変色を行うと図 11-L4 の地図になる。

ここでケンプ鎖が 1 つになるため、この地図 M に対して、$Kl(M) = 4$ である。

なお、図 11-L4 の地図に再度左変色を作用させると

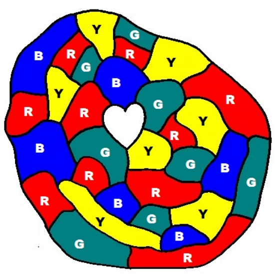


図 11-L5

となり、図 11-L5 の地図に左変色をすると図 11-L4 の地図に戻る。

また、右変色、左変色の作用について次が成り立つ。

補題 3.1. 右変色、左変色はお互いに逆作用になっている。すなわち、$Kr(M), Kl(M) > 0$ を満たす任意の地図 M に対して、以下が言える。

$$\text{右変色}\big(\text{左変色}\ (M)\big) = \text{左変色}\big(\text{右変色}\ (M)\big) = M.$$

4　まとめ

最小反例を用いた四色問題の考え方は、次のように言い換えることが出来る。

地図 M を、2 辺国、3 辺国、4 辺国を含まない最小反例であると仮定する。

M には 5 辺国が存在し、それらの 5 辺国全てに、交差するケンプ鎖が 2 つずつ存在した場合、その内の 1 国 A を選び、右変色を考える。

このとき、右変色$^k(M)$ $(0 \leq k \leq m-1)$ の A 国には常に交差するケンプ鎖が 2 つ存在し、

$$\text{右変色}^m(M) = M$$

となるような自然数 m が存在するような国 A が存在しなければ、5 辺国を含む最小反例は存在しないことが言える。

これは、地図 M に対して右変色を有限回作用させれば、必ず 2 つの交差するケンプ鎖が無くなることを言っている。

このことが言えれば、最小反例に 2,3,4,5 辺国は含まれないとなり、定理 1.1 に反するため、反例は存在しないと言える。

なお、20 回の右変色 (左変色) を行うと、5 辺国に隣接する国の彩色は元に戻るため、m が存在すれば、20 の倍数であることが解る。

最後に。この作用がコンピューターを使わない四色定理の証明に結び付くよう、今後もこの研究を行い続ける。

参考文献

[1] On the Geographical Problem of the Four Colours,A. B. Kempe, American Journal of Mathematics, Vol. 2, No. 3 (Sep., 1879), pp. 193-200

[2] Map-colour theorem, P. J. Hwawood, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, XXIV (1890),pp. 332-338

[3] グラフ理論入門 Robin J. Wilson 著, 西関 隆夫, 西関 裕子 翻訳 近代科学社

Continuation of Kempe's consideration of the four-color problem

Yoshiyuki MORI

Department of Applied Mathmatics, Faculty of Science,
Okayama University of Science,
1-1 Ridai-cho, Kita-ku, Okayama 700-0005, Japan

(Received October 30, 2023; accepted November 27, 2023)

The four-color theorem states, "four colors at most, are required to color the regions of any map so that no two adjacent regions have the same color." This theorem was proved using a computer in 1976 by Kenneth Appel and Wolfgang Haken.

Before that, there was an idea using Kempe chains, which was published by Alfred Kempe in 1879. However, a counterexample to this idea was found by Percy John Heawood in 1890.

In this article, I present a new direction for considering Kempe chains used by Alfred Kempe.

To reduce the number of colors of adjacent countries using Kempe's method, I will introduce a new coloring method and give a conjecture toward the proof of the theorem.

Keywords: four-color theorem; Kempe chains.