

Statisticam approaches for consistency index in analytical hierarchy process

¹Amalia Handayani, ²Farikhin, ³Bayu Surarso

^{1,2,3} Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Mathematics, Diponegoro University, Semarang, 50275, Indonesia

Email: Amaliahanda99@gmail.com, farikhin.math.undip@gmail.com, bayus@lecturer.undip.ac.id

Abstrak

The Analytical Hierarchy Process (AHP) is a flexible model that provides individuals or groups with the opportunity to define issues by making their own assumptions and obtaining desired solutions. AHP establishes a framework for decision-making or problem-solving. In AHP, an RI (Random Index) value plays a crucial role in determining the consistency of a problem. Many researchers have proposed different random index values using the Saaty Scale. In this study, we also propose new random index values using the Saaty Scale. The discovered random index values can be tested on randomly determined reciprocal matrices. The experiment in this research was conducted using matrix orders ranging from 3x3 to 15x15. The proposed RI values were compared to the matrix consistency levels of other researchers who conducted experiments with similar numbers and matrix orders. In the case of 1000 experiments, our values showed a slight improvement compared to those of Golden and Wang. For the 2500-experiment case, our values were similar to those reported by Lane and Verdine. Lastly, in the 100,000-experiment case, our values exhibited a slight improvement compared to those obtained by Alonso and Lamata. We welcome further suggestions and encourage future research in this field.

Kata kunci : *Random Index, Analytic Hierarchy Process, proposed RI values, experiment case, Statistical Approaches, Consistency Index*

A. Pendahuluan

Saaty (1993) menyatakan bahwa *Analytical Hierarchy Process* (AHP) adalah suatu model yang mempunyai sifat keluwesan untuk memberikan kesempatan kepada individu atau kelompok untuk mendefinisikan persoalan dengan cara membuat asumsi mereka masing-masing dan memperoleh pemecahan atau solusi yang diinginkan. *Analytical Hierarchy Process* (AHP) memberi suatu kerangka dalam pengambilan keputusan atau pemecahan masalah. Kusrini (2007) menyatakan bahwa dalam metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) terdapat alur kerja atau langkah sebagai berikut : Mendeskripsikan masalah dan tujuan, Membuat skala atau hierarki dari permasalahan yang diangkat, Untuk menentukan tingkat prioritas kriteria dan alternatif atau data, Mensintesis matriks perbandingan berpasangan, Menghitung lamda (λ) maks, Menghitung tingkat Consistensi Indeks (CI), Menentukan *Random Index* (RI), Menghitung tingkat Rasio Konsistensi atau *Consistency Ratio* (CR) , Mengecek tingkat konsistensi.

Sebagaimana diketahui bahwa rasio konsistensi digunakan untuk pengambilan keputusan dengan metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP).

Konsistensi ini sama dengan indeks konsistensi dibagi dengan indeks acak. Beberapa peneliti telah mengusulkan indeks acak sebagai hasil simulasi numerik dengan jumlah matriks yang bervariasi untuk matriks orde 3 sampai 15. Makalah ini, kami menyelidiki untuk menentukan indeks acak sebagai simulasi numerik dari percobaan sebanyak 1000, 2500 dan 100.000. Hasil indeks acak diterapkan pada beberapa pengambilan keputusan dalam konteks *Analytical Hierarchy Process* (AHP).

Analytical Hierarchy Process (AHP) digunakan untuk memilih faktor-faktor yang penting untuk pengambilan keputusan yang di usulkan oleh Saaty. *Analytical Hierarchy Process* (AHP) menggunakan matriks perbandingan berpasangan timbal balik, dimana harus memenuhi kondisi konsistensi. Jika tidak memenuhi kondisi konsistensi maka akan di definisikan ulang matriks.

Vargas (2007) dalam penelitiannya menghitung Consistensi Rasio (CR) dengan membandingkan *Random Index* (RI) miliknya dan Saaty . Dengan memberikan contoh matriks resiprokal ordo 3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

matriks ini memiliki CR= 0,054 sehingga tidak konsisten. Menurut aturan Saaty, CR yang diterima harus lebih dari 0,10. Akan tetapi menurut Golden dan Wang tentang masalah aturan 10% terlalu restriktif untuk $n > 3$.

Vargas (2008) menyatakan bahwa untuk mendapatkan distribusi teoretis dari nilai eigen utama dari matriks resiprokal (positif) yang tidak dapat ditelusuri secara matematis, kami menggunakan simulasi untuk memperkirakannya. Artikel ini menjelaskan teknik statistic baru RI (x)=

$\frac{\lambda_{\max} - x}{x - 1}$ untuk mendapatkan *Random Index* (RI) untuk matriks ordo 3 sampai ordo 15.

B. Metode Penelitian

Penelitian pada artikel ini menggunakan percobaan berulang dengan bantuan software Phyton. *Fuzzy Analytical Hierarchy Process* (AHP) banyak digunakan dalam berbagai bidang. Kajian historis dari beberapa *Random Index* (RI) yang digunakan dan cara mengestimasi index dapat dilihat pada penelitian Alonso dan Lamata. Beberapa peneliti telah menghitung dan memperoleh *Random Index* (RI) yang berbeda tergantung pada simulasi dan ordo matriks. Beberapa peneliti yang menjadi perbandingan *Random Index* (RI) kami dengan menggunakan skala Saaty adalah Lane dan Verdine ,

Golden dan Wang serta Alonso dan Lamata. Dimana jumlah percobaan dan ordo matriks yang berbeda. Percobaan pada Lane dan Verdine sebanyak 2500 kali dengan ordo kecuali 11, 13, 15.

C. Hasil dan Pembahasan

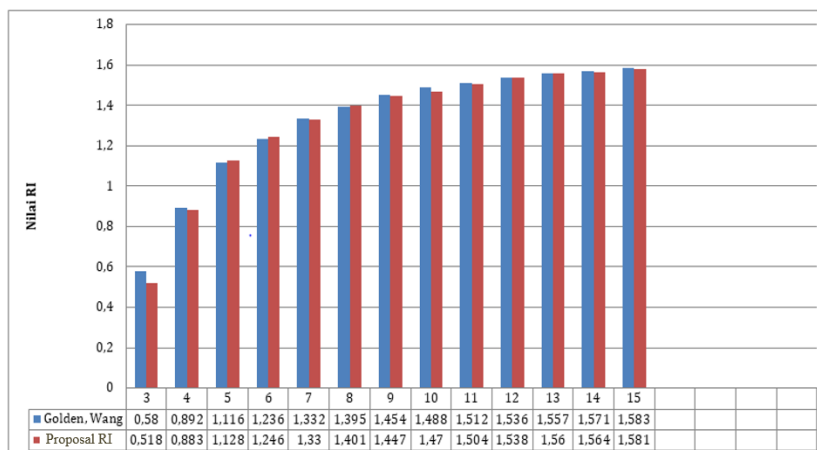
Percobaan yang dilakukan untuk menentukan *Random Index* (RI) dilakukan berapakai. Percobaan Golden dan Wang sebanyak dilakukan 1000, pada Lane dan Verdine dilakukan sebanyak 2500 kali dan pada Alonso dan Lamata sebanyak 100000 kali. Semua percobaan dilakukan dengan menggunakan ordo matriks yang sama banyaknya. Percobaan yang dilakukan dengan menggunakan rumus random index milik Saaty.

$$RI(x) = \frac{\lambda_{\max} - x}{x - 1} \quad (1)$$

Kami juga menggunakan skala yang sama yang digunakan Saaty $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\right)$ dalam melakukan percobaan.

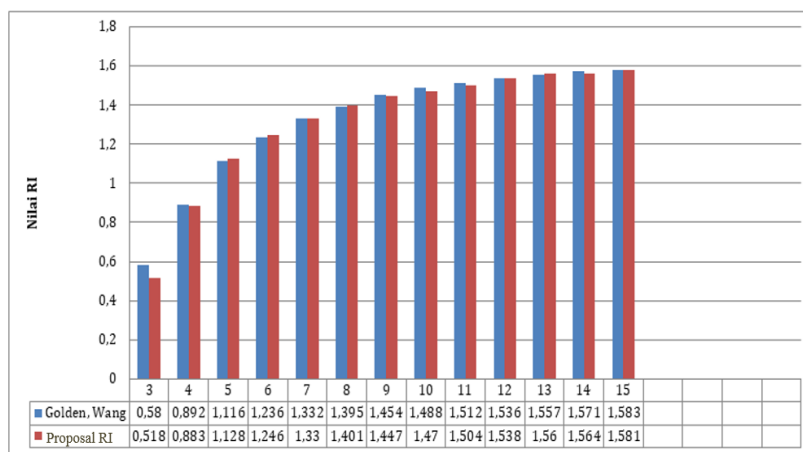
Tabel 1. Nilai Ri(n)

Nilai Percobaan RI						
n	Golden, Wang	Proposal	Lane, Verdine	Proposal	Alonso, Lamata	Proposal
	1000	1000	2500	2500	100000	100000
3	0.5799	0.5176	0.52	0.50	0.5243	0.5221
4	0.8921	0.8830	0.87	0.88	0.8815	0.8844
5	1.1159	1.1277	1.1	1.11	1.1086	1.1094
6	1.2358	1.2461	1.25	1.24	1.2479	1.2495
7	1.3322	1.3298	1.34	1.35	1.3417	1.3389
8	1.3954	1.4008	1.4	1.42	1.4056	1.4023
9	1.4537	1.4465	1.45	1.46	1.4499	1.4516
10	1.4882	1.4703	1.49	1.49	1.4854	1.4859
11	1.5117	1.50397			1.5141	1.5133
12	1.5356	1.5375	1.54	1.53	1.5365	1.5362
13	1.5571	1.5599			1.5551	1.5543
14	1.5714	1.5641	1.57	1.57	1.5713	1.5703
15	1.5831	1.58095			1.5838	1.5834



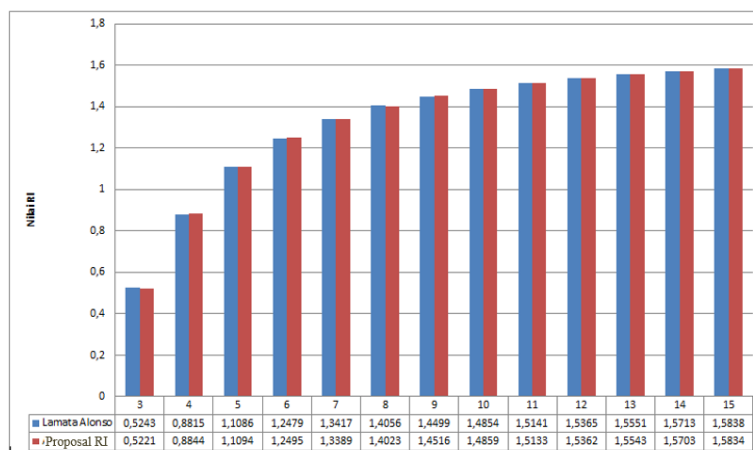
Gambar 1. Perbandingan nilai *Random Index* (RI) yang diperoleh Golden dan Wang dan Proposal *Random Index* (RI)

Pada percobaan yang dilakukan sebanyak 1000 kali, nilai *Random Index* (RI) yang di dapat tidak jauh berbeda dengan nilai *Random Index* (RI) yang sudah ada. Sebagai contoh pada ordo 3 nilai *Random Index* (RI) di dapat sebesar 0,5176 lebih kecil 0,0623 dari Golden dan Wang. Begitu juga dengan nilai *Random Index* (RI) pada ordo matriks yang lain, nilai *Random Index* (RI) yang di peroleh tidak jauh berbeda.



Gambar 2. Perbandingan nilai *Random Index* (RI) yang diperoleh Verdine dan Lane dan Proposal *Random Index* (RI)

Pada percobaan yang dilakukan sebanyak 2500 kali, nilai *Random Index* (RI) yang di dapat tidak jauh berbeda dengan nilai *Random Index* (RI) yang sudah ada. Sebagai contoh pada ordo 3 nilai *Random Index* (RI) di dapat sebesar 0.50 lebih kecil 0,03 dari Verdine dan Lane. Begitu juga dengan nilai *Random Index* (RI) pada ordo matriks yang lain, nilai *Random Index* (RI) yang di peroleh tidak jauh berbeda.



Gambar 3. Perbandingan nilai *Random Index* (RI) yang diperoleh Alonso dan Lamata dan Proposal *Random Index* (RI)

Pada percobaan yang dilakukan sebanyak 100.000 kali, nilai *Random Index* (RI) yang di dapat tidak jauh berbeda dengan nilai *Random Index* (RI) yang sudah ada. Sebagai contoh pada ordo 3 nilai *Random Index* (RI) di dapat sebesar 0,5221 lebih kecil 0,0022 dari Alonso dan Lamata. Begitu juga dengan nilai *Random Index* (RI) pada ordo matriks yang lain, nilai *Random Index* (RI) yang di peroleh tidak jauh berbeda.

Hasil ini menunjukkan bahwa nilai dapat berubah dengan banyak eksperimen yang berbeda. Pada percobaan RI sebanyak 1000 Golden dan Wang cenderung memiliki nilai yang tinggi. Pada percobaan 2500 Lane dan Vardine cenderung memiliki nilai yang hamper sama. Pada percobaan RI 100.000 Alonso dan Lamata memiliki nilai yang cenderung tinggi.

D. Simpulan dan Saran

Dalam artikel ini kami telah menyajikan metode estimasi untuk mengusulkan nilai RI yang baru untuk menolak atau menerima matriks dalam Analisis Hirarki Proses dengan menggunakan skala Saaty. Selanjutnya nilai RI kami membandingkan tingkat konsistensi matriks dengan konsistensi matriks milik peneliti lain. Dengan banyak percobaan dan jumlah orde yang sama. Untuk percobaan ke 1000 memiliki nilai yang sedikit lebih baik daripada Golden dan Wang, pada percobaan ke 2500 kami memiliki nilai yang hamper mirip dengan Lane dan Vardine, serta pada percobaan ke 100000 memiliki nilai yang sedikit lebih baik daripada Alonso dan Lamata.

Kami sangat berterimakasih jika ada peneliti selanjutnya yang memberi saran terhadap penelitian kami dan berharap akan ada penelitian lanjutan.

E. Daftar Pustaka

- Alonso, J. A., & Lamata, M. T. (2006). Consistency in the Analytic Hierarchy Process: A New Approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 445-459.
- Golden, B. L., Wang, Q. (1989). An alternate measure of consistency. In B.L. Golden, E.A. Wasil, P.T. Harker (Eds.), *The Analytic Hierarchy Process: Applications and Studies*, Springer-Verlag.
- Chen, X., et al. (2020). Controlling the worst consistency index for hesitant fuzzy linguistic preference relations in consensus optimization models. *Computers & Industrial Engineering*, 143, 106423.
- Lane, E. F., & Verdini, W. A. (1989). A Consistency test for AHP decision makers. *Decision Science*, 20, 575-590.
- Ji, P., & Jiang, R. (2003). Scale Transitivity in the AHP. *The Journal of the Operational Research Society*, 54(9), 896-905.
- Khameneh, A. Z., et al. (2022). Consistency of total fuzzy relations: New algorithms to detect and repair inconsistent judgments. *Expert Systems With Applications*, 209, 118234.
- Kubler, S., et al. (2018). Measuring inconsistency and deriving priorities from fuzzy pairwise comparison matrices using the knowledge-based consistency index. *Knowledge-Based Systems*, 162, 147-160.
- Vargas, L. G. (2007). The consistency index in reciprocal matrices: Comparison of deterministic and statistical approaches.
- Ma, D., & Zheng, X. (1991). 9/9 - 9/1 Scale Method of AHP. In 2nd Int. Symposium on AHP (Vol. 1). University of Pittsburgh: Pittsburgh, pp. 197-202.
- Monsuur, H. (1996). An intrinsic consistency threshold for reciprocal matrices. *European Journal of Operational Research*, 92(2), 387-391.
- Narti, et al. (2019). Pengambilan keputusan memilih sekolah dengan metode AHP. *Jurnal informatika*, 6(2), 143-150.
- Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill.
- Saaty, T. L. (1987). The analytic hierarchy process-what it is and how it is used. *Journal of Mathematical Modeling*, 9, 161-176.
- Saaty, T. L. (1990). How to make a decision: the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 48, 9-26.
- Salo, A. A., & Hamalainen, R. P. (1997). On the Measurement of Preferences in the Analytic Hierarchy. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6(5), 309-319.
- Shyamprasad, V., & Kousalya, P. (2020). Role of Consistency and Random Index Numerical Optimization in Engineering and Sciences, 233-239.

- Triantaphyllou, E., Lootsma, F. A., Pardalos, P. M., & Mann, S. H. (1994). On the Evaluation and Application of Different Scales For Quantifying pairwise comparisons in fuzzy set. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 3(3), 133-155.
- Vargas, L. G. (2008). The consistency index in reciprocal matrices: Comparison. *European Journal of Operational Research* 191, 454-463.