LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

GEOMETRIA DISCRETA I COMPUTACIONAL

PROBLEMES

Ferran Hurtado

Departament de Matemàtica Aplicada 2

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

1400647335

Títol: Geometria Discreta i Computacional. Problemes
Autor: Ferran Hurtado
Dipòsit Legal: B-39212-2006
Imprès per: Servis Gràfics Copisteria Imatge S.L.
Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona

GEOMETRIA DISCRETA I COMPUTACIONAL

PROBLEMES

Ferran Hurtado

Nota introductòria

Aquesta col·lecció de problemes no segueix l'ordre de desenvolupament cronològic del programa de l'assignatura, sinó que és organitzada per grups conceptuals, els quals no són sempre totalment disjunts. Tampoc no hi ha cap ordenació progressiva en la dificultat.

Els problemes que tenen l'indicatiu $^{*\mathrm{ed}}$ requereixen l'ús d'estructures de dades no immediates per resoldre'ls, mentre que l'indicatiu $^{*\mathrm{lg}}$ significa que cal establir lemes geomètrics previs no immediats.

Barcelona, setembre de 2006

POLÍGONS I POLIGONALS SIMPLES

Problema 1.– Donat un n-polígon P (simple, convex), i tenint en compte l'estructura de dades que el descriu, trobeu algorísmicament

a) els vèrtexs d'abscissa extrema;

b) les interseccions amb una recta donada;

c) les tangents des d'un punt donat;

d) el punt més proper a una línia donada.

Problema 2.– Sigui C una poligonal tancada de n costats, possiblement no simple. Trobeu un algorisme per decidir si C defineix o no un polígon simple.

Problema 3.– Establiu un algorisme per decidir, donats un n-polígon simple P i un punt q, si q és a l'exterior, sobre la vora o a l'interior de P. Estudieu la possible millora quan P és convex i descrit per una estructura que permeti cerca binària.

Problema 4.– Siguin P un n-polígon convex i Q un m-polígon simple del qual tenim també donada una triangulació del seu interior i de cadascun dels "polígons butxaca" (Figura 1) situats entre Q i la seva envolupant convexa. Demostreu que la intersecció $P \cap Q$ es pot calcular en temps $O(m + n)$.

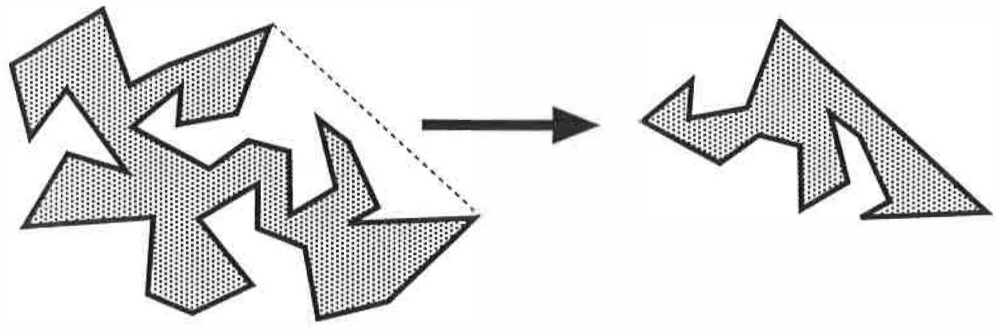

Figura 1: Un polígon i un dels seus *polígons butxaca*.

Problema 5.– Demostreu que el valor

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

és l'àrea del triangle de vèrtexs $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ i $P_3 = (x_3, y_3)$ afectada pel signe que tingui el recorregut $P_1 \to P_2 \to P_3$. Utilitzeu aquest concepte per dissenyar un algorisme que calculi l'àrea d'un polígon simple P de n costats.

Problema 6.– Trobeu un algorisme $O(n)$ per triangular un n-polígon estrellat donat un punt del nucli.

Problema 7.– Doneu un algorisme lineal per decidir si un polígon simple és estrellat.

Problema 8.– Trobeu un algorisme per decidir, donat un polígon simple P, si existeix alguna direcció per a la qual P sigui monòton.

Problema 9.– Un *polígon isotètic* és aquell que té tots els costats horitzontals o verticals. Una *piràmide isotètica* és un polígon isotètic monòton respecte de la vertical tal que el costat horitzontal inferior h (la "base") té longitud igual la suma dels altres costats horitzontals (dues "escales" des de h al costat superior) (Figura 2).

a) Demostreu que tota piràmide isotètica pot partir-se amb diagonals en quadrilàters convexos.

b) Desenvolupeu un algorisme per trobar tal partició (es pot fer en temps lineal).

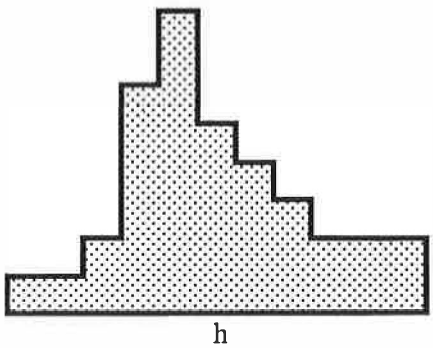

Figura 2: Piramide isotètica de base h.

Problema 10.– Feu un algorisme per partir un polígon isotètic en rectangles emprant segments alineats amb costats del polígon. Obteniu tan poques peces com sigui possible i tan de pressa com sigui possible. La sortida de l'algorisme ha de donar una descripció completa de la partició.

Problema 11.– Sigui P una poligonal x-monòtona de n vèrtexs, tots ells d'ordenada positiva, i siguin a i b les abscisses mínima i màxima, respectivament, dels punts de P. S'anomena *terreny* la porció del pla limitada per l'eix x, les verticals $x = a$, $x = b$ i la poligonal P. Es diu que P és el *perfil* del terreny (Figura 3).

a) Caracteritzeu el conjunt S de punts dins de la franja $a \leq x \leq b$ que són per sobre de P i "veuen" tot P. Doneu un algorisme per trobar el punt de S d'ordenada mínima.

b) Doneu un algorisme per trobar el punt del perfil que permet de construir la torre menys alta tal que des de dalt es veu tot P.

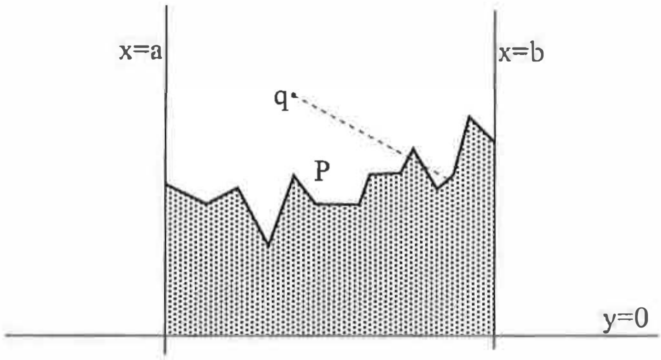

Figura 3: Terreny de perfil P. El punt q no veu tot P.

Problema 12.– Diem que un polígon P és dèbilment visible des d'un costat a, quan tot punt Q de P, interior o de la frontera, veu almenys un punt M del costat a (és a dir, que el segment QM no té cap punt exterior a P) (Figura 4). Doneu un algorisme $O(n)$ per triangular polígons dèbilment visibles des d'un costat donat. Demostreu la correcció de l'algorisme, feu-ne clarament l'anàlisi del cost, i expliqueu quin paper hi juga exactament la propietat de visibilitat del poligon.

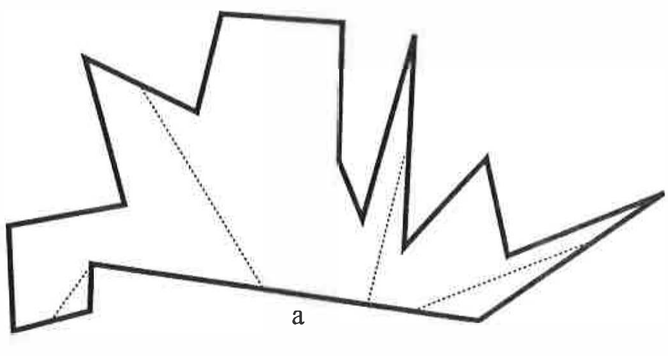

Figura 4: Polígon dèbilment visible des de a.

Problema 13.– Quantes components connexes (Figura 5) pot tenir la intersecció de dos polígons x-monòtons? Doneu un algorisme per obtenir-les eficientment explotant la monotonia.

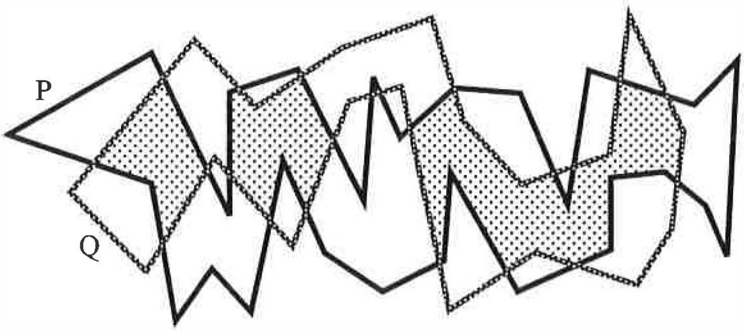

Figura 5: La intersecció de P i Q té tres components connexes (ombrejades).

Problema 14.– Siguin P un polígon simple i s i t dos punts del polígon (interiors o de la frontera). Doneu un algorisme per trobar el camí més curt de s a t dins P. [Nota. Cal pensar i provar quina és l'estructura del camí més curt. Quant a l'algorisme, convé començar per triangular el polígon.]

Problema 15.– Sigui Q un polígon simple del pla que ens donen pels seus vèrtexs, $\{p_1, \ldots p_n\}$, en l'ordre en què apareixen a la frontera, però no sabem si en sentit positiu (antihorari) o en sentit negatiu (horari). Doneu un algorisme que permeti esbrinar en quina orientació ens els han donat. Pot fer-se en $O(n)$.

POLÍGONS CONVEXOS

Problema 16.– Siguin P un n-polígon convex i q un punt exterior a P. Denotem per V la part de la frontera de P visible des de q i per O la part oculta (Figura 6).

a) Si un punt t recòrre V, la distància $d(q,t)$ és una funció unimodal?

b) Si un punt t recòrre O, la distància $d(q,t)$ és una funció unimodal?

c) Doneu algorismes per trobar els punts de P més proper i més llunyà de q.

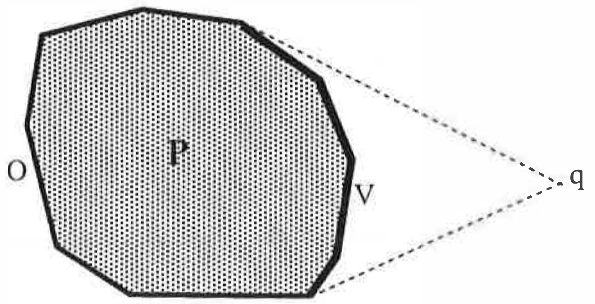

Figura 6: Parts visible i oculta des d'un punt extern.

Problema 17.– Sigui B un polígon convex del pla de n vèrtexs i q un punt exterior a B. Definim la distància de q a B per $d(q,B) = min\{d(q,y)\ ,\ y \in B\}$. Doneu algorismes per trobar, donat un altre polígon convex A, de m vèrtexs, disjunt amb B,

a) $d_M(A,B) = min\{d(x,B)\ ,\ x \in A\}$ (distància mínima entre A i B);

b) $d_H(A,B) = max\{d(x,B)\ ,\ x \in A\}$ (distància de Hausdorff de A a B, és asimètrica).

Problema 18.– Siguin P_1 i P_2 polígons convexos disjunts, amb un total de n vèrtexs, cadascun d'ells donat per un *array* o estructura que permeti de fer-hi cerca binària. Trobeu un algorisme per construir en $O(\log^2 n)$ una recta comuna de suport que deixi P_1 i P_2 del mateix costat. (Pot fer-se en $O(\log n)$ però és prou més difícil).
Indicació per al $O(\log^2 n)$: Considerem cada polígon dividit en quatre quadrants amb la notació usual. Suposant que ja s'ha detectat l'existència d'una línia com la buscada entre els primers quadrants, estudieu la posició relativa de les rectes $P_1(\varphi)$ i $P_2(\varphi)$ quan φ varia de $\pi/2$ a π, on $P_i(\varphi)$ denota la recta orientada de suport de P_i que deixa P_i a la seva esquerra i forma un angle polar φ des del semieix positiu d'abscisses.

Problema 28.– Siguin Q un polígon convex del pla, i a i b dos punts externs a Q. Diem que a *conquereix* b (o que b *és conquerit per* a) quan b és contingut a l'envolupant convexa $CH(Q \cup \{a\})$ (vegeu la figura).

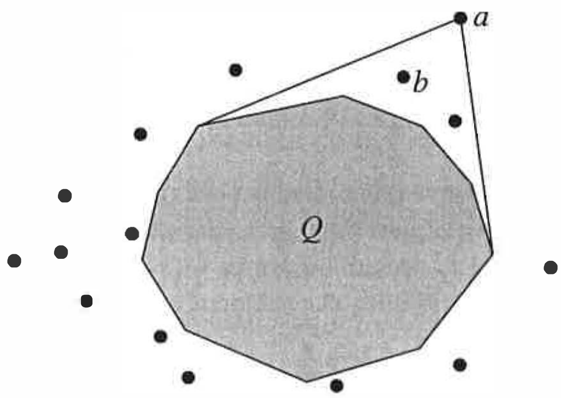

Figura 10: Conqueriment de punts.

Doneu un algorisme, tant eficient com pogueu, que rebi com a entrada un polígon convex Q de m costats i un conjunt S de n punts externs, i permeti d'obtenir els punts de S que no són conquerits per cap altre.

Problema 29.– Sigui P un polígon convex de vèrtexs $p_1, \ldots, p_n$. Una *corda* de P és qualsevol segment que tingui els extrems a la frontera de P.

a) Doneu un algorisme per trobar la corda més curta que divideixi en dues parts iguals l'àrea de P.

b) Demostreu que sempre existeix alguna corda que simultàniament parteix en parts iguals l'àrea i el perímetre de P, i doneu un algorisme per trobar-la.

Problema 30.– Sigui P un polígon convex de vèrtexs $p_1, \ldots, p_n$. Doneu un algorisme $o(n^2)$ per trobar el triangle d'àrea màxima d'entre els definits per tres vèrtexs de P dos dels quals siguin consecutius (és a dir, formats per un costat i un vèrtex de P).

Problema 31.– Per a cada costat e d'un polígon convex Q denotem per $r(e)$ la recta que conté e. Diem que un punt p interior a Q és *ortogonal al costat* e quan e la perpendicular des de p a $r(e)$ talla e. Diem que un punt p interior a Q és *central* quan és ortogonal a tots els costats de Q.

a) Demostreu la veritat o falsedat de les afirmacions següents:

- Tot punt interior a Q és ortogonal almenys a un costat.
- Sempre existeix un punt interior a Q que és ortogonal com a mínim a tres costats.
- Sempre existeix algun punt central.

b) Doneu un algorisme per trobar un punt central de Q, si és que existeix.

UBICACIONS I CONSTRUCCIONS ÒPTIMES

Problema 32.– Donats n punts del pla i una recta r, trobeu el punt de r que fa mínima la màxima distància als punts.

Problema 33.– Donat un conjunt de n punts $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ definim $\mu(p_i, p_j)$ com el mínim obtingut en comptar el nombre de punts de P continguts en cadascun dels discos (tancats) que contenen p_i i p_j. Sigui $M(P) = \max_{p_i, p_j \in P} \mu(p_i, p_j)$.

a) Determineu $M(P)$ per a tots els conjunts P de 3 i 4 punts.

b) Proveu que si existeix un disc D' que conté p_i i p_j i altres k punts de S, aleshores existeix un altre disc $D'' \subset D'$ amb p_i i p_j a la frontera que conté com a màxim k punts de S.

c) Utilitzeu (b) per obtenir un algorisme que calculi $\mu(p_i, p_j)$ amb p_i i p_j fixos.

d) Doneu un algorisme per calcular $M(P)$.

Problema 34.– Donat un conjunt de n punts $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ del pla, i un altre punt w tal que $w \notin P$, doneu un algorisme per trobar la recta r que passant per w fa màxima la distància de r al $p_i \in P$ que tingui més a prop (Figura 11).

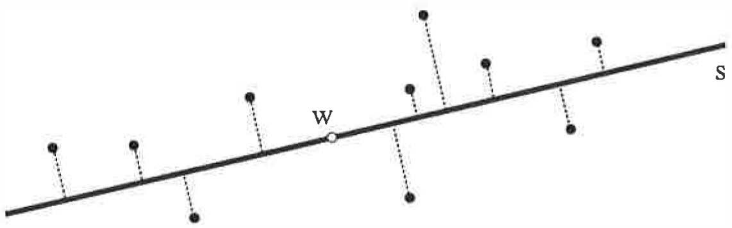

Figura 11: Distàncies d'un conjunt de punts a una recta s pel punt w.

Problema 35.– Formuleu un algorisme per, donats un conjunt S de n punts del pla i quatre nombres reals $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, trobar el cercle més gran sense punts interiors de S que tingui el centre dins del rectangle de cantonades (a_1, b_1) i (a_2, b_2).

Problema 36.– Doneu un algorisme per, donat un conjunt S de n punts del pla, trobar la posició d'un quadrat isotètic de costat unitat que "tapi" el màxim nombre possible de punts de S.

Problema 37.– Donat un polígon Q convex de n vèrtexs, considerem tots els cercles que cobreixen Q i tenen el centre a la frontera de Q. Trobeu un algorisme per obtenir el punt A de la frontera que permet de fer-ho amb radi mínim.

Problema 38.– Sigui S un conjunt de n punts al pla.

a) Sigui p un punt interior a $conv(S)$. Proposeu un algorisme que calculi el cercle més gran que passa per p i no conté cap punt de S al seu interior.

b) Sigui p un punt exterior a $conv(S)$. Proposeu un algorisme que calculi el cercle més petit que passa per p i conté tots els punts de S.

Problema 39.– Donat un conjunt $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de punts del pla en posició general i en un cert sistema de referència, doneu un algorisme per trobar la recta r que fa mínima la màxima distància vertical dels punts de S a la recta (Figura 12).

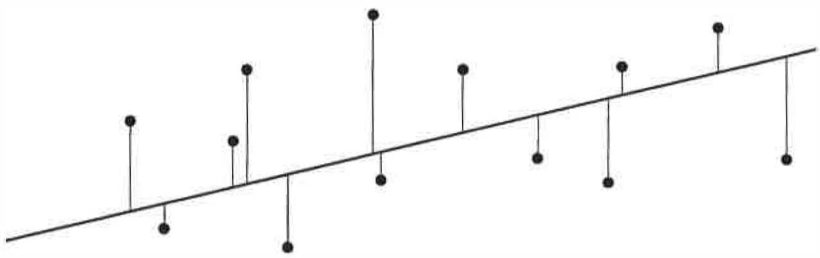

Figura 12: Distàncies verticals dels punts a una recta.

Problema 40.– Siguin B un conjunt de punts "blancs" i N un conjunt de punts "negres" en el pla, amb $|B|+|N| = n$. Suposem que tots els punts de $B \cup N$ tenen abscissa diferent, i que tant el d'abscissa mínima, p, com el d'abscissa màxima, q, són negres. Doneu un algorisme per trobar un camí poligonal x-monòton π de p a q tal que (a) els vèrtexs de π siguin elements de $B \cup N$, (b) tots els punts de B siguin al camí o per sobre d'ell, (c) tots els punts de N siguin al camí o per sota d'ell, i (d) π sigui el camí més curt d'entre tots els qui compleixen aquestes propietats. Tracteu d'aconseguir $O(n \log n)$. [Indicació: penseu primer els casos amb $|B|$ petit.]

CONSTRUCCIONS DIVERSES

Problema 41.– Doneu un algorisme $o(n^2)$ per trobar, donats n punts diferents del pla, la recta més vertical d'entre les que determinen. Doneu també una fita inferior per al problema.

Problema 42.– Trobeu un algorisme $O(n)$ que permeti, donats n punts del pla i un altre, q, decidir si q és fora, dins o a la vora de l'envolupant convexa dels altres.

Problema 43.– Demostreu que el problema d'unicitat de nombres reals –donats $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ decidir si tots són diferents o no– té complexitat $\Omega(n \log n)$ (via Ben-Or).

Problema 44.– Sigui L un conjunt de n rectes del pla. Trobeu un algorisme $O(n \log n)$ per calcular el rectangle mínim de costats paral·lels als eixos que conté tots els vèrtexs de l'arranjament $\mathcal{A}(L)$ (Figura 13).

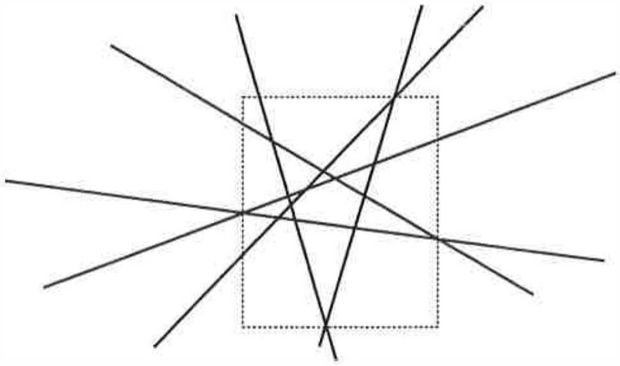

Figura 13: Rectangle isotètic mínim que conté els vèrtexs d'un arranjament.

Problema 45.– Una *quadrisecció* d'un conjunt de punts P és un parell de rectes tal que cadascun dels quatre angles oberts que determinen contingui com a màxim $\lceil n/4 \rceil$ punts. Demostreu que tot conjunt finit admet alguna quadrisecció i doneu un algorisme per trobar-ne una.

Problema 46.– Sigui S un conjunt de n segments disjunts del pla. Direm que un segment de S és *separable* en la direcció $(1, 0)$ si es pot traslladar horitzontalment (paral·lel a sí mateix) cap al $+\infty$ de la direcció l'eix x sense col·lissionar amb cap dels altres segments. Demostreu que sempre existeix almenys un element de S separable en la direcció $(1, 0)$

i deduïu-ne un algorisme per obtenir una ordenació dels elements de S que ens permeti separar-los un rera un altre.

Problema 47.– Trobeu un algorisme per decidir, donats n segments verticals $s_1, \ldots, s_n$, si existeix alguna recta transversal a tots (i en cas afirmatiu trobar-ne una).

Problema 48.– La mètrica L_∞ es defineix al pla per

$$d((a,b),(c,d)) = \max(|a-c|, |b-d|).$$

a) Descriviu la figura geomètrica que és un cercle amb aquesta mètrica (és a dir, el lloc de punts a distància r d'un centre p), i descriviu també la figura geomètrica que és la mediatriu entre dos punts p i q, distingint casos segons la seva posició (és a dir, el lloc de punts a igual distància de p que de q).

b) Demostreu que la regió de Voronoi d'un punt d'un conjunt amb la mètrica L_∞ és una regió connexa, i caracteritzeu els punts que tenen regió de Voronoi no fitada.

Problema 49.– Una recta vertical deixa a l'esquerra n punts blaus i a la dreta n punts vermells, sense que la unió contingui tres punts alineats. Demostreu que és possible emparellar els punts blaus amb els vermells de forma que els segments determinats no es tallin, i doneu un algorisme per construir tal emparellament (Figura 14).

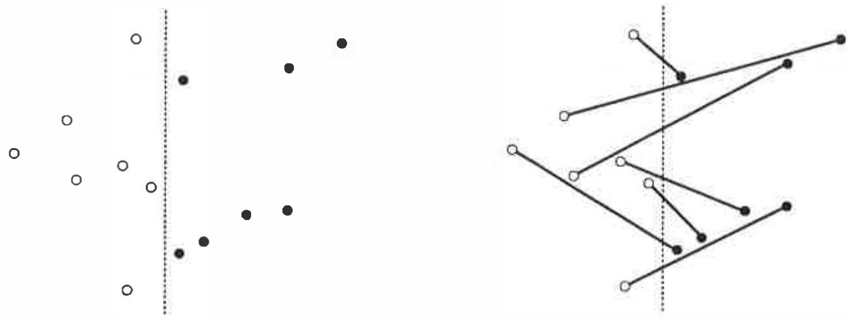

Figura 14: Dos conjunts de punts (esquerra) i un emparellament sense talls (dreta).

Problema 50.– El Diagrama de Voronoi llunyà d'un conjunt $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de llocs del pla és la descomposició del pla en regions $V_f(P_i)$, de forma que tots els punts de $V_f(P_i)$ tenen P_i com a lloc més llunyà, és a dir, $Q \in V_f(P_i)$ si, i només si, $d(Q,P_j) \leq d(Q,P_i), \forall j$. Demostreu-ne les propietats següents.

a) $V_f(P_i) \neq \varnothing$ si, i només si, P_i és un vèrtex de $conv(S)$.

b) $V_f(P_i)$ és una regió poligonal convexa.

c) Les regions $V_f(P_i)$ no buides són no-fitades. Què se'n dedueix per a l'1-esquelet del Diagrama?

Problema 51.– Donats n segments del pla, possiblement no disjunts, i dos punts p i q, trobeu un algorisme per decidir si existeix un punt del pla que veu p i q, és a dir, un punt x tal que els segments $\overline{xp}$ i $\overline{xq}$ no tallen cap dels n segments donats (Figura 15).

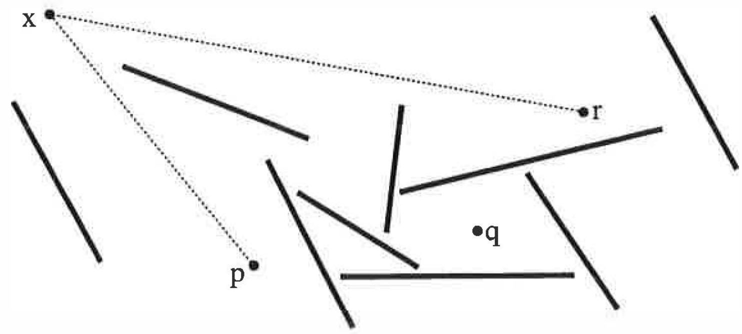

Figura 15: Els punts p i r són simultàniament visibles des de x, però p i q no són simultàniament visibles des de cap punt.

Problema 52.– Donat un conjunt $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ de punts del pla en posició general, doneu un algorisme per decidir si S admet una simetria axial. Tracteu d'assolir la millor eficiència possible.

Problema 53.– Siguin V i B dos conjunt de punts del pla, anomenats *vermells* i *blaus* respectivament i amb cardinals n_v i n_b. Posarem $n = n_v + n_b$. Trobeu algorismes tan eficients com pogueu per

(a) decidir si existeix un cercle que deixa els vermells a l'interior i els blaus a l'exterior;

(b) trobar un semiplà que contingui tots els vermells i el mínim nombre possible de blaus.

Problema 54.– Es diu que un punt del pla $p = (a, b)$ *domina* un altre punt $q = (c, d)$ quan $a > c$ i $b > d$. Donat un conjunt de n punts S, anomenem *punts maximals de S* els elements de S que no són dominats per cap punt de S.

a) Doneu un algorisme $o(n^2)$ per trobar els elements maximals de S.

b) Demostreu que el problema de l'apartat anterior té complexitat $\Omega(n \log n)$. [Indicació: podeu relacionar el problema d'unicitat d'enters amb el nombre de punts maximals de S]

Problema 55.– Siguin $D_1, \ldots, D_n$ discs disjunts, en general de radi diferent.

a) Descriviu la forma geomètrica de l'envolupant $C = CH(D_1 \cup \cdots \cup D_n)$. Doneu un exemple de configuració en què un dels discos contribueixi amb un nombre lineal de porcions de la frontera de C, i demostreu que malgrat això la complexitat de la frontera mai ultrapassa $2n-2$. [Indicació: podeu pensar en la contribució del disc més petit i fer una inducció acuradament]

b) Doneu un algorisme per construir C.

Problema 56.– Siguin B un conjunt de punts *bons* i D un conjunt de punts *dolents* en el pla, amb $|B|+|D|=n$. Es diu que un punt p del pla és *acceptable* quan compleix les condicions següents:

(a) p és més a prop de cadascun dels punts bons que ho és l'origen;

(b) p és més lluny de cadascun dels punts dolents que ho és l'origen.

Trobeu un algorisme per construir el conjunt format pels punts acceptables [Indicació: podeu construir per separat el conjunt de punts que compleixen (a) i el conjunt de punts que compleixen (b), i després intersecar-los. També hi ha maneres de fer-ho tot de cop.]

Problema 57.– Sigui S un conjunt de n punts (sites) del pla. Per a cada punt del pla considerem les seves distàncies als sites, ordenades de menor a major, i descomponem el pla en regions formades pels punts tals que l'ordre de les distàncies és el mateix: quin és el màxim nombre possible de cèl·lules bidimensionals que es poden obtenir?

Problema 58.– Sigui $S=\{p_1,\dots p_n\}$ un conjunt de n punts (sites) al pla. Suposem que per a cert punt x del pla el site més proper és p_1, el segon és p_2 i el tercer es p_3.

a) Demostreu que p_1 i p_2 són veïns Delaunay.

b) Demostreu que p_3 és veí Voronoi d'almenys un site entre p_1 i p_2, però no necessàriament de tots dos.

Problema 59.– El Diagrama de Voronoi de segon ordre d'un conjunt de punts ("sites") $S=\{p_1,\dots,p_n\}$ és la descomposició del pla en regions determinades pel parell de punts de S més propers:

$$V_{j,k}=\{x \mid \forall i\neq j,k \quad \text{es té} \quad d(x,p_i)\geq d(x,p_j) \text{ i } d(x,p_i)\geq d(x,p_k)\}.$$

a) Demostreu que les regions $V_{j,k}$ no buides son regions poligonals convexes.

b) Caracteritzeu les parelles de punts p_j, p_k, tals que $V_{j,k}$ és no fitada.

c) En la doble Figura 16 es veuen cinc sites i les deu mediatrius que defineixen. Dibuixeu-hi en la part superior el Diagrama de Voronoi d'aquests sites, i en la part inferior el seu Diagrama de Voronoi de segon ordre (descomposicions dins del requadres).

d) Doneu un algorisme per calcular el Diagrama de Voronoi de segon ordre d'un conjunt de punts. [Indicació: inspireu-vos en la realització dels dibuixos de l'apartat anterior.]

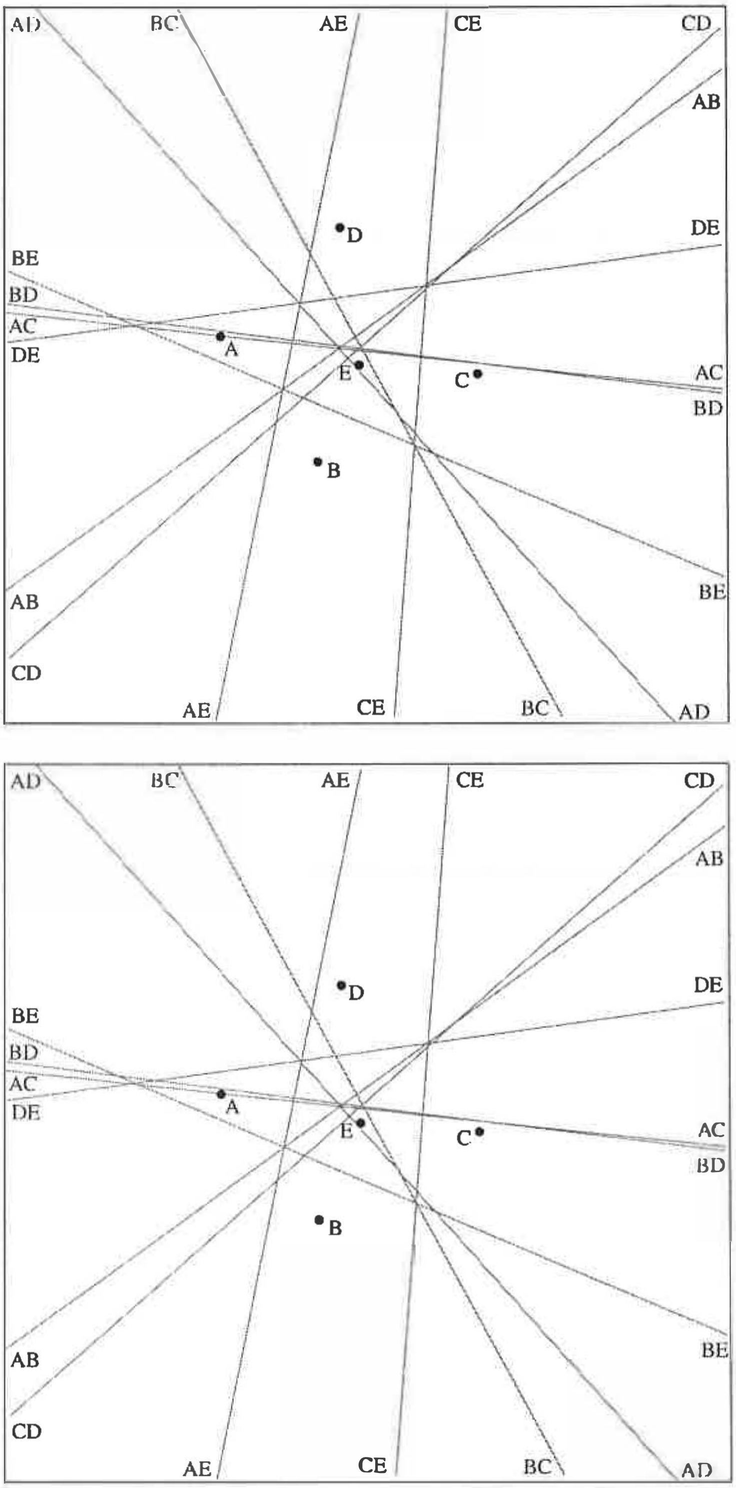

Figura 16: Deu sites i llurs mediatrius.

Problema 60.– Sigui T un conjunt de n triangles dos a dos disjunts al pla. Descriviu un algorisme que permeti de trobar un conjunt de $n-1$ segments que tinguin les propietats següents:

- cada segment connecta un triangle amb un altre;
- els interiors dels segments no tallen cap triangle;
- els triangles i segments formen plegats un conjunt connex.

Problema 61.– Sigui S un conjunt de n segments disjunts $s_1, \ldots, s_n$, i sigui P el conjunt reunió dels extrems dels segments. Demostreu que per a qualsevol punt q exterior a l'envolupant convexa de P existeix almenys un segment de S que q pot veure sencer i deduïu-ne un algorisme eficient per trobar-lo. Doneu un exemple amb q interior a $CH(P)$ en què q no vegi cap segment sencer.

Problema 62.– Demostreu que qualsevol conjunt de n punts del pla en posició general admet una poligonització x-monòtona; és a dir, sempre existeix un polígon x-monòton que els té com a vèrtexs. Obteniu un algorisme $O(n \log n)$ per construir-la, i demostreu que aquesta complexitat és òptima. Doneu també un exemple d'un conjunt de n punts que admeti un nombre exponencial de poligonitzacions x-monòtones (o sigui major o igual que c^n per a cert real c).

ESTRUCTURES DE DADES I PREPROCESSAMENT

Problema 63.– *ed Trobeu un algorisme per calcular l'àrea de la reunió de n rectangles isotètics. Podeu suposar que no hi ha dos costats alineats (Figura 17).

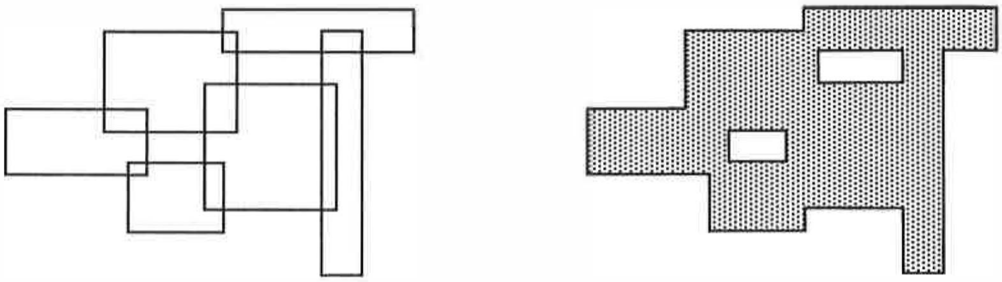

Figura 17: Sis rectangles isotètics (esquerra) i llur unió (dreta).

Problema 64.– Preprocesseu un conjunt S de n punts del pla de tal forma que posteriorment sigui possible saber per a cada recta no vertical que ens donin quants punts de S té per sobre, en temps $O(\log n)$.

Problema 65.– *ed Siguin S_1 un conjunt de n segments disjunts horitzontals i S_2 un conjunt de m segments disjunts verticals. Trobeu un algorisme $O((n+m)\log(n+m))$ per comptar el nombre d'interseccions a $S_1 \cup S_2$.

Problema 66.– Preprocesseu un conjunt S de n punts del pla de tal forma que posteriorment sigui possible saber per a cada punt q del pla que ens donin el màxim radi dels discos amb centre q sense punts de S a l'interior, en temps $O(\log n)$.

Problema 67.– Sigui S un conjunt de n punts al pla. Volem processar el conjunt i emmagatzemar una estructura de dades de forma que poguem posteriorment dir en temps $o(n)$, per a qualsevol recta r que ens donin, quants punts de S hi ha per sobre de r i quants per sota. Expliqueu com fer-ho i especifiqueu el temps de preprocessament, el de resposta i la memòria requerida per emmagatzemar l'estructura.

ESPAI TRIDIMENSIONAL

Problema 68.– Sigui P un politop de $\mathbb{R}^3$ amb n vèrtexs. Doneu un algorisme per trobar el segment vertical més llarg que s'hi pot inscriure.

Problema 69.– Establiu un algorisme per decidir, donats un un políedre P de $\mathbb{R}^3$ amb n vèrtexs i un punt q, si q és a l'exterior, sobre la vora o a l'interior de P. En el cas que P sigui convex, descriviu un preprocessament per obtenir una estructura que permeti resoldre el problema en temps logarítmic.

Problema 70.– Siguin P un politop de $\mathbb{R}^3$ amb n vèrtexs i C una de les seves cares. Doneu un algorisme per decidir si la posició de P seria estable en posar-lo sobre un pla horitzontal amb cara de contacte C.

Problema 71.– Dissenyeu un algorisme per trobar, donats un un politop P de $\mathbb{R}^3$ amb n vèrtexs i un punt exterior q, el contorn aparent de P tal com es veu des de q (Figura 18).

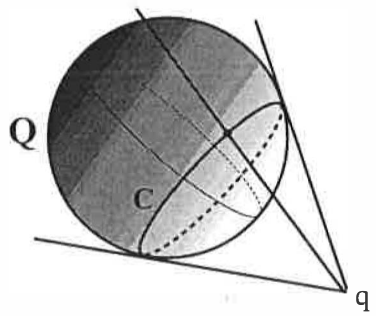

Figura 18: El contorn aparent C d'un cos Q, vist des de q, és el conjunt de punts de contacte de les tangents a Q des de q.

MAT GDC