

Simulación en Geogebra del movimiento armónico simple y amortiguado de un péndulo simple

LUQUE-ALVERNIA, DAVID S., CABALLERO-BROCHADO, EMELDO R.,
AND RACEDO-NIEBLES, FRANCISCO J.

Abstract.

The following article addresses the development of the Geogebra simulation of simple harmonic and damped motion describing a simple pendulum. Therefore, it deals with the tools provided by Geogebra that make possible the dynamic simulation development that varies according to the conditions set at the time of any measurement.

The objective of this simulation is to illustrate and make a first approach to the correct functioning of the theoretical framework seen in regards to the study of vibrations.

Keywords: Geogebra, harmonic oscillator, damping, scripting commands.

Resumen.

El siguiente artículo trata el desarrollo de la simulación en geogebra del movimiento armónico simple y amortiguado que describe un péndulo simple. Por ende, trata con las herramientas proporcionadas por geogebra que hacen posible el desarrollo de una simulación dinámica que varía según las condiciones establecidas al momento de realizar algún tipo de medición.

El objetivo de esta simulación es ilustrar y realizar un primer acercamiento al correcto funcionamiento del marco teórico visto en lo que respecta al estudio de las vibraciones.

Palabras clave: Geogebra, oscilador armónico, amortiguamiento, simulación, Comandos de secuencia.



Esta publicación está bajo una
licencia Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial 4.0

Date: Received: Day Month Year; Accepted: Day Month Year.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary .

Key words and phrases. geogebra, harmonic oscillator, damping.

Author One  0000-0001-xxxx-yyyy.

Author TWO  0000-0001-xxxx-yyyy.

Author THREE  0000-0001-xxxx-yyyy.

1. Introducción

Geogebra es un software de cálculo libre dedicado entre otras cosas a la representación de modelos matemáticos definidos y la solución de problemas que requieran de un análisis matemático y geométrico^[7], a través de la manipulación de este software^{[8][9]} es posible realizar simulaciones dinámicas de los modelos matemáticos de interés, en este caso, el modelo matemático estudiado es el que define al movimiento de uno de los sistemas vibrantes más conocidos, el péndulo simple.

El péndulo simple consiste de un punto material atado al extremo de un hilo suspendido el cual se considera inextensible y sin peso, luego de desplazar el sistema de su posición de equilibrio, se produce una fuerza restauradora que actúa sobre este y lo obliga a retornar a su posición de equilibrio, esto hace que el sistema empiece a oscilar, la cantidad y el tipo de oscilaciones, depende de las condiciones en las que se encuentre el sistema, es decir, si actúa más de una fuerza aparte de la fuerza recuperadora^[2].

En virtud de las fuerzas que actúan sobre el sistema, se consideran tres tipos de movimientos, el movimiento armónico simple, el movimiento amortiguado y el movimiento amortiguado forzado, el comportamiento del modelo que define a cada uno de estos movimientos en función del tiempo, puede ser analizado a través del software de geogebra, el cual permite, de manera sencilla, ilustrarlos con un nivel elevado de precisión, esto es, presentar una simulación dinámica de cada uno de estos movimientos; la simulación que se presenta en este artículo, aparte de haber sido realizada con Geogebra, permite visualizar e interactuar con los dos primeros tipos de movimiento mencionados, el movimiento armónico simple y el movimiento amortiguado^[5].

2. Marco teórico

2.1. Oscilador armónico simple. En este informe se estudia el modelo físico que rige a un cuerpo (partícula o cuerpo rígido) cuya posición se fija por medio de una coordenada y en donde la fuerza recuperadora o el torque recuperador es directamente proporcional y opuesto al desplazamiento relativo a la posición de equilibrio: el oscilador armónico simple.

2.2. Péndulo Simple. Un ejemplo de OAS lo constituye el péndulo simple. Suponga que un cuerpo de masa m , que esta sujeto a un hilo de longitud l y masa despreciable sujeta a un punto fijo 0 Además suponga el rozamiento con el aire es despreciable como se muestra en la figura 1.

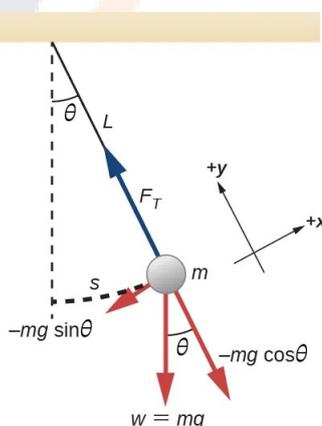


FIGURE 1. Representación del diagrama de fuerzas de un péndulo simple

Si bien es cierto que en la figura 1^[3] se puede interpretar que la masa m se mueve en dos coordenadas (x, y) contradiciendo el enunciado anterior, esto no es cierto debido a que la posición esta determinada por la coordenada θ lo cual cumple con la condición. La fuerza recuperadora

en este caso sería el peso, mg , del cuerpo que cuelga y se puede plantear lo siguiente a partir de la segunda ley de newton:

$$(2.1) \quad -mg \sin \theta = ma_t$$

$$(2.2) \quad T - mg \cos \theta = 0$$

De la ecuación 2.2 se observa que no hay movimiento, por tanto en cada punto de la trayectoria la tensión tendrá el mismo valor que la componente en y del peso, tal que:

$$(2.3) \quad T = mg \cos \theta$$

Por el contrario la ecuación 2.1 nos indica que existe un movimiento y además que la componente x del peso es la fuerza recuperadora en este caso, teniendo en cuenta que $a = \frac{d^2(s)}{dt^2} = L \frac{d^2(\theta)}{dt^2}$ (se reescribe la aceleración en función del arco que forma el péndulo al moverse), se puede reescribir la ecuación 2.1 como:

$$(2.4) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

La ecuación 2.4 es la ecuación diferencial del péndulo simple, la cual es homogénea. Antes de encontrar sus soluciones hace falta, hacer una consideración con respecto a la amplitud de este mismo.

2.3. Series de Taylor. Las series de Taylor son una serie de potencias que se prolonga hasta el infinito, donde cada uno de los sumandos está elevado a una potencia mayor al antecedente. Dichas series tienen la siguiente forma:

$$(2.5) \quad T(f, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Esta serie es muy útil cuando se trata de aproximar funciones, ya que entre más términos tenga, más aproximada será la función original. Para este caso en particular, resulta conveniente aproximar la función seno, al hacer esto es evidente que para valores de $\theta \ll 15^\circ$, el $\sin(\theta) \approx \theta$ y por tanto la ecuación 2.4 se puede escribir como

$$(2.6) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

Que es lo mismo que,

$$(2.7) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \theta(t)$$

Cuya solución es^[5],

$$(2.8) \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

ω_0 se denomina frecuencia natural del péndulo, y se define como,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

De esta expresión se puede determinar el periodo de oscilación del péndulo mediante la ecuación,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Resulta importante resaltar lo que sucede si no se realiza la aproximación del $\sin(\theta) = \theta$. Resulta, que para ángulos mayores a 25° , el periodo de oscilación se escribe en función de una serie infinita que se deriva de expresar la energía potencial como una función del ángulo^[2], la expresión es la siguiente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{9}{464} \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots \right)$$

2.4. Movimiento amortiguado. Además de la fuerza restauradora, actúa una fuerza de fricción que se opone al movimiento o en otras palabras, lo amortigua. Esta fuerza es opuesta al desplazamiento y proporcional a la velocidad del objeto que está oscilando, está definida como,

$$F_r = -bv$$

Donde b es el coeficiente de amortiguamiento.

Al realizar nuevamente la sumatoria de fuerzas sobre el eje x , teniendo la misma relación para la aceleración y el arco de circunferencia (relación que se extiende para el caso de la velocidad), esta vez teniendo en cuenta la fuerza amortiguadora, resulta la siguiente ecuación diferencial:

$$\theta''(t) + \beta\theta'(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$$

Donde $\beta = \frac{b}{m}$ y cuya solución es^[5]:

$$(2.9) \quad \theta(t) = \theta_0(t) \cos(\omega_s t + \delta)$$

Donde,

$$(2.10) \quad \theta(t) = \theta_0 e^{\frac{-b}{2m}t} = \theta_0 e^{-\lambda t}$$

Y,

$$(2.11) \quad \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (\lambda)^2}$$

Para ambos casos, $\lambda = \frac{\beta}{2}$

De estas expresiones, se determinan tres posibles casos de movimiento amortiguado, siendo dos de estos los que se incluyen en esta simulación, el primero, el movimiento subamortiguado, que se da cuando $\lambda < \omega_0$, en donde la amplitud del sistema decae en función del tiempo pero no tan rápidamente como en el caso del amortiguamiento crítico, el segundo caso de amortiguamiento que cubre esta simulación, para este caso $\lambda = \omega_0$ y, por ende $\omega_s = 0$, es decir, el sistema vuelve a su posición de equilibrio sin realizar una oscilación.

3. Simulación en Geogebra

En función del marco teórico presentado, el proceso de realización de la simulación se separa en dos partes, la primera se focaliza exclusivamente en la representación del movimiento armónico simple del péndulo, mientras que la segunda, se orienta hacia la descripción del movimiento amortiguado del péndulo. Esta segunda parte de la simulación ilustra el ampliamiento del espectro conceptual que gobierna el péndulo simple dando una visión clara de su comportamiento (el cual se puede generalizar para cualquier oscilador armónico) bajo condiciones reales.

Ambas partes de la simulación cuentan con los respectivos elementos gráficos y variables cuantitativas y cualitativas necesarias para el desarrollo de la experiencia, estas son, aparte de la representación dinámica del péndulo simple, herramientas que proporcionen tanto el proceso

como los cálculos necesarios para el desarrollo de las actividades determinadas por cada parte de la simulación.

El proceso que describe el desarrollo de la simulación en geogebra fue dividido en cuatro pasos, cada uno denotado como A,B,C y D respectivamente

A. Descripción de las variables necesarias

Antes de realizar la construcción geométrica del péndulo simple dentro de geogebra, resulta necesario el definir cada una de las variables que van a describir su movimiento en función del tiempo, estas variables se definen a partir de la solución de la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio amortiguado 2.9 , la cual permite obtener la ecuación de posición del movimiento armónico simple si el coeficiente de amortiguamiento toma el valor de cero, es decir si $b = 0$ entonces,

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \omega_0 = \frac{g}{l}$$

y también,

$$(3.1) \quad A_0 e^{\frac{-b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_s t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

Esta última ecuación representa la posición en cualquier instante de tiempo para un oscilador que se mueve con un movimiento armónico simple (M.A.S), para el caso del péndulo simple esta se transforma en,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Para un péndulo de longitud L (medida en centímetros) y ángulo inicial α , es decir, el desplazamiento inicial que sufre el péndulo antes de ser puesto a oscilar, a partir de la figura 1 se escribe la ecuación de posición del péndulo simple de la siguiente forma: (recordando que $b = 0$),

$$(3.2) \quad \theta(t) = \frac{L}{100} \sin(\alpha) \cos(\omega_0 t)$$

Esta es la función sobre la que se fundamenta la realización de la simulación, para este primer paso, se definen tres deslizadores^[8] con el fin de representar el movimiento del péndulo en función del tiempo, además, se incluye el valor de la aceleración de la gravedad(En primer lugar se define el valor de la gravedad en la tierra, el objetivo es definir varios valores de gravedad que configuren el movimiento del péndulo) ; los tres deslizadores vienen definidos por la longitud L , el ángulo inicial y el tiempo.

Para un determinado intervalo de tiempo (un deslizador)^[8] que se extiende desde 1 hasta nT , siendo n y T el valor del periodo, se puede limitar el número de oscilaciones del péndulo mediante una casilla de entrada, además, se configura la velocidad de crecimiento del deslizador de tiempo en función de la frecuencia angular, esto hace que la rapidez del movimiento del péndulo aumente o disminuye en función de esta magnitud, cosa que se ajusta al modelo teórico planteado.

Con todas estas funciones y variables descritas, se pasa a la descripción del modelo geométrico del péndulo, en la que se ilustra su funcionamiento dinámico.

B. Construcción geométrica del péndulo

En esta parte se detalla el proceso de creación del péndulo, el cual depende plenamente de la función que describe la posición angular del péndulo (Ecuación 2.8).

Como primer paso, se define un punto cualquiera en una región conveniente dentro del plano cartesiano, sobre este punto se traza una recta paralela al eje y ^[8], por último, se define una

circunferencia de radio $L/100$ con centro en el mismo punto, si se toma la intersección entre la recta y la circunferencia en donde el valor de y es mínimo, se tiene otro punto, este es el que va a describir el movimiento oscilatorio.

Por otro lado, a partir de la ecuación 3.2, si se denota un punto Q tal que $Q(t, \theta(t))$ describa el trazo de la función, y se extrae la componente y de este punto escribiendo " $y(Q)$ " dentro de una casilla de la vista algebraica^[8]; es posible determinar el ángulo que describe el péndulo en cualquier instante de tiempo a través de la ecuación del arco de una circunferencia y la componente y de este punto, de la forma

$$(3.3) \quad \theta(t) = \frac{y(Q)}{\frac{L}{100}}$$

Donde, $y(Q)$ denota la componente y del punto Q y que a su vez, representa el arco de circunferencia que describe el péndulo.

A partir de lo anterior, ya es posible realizar la representación dinámica del péndulo, solo basta con hacer que el punto en donde se intersectan la circunferencia de radio $\frac{L}{100}$ y la recta paralela al primer punto creado, rote en función de este nuevo $\theta(t)$ definido por la ecuación 3.3 a través de la función "Rotate" de Geogebra^[9], la cual relaciona los dos puntos creados y el ángulo $\theta(t)$ definido.

Todo lo anterior se ve detallado en la siguiente imagen,

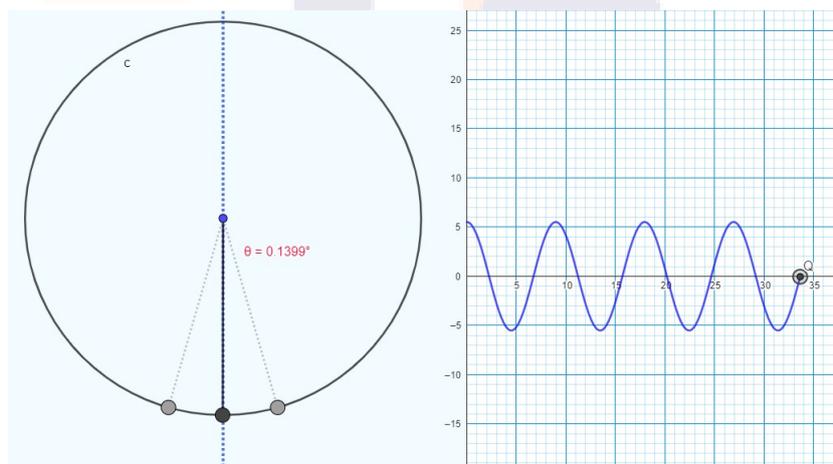


FIGURE 2. Construcción del péndulo

El punto negro representa la intersección de la circunferencia con la recta que pasa por el centro y es paralela al eje y , este se mueve en función de la componente y del punto Q , mismo punto que se encuentra en la parte derecha de la ilustración; las demás construcciones geométricas fueron incluidas como detalles plenamente estéticos.

El siguiente apartado define, luego de haber sujeto a esta representación del péndulo a muchos más cambios estéticos, el comportamiento de las variables que harán posible el desarrollo del experimento para el caso del movimiento armónico simple, estas son: la longitud, la gravedad y la amplitud inicial o ángulo α .

C. Variables dinámicas

Para el caso del movimiento armónico simple, se tienen tres variables dinámicas, es decir, tres variables que se pueden alterar a gusto con la finalidad de cumplir algún criterio de experimentación, para el caso de la longitud, se tiene una variación (deslizador)^[8] que va desde $0cm$

hasta 130cm , esta variación permite al experimentador, determinar para un valor de gravedad fijo, la relación entre la longitud y el periodo de oscilación. Cabe resaltar, que se tienen cuatro valores distintos para la aceleración de la gravedad, tres de ellos son conocidos mientras que uno es desconocido, la variación de la longitud, permite al experimentador el determinar este valor de gravedad desconocido, y a su vez, permite corroborar los valores teóricos de los conocidos. Además, a partir de la relación entre la longitud y el periodo, aparte de poder deducir el valor de la gravedad que se está manejando, se puede determinar la incertidumbre asociada a esta medida mediante la ley de propagación de incertidumbre.

Para el caso de la variación del ángulo α , esta se define a través de un deslizador^[8] (para este se dispone de un transportador que permite corroborar la medida de este ángulo), el objetivo, esta vez, es hacer que el experimentador determine si el periodo de oscilación se ve afectado por la variación de este ángulo (teniendo en cuenta la aproximación para ángulos pequeños), además, este valor junto a los anteriormente mencionados, permiten al experimentador escribir la ecuación que describe el movimiento del péndulo según las condiciones que se tengan.

Al momento de definir estas variables, se incluyen botones que le permiten al experimentador una vez presionados, corroborar su trabajo realizado, cabe resaltar que para ambos tipos de movimientos oscilatorios (para el MAS y el amortiguado), se tienen enunciadas actividades que especifican el procedimiento que debe realizar el experimentador para estudiar ambos movimientos.

Para el inicio de la simulación, se incluyen tres botones que determinan el inicio, la pausa y el reinicio de la animación^[8] del deslizador que define el tiempo a partir del comando "StartAnimation"^[9], este deslizador se ve limitado por el número de oscilaciones que defina el experimentador.

A continuación, se ilustran los cambios estéticos dentro de la simulación, cabe resaltar que si bien aparece un apartado dedicado al movimiento amortiguado, este no se desglosará sino hasta la siguiente sección.

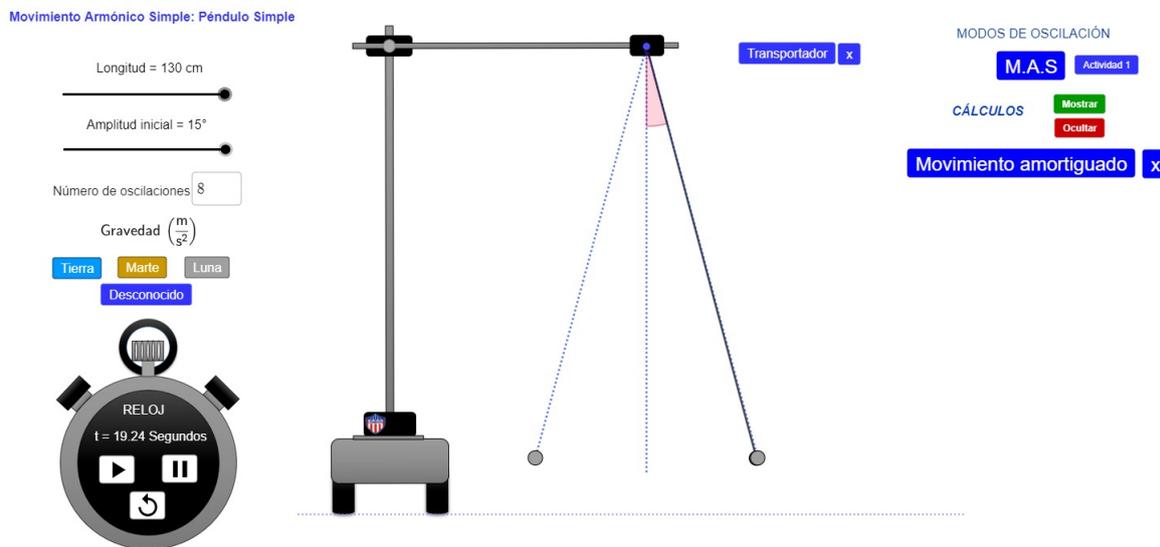


FIGURE 3. Ilustración de la simulación luego de incluir las variables dinámicas y detalles estéticos

D. Movimiento oscilatorio amortiguado

El objetivo de haber definido el movimiento armónico simple del péndulo en función de la solución de la ecuación diferencial del movimiento amortiguado, fue, que para definir este último

dentro de la simulación, basta con hacer que el coeficiente de amortiguamiento sea distinto de cero e ilustrar los casos de subamortiguamiento y amortiguamiento crítico, tal como se hizo con el MAS, para este caso también se tienen variables dinámicas, siendo estas (junto a las ya mencionadas), la masa del objeto sujeto al péndulo y el coeficiente de amortiguamiento, las cuales en lugar de presentarse como deslizadores, se muestran como casillas de entrada^[8].

Cabe resaltar, que para el caso del movimiento subamortiguado, se tienen construcciones geométricas que sirven para representar de manera explícita el medio en el que el péndulo es puesto a oscilar, además, aparte de tener una casilla de entrada para el coeficiente de amortiguamiento, se tienen dos valores fijos conocidos, siendo estos, los valores del coeficiente de amortiguamiento del agua y del aceite de cocina.

Esta parte, al igual que la primera, posee los botones que le ayudan al experimentador a corroborar sus resultados luego de haber realizado la actividad pedida, que en este caso, es calcular tanto la frecuencia angular amortiguada, como el coeficiente de amortiguamiento a partir del periodo de oscilación.

Por último, y en contraste con el MAS y el movimiento subamortiguado, en el caso del amortiguamiento crítico, no se asigna algún tipo de actividad, ya que esta parte solo está dispuesta para la observación del fenómeno visto teóricamente.

A continuación, se presenta la ilustración de la segunda parte de esta simulación, con el objetivo de presentar la nueva construcción geométrica basada en integrales definidas dentro de un intervalo específico, el único propósito de esta construcción es ilustrar el fluido que amortigua el movimiento.

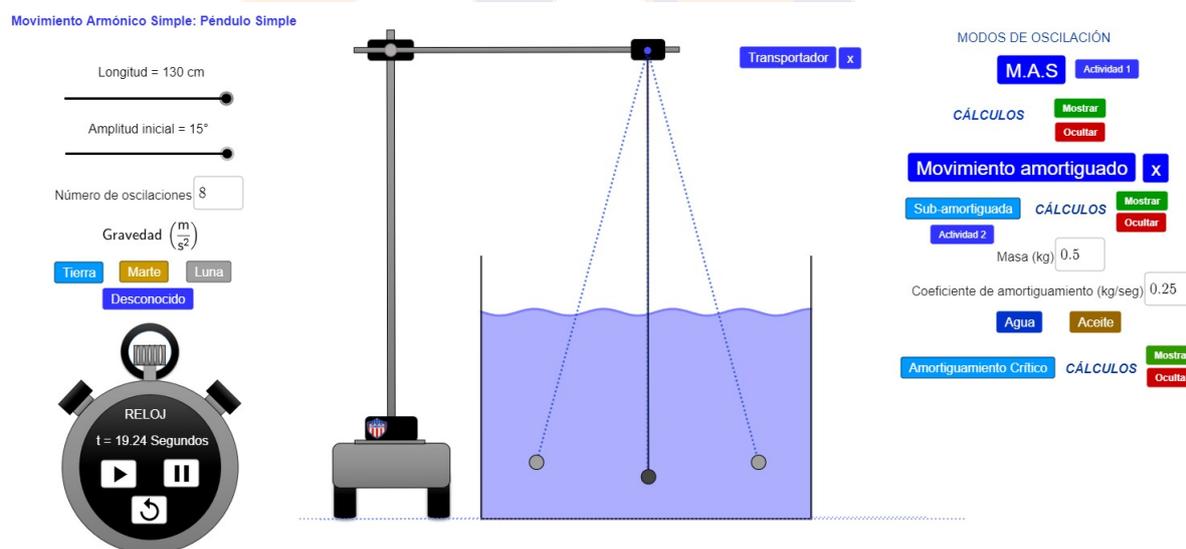


FIGURE 4. Ilustración de la segunda parte de la simulación

La figura anterior refleja el resultado final de la simulación, los botones que están del lado derecho de la pantalla permiten pasar de estudiar el movimiento armónico simple a estudiar el movimiento amortiguado y viceversa (Una vez presionado el botón denotado como "M.A.S", el valor del coeficiente de amortiguamiento se reduce a cero, en contraste con los botones referenciados como "Subamortiguado" y "Amortiguamiento crítico", los cuales le asignan un valor determinado al coeficiente de amortiguamiento, para el caso del amortiguamiento crítico, este botón le asigna un valor tal que se cumpla la condición de que el factor de amortiguamiento sea igual a la frecuencia natural), estos también permiten variar los parámetros que son propios de movimiento amortiguado (masa y coeficiente de amortiguamiento), por otro lado, los botones

y deslizadores que están del lado izquierdo de la pantalla, permiten variar los parámetros que modifican el movimiento del péndulo tanto para el MAS como para el movimiento amortiguado, incluyendo el inicio, la pausa o el reinicio de la simulación a través del deslizador de tiempo.

3.1. Resultados. En esta parte, se realiza una de las actividades propuestas en la simulación con la finalidad de ilustrar su correcto funcionamiento, la actividad a desarrollar le corresponde al movimiento armónico simple, en donde se estudia la relación entre la longitud y el periodo en la tierra (es decir, se usa el valor de la aceleración de la gravedad en la tierra), a continuación, refleja la tabla de datos medida junto al valor del periodo registrado.

Longitud (cm)	Periodo (s)
30.0	1.09
40.0	1.27
50.0	1.42
60.0	1.55
70.0	1.68
80.0	1.79
90.0	1.90
100	2.01

TABLE 1. Tabla de longitud y periodo medidos en la simulación

Puesto que,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, resulta

$$(3.4) \quad T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

Lo que representa una ecuación de la forma $y = mx + b$, donde $y = T^2$, $x = l$ y $m = \frac{4\pi^2}{g}$

Realizando la gráfica de T^2 vs l luego de convertir los valores de longitud a metros, resulta:

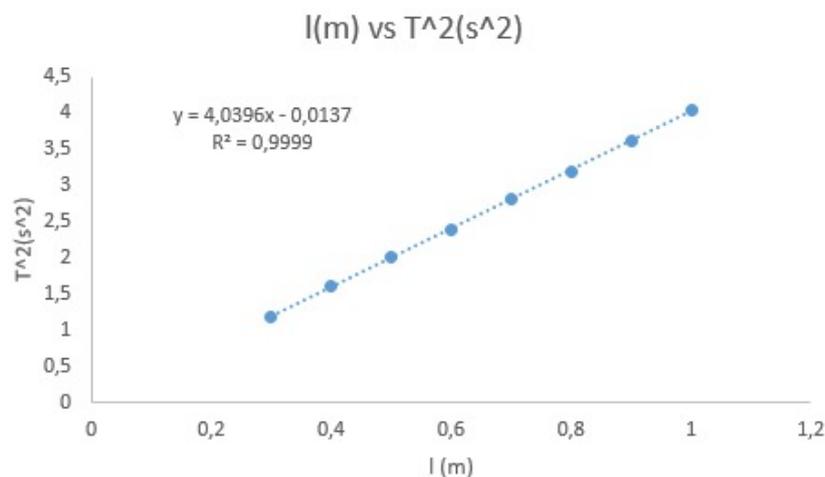


FIGURE 5. Gráfica de longitud contra el cuadrado del periodo

Se extrae la ecuación de la gráfica, siendo esta:

$$y = 4.0396x + 0.0137$$

A partir de esta se determina el valor de la aceleración de la gravedad a partir de la pendiente, de la forma:

Expresando el intervalo de medición de este valor, luego de calcular su incertidumbre a través de la ley de propagación de error^[6], resulta un valor para la aceleración de la gravedad de:

$$g = (9.77 \pm 0.05)m/s^2$$

Se aprecia una diferencia porcentual del 0.4%

Análogamente, se sigue este mismo procedimiento para el caso de los demás valores de gravedad dispuestos en la simulación (a menos que se especifique otro método de linealización), para el caso del movimiento amortiguado, se tiene un enfoque diferente, sin embargo al igual que con la primera parte, para determinar el valor de la variable que se busca calcular, se parte de la relación entre la longitud y el periodo de oscilación.

4. CONCLUSIÓN

La utilización del software dinámico geogebra como el software de creación de la simulación dinámica del péndulo simple permitió verificar cada una de las dependencias que rigen el movimiento del péndulo bajo las configuraciones que definen al movimiento armónico simple y al movimiento amortiguado (incluyendo dos casos especiales de este último).

Se obtuvo el valor de la aceleración de la gravedad, verificando la dependencia entre la longitud y el periodo evidenciando una correlación lineal entre ambas variables, el proceso mediante el cual se realizó este cálculo se generaliza para la obtención del coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia amortiguada.

En términos generales, este trabajo presenta una herramienta capaz de ilustrar con un alto nivel de precisión y detalle el funcionamiento de un oscilador armónico. Esta herramienta es esencial tanto para aquellos que se involucren en el tema de manera profesional, como para aquellos que lo hagan de forma más casual.

A diferencia de otros simuladores virtuales, este se destaca por profundizar en el tema sin complicar innecesariamente la experiencia del usuario, sino que facilita su comprensión del fenómeno y el uso de sus herramientas.

REFERENCES

- [1] Sears-Semansky. *University Physics*. (12th ed., Vol.4). Young-Freedman. pp. 436-437
- [2] Alonso - Fin. "Física" tomo I Mecánica. (Vol.1). Fondo educativo interamericano. pp. 366 -368
- [3] Moebis, W., Ling, S. J., Sanny, J. (2021). Pendulos. *Física universitaria volumen 1*. OpenStax. <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/15-4-pendulos>. Accesado el January 19, 2024; 8:30:00 PM.
- [4] Serway, R. A. (2019). *Physics for Scientists and Engineers*. Cengage Learning.
- [5] French, A.P. (1971). *Vibraciones y Ondas*. Cambridge, MA: The MIT Press
- [6] E.E.Coral. *Guía para análisis de experimentos*. Uniatlántico. Versión corregida 2019.
- [7] Geogebra. (2023). *Geogebra Classic*. Recuperado de <https://www.geogebra.org/classic>.
- [8] Geogebra. (2023). *Geogebra en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado de <https://geogebra.es/cvg/05/index.html>. Accesado el January 19, 2024; 9:30:00 AM.

- [9] Geogebra. (2023). *Scripting Commands*. Recuperado de https://wiki.geogebra.org/en/Scripting_Commands. Accesado el January 19, 2024; 9:38:00 AM.
- [10] L. Camacho-Mendoza, F. Racodo-Niebles, *Simulación Dinámica de las Leyes de Snell y Malus*. ÓPTICA PURA Y APLICADA. Vol. 1, p.8-16, (2022)

PROGRAMA DE FÍSICA, GRUPO GEOEL, UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO, BARRANQUILLA, COLOMBIA
Email address: dluque@mail.uniatlantico.edu.co

FACULTAD DE INGENIERIA, GRUPO KIBERNETICS, UNIVERSIDAD LIBRE, BARRANQUILLA, COLOMBIA
Email address: emeldo.caballerob@unilibre.edu.co

PROGRAMA DE FÍSICA, GRUPO GEOEL, UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO, BARRANQUILLA, COLOMBIA
Email address: franciscoracodo@mail.uniatlantico.edu.co

