МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

UDC 517.432
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2023.1.10

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ЯДЕР

Ю.Є. БОХОНОВ

Анотація. Доведено можливість інтегрального зображення додатно визначеного ядра від двох пар змінних. Використано техніку побудови за цим ядром нового гільбертового простору, у якому формально комутують симетричні диференціальні оператори. При цьому ядро задовольняє систему диференціальних рівнянь із частинними похідними. Відомо, що ядро, задане в підобласті дійсної площини, не завжди припускає продовження на всю площину. Така можливість зумовлена проблемою існування комутувального самоспряженого розширення симетричних операторів. Застосовано результати, отримані автором, пов'язані з комутувальним самоспряженим розширенням у більш широкому гільбертовому просторі. Одержане інтегральне зображення за спектральною мірою, породженою розкладом одиниці операторів, дає змогу продовження додатно визначеного ядра на всю площину.

Ключові слова: гільбертовий простір, скалярний добуток, симетричний оператор, самоспряжений оператор, додатно визначене ядро, індекс дефекту, продовження оператора.

ВСТУП

Можливість інтегрального зображення додатно визначеного ядра (невиродженого) — одна з відомих класичних задач гармонічного аналізу. Існують різні підходи до її розв'язання. Один з них — побудова гільбертового простору зі скалярним добутком, що визначається за допомогою ядра, і знаходження симетричного (ермітового) оператора в цьому просторі, що припускає самоспряжене розширення. У разі необмеженості оператора ядро припускає інтегральне зображення за елементарними додатно визначеними ядрами. На цьому шляху доводиться, наприклад, відомий класичний факт Бохнера про інтегральне зображення додатно визначеної функції. У випадку ядра від кількох (парної кількості) змінних треба знайти симетричні оператори, що припускають комутувальне самоспряжене розширення в даному гільбертовому просторі або з виходом у більш широкий гільбертовий простір. Це вдається зробити не завжди, але існують умови на оператори, для яких таке продовження можливе. Якщо ядро визначено на підмножині простору змінних, таке інтегральне зображення дає можливість його продовжити на весь простір. Автор, спираючись на отримані ним результати [1, 2], пропонує інтегральне зображення одного додатно визначеного ядра, функції $K(x_1, x_2, y_1, y_2)$, пари аргументів (x_1, x_2), (y_1, y_2) якої визначені на півсмузі двовимірної площини. На цьому шляху вдається продовжити цю функцію на площину зі збереженням додатної визначеності.

Нагадаємо основні конструкції, пов'язані з побудовою гільбертового простору, виходячи з розглядуваного додатно визначеного ядра, із симетричними операторами, що припускають комутувальне самоспряжене розширення. Міркування досить проводити для двох операторів.

Нехай є ланцюги сепарабельних комплексних гільбертових просторів з додатною і від'ємною нормами [3], у яких діє інволюція $h \to \overline{h}$:

$$H_-^{(1)} \supset H_0^{(1)} \supset H_+^{(1)},\ H_-^{(2)} \supset H_0^{(2)} \supset H_+^{(2)}.$$

Використовуючи тензорні добутки, утворимо гільбертові простори

$$H_- = H_-^{(1)} \otimes H_-^{(2)}, H_0 = H_0^{(1)} \otimes H_0^{(2)}, H_+ = H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)}$$

і ланцюг

$$H_- \otimes H_- \supset H_0 \otimes H_0 \supset H_+ \otimes H_+ .$$

Позначатимемо через $(.,.)_0$ скалярний добуток у просторі $H_0 \otimes H_0$. Виходячи з конструкції побудови гільбертових просторів з додатною і від'ємною нормами, зазначимо, що цей скалярний добуток визначено для елементів $\alpha \in H_- \otimes H_-$, $w \in H_+ \otimes H_+ : (\alpha, w)_0$.

Узагальненим додатно визначеним ядром називається елемент $K \in H_- \otimes H_-$ такий, що $\left(K, u \otimes \overline{u}\right) \geq 0 \ \forall u \in H_+$. Будемо вважати це ядро невиродженим, тобто рівність $(K, u \otimes \overline{u}) = 0$ може справджуватись тоді і тільки тоді, коли $u = 0$. Це дає змогу ввести новий гільбертовий простір H_K, поповнивши H_+ за допомогою нового скалярного добутку $\langle .,. \rangle$:

$$\langle u, v \rangle = (K, v \otimes \overline{u}) \quad \forall u, v \in H_+ .$$

Елементарним додатно визначеним ядром (ермітовим) називається елемент

$$\Omega_\lambda \in H_- \otimes H_-, \lambda \in \mathbb{R} : \|\Omega_\lambda\|_{H_- \otimes H_-} \leq C < \infty ;$$

$$(\Omega_\lambda, (A^* - \lambda I) v \otimes \overline{u})_0 = \left(\Omega_\lambda, v \otimes \overline{A^* - \lambda I u}\right)_0 = 0 .$$

Інакше кажучи, елементарне ядро — це узагальнений власний вектор оператора.

Далі замикання довільної множини $X \subset H_K$ позначатимемо через $[X]$.

Розглянемо оператори A_1, A_2 із всюди щільними, відповідно, у $H_+^{(1)}, H_+^{(2)}$ областями визначення $D(A_1) \subset H_+^{(1)}, D(A_2) \subset H_+^{(2)}$. Побудуємо оператори

$$B_1 = A_1 \otimes I,\ \ D(B_1) = D(A_1) \otimes H_+^{(2)},\ B_2 = I \otimes A_2, D(B_2) = H_+^{(1)} \otimes D(A_2) .$$

Вони комутують у такому розумінні:

$$B_1 B_2 u = B_2 B_1 u \quad \forall u \in D(A_1) \otimes D(A_2).$$

Будемо вважати, що оператори B_1 і B_2 симетричні у H_K.

Нагадаємо, що для симетричного оператора A з областю визначення $D(A)$ у гільбертовому просторі H вводиться поняття дефектних чисел $d_z, d_{\bar{z}}$. Нехай $R(A,z) = \operatorname{Im}(A - zI) = (A - zI)D(A)$ і $N(A,z) = (R(A,z))^{\perp}$. Тоді $d_z = \dim N(A,z)$ — дефектне число для верхньої півплощини $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, $d_{\bar{z}} = \dim N(A,\bar{z})$ для нижньої півплощини $\bar{z} \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \bar{z} < 0$. Пара $(d_z, d_{\bar{z}})$ називається індексом дефекту симетричного оператора. Індекс дефекту $(0, d_{\bar{z}})$ відповідає максимальному оператору, $(0,0)$ — самоспряженому. Зауважимо, що

$$N(A,z) = \{u \in D(A^*) : A^* u = \bar{z} u\}, \quad N(A,\bar{z}) = \{v \in D(A^*) : A^* v = z v\}.$$

Далі вважається, що, скажімо, симетричний оператор B_1 максимальний у H_K. Розглянемо його перетворення Келі за деякого $z_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_1 > 0$:

$$V_1(z_1) = (B_1 - \bar{z}_1 I)(B_1 - z_1 I)^{-1} : (B_1 - z_1 I)D(B_1) \to (B_1 - \bar{z}_1 I)D(B_1).$$

Із максимальності B_1 випливає, що одна з цих множин, наприклад, $(B_1 - z_1 I)D(B_1)$, всюди щільна у H_K.

Нагадаємо результат, отриманий у праці [1].

Теорема 1. Нехай оператори B_1 і B_2 симетричні в H_K, причому для довільного $w_2 \in H_+^{(2)}$ замикання у $[H_+^{(1)} \otimes w_2]$ звуження B_1 на $D(A_1) \otimes w_2$ є максимальним оператором за деякого $z_1 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. Тоді існує комутувальне самоспряжене розширення цих операторів з виходом у більш широкий гільбертовий простір.

Застосуємо цей факт для одного конкретного прикладу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо додатно визначене невироджене ядро, яке є звичайною функцією: $K : D = [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,l] \times [0,l] \to \mathbb{C}$, $K, \dfrac{\partial K}{\partial x_1}, \dfrac{\partial K}{\partial y_1}, \dfrac{\partial^{l_1} K}{\partial x_1^{l_1}}, \dfrac{\partial^{l_2} K}{\partial y_2^{l_2}} \in$ $\in C(D)$, $l_1, l_2 = 1, 2$.

Нехай

$$p_1(x_1) = \exp(Mx_1),\ M > 0 \ \text{і}\ p(x_1, y_1) = p_1(x_1) p_1(y_1) = \exp(M(x_1 + y_1)).$$

Покладемо $H_+ = L_{2,p_1}([0,\infty) \times [0,l]) = L_{2,p_1}[0,\infty) \otimes L_2[0,l] = H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)}$ [3, с. 709].

Будемо вважати, що виконуються такі умови:

1) справджується оцінка

$$\left|K(x_1, x_2, y_1, y_2)\right| \le \gamma \exp M(x_1 + y_1),\ \gamma, M > 0\,, \tag{1}$$

2) $\forall u \in H^+$

$$(K, u \otimes \overline{u}) = \int_D K(x, y)\, u(y) \overline{u}(x) dx dy \overset{\Delta}{=}$$

$$\overset{\Delta}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l K(x_1, x_2, y_1, y_2) u(y_1, y_2)\, \overline{u}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \ge 0, \tag{2}$$

причому рівність нулю можлива лише, якщо $u \equiv 0$,

3) функція K задовольняє рівняння

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial y_1} = 0;\quad \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y_2^2} = 0. \tag{3}$$

Будемо також вважати, що за довільного $w_2 \in H_+^{(2)}$ і деякого $\beta > 0$ розбігається інтеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l K(x_1, x_2, y_1, y_2) \exp(\beta(x_1 + y_1))\, w_2(y_2) \overline{w_2(x_2)}\, dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \infty\,, \tag{4}$$

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ЯДРА У ПІВСМУЗІ І ЙОГО ПРОДОВЖЕННЯ НА ПЛОЩИНУ

Визначимо на H_+ скалярний добуток за формулою

$$\langle u, v \rangle (K, v \otimes \overline{u}) = \int_D K(x, y)\, v(y) \overline{u}(x)\, dx dy \overset{\Delta}{=}$$

$$\overset{\Delta}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l K(x_1, x_2, y_1, y_2) v(y_1, y_2) \overline{u}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 .$$

Уведемо гільбертовий простір H_K як поповнення H_+ за нормою, породженою цим скалярним добутком.

Розглянемо оператори в H_K :

$$B_1 = A_1 \otimes I = -i \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes I,\ \ B_2 = I \otimes A_2 = I \otimes \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right),$$

де A_1, A_2 визначені на досить гладких фінітних функціях відповідно в областях $x_1, y_1 \in [0, \infty)$, $x_2, y_2 \in [0, l]$.

Використовуючи умови (3) і фінітність функцій з області визначення операторів A_1 і A_2, доведемо симетричність B_1 і B_2.

$$\left\langle B_1(u_1 \otimes u_2), v_1 \otimes v_2 \right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l K(x_1,x_2,y_1,y_2)v_1(y_1)v_2(y_2)\overline{\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u_1(x_1)u_2(x_2)}\,dx_1dx_2dy_1dy_2 =$$

$$= i\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l K(x_1,x_2,y_1,y_2)v_1(y_1)v_2(y_2)\overline{u_1(x_1)u_2(x_2)}\Big|_{x_1=-\infty}^{\infty}dx_2dy_1dy_2 -$$

$$- i\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l \frac{\partial}{\partial x_1}K(x_1,x_2,y_1,y_2)v_1(y_1)v_2(y_2)\overline{u_1(x_1)u_2(x_2)}\,dx_1dx_2dy_1dy_2 =$$

$$= i\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l \frac{\partial}{\partial y_1}K(x_1,x_2,y_1,y_2)v_1(y_1)v_2(y_2)\overline{u_1(x_1)u_2(x_2)}\,dx_1dx_2dy_1dy_2 =$$

$$= i\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l K(x_1,x_2,y_1,y_2)v_1(y_1)v_2(y_2)\overline{u_1(x_1)u_2(x_2)}\Big|_{y_1=-\infty}^{\infty}dx_2dy_1dy_2 +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l K(x_1,x_2,y_1,y_2)\left(i\frac{\partial}{\partial y_1}v_1(y_1)\right)v_2(y_2)\overline{u_1(x_1)u_2(x_2)}\,dx_1dx_2dy_1dy_2 =$$

$$= \langle u_1\otimes u_2, B_1(v_1\otimes v_2)\rangle.$$

Аналогічним чином доводиться симетричність оператора B_2.

Доведемо, що індекс дефекту оператора B_1 дорівнює $(0,1)$, тобто оператор максимальний.

Нехай $u\in N(A,z),\ \operatorname{Im} z>0$, тобто $A^*u=-i\dfrac{du}{dx_1}=\bar{z}u.$ Звідси

$$u = C\exp(i\bar{z}\,x_1) = C\exp(\operatorname{Im} z\,x_1)\exp(i\operatorname{Re} z\,x_1)\,.$$

Вибираючи $\operatorname{Im} z\ge\beta$ з інтегралу (4), упевнюємось в розбіжності інтеграла

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l K(x_1,x_2,y_1,y_2)\,\exp(\beta(x_1+y_1))w_2(y_2)\overline{w_2(x_2)}dx_1dx_2dy_1dy_2 = \infty\,.$$

Це означає, що $N(A,z)=\{0\}$ і дефектне число оператора B_1 для верхньої півплощини комплексної площини дорівнює нулю.

Нехай $v\in N(A,\bar{z}),\ \operatorname{Im} z>0$. Звідси

$$v = C\exp(iz\,x_1) = C\exp(-\operatorname{Im} z\,x_1)\exp(i\operatorname{Re} z\,x_1)\,.$$

Вибираючи $\operatorname{Im} z>M$, впевнимось, що $v\in N(A,\bar{z}),\ \operatorname{Im} z>0$ породжується функцією $\exp(iz\,x_1)$, із чого випливатиме, що дефектне число оператора B_1 для нижньої півплощини комплексної площини дорівнює 1.

Згідно з оцінкою (1) маємо:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l K(x_1,x_2,y_1,y_2)\exp(izy_1)\overline{\exp(izx_1)}w_2(y_2)\overline{w_2(x_2)}\,dx_1dx_2dy_1dy_2 \le$$

$$\leq \gamma \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l \exp(M - \operatorname{Im} z)(x_1 + y_1) \exp(M(x_2 + y_2)) \left| w_2(y_2) \overline{w_2(x_2)} \right| dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 < \infty.$$

Очевидно, індекс дефекту оператора B_2 дорівнює $(1,1)$. Відповідно до результатів [1, 2] існує комутувальне самоспряжене розширення операторів B_1 і B_2 у більш широкому гільбертовому просторі. Тоді, згідно з працею [3], додатно визначене ядро K припускає інтегральне зображення від елементарних ядер за мірою $d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$, породженою розкладом одиниці (неортогональним) цих самоспряжених продовжень. Елементарні ядра породжуються фундаментальними системами розв'язків задач Коші:

$$-i \frac{du}{dx_1} = \lambda_1 u,\ u(0) = 1 \Rightarrow u(x_1, \lambda_1) = \exp(i\lambda_1 x_1);$$

$$-\frac{d^2 v_k}{dx_2^2} = \lambda_2 v_k,\ \ k = 0{,}1,\ \ v_0(0) = 1,\ v_0'(0) = 0,\ \ v_1(0) = 0,\ \ v_1'(0) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0(x_2, \lambda_2) = \cos\sqrt{\lambda_2}\, x_2, v_1(x_2, \lambda_2) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}\, x_2}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

У результаті доходимо до такого висновку.

Теорема 2. Нехай функція $K : D = [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,l] \times [0,l] \to C$, що задовольняє оцінку (1), є додатно визначеним ядром в розумінні (2) і задовольняє рівнянням (3). Тоді існує інтегральне зображення цього ядра за мірою, яка визначається неоднозначно:

$$K(x_1, x_2, y_1, y_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda_1(y_1 - x_1)) \sum_{j,k=0}^{1} v_k(y_2, \lambda_2) \overline{v_j(x_2, \lambda_2)} d\sigma(\lambda_1, \lambda_2). \quad (5)$$

Наслідок. Із виразу (5) випливає можливість продовження додатно визначеного ядра з півсмуги $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [0,\infty) \times [0,l]$ на всю площину $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathrm{R}^2$.

ВИСНОВКИ

Додатно визначені ядра, зокрема функції, відіграють важливу роль у різних розділах математики, зокрема, у гармонічному аналізі, теорії ймовірностей та теорії зображень груп. Для їх дослідження використовуються різні підходи. Один з них, використаний у роботі, належить М.Г. Крейну і базується на побудові за додатно визначеним ядром гільбертового простору і дослідженням формально комутувальних ермітових операторів. У разі існування їх комутувального самоспряженого продовження в даному просторі або з виходом з нього ядро припускає інтегральне зображення від елементарних додатно визначених ядер, які знаходяться як узагальнені власні функції цих операторів. У математичній літературі частіше розглядались ситуації, у яких самоспряжені комутувальні продовження будуються в гільбертовому просторі. Автору належить кілька результатів, у яких доведено можливість побудови таких розширень у більш широкому гільбертовому просторі. Звичайно, в одержаному інтегральному зображенні ядра операторна міра знаходиться неоднозначно. Інші підходи до інтегральних зображень додатно визначених ядер містяться у працях [6, 7].

Слід також зауважити, що подібну техніку можна використати для інтегральних зображень додатно визначених ядер від нескінченної кількості змінних, які досліджуються, наприклад, у працях [4, 5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Yu. Bokhonov, "Commuting self-adjoint extensions of systems of Hermitian operators," *Ukr. Math. Journ.*, vol. 40, no. 2, pp. 149–153, 1988.
2. Yu. Bokhonov, "On self-adjoint extensions of commuting Hermitian operators," *Ukr. Math. Journ.*, vol. 42, no. 5, pp. 695–697, 1990.
3. Yu. Berezansky, *Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators*. Kyiv: Naukova Dumka, 1965, 798 p.
4. Yu. Berezansky, *Self-adjoint operators in spaces of functions of an infinite number of variables*. Kyiv: Naukova Dumka, 1978, 360 p.
5. Yu. Berezansky and Yu. Kondratiev, *Spectral methods in infinite-dimensional analysis*. Kyiv: Naukova Dumka, 1988, 680 p.
6. *A.D. Manov,* "On the uniqueness of the extension of one function to a positive definite one," *Math. Notes*, **107**:4, pp. 639–652, 2020.
7. A.G. Sergeev, "Lectures on functional analysis," *Lekts. courses of the SEC of the MIAS*, vol. 23, pp. 3–101, 2014.

Надійшла 13.07.2022

INFORMATION ON THE ARTICLE

Yurii E. Bokhonov, ORCID: 0000-0002-3355-008X, Educational and Scientific Institute for Applied System Analysis of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: yubochonoff@gmail.com

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF POSITIVE DEFINITE KERNELS / Yu.E. Bokhonov

Abstract. The paper proposes proof of the possibility of an integral representation of a positive definite kernel of two pairs of variables. Using this kernel, we use the technique of constructing a new Hilbert space in which symmetric differential operators formally commute. In this case, the kernel satisfies a system of differential equations with partial derivatives. It is known that a kernel given in a subdomain of the real plane, generally speaking, does not always imply an extension to the entire plane. This possibility is related to the problem of the existence of a commuting self-adjoint extension of symmetric operators. The author applies his own results related to a commuting self-adjoint extension in a wider Hilbert space. The resulting representation in the form of an integral of elementary positive-definite kernels with respect to the spectral measure generated by the resolution of the identity of the operators allows us to extend the positive-definite kernel to the entire plane.

Keywords: Hilbert space, scalar product, symmetric operator, self-adjoint operator, positive definite kernel, defect index, operator extension.