LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

# GEOMETRIA DISCRETA I COMPUTACIONAL

## PROBLEMES


Ferran Hurtado

Departament de Matemàtica Aplicada 2





UPC

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# GEOMETRIA DISCRETA I COMPUTACIONAL

# PROBLEMES

**Ferran Hurtado**

Títol: Geometria Discreta i Computacional. Problemes
Autor: Ferran Hurtado
Dipòsit Legal: B-41325-2009
Imprès per: Servis Gràfics Copisteria Imatge S.L.
Cinca, 8
08030 Barcelona

## Nota introductòria

Aquesta col·lecció de problemes no segueix l'ordre de desenvolupament cronològic del programa de l'assignatura, sinó que és organitzada per grups conceptuals, els quals no són sempre totalment disjunts. Tampoc no hi ha cap ordenació progressiva en la dificultat.

Els problemes que tenen l'indicatiu $^{*\mathrm{ed}}$ requereixen l'ús d'estructures de dades no immediates per resoldre'ls, mentre que l'indicatiu $^{*\mathrm{lg}}$ significa que cal establir lemes geomètrics previs no immediats.

Barcelona, setembre de 2009

# POLÍGONS I POLIGONALS SIMPLES

**Problema 1.**– Donat un $n$-polígon $P$ (simple, convex), i tenint en compte l'estructura de dades que el descriu, trobeu algorísmicament

a) els vèrtexs d'abscissa extrema;

b) les interseccions amb una recta donada;

c) les tangents des d'un punt donat;

d) el punt més proper a una línia donada.

**Problema 2.**– Sigui $C$ una poligonal tancada de $n$ costats, possiblement no simple. Trobeu un algorisme per decidir si $C$ defineix o no un polígon simple.

**Problema 3.**– Establiu un algorisme per decidir, donats un $n$-polígon simple $P$ i un punt $q$, si $q$ és a l'exterior, sobre la vora o a l'interior de $P$. Estudieu la possible millora quan $P$ és convex i descrit per una estructura que permeti cerca binària.

**Problema 4.**– Siguin $P$ un $n$-polígon convex i $Q$ un $m$-polígon simple del qual tenim també donada una triangulació del seu interior i de cadascun dels "polígons butxaca" (Figura 1) situats entre $Q$ i la seva envolupant convexa. Demostreu que la intersecció $P \cap Q$ es pot calcular en temps $O(m + n)$.

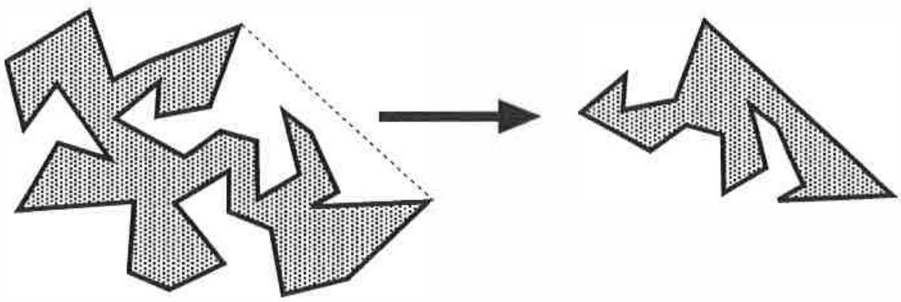


Figura 1: Un polígon i un dels seus *polígons butxaca.*

**Problema 5.**– Demostreu que el valor

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

és l'àrea del triangle de vèrtexs $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ i $P_3 = (x_3, y_3)$ afectada pel signe que tingui el recorregut $P_1 \to P_2 \to P_3$. Utilitzeu aquest concepte per dissenyar un algorisme que calculi l'àrea d'un polígon simple $P$ de $n$ costats.

**Problema 6.**– Trobeu un algorisme $O(n)$ per triangular un $n$-polígon estrellat donat un punt del nucli.

**Problema 7.**– Doneu un algorisme lineal per decidir si un polígon simple és estrellat.

**Problema 8.**– Trobeu un algorisme per decidir, donat un polígon simple $P$, si existeix alguna direcció per a la qual $P$ sigui monòton.

**Problema 9.**– Un *polígon isotètic* és aquell que té tots els costats horitzontals o verticals. Una *piràmide isotètica* és un polígon isotètic monòton respecte de la vertical tal que el costat horitzontal inferior $h$ (la "base") té longitud igual la suma dels altres costats horitzontals (dues "escales" des de $h$ al costat superior) (Figura 2).

a) Demostreu que tota piràmide isotètica pot partir-se amb diagonals en quadrilàters convexos.

b) Desenvolupeu un algorisme per trobar tal partició (es pot fer en temps lineal).

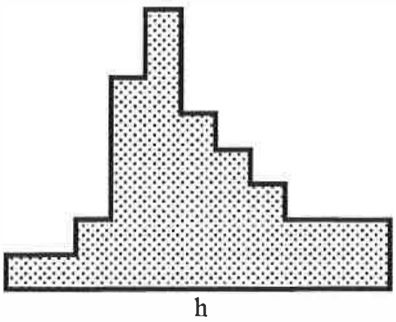



Figura 2: Piramide isotètica de base $h$.

**Problema 10.**– Feu un algorisme per partir un polígon isotètic en rectangles emprant segments alineats amb costats del polígon. Obteniu tan poques peces com sigui possible i tan de pressa com sigui possible. La sortida de l'algorisme ha de donar una descripció completa de la partició.

**Problema 11.**– Sigui $P$ una poligonal $x$-monòtona de $n$ vèrtexs, tots ells d'ordenada positiva, i siguin $a$ i $b$ les abscisses mínima i màxima, respectivament, dels punts de $P$. S'anomena *terreny* la porció del pla limitada per l'eix $x$, les verticals $x = a$, $x = b$ i la poligonal $P$. Es diu que $P$ és el *perfil* del terreny (Figura 3).

a) Caracteritzeu el conjunt $S$ de punts dins de la franja $a \leq x \leq b$ que són per sobre de $P$ i "veuen" tot $P$. Doneu un algorisme per trobar el punt de $S$ d'ordenada mínima.

b) Doneu un algorisme per trobar el punt del perfil que permet de construir la torre menys alta tal que des de dalt es veu tot $P$.

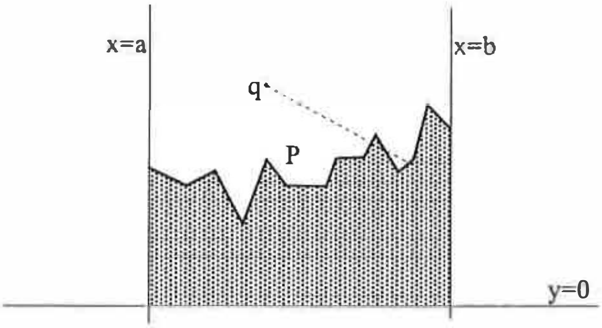



Figura 3: Terreny de perfil $P$. El punt $q$ no veu tot $P$.

**Problema 12.**– Diem que un polígon $P$ és dèbilment visible des d'un costat $a$, quan tot punt $Q$ de $P$, interior o de la frontera, veu almenys un punt $M$ del costat $a$ (és a dir, que el segment $QM$ no té cap punt exterior a $P$) (Figura 4). Doneu un algorisme $O(n)$ per triangular polígons dèbilment visibles des d'un costat donat. Demostreu la correcció de l'algorisme, feu-ne clarament l'anàlisi del cost, i expliqueu quin paper hi juga exactament la propietat de visibilitat del poligon.

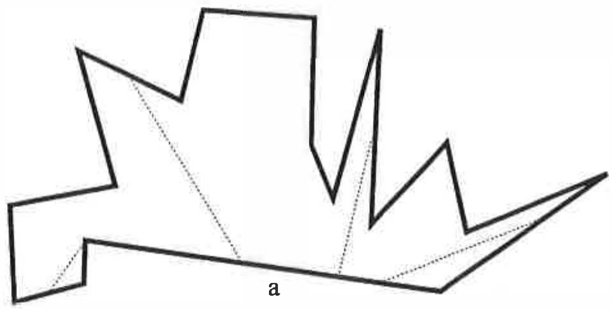



Figura 4: Polígon dèbilment visible des de $a$.

**Problema 13.**– Quantes components connexes (Figura 5) pot tenir la intersecció de dos polígons $x$-monòtons? Doneu un algorisme per obtenir-les eficientment explotant la monotonia.

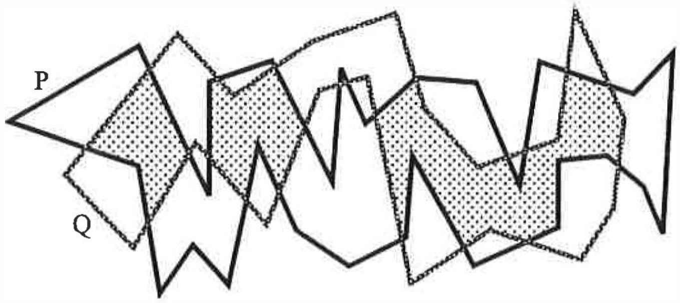



Figura 5: La intersecció de $P$ i $Q$ té tres components connexes (ombrejades).

**Problema 14.**– Siguin $P$ un polígon simple i $s$ i $t$ dos punts del polígon (interiors o de la frontera). Doneu un algorisme per trobar el camí més curt de $s$ a $t$ dins $P$. [Nota. Cal pensar i provar quina és l'estructura del camí més curt. Quant a l'algorisme, convé començar per triangular el polígon.]

**Problema 15.**– Sigui $Q$ un polígon simple del pla que ens donen pels seus vèrtexs, $\{p_1, \dots p_n\}$, en l'ordre en què apareixen a la frontera, però no sabem si en sentit positiu (antihorari) o en sentit negatiu (horari). Doneu un algorisme que permeti esbrinar en quina orientació ens els han donat. Pot fer-se en $O(n)$.

**Problema 16.**– De vegades és preferible utilitzar un camí que minimitzi el nombre de colzes més que un que minimitzi la longitud. Considerem la situació següent: ens donen un polígon $x$-monòton $P$ de $n$ costats, la cadena inferior del qual no té cap vèrtex convex llevat dels dos extrems $a$ i $b$ (vegeu figura), que són els punts de $P$ amb abscissa mínima i màxima, respectivament. L'objectiu és trobar un camí poligonal de $a$ a $b$ dins $P$ que minimitzi el nombre total de segments.

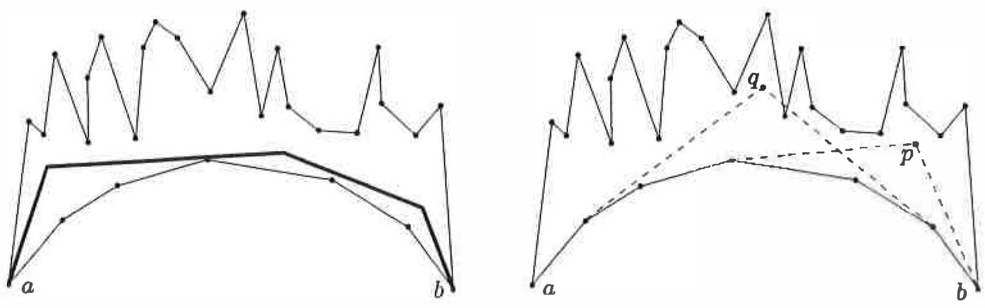
(a) Demostreu que podem suposar que tal camí és $x$-monòton.

(b) Es diu que un punt $p \in P$ és *tangencial* quan les dues tangents des de $p$ a la cadena inferior són dins $P$. En la figura de la dreta $p$ és tangencial, però $q$ no ho és pas. Proveu que el conjunt de punts tangencials forma un polígon $x$-monòton.

(c) Doneu un algorisme $O(n)$ per construir el conjunt de punts tangencials. [Indicació: possiblement és més fàcil fer-ho en dues fases, una per als punts tangencials per l'esquerra i una altra per als punts tangencials per la dreta].

(d) Proveu que per obtenir el camí n'hi ha prou de treballar dins del conjunt de punts tangencials.

(e) Utilitzeu els apartats anterior per dissenyar un algorisme $O(n)$ per construir el camí poligonal de $a$ a $b$ dins $P$ que minimitzi el nombre total de segments.




**Problema 17.**– Doneu algorismes per decidir si existeix un translació que porta l'objecte $P$ dins l'objecte $Q$ per a les situacions següents:

(a) $P$ és un segment vertical i $Q$ un polígon qualsevol de $n$ costats.

(b) $P$ és un triangle i $Q$ un polígon convex de $n$ costats.

(c) $P$ és un polígon qualsevol de $n$ costats i $Q$ un triangle.

# POLÍGONS CONVEXOS

**Problema 18.**– Siguin $P$ un $n$-polígon convex i $q$ un punt exterior a $P$. Denotem per $V$ la part de la frontera de $P$ visible des de $q$ i per $O$ la part oculta (Figura 6).

a) Si un punt $t$ recòrre $V$, la distància $d(q,t)$ és una funció unimodal?

b) Si un punt $t$ recòrre $O$, la distància $d(q,t)$ és una funció unimodal?

c) Doneu algorismes per trobar els punts de $P$ més proper i més llunyà de $q$.

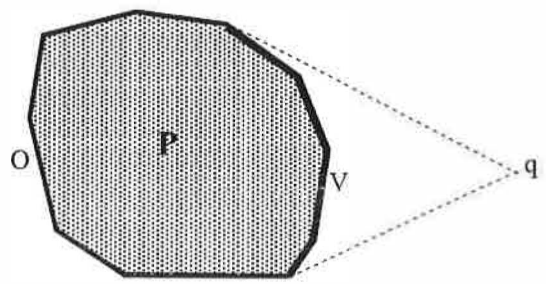



Figura 6: Parts visible i oculta des d'un punt extern.

**Problema 19.**– Sigui $B$ un polígon convex del pla de $n$ vèrtexs i $q$ un punt exterior a $B$. Definim la distància de $q$ a $B$ per $d(q,B) = min\{d(q,y)\ ,\ y \in B\}$. Doneu algorismes per trobar, donat un altre polígon convex $A$, de $m$ vèrtexs, disjunt amb $B$,

a) $d_M(A,B) = min\{d(x,B)\ ,\ x \in A\}$ (distància mínima entre $A$ i $B$);

b) $d_H(A,B) = max\{d(x,B)\ ,\ x \in A\}$ (distància de Hausdorff de $A$ a $B$, és asimètrica).

**Problema 20.**– Siguin $P_1$ i $P_2$ polígons convexos disjunts, amb un total de $n$ vèrtexs, cadascun d'ells donat per un *array* o estructura que permeti de fer-hi cerca binària. Trobeu un algorisme per construir en $O(\log^2 n)$ una recta comuna de suport que deixi $P_1$ i $P_2$ del mateix costat. (Pot fer-se en $O(\log n)$ però és prou més difícil).
*Indicació per al* $O(\log^2 n)$: Considerem cada polígon dividit en quatre quadrants amb la notació usual. Suposant que ja s'ha detectat l'existència d'una línia com la buscada entre els primers quadrants, estudieu la posició relativa de les rectes $P_1(\varphi)$ i $P_2(\varphi)$ quan $\varphi$ varia de $\pi/2$ a $\pi$, on $P_i(\varphi)$ denota la recta orientada de suport de $P_i$ que deixa $P_i$ a la seva esquerra i forma un angle polar $\varphi$ des del semieix positiu d'abscisses.

**Problema 21.**– Siguin $P_1$ i $P_2$ polígons convexos disjunts, amb un total de $n$ vèrtexs, cadascun d'ells donat per una llista doblement encadenada. Trobeu un algorisme per construir en $O(n)$ les quatre rectes comunes de suport.

**Problema 22.**– Sigui $P$ un $n$-polígon convex. La distància màxima entre dos punts de $P$ s'anomena *diàmetre* de $P$; els punts que l'assoleixen es diuen *parell diametral*. La distància mínima entre dues rectes paral·leles que suportin $P$ s'anomena l'*amplada* de $P$. Doneu algorismes per trobar aquests valors. [Indicació: comenceu per cacteritzar el parell diametral i els punts de suport de les paral·leles que donen l'amplada.]

**Problema 23.**– Sigui $P$ un $n$-polígon convex. Doneu un algorisme per trobar el rectangle d'àrea mínima que conté $P$.

**Problema 24.**– Siguin $P$ un $n$-polígon convex i $q$ un punt del pla. Doneu un algorisme per trobar la corda més llarga del polígon tal que la recta que determina passa per $q$. Distingiu els casos segons que $q$ sigui exterior o interior a $P$ (Figura 7).

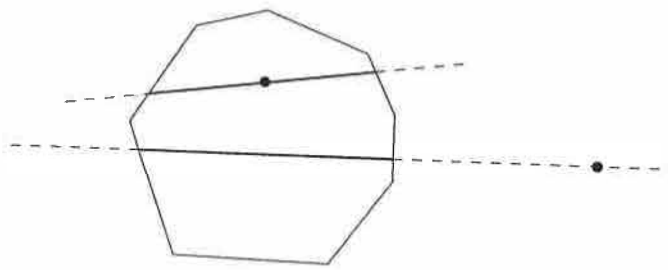


Figura 7: Cordes determinades per rectes secants.

**Problema 25.**– Donat un polígon convex $Q = \{v_1, \ldots, v_n\}$, i un punt $q$ de l'exterior de $Q$, doneu un algorisme per trobar la recta $r$ que passant per $q$ fa màxima la distància de $r$ a $Q$ (Figura 8).

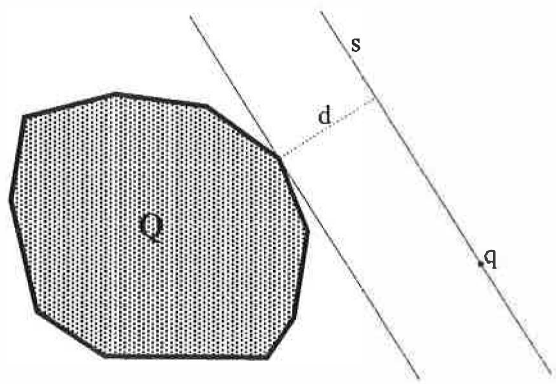



Figura 8: La recta $s$ per $q$ és a distància $d$ de $Q$.

**Problema 26.**– Resoleu els dos apartats següents

a) Proposeu un algorisme per trobar el rombe que té les diagonals paral·leles als eixos de coordenades i àrea màxima, contingut dins un polígon convex donat.

b) Proposeu un algorisme per trobar el quadrat que té les diagonals paral·leles als eixos de coordenades i àrea màxima, contingut dins un polígon convex donat.

Justifiqueu la correcció dels vostres algorismes i analitzeu-ne el cost, tenint en compte l'estructura de dades en què vé donat el polígon d'entrada.

**Problema 27.**– Demostreu que si dos polígons convexos son disjunts sempre existeix una recta que els separa. Utilitzeu aquest fet per a, donats dos conjunts de punts del pla $S$ i $T$ de cardinals respectius $s$ i $t$, decidir en temps $O(s \log s + t \log t)$ si existeix una recta que separa $S$ i $T$. Menys fàcil: resoldre el problema en $O(s + t)$.

**Problema 28.**– Siguin $Q$ un $n$-gon convex d'àrea $A$, i $t > A$ un nombre real. Per cada punt $p$ extern a $Q$, considerem el polígon $Q(p) = conv(Q \cup \{p\})$.

a) Demostreu (a1) que el lloc geomètric $G(t)$ dels punts $p$ tals que l'àrea de $Q(p)$ és $t$, és la frontera d'un polígon convex que conté $Q$; (a2) que $G(t)$ té un nombre de costats $n(t)$ entre $n$ i $2n$; (a3) que $n(t) = 2n$ fora d'un nombre finit de valors de $t$.

b) Doneu un algorisme per obtenir $G(t)$.

**Problema 29.**– Sigui $Q$ un $n$-polígon convex (Figura 9).

a) Estudieu i descriviu el lloc geomètric $L$ dels punts que veuen $Q$ segons angle recte.

b) Doneu un algorisme per construir $L$.

c) (El problema de la taula en el racó) Donat un angle recte fixat (racó), doneu un algorisme per trobar la posició d'un polígon convex $Q$ (taula) que fa mínima l'area perduda (la regió $R$ de la figura).

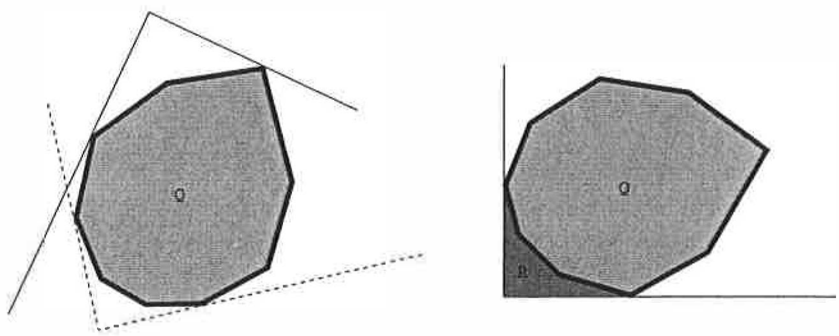


Figura 9: "La taula en el racó".

**Problema 30.**– Siguin $Q$ un polígon convex del pla, i $a$ i $b$ dos punts externs a $Q$. Diem que $a$ *conquereix* $b$ (o que $b$ *és conquerit per* $a$) quan $b$ és contingut a l'envolupant convexa $CH(Q \cup \{a\})$ (vegeu la figura).

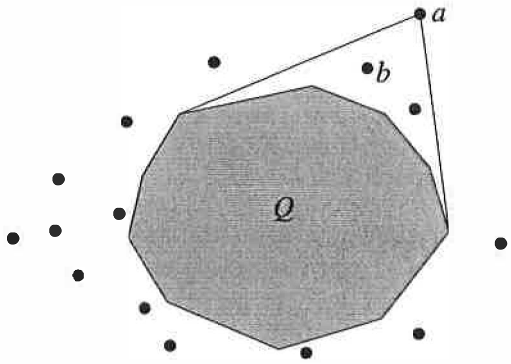



Figura 10: Conqueriment de punts.

Doneu un algorisme, tant eficient com pogueu, que rebi com a entrada un polígon convex $Q$ de $m$ costats i un conjunt $S$ de $n$ punts externs, i permeti d'obtenir els punts de $S$ que no són conquerits per cap altre.

**Problema 31.**– Sigui $P$ un polígon convex de vèrtexs $p_1, \ldots, p_n$. Una *corda* de $P$ és qualsevol segment que tingui els extrems a la frontera de $P$.

a) Doneu un algorisme per trobar la corda més curta que divideixi en dues parts iguals l'àrea de $P$.

b) Demostreu que sempre existeix alguna corda que simultàniament parteix en parts iguals l'àrea i el perímetre de $P$, i doneu un algorisme per trobar-la.

**Problema 32.**– Sigui $P$ un polígon convex de vèrtexs $p_1, \ldots, p_n$. Doneu un algorisme $o(n^2)$ per trobar el triangle d'àrea màxima d'entre els definits per tres vèrtexs de $P$ dos dels quals siguin consecutius (és a dir, formats per un costat i un vèrtex de $P$).

**Problema 33.**– Per a cada costat $e$ d'un polígon convex $Q$ denotem per $r(e)$ la recta que conté $e$. Diem que un punt $p$ interior a $Q$ és *ortogonal al costat* $e$ quan $e$ la perpendicular des de $p$ a $r(e)$ talla $e$. Diem que un punt $p$ interior a $Q$ és *central* quan és ortogonal a tots els costats de $Q$.

a) Demostreu la veritat o falsedat de les afirmacions següents:

- Tot punt interior a $Q$ és ortogonal almenys a un costat.
- Sempre existeix un punt interior a $Q$ que és ortogonal com a mínim a tres costats.
- Sempre existeix algun punt central.

b) Doneu un algorisme per trobar un punt central de $Q$, si és que existeix.

**Problema 34.**– Siguin $P$ i $Q$ dos polígons convexos, cadascun amb com a molt $n$ vèrtexs, tals que $P$ està contingut en $Q$.

(a) [1/3] Trobeu un algorisme subquadràtic per decidir si existeixen dos punts de $Q \setminus P$, tals que entre els dos veuen tota la frontera de $P$.

(b) [2/3] Trobeu un algorisme eficient per decidir si existeixen tres punts de $Q \setminus P$, tals que entre els tres veuen tota la frontera de $P$.

**Problema 35.**– Siguin $P$ i $Q$ dos polígons convexos, amb un total de $n$ vèrtexs, que es tallin en una regió d'àrea positiva. Trobeu la menor translació que els separa, és a dir, el vector més curt que ens permet de traslladar un dels polígons, deixant l'altre quiet, de forma que les figures resultants tinguin interiors disjunts.

# UBICACIONS I CONSTRUCCIONS ÒPTIMES

**Problema 36.**– Donats $n$ punts del pla i una recta $r$, trobeu el punt de $r$ que fa mínima la màxima distància als punts.

**Problema 37.**– Donat un conjunt de $n$ punts $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ definim $\mu(p_i, p_j)$ com el mínim obtingut en comptar el nombre de punts de $P$ continguts en cadascun dels discos (tancats) que contenen $p_i$ i $p_j$. Sigui $M(P) = \max_{p_i, p_j \in P} \mu(p_i, p_j)$.

a) Determineu $M(P)$ per a tots els conjunts $P$ de 3 i 4 punts.

b) Proveu que si existeix un disc $D'$ que conté $p_i$ i $p_j$ i altres $k$ punts de $S$, aleshores existeix un altre disc $D'' \subset D'$ amb $p_i$ i $p_j$ a la frontera que conté com a màxim $k$ punts de $S$.

c) Utilitzeu (b) per obtenir un algorisme que calculi $\mu(p_i, p_j)$ amb $p_i$ i $p_j$ fixos.

d) Doneu un algorisme per calcular $M(P)$.

**Problema 38.**– Donat un conjunt de $n$ punts $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ del pla, i un altre punt $w$ tal que $w \notin P$, doneu un algorisme per trobar la recta $r$ que passant per $w$ fa màxima la distància de $r$ al $p_i \in P$ que tingui més a prop (Figura 11).

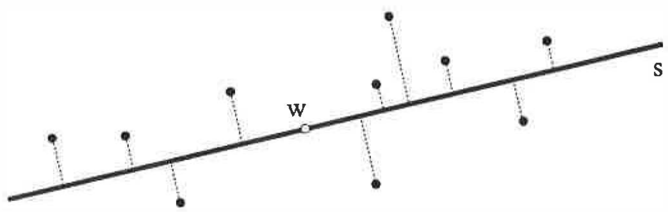



Figura 11: Distàncies d'un conjunt de punts a una recta $s$ pel punt $w$.

**Problema 39.**– Formuleu un algorisme per, donats un conjunt $S$ de $n$ punts del pla i quatre nombres reals $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, trobar el cercle més gran sense punts interiors de $S$ que tingui el centre dins del rectangle de cantonades $(a_1, b_1)$ i $(a_2, b_2)$.

**Problema 40.**– Doneu un algorisme per, donat un conjunt $S$ de $n$ punts del pla, trobar la posició d'un quadrat isotètic de costat unitat que "tapi" el màxim nombre possible de punts de $S$.

**Problema 41.**– Donat un polígon $Q$ convex de $n$ vèrtexs, considerem tots els cercles que cobreixen $Q$ i tenen el centre a la frontera de $Q$. Trobeu un algorisme per obtenir el punt $A$ de la frontera que permet de fer-ho amb radi mínim.

**Problema 42.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ punts al pla.

a) Sigui $p$ un punt interior a $conv(S)$. Proposeu un algorisme que calculi el cercle més gran que passa per $p$ i no conté cap punt de $S$ al seu interior.

b) Sigui $p$ un punt exterior a $conv(S)$. Proposeu un algorisme que calculi el cercle més petit que passa per $p$ i conté tots els punts de $S$.

**Problema 43.**– Donat un conjunt $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de punts del pla en posició general i en un cert sistema de referència, doneu un algorisme per trobar la recta $r$ que fa mínima la màxima distància vertical dels punts de $S$ a la recta (Figura 12).

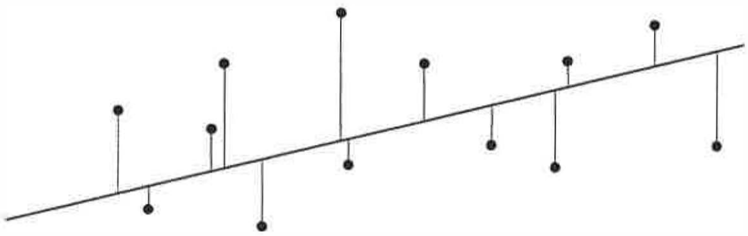
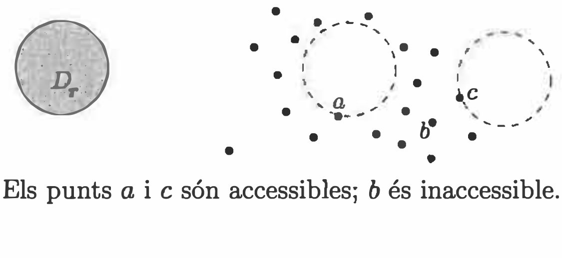


Figura 12: Distàncies verticals dels punts a una recta.

**Problema 44.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ punts del pla. Denotarem per $D_r$ un disc de radi $r$, centrat en qualsevol punt del pla. Diem que un punt $p \in S$ és *accessible* quan existeix una posició de $D_r$ amb $p$ a la frontera i cap punt de $S$ a l'interior.

(a) Doneu un algorisme per obtenir tots els punts accessibles de $S$.

(b) Per a valors de $r$ "molt petits" tots els punts de $S$ seran accessibles; quan $r$ sigui "gran" alguns seran inaccessibles. Doneu un algorisme per trobar el valor $r_0$ tal que quan $r \in (0, r_0]$ tots els punts de $S$ són accessibles, i si $r > r_0$ hi ha punts inaccessibles.

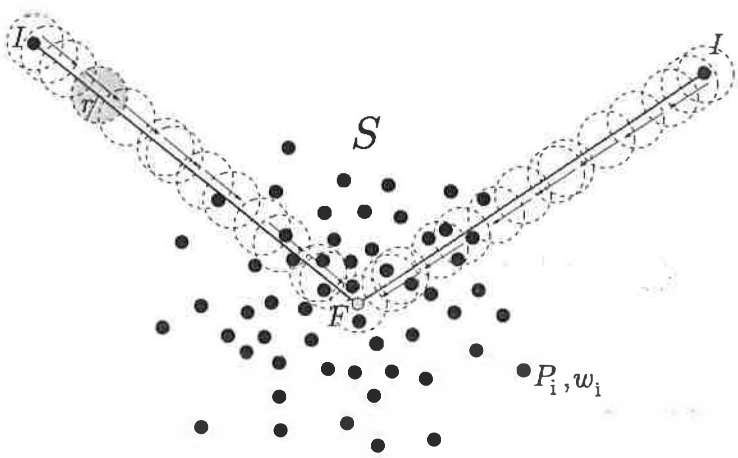



Els punts $a$ i $c$ són accessibles; $b$ és inaccessible.

**Problema 45.**– Sigui $S = \{P_1, ..., P_n\}$ un conjunt de $n$ punts del pla. Cada punt $P_i$ té un coeficient assignat $w_i \geq 0$, que anomenarem *pes* o *cost* de $P_i$. Un punt mòbil $M$ ha de desplaçar-se en línia recta des de qualsevol posició inicial $I$ en el pla, externa a $CH(S)$, que podem triar, fins a una posició final $F$ donada, dins de $CH(S)$ (vegeu figura). El punt $M$ té un radi donat $r$ d'acció nociva, de tal manera que "perjudica" $P_i$ si quan es desplaça de $I$ a $F$ passa a distància de $P_i$ menor o igual que $r$; aquest "perjudici" és el cost $w_i$. El cost d'una trajectória $IF$ és la suma dels costs dels punts perjudicats quan $M$ fa el desplaçament de $I$ a $F$.

Trobeu un algorisme que rebi com a entrada el conjunt de punts $S$, el pes de cada element, i el punt de destinació $F$, i calculi un punt inicial $I$ que minimitzi el cost de la trajectòria $IF$.

*Indicació.* Viatjar de $I$ a $F$ té el mateix cost que fer-ho de $F$ a $I$, consegüentment es pot buscar la millor semirecta d'origen $F$ per "escapar-se" a l'exterior de $S$.



# CONSTRUCCIONS DIVERSES

**Problema 46.**– Doneu un algorisme $o(n^2)$ per trobar, donats $n$ punts diferents del pla, la recta més vertical d'entre les que determinen. Doneu també una fita inferior per al problema.

**Problema 47.**– Trobeu un algorisme $O(n)$ que permeti, donats $n$ punts del pla i un altre, $q$, decidir si $q$ és fora, dins o a la vora de l'envolupant convexa dels altres.

**Problema 48.**– Demostreu que el problema d'unicitat de nombres reals –donats $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ decidir si tots són diferents o no– té complexitat $\Omega(n \log n)$ (via Ben-Or).

**Problema 49.**– Sigui $L$ un conjunt de $n$ rectes del pla. Trobeu un algorisme $O(n \log n)$ per calcular el rectangle mínim de costats paral·lels als eixos que conté tots els vèrtexs de l'arranjament $\mathcal{A}(L)$ (Figura 13).

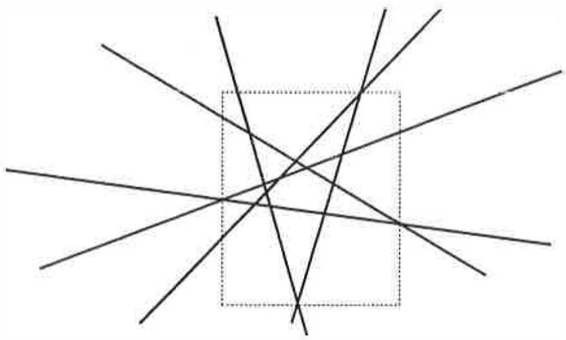


Figura 13: Rectangle isotètic mínim que conté els vèrtexs d'un arranjament.

**Problema 50.**– Una *quadrisecció* d'un conjunt de punts $P$ és un parell de rectes tal que cadascun dels quatre angles oberts que determinen contingui com a màxim $\lceil n/4 \rceil$ punts. Demostreu que tot conjunt finit admet alguna quadrisecció i doneu un algorisme per trobar-ne una.

**Problema 51.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ segments disjunts del pla. Direm que un segment de $S$ és *separable* en la direcció $(1, 0)$ si es pot traslladar horitzontalment (paral·lel a sí mateix) cap al $+\infty$ de la direcció l'eix $x$ sense col·lissionar amb cap dels altres segments. Demostreu que sempre existeix almenys un element de $S$ separable en la direcció $(1, 0)$

i deduïu-ne un algorisme per obtenir una ordenació dels elements de $S$ que ens permeti separar-los un rera un altre.

**Problema 52.**– Trobeu un algorisme per decidir, donats $n$ segments verticals $s_1, \ldots, s_n$, si existeix alguna recta transversal a tots (i en cas afirmatiu trobar-ne una).

**Problema 53.**– La mètrica $L_\infty$ es defineix al pla per

$$d((a,b),(c,d)) = \max(|a-c|, |b-d|).$$

a) Descriviu la figura geomètrica que és un cercle amb aquesta mètrica (és a dir, el lloc de punts a distància $r$ d'un centre $p$), i descriviu també la figura geomètrica que és la mediatriu entre dos punts $p$ i $q$, distingint casos segons la seva posició (és a dir, el lloc de punts a igual distància de $p$ que de $q$).

b) Demostreu que la regió de Voronoi d'un punt d'un conjunt amb la mètrica $L_\infty$ és una regió connexa, i caracteritzeu els punts que tenen regió de Voronoi no fitada.

**Problema 54.**– Una recta vertical deixa a l'esquerra $n$ punts blaus i a la dreta $n$ punts vermells, sense que la unió contingui tres punts alineats. Demostreu que és possible emparellar els punts blaus amb els vermells de forma que els segments determinats no es tallin, i doneu un algorisme per construir tal emparellament (Figura 14).

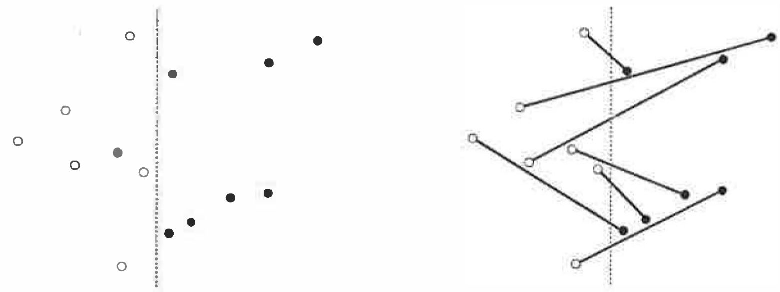


Figura 14: Dos conjunts de punts (esquerra) i un emparellament sense talls (dreta).

**Problema 55.**– El Diagrama de Voronoi llunyà d'un conjunt $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de llocs del pla és la descomposició del pla en regions $V_f(P_i)$, de forma que tots els punts de $V_f(P_i)$ tenen $P_i$ com a lloc més llunyà, és a dir, $Q \in V_f(P_i)$ si, i només si, $d(Q,P_j) \leq d(Q,P_i), \forall j$. Demostreu-ne les propietats següents.

a) $V_f(P_i) \neq \varnothing$ si, i només si, $P_i$ és un vèrtex de $conv(S)$.

b) $V_f(P_i)$ és una regió poligonal convexa.

c) Les regions $V_f(P_i)$ no buides són no-fitades. Què se'n dedueix per a l'1-esquelet del Diagrama?

**Problema 56.**– Donats $n$ segments del pla, possiblement no disjunts, i dos punts $p$ i $q$, trobeu un algorisme per decidir si existeix un punt del pla que veu $p$ i $q$, és a dir, un punt $x$ tal que els segments $\overline{xp}$ i $\overline{xq}$ no tallen cap dels $n$ segments donats (Figura 15).

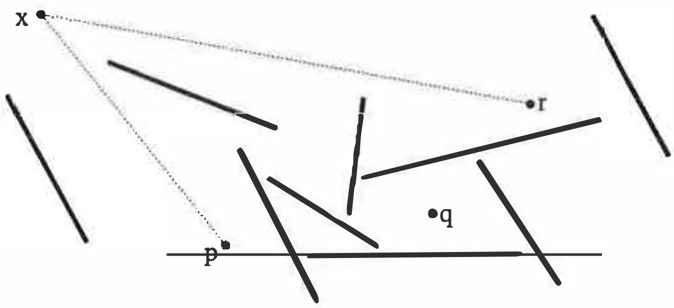



Figura 15: Els punts $p$ i $r$ són simultàniament visibles des de $x$, però $p$ i $q$ no són simultàniament visibles des de cap punt.

**Problema 57.**– Donat un conjunt $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de punts del pla en posició general, doneu un algorisme per decidir si $S$ admet una simetria axial. Tracteu d'assolir la millor eficiència possible.

**Problema 58.**– Siguin $V$ i $B$ dos conjunt de punts del pla, anomenats *vermells* i *blaus* respectivament i amb cardinals $n_v$ i $n_b$. Posarem $n = n_v + n_b$. Trobeu algorismes tan eficients com pogueu per

(a) decidir si existeix un cercle que deixa els vermells a l'interior i els blaus a l'exterior;

(b) trobar un semiplà que contingui tots els vermells i el mínim nombre possible de blaus.

**Problema 59.**– Es diu que un punt del pla $p = (a, b)$ *domina* un altre punt $q = (c, d)$ quan $a > c$ i $b > d$. Donat un conjunt de $n$ punts $S$, anomenem *punts maximals de* $S$ els elements de $S$ que no són dominats per cap punt de $S$.

a) Doneu un algorisme $o(n^2)$ per trobar els elements maximals de $S$.

b) Demostreu que el problema de l'apartat anterior té complexitat $\Omega(n \log n)$. [Indicació: podeu relacionar el problema d'unicitat d'enters amb el nombre de punts maximals de $S$]

**Problema 60.**– Siguin $D_1, \ldots, D_n$ discs disjunts, en general de radi diferent.

a) Descriviu la forma geomètrica de l'envolupant $C = CH(D_1 \cup \cdots \cup D_n)$. Doneu un exemple de configuració en què un dels discos contribueixi amb un nombre lineal de porcions de la frontera de $C$, i demostreu que malgrat això la complexitat de la frontera mai ultrapassa $2n-2$. [Indicació: podeu pensar en la contribució del disc més petit i fer una inducció acuradament]

b) Doneu un algorisme per construir $C$.

**Problema 61.**– Siguin $B$ un conjunt de punts *bons* i $D$ un conjunt de punts *dolents* en el pla, amb $|B|+|D|=n$. Es diu que un punt $p$ del pla és *acceptable* quan compleix les condicions següents:

(a) $p$ és més a prop de cadascun dels punts bons que ho és l'origen;

(b) $p$ és més lluny de cadascun dels punts dolents que ho és l'origen.

Trobeu un algorisme per construir el conjunt format pels punts acceptables [Indicació: podeu construir per separat el conjunt de punts que compleixen (a) i el conjunt de punts que compleixen (b), i després intersecar-los. També hi ha maneres de fer-ho tot de cop.]

**Problema 62.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ punts (sites) del pla. Per a cada punt del pla considerem les seves distàncies als sites, ordenades de menor a major, i descomponem el pla en regions formades pels punts tals que l'ordre de les distàncies és el mateix: quin és el màxim nombre possible de cèl·lules bidimensionals que es poden obtenir?

**Problema 63.**– Sigui $S=\{p_1,\dots p_n\}$ un conjunt de $n$ punts (sites) al pla. Suposem que per a cert punt $x$ del pla el site més proper és $p_1$, el segon és $p_2$ i el tercer es $p_3$.

a) Demostreu que $p_1$ i $p_2$ són veïns Delaunay.

b) Demostreu que $p_3$ és veí Voronoi d'almenys un site entre $p_1$ i $p_2$, però no necessàriament de tots dos.

**Problema 64.**– El Diagrama de Voronoi de segon ordre d'un conjunt de punts ("sites") $S=\{p_1,\dots,p_n\}$ és la descomposició del pla en regions determinades pel parell de punts de $S$ més propers:

$$V_{j,k}=\{x \mid \forall i\neq j,k \quad \text{es té} \quad d(x,p_i)\geq d(x,p_j) \text{ i } d(x,p_i)\geq d(x,p_k)\}.$$

a) Demostreu que les regions $V_{j,k}$ no buides son regions poligonals convexes.

b) Caracteritzeu les parelles de punts $p_j$, $p_k$, tals que $V_{j,k}$ és no fitada.

c) En la doble Figura 16 es veuen cinc sites i les deu mediatrius que defineixen. Dibuixeu-hi en la part superior el Diagrama de Voronoi d'aquests sites, i en la part inferior el seu Diagrama de Voronoi de segon ordre (descomposicions dins del requadres).

d) Doneu un algorisme per calcular el Diagrama de Voronoi de segon ordre d'un conjunt de punts. [Indicació: inspireu-vos en la realització dels dibuixos de l'apartat anterior.]

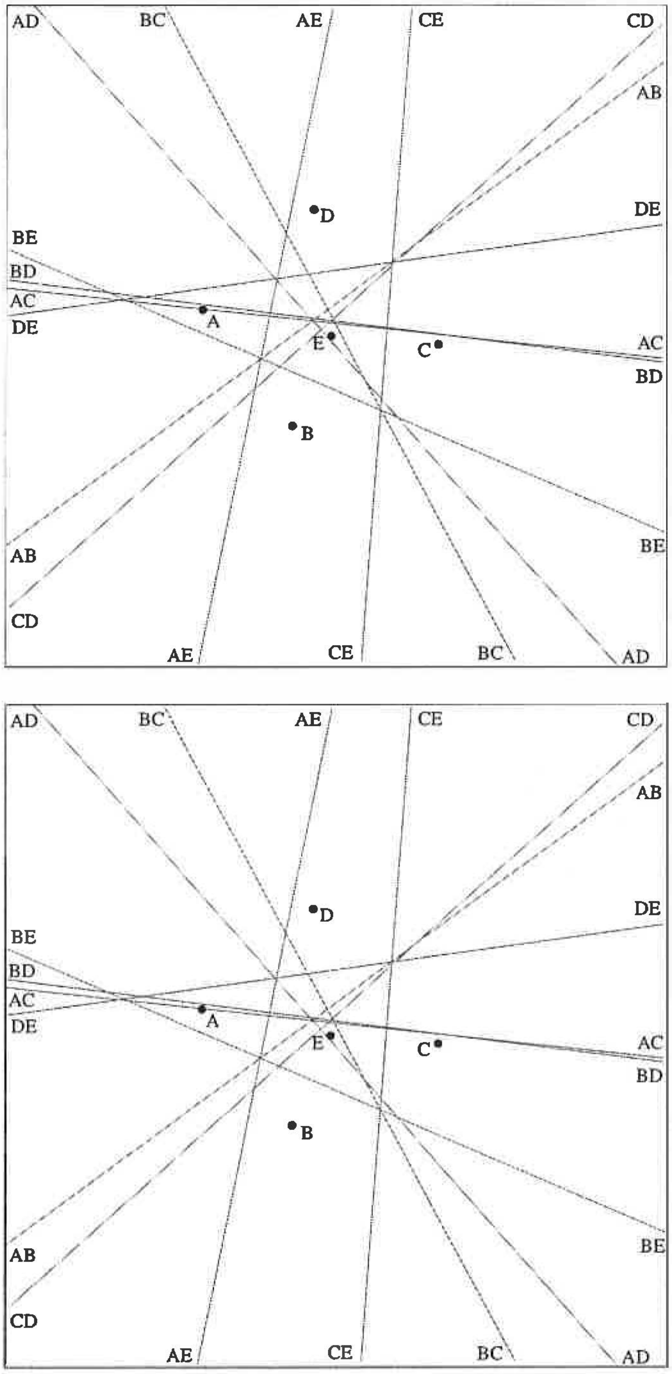



Figura 16: Deu sites i llurs mediatrius.

**Problema 65.**– Sigui $T$ un conjunt de $n$ triangles dos a dos disjunts al pla. Descriviu un algorisme que permeti de trobar un conjunt de $n-1$ segments que tinguin les propietats següents:

- cada segment connecta un triangle amb un altre;
- els interiors dels segments no tallen cap triangle;
- els triangles i segments formen plegats un conjunt connex.

**Problema 66.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ segments disjunts $s_1, \ldots, s_n$, i sigui $P$ el conjunt reunió dels extrems dels segments. Demostreu que per a qualsevol punt $q$ exterior a l'envolupant convexa de $P$ existeix almenys un segment de $S$ que $q$ pot veure sencer i deduïu-ne un algorisme eficient per trobar-lo. Doneu un exemple amb $q$ interior a $CH(P)$ en què $q$ no vegi cap segment sencer.

**Problema 67.**– Demostreu que qualsevol conjunt de $n$ punts del pla en posició general admet una poligonització $x$-monòtona; és a dir, sempre existeix un polígon $x$-monòton que els té com a vèrtexs. Obteniu un algorisme $O(n \log n)$ per construir-la, i demostreu que aquesta complexitat és òptima. Doneu també un exemple d'un conjunt de $n$ punts que admeti un nombre exponencial de poligonitzacions $x$-monòtones (o sigui major o igual que $c^n$ per a cert real $c$).

**Problema 68.**– Sigui $R$ un conjunt de $n$ rectangles $R_1, \ldots, R_n$, tots ells amb base a l'eix $x$. Cada rectangle $R_i$ s'especifica pel seu punt inferior esquerre, $(x_i, 0)$, la seva amplada $a_i$ i la seva altura $h_i$. Anomenem $skyline(R)$ l'envolupant superior dels rectangles del conjunt i l'eix $x$, tal com es mostra a la Figura 17.

(a) És clar que $skyline(R)$ té com a molt $2n$ segments verticals (les parets dels rectangles); demostreu que té com a molt $2n+1$ segments horitzontals.

(b) Proveu que si es tenen dos skylines, $skyline(R')$ i $skyline(R'')$, que tenen respectivament $n'$ i $n''$ segments, entre horitzontals i verticals, aleshores el nombre d'interseccions entre ells és $O(n'+n'')$ (podeu suposar que no hi ha superposició de segments de l'un i de l'altre)

(c) Doneu un algorisme per calcular $skyline(R)$.

**Problema 69.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ punts del pla en posició general, i considerem l'àrea de la seva envolupant, $CH(S)$ . Doneu un algorisme per trobar el punt $p \in S$ la supressió del qual fa màxima la reducció de tal àrea, és a dir, el punt de $S$ al qual correspon el valor

$$\max_{q \in S} \{\text{àrea}(CH(S) - \text{àrea}(CH(S \setminus \{q\})\}\,.$$

Nota. *El problema es resol de forma trivial en $O(n^2 \log n)$; tracteu de fer-lo en $O(n \log n)$. Una solució completa $O(n^2)$ es valoraria com a mig problema.*

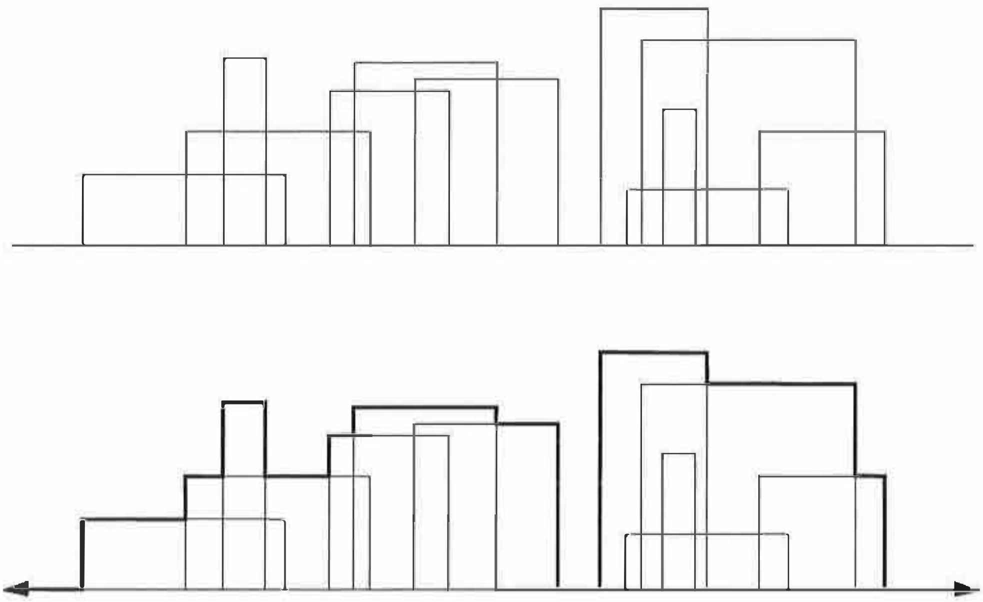


Figura 17: *Skyline*

**Problema 70.**– Sigui $S$ un conjunt de $n$ segments $s_1, \ldots, s_n$, cap dels quals no és horitzontal ni vertical. L'extrem esquerre de $s_i$ es denota $E_i$ i el dret $D_i$, per a $i = 1, \ldots, n$. Suposarem que tots ells són interiors a la franja limitada per les rectes $y = 0$ i $y = 1$, i que les abscisses dels extrems dels segments són totes diferents. Vegeu la Figura 18.

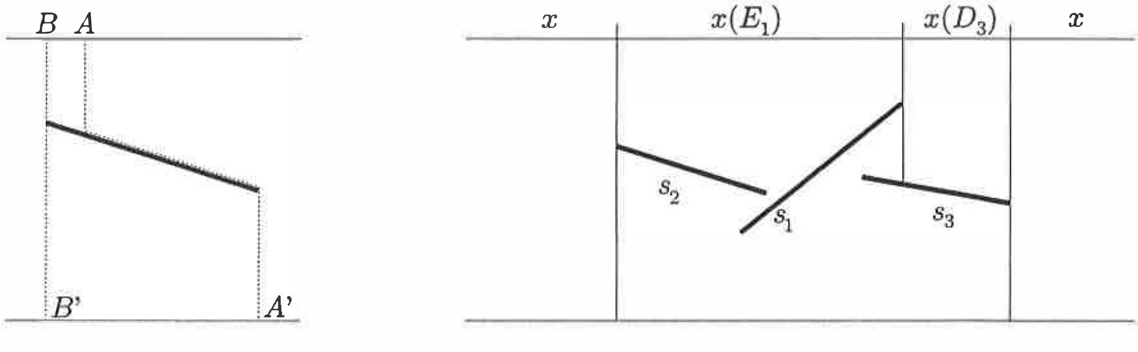



Figura 18: Distribució de les *gotes d'aigua.*

Per a cada punt $P$ de la recta $y = 1$ imaginem que es deixa caure una "gota d'aigua"puntual, que cau i llisca sobre els segments fins arribar a la recta $y = 0$. Per exemple, des del punt $A$ de la figura (part esquerra) cauria a $A'$. Si cau en vertical sobre un extrem, suposarem que segueix baixant en vertical, com per exemple una gota des de $B$, que aniria a $B'$.

Trobeu un algorisme que rebi com a entrada un conjunt de segments $S$ com el descrit, i torni la partició en intervals de la recta $y = 1$ segons el punt de caiguda en l'eix $x$, de la manera següent: si en un interval cada gota des de $(x, 1)$ cau en vertical fins a $(x, 0)$, l'etiquetem "$x$"; si cauen en un punt d'abscissa diferent, com que haurà de correspondre a un extrem de segment, l'etiquetem "$x(E_i)$" o "$x(D_j)$", segons correspongui. Un exemple de tal partició es mostra a la part dreta de la figura.

**Problema 71.**– Considerem $n$ punts mòbils $p_1, ..., p_n$ que es mouen amb velocitats constants sobre una recta. Cada punt $p_i$ es mou amb velocitat $\overrightarrow{v}_i = (v_i, 0)$ en el mateix sentit que els altres (suposarem que $v_i > 0$). En el instant de temps $t = 0$ el punt $p_i$ és situat a $x = k_i$, i es suposa que en tot el període de temps $t \in (-\infty, 0]$ el punt ha estat quiet a la posició $x = k_i$. El punt situat més a la dreta direm que "és el líder".

(a) [1/10 del problema] Per a $i = 1, .., n$ definim la funció $f_i(t)$ que per a cada instant de temps $t$ dóna la coordenada de la posició ocupada per $p_i$. Descriviu i dibuixeu la gràfica de la funció $y = f_i(t)$ en el pla de coordenades $(t, y)$.

(b) [6/10 del problema] Doneu un algorisme $O(n \log n)$ que torni una llista ordenada temporalment de tots els punts que en algun instant de temps són líders.

(c) [3/10 del problema] Demostreu que a partir de cert instant de temps $t = t_f$ les posicions relatives dels punts (qui va davant de qui) ja no canvien, i doneu un algorisme per calcular el valor $t_f$.

**Problema 72.**– Siguin $P$ un polígon de com a molt $n$ vèrtexs i $T$ un conjunt de com a molt $n$ segments. Sabem que cada dos segments de $T$ poden compartir extrems però no pas creuar-se. Doneu un algorisme subquadràtic per trobar els segments de $T$ que són continguts en $P$. Comenteu també si l'eficiència es pot millorar en el cas que $T$ també és un polígon, i se sap que entre $P$ i $T$ tenen $r$ vèrtexs concaus, on $r$ és una constant.

**Problema 73.**– Es diu que un polígon és isotètic quan tots els seus costats són paral·lels als eixos de coordenades. Sigui $S$ un conjunt de $n$ punts del pla, amb $n$ parell, sense repeticions d'abscisses o d'ordenades:

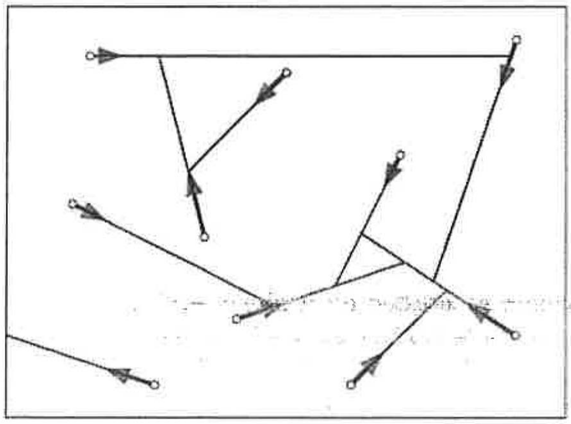
(a) [1/2 del problema] Raoneu que per a tot punt $p \in S$ hi ha un quadrat isotètic amb $p$ a la frontera, que cobreix la meitat dels punts i en deixa la meitat a l'exterior. Doneu un algorisme eficient per trobar-lo.

(b) [1/2 del problema] Doneu un exemple de conjunt que si es fixen dos dels seus punts, $p, q$, pot passar que cap quadrat isotètic amb $p$ i $q$ a la frontera cobreixi la meitat dels punts i en deixi la meitat a l'exterior. Doneu un algorisme eficient per, donat $S$ i dos dels seus punts, decidir si hi ha o no tal quadrat isotètic, i trobar-ne un en cas afirmatiu.

**Problema 74.**– Suposem que tenim $n$ punts ("vehicles") que a partir de cert instant es mouen en en pla segons una trajectòria rectilínea, cadascun amb una certa velocitat i direcció constants (en general diferents per a punts diferents). Cada vehicle deixa una *traça* per on passa. Els vehicles es comencen a moure simultàniament, i es mouen fins que "xoquen" amb la traça deixada per una altre vehicle, o bé es queden sense combustible. Suposeu que dos vehicles no xoquen l'un contra l'altre. Definim el graf de moviments com segueix: els vèrtexs del graf són les posicions inicials, les de xoc, i els punts en què es quedin sense combustible (havent-hi arribat) (vegeu la Figura).

(a) Doneu el nombre de vèrtexs i d'arestes del graf, i descriviu un algorisme que permeti de calcular-lo.

b)( Suposant que tots els vectors de velocitat dels vehicles tenen component $x$ positiva, descriviu un algorisme més eficient per construir el graf de moviments.



# ESTRUCTURES DE DADES I PREPROCESSAMENT

**Problema 75.–** *ed Trobeu un algorisme per calcular l'àrea de la reunió de $n$ rectangles isotètics. Podeu suposar que no hi ha dos costats alineats (Figura 19).

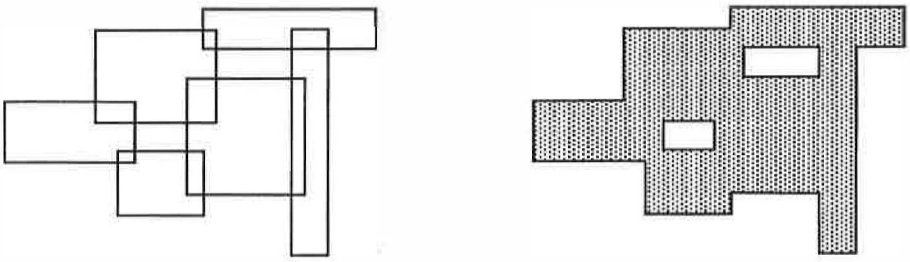


Figura 19: Sis rectangles isotètics (esquerra) i llur unió (dreta).

**Problema 76.–** Preprocesseu un conjunt $S$ de $n$ punts del pla de tal forma que posteriorment sigui possible saber per a cada recta no vertical que ens donin quants punts de $S$ té per sobre, en temps $O(\log n)$.

**Problema 77.–** *ed Siguin $S_1$ un conjunt de $n$ segments disjunts horitzontals i $S_2$ un conjunt de $m$ segments disjunts verticals. Trobeu un algorisme $O((n+m)\log(n+m))$ per comptar el nombre d'interseccions a $S_1 \cup S_2$.

**Problema 78.–** Preprocesseu un conjunt $S$ de $n$ punts del pla de tal forma que posteriorment sigui possible saber per a cada punt $q$ del pla que ens donin el màxim radi dels discos amb centre $q$ sense punts de $S$ a l'interior, en temps $O(\log n)$.

**Problema 79.–** Sigui $S$ un conjunt de $n$ punts al pla. Volem processar el conjunt i emmagatzemar una estructura de dades de forma que poguem posteriorment dir en temps $o(n)$, per a qualsevol recta $r$ que ens donin, quants punts de $S$ hi ha per sobre de $r$ i quants per sota. Expliqueu com fer-ho i especifiqueu el temps de preprocessament, el de resposta i la memòria requerida per emmagatzemar l'estructura.

## ESPAI TRIDIMENSIONAL

**Problema 80.**– Sigui $P$ un politop de $\mathbb{R}^3$ amb $n$ vèrtexs. Doneu un algorisme per trobar el segment vertical més llarg que s'hi pot inscriure.

**Problema 81.**– Establiu un algorisme per decidir, donats un un políedre $P$ de $\mathbb{R}^3$ amb $n$ vèrtexs i un punt $q$, si $q$ és a l'exterior, sobre la vora o a l'interior de $P$. En el cas que $P$ sigui convex, descriviu un preprocessament per obtenir una estructura que permeti resoldre el problema en temps logarítmic.

**Problema 82.**– Siguin $P$ un politop de $\mathbb{R}^3$ amb $n$ vèrtexs i $C$ una de les seves cares. Doneu un algorisme per decidir si la posició de $P$ seria estable en posar-lo sobre un pla horitzontal amb cara de contacte $C$.

**Problema 83.**– Dissenyeu un algorisme per trobar, donats un un politop $P$ de $\mathbb{R}^3$ amb $n$ vèrtexs i un punt exterior $q$, el contorn aparent de $P$ tal com es veu des de $q$ (Figura 20).

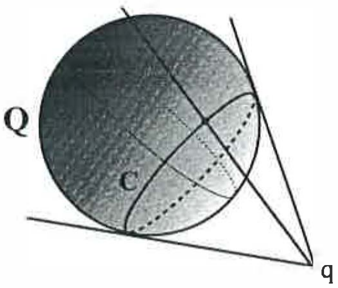



Figura 20: El contorn aparent $C$ d'un cos $Q$, vist des de $q$, és el conjunt de punts de contacte de les tangents a $Q$ des de $q$.