ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12 Поступила в редакцию 19.10.2023
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-308-314 Received 19.10.2023

Ю. П. Выблый[1], А. А. Леонович[2]

[1]Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ НЕСТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Аннотация. Рассмотрены нестатические вакуумные сферически-симметричные решения системы уравнений Эйнштейна и условий гармоничности в системе координат с отличной от нуля пространственно-временной компонентой метрики. Для случая слабого поля получено частное решение приближенных уравнений, которое соответствует нестатическому источнику, граница которого движется с постоянной скоростью. Для точных уравнений Эйнштейна получено решение волнового типа, определяемое двумя заданными неявно функциями, зависящими, соответственно, от запаздывающего аргумента и радиальной координаты. Обсуждается связь этих решений с теоремой Биркгофа.

Ключевые слова: теория гравитации, уравнения Эйнштейна, теорема Биркгофа, сферическая симметрия, нестатические решения, гравитационная волна

Для цитирования. Выблый, Ю. П. Сферически-симметричные нестатические решения уравнений Эйнштейна / Ю. П. Выблый, А. А. Леонович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 308–314. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-308-314

Yuri P. Vyblyi[1], Anatoli A. Leonovich[2]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

SPHERICALLY-SYMMETRIC NON-STATIC SOLUTIONS OF EINSTEIN'S EQUATIONS

Abstract. In this paper, we considered non-static vacuum spherically symmetric solutions of the Einstein equations and harmonicity conditions in the coordinate system with a non-zero space-time component in the metric. For the case of the weak field, a particular solution of the approximate equations was obtained, which corresponds to a nonstatic source whose boundary moves with a constant speed. For the exact Einstein's equations we obtained a wave-type solution, determined by two implicitly specified functions, depending on the retarded argument and on the radial coordinate, respectively. The connection between these solutions and the Birkhoff theorem is discussed.

Keywords: theory of gravity, Einstein's equations, Birkhoff theorem, spherical symmetry, nonstatic solutions, gravitational wave

For citation. Vyblyi Yu. P., Leonovich A. A. Spherically-symmetric non-static solutions of Einstein's equations. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 308–314 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-308-314

Введение. Для сферически-симметричного решения уравнений Эйнштейна в вакууме имеет место теорема Биркгофа [1, 84–94 p.], утверждающая, что в вакууме существует система координат (определенная с точностью до произвольного преобразования радиальной координаты), в которой метрика не зависит от времени. В литературе эта теорема обычно интерпретируется как статичность внешнего гравитационного поля нестатического источника, при этом нужно учитывать способ задания системы координат в общей теории относительности (ОТО).

В ОТО уравнения Эйнштейна, определяющие метрику пространства-времени, должны быть дополнены четырьмя, вообще говоря, не общековариантными условиями на метрику, определяющими систему координат, в которой ищется решение. Другой способ выбора координатной системы состоит в задании четырех общековариантных уравнений, содержащих метрику Минковского. Она задает систему координат в некоторой области риманова пространства, которую можно отобразить на пространство Минковского; такой подход составляет содержание биметрического формализма общей теории относительности и полевого подхода к теории гравитации. Основы этого подхода были заложены в работах [2–7]. Наиболее последовательно полевой подход был реализован в релятивистской теории гравитации (РТГ) [8], которая может рассматриваться как калибровочная теория группы вариаций Ли динамических переменных. Соответствующие преобразования являются вариациями формы функции для общековариантных преобразований. Действие для материи становится инвариантным относительно указанных преобразований после замены «нединамической» метрики Минковского γ^{ik} на «динамическую» метрику g^{ik}.

Дополнительные условия, как и уравнения Эйнштейна, являются теперь общековариантными полевыми уравнениями; они имеют смысл ограничения тензорного поля ψ^{ik} по спиновым состояниям, исключая спиральности 1 и 0, и имеют вид [9, 10] $D_i \tilde{g}^{ik} = 0$, где D_i – ковариантная производная в пространстве Минковского с коэффициентами связности, определяемыми выбором системы координат в этом пространстве. Они исключают калибровочный произвол эйнштейновских уравнений и в декартовых координатах совпадают с условиями гармоничности Фока [11]. Эти уравнения должны использоваться и при рассмотрении линейного приближения ОТО, поскольку именно они позволяют свести в этом приближении уравнения Эйнштейна к волновым уравнениям для тензорного поля и, соответственно, получить в ньютоновском приближении ньютоновский потенциал.

В настоящей работе показывается, что для сферически-симметричного поля необходимо выбирать систему координат, в которой внешнее решение для нестатического источника зависит от времени, а также рассмотрены частные нестатические вакуумные решения.

Внешнее нестатическое решение в приближении слабого поля. При рассмотрении сферически-симметричного решения необходимо учесть, что внешнее решение должно быть сшито с внутренним на границе источника так, чтобы компоненты метрики и их производные, входящие в уравнения, существовали в точках на границе. Для системы координат, в которой центр нестатического источника покоится, компонента тензора энергии-импульса T_1^0 не равна нулю и компонента метрики g^{01} также должна быть не равна нулю. В противном случае в системе координат с $g^{01} = 0$ производная $(g^{11})_{,t}$ будет иметь разрыв на границе, что недопустимо из-за наличия второй производной $(g^{11})_{,tt}$ в уравнении Эйнштейна для T_2^2. Поэтому для нестатического источника нельзя использовать систему координат с $g^{01} = 0$ как во внешнем, так и внутреннем решении, и, следовательно, теорема Биркгофа не допускает интерпретацию о статическом внешнем поле нестатического источника.

В линейном приближении ОТО уравнения Эйнштейна в вакууме в общековариантной форме являются волновыми уравнениями для потенциала h^{ik}, дополненными условиями Гильберта:

$$\Box h^{ik} = 0, \tag{1}$$

$$D_i \left(h^{ik} - \frac{1}{2} h \gamma^{ik} \right) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим сферически-симметричные нестатические решения системы уравнений (1)–(2). В инерциальных сферических координатах компоненты потенциала h_{00}, h_{01}, h_{11}, h_{22} будут тогда функциями только переменных t и r, $h_{33} = \sin^2\theta h_{22}$, а остальные компоненты в силу сферической симметрии будут равны нулю. Переходя к декартовым координатам, введем обозначения:

$$\tilde{g}^{00} = \frac{u}{r^2}, \quad \tilde{g}^{0k} = \frac{a}{r^3} x^k, \quad \tilde{g}^{ik} = -w\eta^{ik} + \left(-\frac{w}{r^2} + \frac{v}{r^4} \right) x^i x^k, \tag{3}$$

тогда уравнения (1)–(2) примут вид

$$\begin{aligned}
&\ddot{u} - u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u = 0,\\
&\ddot{a} - a'' + \frac{2}{r}a' = 0,\\
&\ddot{v} - v'' + \frac{2}{r}v' + \frac{2}{r^2}v - 4w = 0,\\
&\ddot{w} - w'' - \frac{2}{r}w' + \frac{2}{r^2}w - \frac{2}{r^4}v = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{u} + a' = 0,\\
&\dot{a} + v' - 2rw = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Точка над величиной означает производную по времени, штрих – производную по координате r. Будем искать решения системы уравнений (4)–(5) методом разделения переменных, представляя искомые функции в виде

$$u = \alpha(t)a(r), \quad a = \beta(t)b(r), \quad v = \mu(t)m(r), \quad w = \sigma(t)n(r). \tag{6}$$

После разделения переменных получаем

$$\ddot{\alpha} = C\alpha, \quad a'' - \frac{2}{r}a' + \left(\frac{2}{r^2} - C\right)a = 0, \tag{7}$$

$$\ddot{\beta} = D\beta, \quad b'' - \frac{2}{r}b' = D, \tag{8}$$

$$\ddot{\mu} = Q\mu, \quad m'' - \frac{2}{r}m' - \frac{2}{r^2}m + 4n = Q, \tag{9}$$

$$n'' + \frac{2}{r}n' - \frac{2}{r^2}n + \frac{2}{r^4}m = Q, \tag{10}$$

$$\dot{\alpha} = P\beta, \quad b' = Pa, \quad \dot{\beta} = R\beta, \quad m' - 2rn = R. \tag{11}$$

Здесь C, D, Q, P, R – константы разделения. Для разделения переменных в уравнениях (9)–(11) необходимо положить $\mu = \sigma$. Для констант разделения C, D, Q, $R = 0$, $P = 1$ получаем частное решение

$$u = Atr^2, \quad a = -\frac{A}{3}r^3, \quad v = Btr^2, \quad w = Bt. \tag{12}$$

В этом решении компонента метрики g^{01} не зависит от времени, что соответствует движению границы источника с постоянной скоростью.

Решение волнового типа. Для нахождения сферически-симметричных волновых решений воспользуемся теоремой Биркгофа и представим произвольное нестатическое сферически-симметричное вакуумное решение в некоторой системе координат (τ, R, θ, φ) в виде метрики Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right)d\tau^2 - \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega^2 . \tag{13}$$

Для того чтобы найти решение в сферических координатах пространства Минковского (t, r, θ, φ), сделаем координатное преобразование

$$t = t(\tau, R), \quad r = r(\tau, R), \tag{14}$$

при этом коэффициенты преобразования найдутся из условий $D_i \tilde{g}^{ik} = 0.$ Из этих условий следует, что уравнения, связывающие переменные (t, r) и (τ, R), будут иметь вид [8]

$$\frac{R}{R-2m}\frac{\partial^2 t}{\partial\tau^2} - R^{-2}\partial_R\left[(R^2-2mR)\frac{\partial t}{\partial R}\right] = 0, \tag{15}$$

$$\frac{R}{R-2m}\frac{\partial^2 r}{\partial\tau^2} - R^{-2}\partial_R\left[(R^2-2mR)\frac{\partial r}{\partial R}\right] + \frac{2r}{R^2} = 0. \tag{16}$$

Будем искать частное решение уравнений (15), (16) в виде

$$\tau = t + T(u), \qquad R = r + m, \qquad u = t + f(r), \tag{17}$$

где u – запаздывающий аргумент, остающийся конечным при любых значениях r; скорость света и гравитационную постоянную полагаем в дальнейшем равными единице. Вычисляя с помощью (14) прямые и обратные коэффициенты преобразования и подставляя их в уравнения (15), (16), находим, что уравнение (16) удовлетворяется тождественно, а уравнение (15) после разделения переменных сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций $T(u)$ и $f(r)$ с константой разделения C:

$$T_{uu} = z_u = Cz(1+z)^2, \tag{18}$$

$$f_{rr} + Cf_r^2 + \frac{2r}{r^2-m^2}f_r - C\frac{(r+m)^2}{(r-m)^2} = 0, \tag{19}$$

где $z = \frac{\partial T}{\partial u} \equiv T_u$. Первый интеграл уравнения (18) имеет вид

$$Cu = \frac{1}{1+z} - \ln\left|\frac{z+1}{z}\right| + A, \tag{20}$$

где A – константа интегрирования. Из решения (20) следует, что при положительном значении A функция $z(u)$ является положительной для достаточно больших значений u ($u > 0$).

Компоненты метрики, описывающей сферическую гравитационную волну, имеют вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{r-m}{r+m}(1+z)^2, \\ g_{01} &= \frac{r-m}{r+m}z(1+z)f_r, \\ g_{11} &= \frac{r-m}{r+m}z^2 f_r{}^2 - \frac{r+m}{r-m}, \\ g_{22} &= -(r+m)^2, \\ g_{33} &= -(r+m)^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

Тензор энергии-импульса Ландау – Лифшица – Фока. Рассмотрим представление Фока для тензора Эйнштейна G^{ik}:

$$2gG^{ik} = \partial_m\partial_n(\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{im}\tilde{g}^{kn}) + L^{ik}, \tag{22}$$

где L^{ik} содержит только первые производные.

Выражение

$$U^{ik} = \partial_m\partial_n(\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{im}\tilde{g}^{kn}) \tag{23}$$

Фок интерпретировал как плотность веса +2 псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, которая сводится к L^{ik} на уравнениях поля [11]. Таким образом, этот псевдотензор может быть выражен только через первые производные от метрики и на уравнениях Эйнштейна совпадает с известным псевдотензором Ландау – Лифшица [12], полученным указанными авторами независимо.

Можно получить соответствующую тензорную плотность, заменяя частные производные на ковариантные относительно метрики Минковского:

$$t_g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} D_m D_n (\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{im}\tilde{g}^{kn}). \tag{24}$$

Этот тензор может быть получен вариационным путем [13, 14] из лагранжиана

$$L = \tilde{R}(g^{ik}) + \frac{1}{\sqrt{-f}} R_{ijkl}(f_{mn})\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{jl}, \tag{25}$$

где $\tilde{g}^{ik} = \tilde{f}^{ik} + k\tilde{\psi}^{ik}$, f_{mn} – фоновая метрика с отличным от нуля тензором кривизны, которая полагается равной метрике Минковского после варьирования; при этом само варьирование наиболее удобно проводить в локально-геодезических координатах, в которых компоненты тензора f^{ik} постоянны [13, 14]. Аналогичный подход был использован в [15] для получения тензора энергии-импульса конформно-инвариантного скалярного поля.

Используя введенный тензор энергии-импульса, проведем вычисление энергии для приведенного выше волнового решения. Выражение для энергии может быть записано в виде

$$t_g^{00} = -\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{R^4}{r^2}\right)_r + 2\frac{R^2}{r}\left(\tau_r^2 g_{\tau\tau} + R_r^2 g_{RR}\right)\right]_r \tag{26}$$

и представляет собой с учетом соотношений

$$g_{\tau\tau} = \frac{R-2m}{R}, \quad g_{RR} = -\frac{R}{R-2m}$$

сумму статической и волновой частей. Для волновой части получим

$$t_w^{00} = -\frac{2}{r^2}\left[\left(\frac{R^2}{r} g_{\tau\tau}\right)_r z^2 f_r^2 + 2\frac{R^2}{r} g_{\tau\tau}\left(zz_u f_r^3 + z^2 f_r f_{rr}\right)\right], \tag{27}$$

и после подстановки вторых производных

$$t_w^{00} = \frac{2z^2}{r^2}\left[\left(3 - \frac{m^2}{r^2}\right) f_r^2 - 2Cf_r r\left(1 - \frac{m^2}{r^2}\right)\left(\frac{(r+m)^2}{(r-m)^2} + f_r^2(z^2+2z)\right)\right]. \tag{28}$$

Анализ полученного выражения показывает, что оно является положительно-определенным, если константа C и величина z положительны, а величина f_r – отрицательна. Найдем выражение для плотности импульса поля. Проводя вычисления в декартовых координатах x^i, получаем

$$t_g^{0a} = \frac{x^a}{r^3}\left[\left(\frac{R^4}{r^2}\right)_{,r} + 2\frac{R^2}{r}\left(\tau_r^2 g_{\tau\tau} + R_r^2 g_{RR}\right)\right]_{,t}, \tag{29}$$

$$t_w^{0a} = \frac{4Cx^a}{r^4}(r^2 - m^2) f_r^2 z^2 (1+z)^2, \tag{30}$$

где индекс a пробегает значения от 1 до 3. Это выражение является, очевидно, положительно-определенным при $C > 0$, что свидетельствует о переносе энергии, зависящем от запаздывающего аргумента и, следовательно, о волновом характере решения.

Рассмотрим теперь асимптотические выражение для плотности энергии и импульса. Пренебрегая членами порядка $1/r^2$ по сравнению с единицей и используя асимптотическое решение для функции $f_r = -1 - \frac{1}{Cr}$, находим:

$$t_w^{00} = \frac{4C}{r} z^2 (1+z)^2 , \tag{31}$$

$$t_w^{0a} = \frac{4Cx^a}{r^2} z^2 (1+z)^2 . \tag{32}$$

Отметим, что в сферически-симметричном волновом поле пробная частица всегда будет иметь радиальную скорость. Эта ситуация отличается от случая слабых плоских волн, когда пробная частица движется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Заключение. Существование полученных в работе вакуумных сферически-симметричных нестатических решений и, в частности, сферически-симметричных волновых решений не находится в противоречии с теоремой Биркгофа в общей теории относительности, если учесть необходимость сшивки с некоторым внутренним решением, например, известным решением Оппенгеймера – Снайдера для коллапсирующего пылевого шара [16]. Для физической интерпретации полученного волнового решения необходимо сопоставить его с решениями уравнений Эйнштейна с источником – тензором энергии-импульса материи T_{ik}. В линейном приближении решение волнового уравнения с источником выражается с помощью запаздывающих потенциалов и приводит к выводу о том, что излучать гравитационные волны могут только источники, обладающие квадрупольным моментом [17–19]. Это не означает, вообще говоря, что функцию T в найденном решении необходимо положить равной нулю. Вывод о необходимости для излучения квадрупольного момента получен при решении системы линейных уравнений Даламбера, и вопрос о его справедливости для решений точных уравнений Эйнштейна является открытым, поскольку в точной теории, в отличие от линейного приближения, масса источника не сохраняется.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф22МЦ-005).

Acknowledgements. The work was carried out with the support of the Belarusian Republican Foundation for Basic Research (grant no. Ф22МЦ-005).

Список использованных источников

1. Birkhoff, G. Relativity and Modern Physics / G. Birkhoff. – Harvard University Press, 1923. – 283 p. https://doi.org/10.1126/science.58.1513.539

2. Poincare, H. Sur la dynamique de l'electron / H. Poincare // Rendiconti Circolo Mat. Palermo. – 1906. – Vol. 21. – P. 129–176. https://doi.org/10.1007/bf03013466

3. Birkhoff, G. Flat space–time and gravitation / G. Birkhoff // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1944. – Vol. 30, № 10. – P. 324–334. https://doi.org/10.1073/pnas.30.10.324

4. Gupta, S. Quantization of Einstein's Gravitational Field: General Treatment / S. Gupta // Proc. Phys. Soc. Sect. A. – 1952. – Vol. 65, № 8. – P. 608–619. https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/8/304

5. Thirring, W. E. An alternative approach to the theory of gravitation / W. E. Thirring // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 16, № 1. – P. 97–117. https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90182-8

6. Deser, S. Self-interaction and gauge invariance / S. Deser // Gen. Rel. Grav. – 1970. – Vol. 1. – P. 9–18. https://doi.org/10.1007/bf00759198

7. Feynman, R. Feynman Lectures on Gravitation / R. Feynman. – CRC Press, 2018. – 296 p. https://doi.org/10.1201/9780429502859

8. Logunov, A. A. Relativistic theory of gravitation / A. A. Logunov, M. A. Mestvirishvili // Prog. Theor. Phys. – 1985. – Vol. 74, № 1. – P. 31–50. https://doi.org/10.1143/ptp.74.31

9. Fronsdal, C. On the theory of higher spin fields / C. Fronsdal // Il Nuovo Cimento. – 1958. – Vol. 9. – P. 416–443. https://doi.org/10.1007/bf02747684

10. Barnes, K. J. Lagrangian theory for the second-rank tensor field / K. J. Barnes // J. Math. Phys. – 1965.– Vol. 6. – P. 788–794. https://doi.org/10.1063/1.1704335

11. Fock, V. The Theory of Space, Time and Gravitation / V. Fock. – Pergamon Press – Macmillan Company, 1964. – 411 p. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-010061-6.50012-3

12. Landau, L. D. The Classical Theory of Fields / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – Oxford: Pergamon Press, 1975. – 402 p.

13. Leonovich, A. Fock energy-momentum tensor in Relativistic Theory of Gravitation / A. Leonovich, Yu. Vyblyi // Methods of Non-Euclidian Geometry in Modern Physics: Proc. of the V Int. Conf. – Minsk, 2007. – P. 207–211.

14. Leonovich, A The classical energy-momentum problem and Fock tensor in relativistic theory of gravitation / A. Leonovich, Yu. Vyblyi // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21, № 4. – P. 406–410.

15. Chernikov, N. The theory of conformal–invariant scalar field / N. A. Chernikov, E. A. Tagirov // Annales de l'Institut Henri Poincaré. – 1968. – Vol. A9. – P. 109–141.

16. Оппенгеймер, Ю. О безграничном гравитационном сжатии / Ю. Оппенгеймер, Г. Снайдер // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

17. Weinberg, S. Gravitation and Cosmology / S. Weinberg. – New York: Wiley, 1972. – 657 p.

18. Ohanian, H. C. Gravitation and Spacetime / H. C. Ohanian, R. Ruffini. – Cambridge University Press, 2013. – 528 p. https://doi.org/10.1017/cbo9781139003391

19. Poisson, E. Gravity / E. Poisson, C. Will. – Cambridge University Press, 2014. – 780 p. https://doi.org/10.1017/cbo9781139507486

References

1. Birkhoff G. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, 1923. 283 p. https://doi.org/10.1126/science.58.1513.539

2 Poincare H. Sur la dynamique de l'electron. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1906, vol. 21, pp. 129–176. https://doi.org/10.1007/bf03013466

3. Birkhoff G. Flat space–time and gravitation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1944, vol. 30, no. 10, pp. 324–334. https://doi.org/10.1073/pnas.30.10.324

4. Gupta S. Quantization of Einstein's Gravitational Field: General Treatment. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 1952, vol. 65, no. 8, pp. 608–619. https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/8/304

5. Thirring W. E. An alternative approach to the theory of gravitation. *Annals of Physics*, 1961, vol. 16, no. 1, pp. 97–117. https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90182-8

6. Deser S. Self–interaction and gauge invariance. *General Relativity and Gravitation*, 1970, vol. 1, pp. 9–18. https://doi.org/10.1007/bf00759198

7. Feynman R. *Feynman Lectures on Gravitation*. CRC Press, 2018. 296 p. https://doi.org/10.1201/9780429502859

8. Logunov A., Mestvirishvili M. A. Relativistic theory of gravitation. *Progress of Theoretical Physics,* 1985, vol. 74, no. 1, pp. 31–50. https://doi.org/10.1143/ptp.74.31

9. Fronsdal C. On the theory of higher spin fields. *Il Nuovo Cimento*, 1958, vol. 9, pp. 416–443. https://doi.org/10.1007/bf02747684

10. Barnes K. J. Lagrangian theory for the second-rank tensor field. *Journal of Mathematical Physics*, 1965, vol. 6, pp. 788–794. https://doi.org/10.1063/1.1704335

11. Fock V. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon Press – Macmillan Company, 1964. 411 p. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-010061-6.50012-3

12. Landau L., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields*. Oxford, Pergamon Press, 1975. 402 p.

13. Leonovich A., Vyblyi Yu. Fock energy-momentum tensor in Relativistic Theory of Gravitation. *Methods of Non-Euclidian Geometry in Modern Physics: Proceedings of the V International Conference*. Minsk, 2007, pp. 207–211.

14. Leonovich A., Vyblyi Yu. The classical energy-momentum problem and Fock tensor in relativistic theory of gravitation. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2018, vol. 21, no. 4, pp. 406–410.

15. Chernikov N., Tagirov E. A. The theory of conformal-invariant scalar field. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1968, vol. A9, pp. 109–141.

16. Oppenheimer J. R., Snyder H. On unlimited gravitational pressing. *Physical Review*, 1939, vol. 56, pp. 455–462. https://doi.org/10.1103/physrev.56.455

17. Weinberg S. *Gravitation and Cosmology.* New York, Wiley, 1972. 657 p.

18. Ohanian, H. C., Ruffini R. *Gravitation and Spacetime*. Cambridge University Press, 2013. 528 p. https://doi.org/10.1017/cbo9781139003391

19. Poisson E., Will C. *Gravity*. Cambridge University Press, 2014. 780 p. https://doi.org/10.1017/cbo9781139507486

Информация об авторах

Выблый Юрий Петрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyblyi@gmail.com

Леонович Анатолий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kaffiz@bsuir.by

Information about the authors

Yuri P. Vyblyi – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vyblyi@gmail.com

Anatoli A. Leonovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kaffiz@bsuir.by