ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.142 Поступила в редакцию 02.10.2023
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-271-278 Received 02.10.2023

В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ЗАДАЧА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ОБЪЕКТОВ В КАТЕГОРИЯХ, СВЯЗАННЫХ С КОНЕЧНОМЕРНЫМИ АЛГЕБРАМИ С ДЕЛЕНИЕМ, ОБЛАДАЮЩИМИ ГЕНЗЕЛЕВЫМИ НОРМИРОВАНИЯМИ

Аннотация. Пусть K – поле. Найдены необходимые и достаточные условия для K-гомоморфизмов некоммутативных конечномерных центральных K-алгебр с делением, обладающих гензелевыми нормированиями, быть K-изоморфизмами. Аналогичный результат получен в случае алгебр с инволюциями. Дана категорная интерпретация этих результатов.

Ключевые слова: алгебры с делением, гензелевы нормирования, инволюции алгебр, категории, морфизмы объектов категории

Для цитирования. Янчевский, В. И. Задача об изоморфизме объектов в категориях, связанных с конечномерными алгебрами с делением, обладающими гензелевыми нормированиями / В. И. Янчевский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 271–278. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-271-278

Vyacheslav I. Yanchevskiĭ

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

AN ISOMORPHISM PROBLEM FOR OBJECTS IN CATEGORIES RELATED TO FINITE DIMENSIONAL DIVISION ALGEBRAS HAVING HENSELIAN VALUATIONS

Abstract. Let K be a field. In this paper, we found the necessary and sufficient conditions for K-homomorphisms of noncommutative finite-dimensional central division K-algebras with henselian valuations being K-isomorphisms. A similar result is obtained for the case of algebras with involutions. A category interpretation of these results is given.

Keywords: division algebras, henselian valuations, involutions of algebras, categories, morphisms of category objects

For citation. Yanchevskiĭ V. I. An isomorphism problem for objects in categories related to finite dimensional division algebras having henselian valuations. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 271–278 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-271-278

Введение. Пусть K – поле с нетривиальным гензелевым нормированием v_K, D, A – некоммутативные конечномерные K-центральные алгебры с делением и нормированиями соответственно v_D и v_A, такими что $v_D|_K = v_A|_K$. В этой статье нас будут интересовать следующие две задачи (их категорная интерпретация будет дана в конце статьи):

1) на языке алгебр вычетов и групп значений нормирований этих алгебр найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых K-гомоморфизм σ алгебр D и A является K-изоморфизмом;

2) пусть алгебры D и A обладают инволюциями τ и μ соответственно и K-гомоморфизм $\sigma: D \to A$ удовлетворяет условию σμ = τσ; найти необходимые и достаточные условия, когда σ является K-изоморфизмом.

З а м е ч а н и е 1. Ясно, что для произвольного поля K уравнение $\sigma\mu = \tau\sigma$ эквивалентно коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\sigma} & A \\ \tau\downarrow & & \downarrow\mu \\ D & \xrightarrow{\sigma} & A \end{array} \tag{1}$$

Если такой K-гомоморфизм σ существует, говорят, что инволюции τ и μ совместимы относительно σ. Если же σ является дополнительно K-изоморфизмом, то алгебры (D,τ) и (A,μ) называются K-изоморфными как алгебры с инволюциями.

Пусть D – K-алгебра такая, как и выше, и $[D:K]=m^2$. Тогда для размерности векторного пространства $S_\tau(D)$ τ-инвариантных элементов из D над полем $k=\{d\in K \mid d^\tau = d\}$ имеется только 3 возможности:

(*i*) $\tau|_K \neq \mathrm{id}$, $\dim_k S_\tau(D) = m^2$ (унитарные инволюции D),

(*ii*) $\tau|_K = \mathrm{id}$, $\dim_k S_\tau(D) = m(m+1)/2$,

(*iii*) $\tau|_K = \mathrm{id}$, $\dim_k S_\tau(D) = m(m-1)/2$.

В случае (*ii*) инволюция называется инволюцией типа τ_+, а в случае (*iii*) – инволюцией типа τ_-.

В этих обозначениях справедлива

Л е м м а 1. *Пусть I, T – алгебры с делением и инволюциями соответственно τ и μ с тождественными ограничениями на K, а $D = I\otimes_K T$ – алгебра с делением. Тогда $\tau\otimes\mu$ – K-инволюция K-алгебры D и верно следующее:*

$\tau_+\otimes\mu_+ = (\tau\otimes\mu)_+$,

$\tau_+\otimes\mu_- = (\tau\otimes\mu)_-$,

$\tau_-\otimes\mu_+ = (\tau\otimes\mu)_-$,

$\tau_-\otimes\mu_- = (\tau\otimes\mu)_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в рутинном сравнении размерностей пространств $S_{\tau\otimes\mu}(D)$ и $S_\tau(I)\oplus S_\mu(T) + \left(K_\tau(I)K_\mu(T)\right)$, где $K_\tau(I)$ и $K_\mu(T)$ – соответствующие пространства элементов из I и T, которые инволюциями τ и μ переводятся в свои противоположные.

З а м е ч а н и е 2. Возвращаясь к коммутативной диаграмме (1), заметим, что инволюции τ и μ не могут быть слишком произвольными, как показывает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1. *В предыдущих обозначениях при* $\sigma\mu = \tau\sigma$:

(*i*) $\tau|_K = \mu|_K$,

(*ii*) *пусть k – подполе τ-инвариантных элементов из K-инволюций τ и μ.*

Тогда $[S_\tau(D):k] = [S_\mu(A):k]$, *где $S_\tau(D)$ (соответственно $S_\mu(A)$) – k-векторное пространство τ-инвариантных (соответственно μ-инвариантных) элементов D (соответственно A).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть ограничение равенства $\sigma\mu = \tau\sigma$ на центре K: $\sigma|_K\,\mu|_K = \tau|_K\,\sigma|_K$, и воспользоваться тождественностью $\sigma|_K$. Если τ – унитарная инволюция, то, как известно, $[S_\tau(D):k]=[D:K]=[A:K]=[S_\mu(A):k]$. Таким образом, остается рассмотреть случай $K = k$.

Тогда имеем следующее равенство:

$$S_\tau(D) = \left(S_\tau(D)\right)^\sigma = \left(S_\tau(D)\right)^{\tau\sigma} = \left(S_\tau(D)\right)^{\sigma\mu}.$$

Значит, $S_\tau(D)^\sigma \subseteq S_\mu(A)$. Остается заметить, что $[\left(S_\tau(D)\right)^\sigma : k] = [S_\tau(D):k]$.

Из равенства $\sigma\mu = \tau\sigma$ следует равенство $\sigma^{-1}\tau = \mu\sigma^{-1}$. Рассмотрим действия на $S_\mu(A)$ обеих частей последнего равенства: $S_\mu(A)^{\mu\sigma^{-1}} = S_\mu(A)^{\sigma^{-1}} = S_\mu(A)^{\sigma^{-1}\tau}$. Значит, $S_\mu(A)^{\sigma^{-1}} \subseteq S_\tau(D)$. Стало быть, размерность $[S_\mu(A)^{\sigma^{-1}}:k] \le [S_\tau(D):k]$. Но $[S_\mu(A)^{\sigma^{-1}\tau}:k] = [S_\mu(A):k]$, что влечет $[S_\mu(A):k] \le [S_\tau(D):k]$. Так как еще $[S_\tau(D):k] \le [S_\mu(A):k]$, то предложение доказано.

Решение задач 1 и 2 в общем случае малоприступно. Целью статьи является рассмотрение ситуации центральных слабо разветвленных K-алгебр D и A с делением, обладающих нормированиями. Для изложения основных результатов зафиксируем следующие обозначения, определения и соглашения.

Определение 1 [1]. Нормированием на алгебре D, или просто нормированием (алгебры D), называется функция $v_D : D^* \mapsto \Gamma$, где Γ – записываемая аддитивно совершенно упорядоченная абелева группа такая, что для всех $a, b \in D^*$ (где D^* – мультипликативная группа алгебры D):

(i) $v_D(ab) = v_D(a) + v_D(b)$;

(ii) $v_D(a+b) \geq \min\{v_D(a), v_D(b)\}$, если $a \neq -b$.

Если v_D – нормирование алгебры D, то определены: группа значений $\Gamma_D = v_D(D^*)$, кольцо нормирования $V_D = \{a \in D^* \mid v_D(a) \geq 0\} \cup \{0\}$ с единственным двусторонним идеалом $M_D = \{d \in D^* \mid v(d) > 0\} \cup \{0\}$, группа единиц $U_D = V_D \setminus M_D = \{d \in D^* \mid v(d) = 0\}$ и кольцо вычетов $\overline{D} = V_D / M_D$. Для всякого $d \in D^*$ через i_d будет обозначаться внутренний автоморфизм D^*, переводящий произвольный элемент $x \in D^*$ в dxd^{-1} (иногда под i_d мы будем понимать изоморфизм $i_{d^{-1}}$, когда это не будет приводить к противоречию).

Определение 2. Нормирование v_K поля K называется гензелевым, если оно однозначно продолжается на любое его алгебраическое расширение. Простая центральная конечномерная K-алгебра обычно называется гензелевой. Ниже все рассматриваемые поля гензелевы.

Если E – это подалгебра алгебры D, то $v|_E$ – это нормирование на E и v называется продолжением $v|_E$ на D. Если нет опасности смешения, вместо $v|_E$ мы иногда будем писать просто v.

Для K-алгебры D с таким, как выше, индексом ветвления $e(D/K)$ будет называться индексом группы Γ_K в Γ_D.

Пусть теперь σ – ненулевой K-гомоморфизм алгебры с делением D в алгебру A. Тогда σ, очевидно, инъективен. Напомним, что для такого K-гомоморфизма определена следующим образом его редукция $\overline{\sigma} : \overline{D} \to \overline{A}$. Действительно, для всякого $d \in V_D$ положим $(d + M_D)^{\overline{\sigma}} = d^{\sigma} + M_A$. Ясно, что $\overline{\sigma}$ – K-гомоморфизм.

Напомним, наконец, определение важного гомоморфизма θ_D:

$$\theta_D : \Gamma_D / \Gamma_K \to \mathrm{Gal}\left(Z(\overline{D}) / \overline{K}\right), \tag{2}$$

где $Z(\overline{D})$ – центр $\overline{D}$, являющийся композитом абелева расширения Галуа и чисто несепарабельного расширения поля $\overline{K}$, а $\mathrm{Gal}\left(Z(\overline{D}) / \overline{K}\right)$ – группа всех $\overline{K}$-автоморфизмов расширения $Z(\overline{D}) / \overline{K}$. Гомоморфизм θ_D определяется следующим образом. Пусть $[D : K] < \infty$. Для любого $d \in D^*$ отображение сопряжения $i_d : D \mapsto D$, заданное формулой $a \mapsto dad^{-1}$, переводит V_D в V_D и M_D в M_D; следовательно, i_d индуцирует $\overline{K}$-автоморфизм $\overline{D}$, который ограничивается до $\overline{K}$-автоморфизма $Z(\overline{D})$, обозначаемого $\overline{i_d}$. Таким образом, отображение $d \mapsto \overline{i_d}$ индуцирует гомоморфизм $\alpha : D^* \to \mathrm{Gal}\left(Z(\overline{D}) / \overline{K}\right)$. Для $u \in U_D$ $\overline{i_u}$ – это сопряжение $\overline{u}$, поэтому $u \in \ker\alpha$. Кроме того, $K^* \subseteq \ker\alpha$. Поскольку $D^* / U_D K^* \cong \Gamma_D / \Gamma_K$, отображение α индуцирует корректно определенный групповой гомоморфизм θ_D.

Как уже упоминалось, задачи 1 и 2 будут решаться в классе гензелевых слабо разветвленных алгебр с делением, возникающих следующим образом. Напомним одно утверждение из [2].

Лемма 2. *Пусть* (K, v_K) *– гензелево поле с нормированием* v_K*, для которого* $\mathrm{char}(\overline{K}) = q \neq 0$. *Тогда для произвольного* $D \in \mathcal{D}(K)$, *где* $\mathcal{D}(K) = \{D \mid D$ *– кольцо с делением,* $Z(D) = K$ *и* $[D : K] < \infty\}$, *эквивалентны следующие условия:*

(i) *q-примарная компонента D расщепляется K_{nr} – максимальным неразветветвленным расширением поля K;*

(ii) *D не имеет дефекта над K (т. е. $[D : K] = [\overline{D} : \overline{K}]e(D / K)$), центр $Z(\overline{D})$ сепарабелен над $\overline{K}$ и $q \nmid |\ker\theta_D|$, где θ_D – это введенное выше отображение* (*см. формулу* (2)).

Определение 3. Если (K, v_K) – поле с гензелевым нормированием v_K и D – центральная алгебра с делением над K, то D называется слабо разветвленной, если либо $\mathrm{char}(\overline{K}) = 0$, либо $\mathrm{char}(\overline{K}) = q \neq 0$ и выполнены условия леммы 2. В этом случае обычно пишут $D \in TR(K)$.

Определим также редукции гомоморфизмов и инволюций конечномерных алгебр с делением над нормированными полями K и специальные гомоморфизмы относительных групп значений.

Определение 4. Пусть D, A – конечномерные K-алгебры с делением над нормированным полем K. Тогда для всякого K-гомоморфизма $\sigma: D \to A$ при условии $V_D^{\sigma} \subseteq V_A$ и $M_D^{\sigma} \subseteq M_A$ определена его редукция $\overline{\sigma}: \overline{D} \to \overline{A}$ по следующему правилу: для произвольного $d \in V_D$ положим $(d + M_D)^{\overline{\sigma}} = d^{\sigma} + M_A$, а также гомоморфизм φ_{σ} относительных групп значений $\varphi_{\sigma}: \Gamma_D / \Gamma_K \to \Gamma_A / \Gamma_K$: для произвольного $d \in D^*$ и $\left(v_D(d) + \Gamma_K\right)^{\varphi_{\sigma}} = v_A(d^{\sigma}) + \Gamma_K$. Для инволюции $\tau: D \to D$ определена ее редукция $\overline{\tau}: \overline{D} \to \overline{D}$ следующим образом: для произвольного $d \in V_D$ $(d + M_D)^{\overline{\tau}} = d^{\tau} + M_D$ (заметим, что $(V_D)^{\tau} = V_D$ и $(M_D)^{\tau} = M_D$). Кроме того, определен гомоморфизм групп $\varphi_{\sigma}: \Gamma_D / \Gamma_K \to \Gamma_A / \Gamma_K$: для произвольного $d \in D^*$ и $v_D(d) + \Gamma_K$ положим

$$\left(v_D(d) + \Gamma_K\right)^{\varphi_{\sigma}} = v_A(d^{\sigma}) + \Gamma_K.$$

Сформулируем теперь первый основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть K – поле с гензелевым нормированием v_K, D, A – конечномерные центральные K-алгебры с делением с нормированиями v_D и v_A, которые слабо разветвлены над K, $v_D|_K = v_A|_K$. Пусть также $\sigma: D \to A$ – K-гомоморфизм. Тогда σ является K-изоморфизмом в том и только в том случае, когда одновременно выполнены два условия:*

(*i*) *редукция $\overline{\sigma}: \overline{D} \to \overline{A}$ является $\overline{K}$-изоморфизмом;*

(*ii*) *гомоморфизм φ_{σ} является изоморфизмом и порядки групп $\ker\theta_D$ и $\ker\theta_A$ совпадают.*

При доказательстве теоремы 1 нам потребуется следующее утверждение, справедливое, впрочем, в более общей негензелевой ситуации.

Лемма 3. *Пусть D, A – конечномерные центральные некоммутативные K-алгебры с делением и $\sigma: D \to A$ – инъекция. Предположим, что D и A обладают нормированиями v_D и v_A, тогда если $v_D|_K = v_A|_K$, то для произвольного $d \in D^*$ нормирования $v_D(d) = v_A(d^{\sigma})$.*

Доказательство. Поскольку D – центральная K-алгебра и $\sigma: D \to A$ – инъективный K-гоморфизмом, то D^{σ} – K-центральная подалгебра в A, K-изоморфная D, и потому $A = D^{\sigma} \otimes_K C_A(A^{\sigma})$. Для краткости положим $E = C_A(A^{\sigma})$. Пусть n_D, n_E – индексы соответственно алгебр D, D^{σ}, E. Ясно, что $n_D = n_{D^{\sigma}}$ и индекс n_A алгебры A совпадает с $n_{D^{\sigma}} n_E$. Для произвольного $d \in D^*$ будем иметь:

$$v_A(d^{\sigma}) = n_A^{-1} v_K\left(Nrd_A(d^{\sigma})\right) = (n_{D^{\sigma}} n_E)^{-1} v_K\left(Nrd_{D^{\sigma}}(d^{\sigma})^{n_E}\right) = (n_{D^{\sigma}})^{-1}\left(v_K(Nrd_{D^{\sigma}}(d^{\sigma})\right),$$

но $n_D = n_{D^{\sigma}}$ и $Nrd_D(d) = Nrd_{D^{\sigma}}(d^{\sigma})$, что влечет $v_D(d) = v_{D^{\sigma}}(d^{\sigma})$. Лемма доказана.

Замечание 3. Отметим, что из предыдущей леммы в условиях теоремы 1 всегда верно, что $(V_D)^{\sigma} \subseteq V_A$ и $(M_D)^{\sigma} \subseteq M_A$. Таким образом, для всякого K-гомоморфизма $\sigma: D \to A$ определен $\overline{K}$-гомоморфизм $\overline{\sigma}$.

В случае алгебр D и A с инволюциями соответственно τ и μ второй основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть алгебры D и A такие, как в теореме 1, $\sigma: D \to A$ – их K-гомоморфизм. Предположим, что $\tau: D \to D$ и $\mu: A \to A$ – инволюции соответственно алгебр D и A, совместимые с σ. Тогда σ является K-изоморфизмом этих алгебр, как алгебр с инволюциями, в том и только в том случае, когда одновременно выполнены два условия:*

(*i*) *редукция $\overline{\sigma}: \overline{D} \to \overline{A}$ является $\overline{K}$-изоморфизмом и дополнительно удовлетворяет условию $\overline{\tau}\overline{\sigma} = \overline{\sigma}\overline{\mu}$;*

(*ii*) *гомоморфизм φ_{σ} является изоморфизмом и порядки групп $\ker\theta_D$ и $\ker\theta_A$ совпадают.*

Замечание 4. Ввиду предыдущего замечания определена редукция $\overline{\sigma}$. Кроме того, определены также редукции $\overline{\tau}$ и $\overline{\mu}$.

Доказательство теорем 1 и 2. Таким образом, ниже в этом разделе K – гензелево поле. При доказательстве теоремы 1 (и теоремы 2) нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 4. *Если* $D \in TR(K)$ *и* τ *– инволюция D (либо* $\tau = \mathrm{id}_D$*), то существует неразветвленное над K* τ*-инвариантное расширение Z/K такое, что* $\overline{Z} = Z(\overline{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $\tau|_K \neq \mathrm{id}_K$ – это собственно лемма 12 из [3]. Если же $\tau|_K = \mathrm{id}_K$, то рассуждения из доказательства этой леммы непосредственно адаптируются и к этому случаю.

П р е д л о ж е н и е 2. *В обозначениях предыдущей леммы централизатор* $C_D(Z)$ *может быть представлен в виде* $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$, *где* I_D *–* τ*-инвариантная алгебра инерции алгебры D, содержащая Z, а* T_D *–* τ*-инвариантная вполне разветвленная алгебра с центром Z.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду τ-инвариантности Z, τ-инвариантен и централизатор $C_D(Z)$. Пусть вначале ограничение τ на Z нетривиально. По теореме 12 из [3] существует τ-инвариантная алгебра инерции централизатора $C_D(Z)$, являющаяся одновременно алгеброй инерции алгебры D. Применим следствие 2.11 из [2] к алгебре $C_D(Z)$, тогда получим $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$, где алгебра T_D центральная и вполне разветвленная над Z. Поскольку T_D – централизатор I_D и $I_D = I_D^{\tau}$, то алгебра T_D τ-инвариантна.

Рассмотрим теперь случай $\tau|_Z = \mathrm{id}_Z$ (что, конечно, влечет $K = k$). Ввиду следствия 2.11 из [2], $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$, где, как и выше, I_D – алгебра инерции D, а T_D – Z-центральная вполне разветвленная алгебра. Так как $\overline{D} = \overline{I_D}$, то алгебра I_D обладает инволюцией μ такой, что $\overline{\mu} = \overline{\tau}$. Тогда алгебра T_D Брауэр-эквивалентна над Z алгебре $C_D(Z) \otimes_Z (I_D)^{op}$, и потому обладает инволюцией δ с тривиальным ограничением на Z. Откуда следует, что $C_D(Z)$ обладает двумя инволюциями $\mu \otimes \delta$ и $\tau_{C_D(Z)}$. Таким образом, $\tau_{C_D(Z)} = (\mu \otimes \delta) i_g$, где $g \in C_D(Z)$. Значит, $(I_D)^{\mu i_g} = (I_D)^{i_g}$ (поскольку $(I_D)^{\mu} = I_D$). С другой стороны, $(I_D)^{\mu i_g} = (I_D)^{\tau}$, что влечет $(I_D)^{\tau} = (I_D)^{i_g}$.

Меняя тип инволюции δ (если окажется необходимым) на подходящую Z-инволюцию алгебры T_D другого типа (это возможно ввиду леммы 1), можно, не ограничивая общности, считать, что $\mu|_I \otimes \delta$ и $\tau|_{C_D(Z)}\, i_g$ – одного типа, а тогда $g \in S_{\tau}(C_D(Z))$.

Л е м м а 5. $\ker \theta_D = \Gamma_{T_D} / \Gamma_K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим цепочку включений $K \subset Z \subset T_D \subset I_D \otimes_Z T_D \subset D$. Предположим, что элемент β такой, что $v_D(\beta) + \Gamma_K \in \ker \theta_D$. Тогда ограничение редукции $\overline{i_\beta}$ на $Z(\overline{D})$ должно быть тривиальным внутренним $\overline{K}$-автоморфизмом $Z(\overline{D})$. Так как редукция автоморфизма $\overline{i_\beta}$ тождественна, то должен существовать элемент $g \in 1 + M_{C_D(Z)}$ такой, что редукция автоморфизма $i_g i_{\beta^{-1}}$ тождественна на $\overline{D}$. Иными словами, можно считать, что $\beta \in C_D(Z)$. Кроме того, из последнего заключаем, что $\beta = ut$, где $u \in I_D$, $t \in T_D$. В силу неразветвленности расширения Z/K, не ограничивая общности, можно считать, что $v_D(\beta) = v_D(t)$, т. е. $v_D(\beta) \in T_D / \Gamma_K$. Таким образом, $\ker \theta_D \subseteq \Gamma_{T_D} / \Gamma_K$. Обратное включение очевидно.

Обратимся к д о к а з а т е л ь с т в у теоремы 1. Пусть σ – K-изоморфизм, $\sigma : D \to A$. Тогда $D^{\sigma} = A$ и $(V_D)^{\sigma} = V_A$, $(M_D)^{\sigma} = M_A$, $\overline{D}^{\overline{\sigma}} = \overline{A}$. Действительно, для произвольного $d \in V_D$ $d^{\sigma} \in A$ удовлетворяет тому же уравнению над K, что и d. Таким образом, $(V_D)^{\sigma} \subseteq V_A$. Поскольку σ^{-1} – также K-изоморфизм, то $(V_A)^{\sigma^{-1}} \subseteq V_D$. Откуда следует, что $V_A \subseteq (V_D)^{\sigma} \subseteq V_A$, что влечет $(V_D)^{\sigma} = V_A$. Далее, M_D и M_A – единственные максимальные двусторонние идеалы соответственно в V_D и V_A. Откуда следует, что $(M_D)^{\sigma} = M_A$. Покажем, что $\overline{\sigma}$ – биекция. Инъективность $\overline{\sigma}$ устанавливается следующим образом. Заметим, что если $(d + M_D)^{\overline{\sigma}} = M_A$, где $d \in V_D$, то $d^{\sigma} \in M_A$. С другой стороны, если $d \neq 0_{\overline{D}}$, то $d \notin M_D$. А ввиду биективности σ, $d^{\sigma} \notin M_A$. Следовательно, $\overline{\sigma}$ инъективно. Сюръективность $\overline{\sigma}$ вытекает из того, что $(V_D)^{\sigma} = V_A$, и потому для любого $a \in V_A$ $a = d^{\sigma}$ для подходящего $d \in V_D$. Тогда $(d + M_D)^{\overline{\sigma}} = a + M_A$. Таким образом, $\overline{\sigma}$ является $\overline{K}$-изоморфизмом, т. е. необходимость условия (*i*) доказана.

Для доказательства необходимости (*ii*) (при условии биективности σ) заметим, прежде всего, что φ_{σ} – изоморфизм. Действительно поскольку σ – K-изоморфизм, то $D^{\sigma} = A$, поэтому для произвольного $a \in A^*$ такого, что $a = d^{\sigma}$, имеем $v_A(a) + \Gamma_K = v_A(d^{\sigma}) + \Gamma_K$. Значит, $(v_D(d) + \Gamma_K)^{\varphi_{\sigma}} = v_A(d^{\sigma}) + \Gamma_K$. Следовательно, φ_{σ} – сюръекция. Инъективность φ_{σ} устанавливается следующим образом. Пусть $(v_D(d))^{\varphi_{\sigma}} \notin \Gamma_K$, но $v_A(d^{\sigma}) \in \Gamma_K$, т. е. $v_A(d^{\sigma}) = v_A(s)$, где

$s \in K^*$, что влечет $v_A(s) = v_D(s) = v_D(s^\sigma)$ ввиду совпадения ограничений $v_D|_K$ и $v_A|_K$. Таким образом, $v_D(ds^{-1}) \in \Gamma_K$, что противоречит исходному предположению. Стало быть, φ_σ инъективно (и даже биекция).

Кроме того, заметим, что централизатор $C_D(Z)$ может быть представлен в виде $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$ (предложение 2). Рассмотрим расширение Z^σ/K. Тогда нетрудно видеть, что $C_A(Z^\sigma) = (C_D(Z))^\sigma$, откуда заключаем, что $C_A(Z^\sigma) = (I_D)^\sigma \otimes_{Z^\sigma} (T_D)^\sigma$, где $(I_D)^\sigma$ – алгебра инерции алгебры A, содержащая поле Z^σ, а $(T_D)^\sigma$ – вполне разветвленная часть алгебры A. Гомоморфизм φ_σ устроен следующим образом. Для всякого $d \in D^*$: $\left(v_D(d) + \Gamma_K\right)^{\varphi\sigma} = v_A(d^\sigma) + \Gamma_K$, и ввиду леммы 5 для $t \in T_D$ и элемента $v_D(t) + \Gamma_K$ имеем: $\left(v_D(t) + \Gamma_K\right)^{\varphi\sigma} = v_A(t^\sigma) + \Gamma_K$. И потому $(\ker\theta_D)^{\varphi\sigma} \subseteq \ker\theta_A$. Поскольку σ – $\bar{K}$-изоморфизм, аналогичное рассуждение для σ^{-1} (и $\varphi_{\sigma^{-1}}$) показывает, что $(\ker\theta_A)^{\varphi_{\sigma^{-1}}} \subseteq \ker\theta_A$. Применяя φ_σ к обеим частям последнего включения, получаем, что $\ker\theta_A \subseteq (\ker\theta_D)^{\varphi\sigma}$. Вместе с предыдущим включением $(\ker\theta_D)^{\varphi\sigma} \subseteq \ker\theta_A$ заключаем, что условие (*ii*) выполнено.

Таким образом, условия (*i*) и (*ii*) являются необходимыми для K-изоморфности σ.

Покажем теперь, что для K-изоморфности σ достаточна их совместная выполнимость. Ниже $|*|$ обозначает порядок *.

Из определения гомоморфизма θ_D имеем $\left|\Gamma_D / \Gamma_K\right| = |\ker\theta_D| \cdot \left|\mathrm{Gal}\left(Z(\bar{D}) / \bar{K}\right)\right|$. Аналогично заключаем, что $\left|\Gamma_A / \Gamma_K\right| = |\ker\theta_A| \cdot \left|\mathrm{Gal}\left(Z(\bar{A}) / \bar{K}\right)\right|$. Поскольку φ_σ в рассматриваемой ситуации – изоморфизм, то $|\Gamma_D / \Gamma_K| = |\Gamma_A / \Gamma_K|$. Далее, $\bar{K}$-изоморфность $\bar{D}$ и $\bar{A}$ влечет, что $Z(\bar{D})$ и $Z(\bar{A})$ $\bar{K}$-изоморфны, а так как $Z(\bar{D}) / \bar{K}$ и $Z(\bar{A}) / \bar{K}$ – расширения Галуа поля $\bar{K}$, то $\left|\mathrm{Gal}\left(Z(\bar{D}) / \bar{K}\right)\right| = \left|\mathrm{Gal}\left(Z(\bar{A}) / \bar{K}\right)\right|$. Кроме того, поскольку порядок $\ker\theta_D$ совпадает с порядком $\ker\theta_A$ (так как φ_σ – изоморфизм), это приводит к совпадению индексов ветвления $e(D,K)$ и $e(A,K)$. Воспользуемся далее тем, что $\bar{\sigma}$ – $\bar{K}$-изоморфизм, поэтому $[\bar{D} : \bar{K}] = [\bar{A} : \bar{K}]$. Последнее равенство вместе с совпадением индексов ветвления $e(D/K)$ и $e(A/K)$ влечет совпадение размерности $[D : K] = [A : K]$. Из инъективности σ вытекает изоморфность над K алгебр D^σ и D. Откуда следует, что $[D^\sigma : K] = [A : K]$, а так как еще $D^\sigma \subseteq A$, то $D^\sigma = A$. С учетом инъективности σ получаем, что σ – K-изоморфизм D и A. Таким образом, теорема 1 доказана.

Перейдем к д о к а з а т е л ь с т в у теоремы 2. Заметим, что тройка (D,A,σ) удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому σ – биекция. Кроме того, инволюции τ и μ совместимы с σ, и потому $\bar{\tau}\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\bar{\mu}$, что завершает доказательство теоремы 2.

Категорная интерпретация полученных результатов. Как уже упоминалось в начале статьи, теоремы 1 и 2 имеют категорную интерпретацию (см. [4, ч. 1, п. 13; 5, п. 7]), связывающую их с задачей об изоморфизме объектов в подходящих категориях.

Пусть K – поле с гензелевым нормированием v. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$, объектами которой являются конечномерные центральные K-алгебры D с делением, слабо разветвленные над K такие, что на каждой из них определено нормирование, ограничение которого на K совпадает с v. Морфизмами в категории $\mathcal{C}$ будут ненулевые K-гомоморфизмы K-алгебр. Множество морфизмов алгебр A и B будет обозначаться как $\mathrm{Mor}(A, B)$. При этом, единичный морфизм $\mathrm{id}_D \in \mathrm{Mor}(D, D)$ является тождественным отображением алгебры D. Заметим, что композиция морфизмов ассоциативна, поскольку морфизмы являются отображениями множеств. Напомним теперь следующее определение, относящееся к категории $\mathcal{C}$.

О п р е д е л е н и е 5. Объекты A и B категории $\mathcal{C}$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : A \to B$, т. е. морфизм, для которого существует морфизм $g : B \to A$ такой, что $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$.

Задача об изоморфизме объектов категории $\mathcal{C}$ состоит в разбиении на классы изоморфных объектов. На этом (категорном) языке теорема 1 интерпретируется следующим образом.

Т е о р е м а 3. *Два объекта категории $\mathcal{C}$ изоморфны тогда и только тогда, когда выполнены условия* (*i*) *и* (*ii*) *теоремы* 1.

Рассмотрим далее следующую категорию $\mathcal{S}$, состоящую из объектов категории $\mathcal{C}$, на которых определены инволюции с одинаковым действием на центре K. Объекты такой категории будут обозначаться через (A,τ), где $A \in \mathcal{C}$, а τ – инволюция алгебры A. Для всякой такой пары морфизмом f является ненулевой K-гомоморфизм $f : A \to B$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \tau\downarrow & & \downarrow\mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

коммутативна. Множество морфизмов из (A,τ) в (B,μ) будет обозначаться через $\mathrm{Mor}\big((A,\tau),(B,\mu)\big)$. Для всякой пары (A,τ) определен тождественный морфизм $id_A \in \mathrm{Mor}\big((A,\tau),(A,\tau)\big)$. Кроме того, если $f:(A,\tau)\to(B,\mu)$ и $g:(B,\mu)\to(C,\nu)$ – морфизмы, то определена их композиция $f\circ g$. Поскольку f и g переводят единичные элементы алгебр A, B, C в единичные, то композиция гомоморфизмов f и g – ненулевой K-гомоморфизм $A \to C$. Покажем, что из коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \tau\downarrow & & \downarrow\mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ \mu\downarrow & & \downarrow\nu \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f\circ g} & C \\ \tau\downarrow & & \downarrow\nu \\ A & \xrightarrow{f\circ g} & C \end{array} \qquad (3)$$

То есть $\tau(f\circ g)=(f\circ g)\nu$. Для этого воспользуемся равенством $\tau f = f\mu$, получим $(f\mu)g = (fg)\nu$. Аналогично, воспользовавшись равенством $g\nu = \mu g$, получаем требуемое равенство, т. е. диаграмма (3) коммутативна. Таким образом, композиция морфизмов корректно определена. Поскольку мы имеем дело с отображениями множеств, то так определенная композиция, как показывает прямое вычисление, ассоциативна. Нетрудно также видеть, что два множества $\mathrm{Mor}\big((A,\tau),(B,\mu)\big)$ и $\mathrm{Mor}\big((A',\tau'),(B',\mu')\big)$ не пересекаются, за исключением случая, когда $(A,\tau)=(A',\tau')$ и $(B,\mu)=(B',\nu)$. Аналогичным образом определяется изоморфизм объектов категории $\mathcal{S}$ и задача об изоморфизмах объектов этой категории.

Т е о р е м а 4. *Два объекта категории $\mathcal{S}$ изоморфны тогда и только тогда, когда выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 2.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.1.01. Автор признателен А. А. Осиновской за большую помощь, оказанную при технической подготовке статьи.

Acknowledgements. The research is supported by the State Research Scientific Program “Convergence-2025”, Subprogram “Mathematical Models and Methods”, project 1.1.01. The author is grateful to A. A. Osinovskaya for the useful assistance in technical preparation of the article.

Список использованных источников

1. Schilling, O. F. G. The Theory of Valuations / O. F. G. Schilling. – Providence: Am. Math. Soc., 1950. – 253 p. – (Mathematical Surveys and Monographs, vol. 4). https://doi.org/10.1090/surv/004

2. Jacob, B. Division algebras over Henselian fields / B. Jacob, A. Wadsworth // J. Algebra. – 1990. – Vol. 128, № 1. – P. 126–179. https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r

3. Янчевский, В. И. Гензелевы алгебры с делением и приведенные унитарные группы Уайтхеда для внешних форм анизотропных алгебраических групп типа A_n / В. И. Янчевский // Мат. сб. – 2022. – Т. 213, № 8. – С. 83–148. https://doi.org/10.4213/sm9660

4. Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

5. Ленг, С. Алгебра: пер. с англ. / С. Ленг. – М.: Наука, 1965. – 431 с.

References

1. Schilling O. F. G. *The Theory of Valuations. Mathematical Surveys and Monographs*, *vol. 4*. Providence, American Mathematical Society, 1950. 253 p. https://doi.org/10.1090/surv/004

2. Jacob B., Wadsworth A. Division algebras over Henselian fields. *Journal of Algebra*, 1990, vol. 128, no. 1, pp. 126–179. https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r

3. Yanchevskiĭ V. I. Henselian division algebras and reduced unitary Whitehead groups for outer forms of anisotropic algebraic groups of the type A_n. *Sbornik: Mathematics*, 2022, vol. 213, no. 8, pp. 1096–1156. https://doi.org/10.4213/sm9660e

4. Kostrikin A. I., Manin Yu. I. *Linear Algebra and Geometry*. London, CRC Press, 1989. 320 p. https://doi.org/10.1201/9781466593480

5. Long S. *Algebra, 3rd ed*. New York, Springer, 2002. 929 p.

Информация об авторе

Янчевский Вячеслав Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by

Information about the author

Vyacheslav I. Yanchevskiĭ – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by